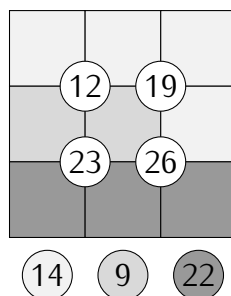


PRÁCTICO 2

Sistemas de ecuaciones Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- o Aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- (1) *Juego Suko*. Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



- (2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.
- (3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.
- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- (4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,
- a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
 - b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
- (5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícita o paramétricamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

$$a) \begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} -x - y + 4z = 1 \\ x + 3y + 8z = 3 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x - z + 2t = 1 \\ -x + 2y - z + 2t = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

- (6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

$$a) \begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases}$$

$$(7) \text{ Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}.$$

- a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(8) \text{ Sea } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Reduciendo } A \text{ por filas,}$$

- a) encontrar todas las soluciones sobre \mathbb{R} y \mathbb{C} del sistema $AX = 0$.

b) encontrar todas las soluciones sobre \mathbb{R} y \mathbb{C} del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

- (9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d ?

- (10) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array} \right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d ?

- (11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a m y n ? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

- (12) @ Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n - 1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n ?