Práctico 8

Transformaciones lineales

Objetivos.

- Aprender a decidir si una función es o no transformación lineal.
- Aprender a calcular la matriz de una transformacicon respecto a las bases canónicas.
- Aprender a calcular el núcleo y la imagen de una transformación.
- Aprender a verificar si una transformación lineal es inyectiva, sobreyectiva o un isomorfismo.
- Familiarizarse con el teorema sobre la dimensión del núcleo y la imagen.

Ejercicios. Algunos ejercicios tienen ayuda, las que hemos puesto al final del archivo para que los puedan pensar un poco antes de leerlas.

(1) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

(a) La traza $\mathrm{Tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ (recordar Ejercicios 7, Práctico 3)

(b) $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$.

(c) $T : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = x\,p(x)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = xy$

(e) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$

(f) El determinante $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) Calcular la matriz con respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones. Es decir, encontrar una matriz del tamaño apropiado de tal modo que las transformaciones sean iguales a multiplicar por dicha matriz. (Recordar Observación 3.1.2 de Garcia-Tiraboschi y la sección "Transformaciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$" de la clase teórica "Transformaciones lineales 1")

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z)$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, 0)$

(d) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

(3) Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior describir implíctamente el núcleo y dar un conjunto de generadores de la imagen.

(4) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ dada por $T(v) = Av$ donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.

(b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$.

(c) Dar una base del núcleo y de la imagen.

(d) Dar la dimensión del núcleo y de la imagen.

(e) Describir el núcleo y la imagen implícitamente.

(5) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$. Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$. Más generalmente, calcular $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (es decir, que T quede definida de manera parecida a las del ejercicio (2)).

(6) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(v) = Av$, satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.

(a) $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$ y $\dim \mathrm{Nu}(T) = 2$.

(b) T inyectiva y $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, 1)$ y $T(e_3) = (0, 1, 0)$

(c) T sobreyectiva y $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, 1)$ y $T(e_3) = (0, 1, 0)$

(d) $T(e_1) = (1, 1, 0)$, $T(e_2) = (0, 1, 1)$ y $T(e_3) = (1, 0, 1)$

(e) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Im}(T)$ y $(0, 1, 1) \in \mathrm{Nu}(T)$

(f) $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$

(7) Sea V un espacio vectorial no nulo y $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ probar que $T = 0$ ó T es sobreyectiva.

Más ejercicios.

(8) Verificar, en cada una de las transformaciones lineales de este práctico, si son inyectivas, sobreyectivas o isomorfismos.

(9) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = x^2 + 2x + 3$, $T(e_2) = -x^2 + 5$ y $T(e_3) = -2x^2 + 3x + 1$. Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$. Más generalmente, calcular $T(a, b, c)$ para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(10) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $\mathrm{Nu}(T) \subseteq \mathrm{Nu}(T^2)$

(b) $\mathrm{Nu}(T) \neq \mathrm{Im}(T)$ si $\dim(V)$ es impar.

(11) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (1, 0)$.

(b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (-1, 1)$.

(c) Si $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ es una transformación lineal, entonces $\dim \mathrm{Nu}(T) \geq 2$.

(d) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, n$. Si $\{w_1, \dots, w_n\}$ genera W, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V.

(e) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ tal que los vectores $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(1, 1, -1, 0, 0)$ y $(1, 0, -1, 2, 1)$ pertenecen a la imagen de T.

(f) Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1, 0, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 0, -1, 2)$ pertenecen al núcleo de T.