Práctico 8

Ejercicios resueltos.

(1) Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 2)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución:

(a) En este ejercicio (y todos los similares) pensaremos a los vectores como columna. Por definición, las coordenadas de $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$ son los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, para hallar las coordenadas, debemos resolver el sistema reduciendo la matriz ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$ y nos da que las coordenadas (o el vector de coordenadas) son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7})$.

(b) Análogo a (a), queremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tales que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

De aquí obtenemos un sistema de 4 ecuaciones (una para cada entrada de las matrices), cuya solución se obtiene reduciendo la matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 & 1 & b \\ 0 & 3 & 1 & 2 & c \\ -1 & 2 & -1 & 5 & d \end{array}\right]$. La solución que se obtiene es

$$\lambda_1 = \frac{-a + 2b - 3c + d}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{9a - 4b + 5c - 3d}{2},$$

$$\lambda_3 = -7a + 3b - 3c + 2d, \quad \lambda_4 = \frac{-13a + 6b - 7c + 5d}{4}.$$

Estas son las coordenadas de A en la base $\mathcal{B}$.

(2) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ otra base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?

d) Encontrar $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ tal que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (1, 4)$ y $[(z, w)]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$.

e) Utilizando la matriz de cambio de base, dar las coordenadas de un vector (x, y), en la base $\mathcal{B}$.

Solución:

(a) Por definición, para dar $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ debemos poner en columnas los vectores coordenadas de los vectores de la base canónica, que se obtienen al resolver los sistemas asociados a la matriz ampliada (resolvemos dos sistemas en simultáneo) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Resolver este sistema es equivalente a hallar la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para eso podemos usar la fórmula de la inversa 2×2, es decir $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. En nuestro caso particular obtenemos

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Por definición, para dar $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ debemos poner en columnas los vectores coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$, pero $[(x,y)]_{\mathcal{C}} = (x,y)$ (el vector de coordenadas de un vector en la base canónica es el mismo vector). Luego

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Por lo dicho en (a) cuando calculamos la inversa, obtuvimos que $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ (esto no es coincidencia, en el teórico se vio que esto vale en general para cualesquiera bases que uno tome).

(d)

$$\begin{aligned} [(x,y)]_{\mathcal{B}} = (1,4) \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y) = 1(1,0) + 4(1,1) \\ &\Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \wedge \quad y = 4. \end{aligned}$$

También es posible hacerlo por la matriz de cambio de base (mediante Proposición 4.6.2, usando que la matriz de cambio de base coincide con la matriz de la transformación Id en esas bases):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [(x,y)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[(x,y)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(e) $[(x,y)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,[(x,y)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ y \end{bmatrix}.$

(3) Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.

a) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que P es la matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

b) Encontrar $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (2,-1,-1).$$

Solución:

a) Dada una base $\mathcal{B}$, recordar que la matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$ es la matriz $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, que nos piden sea igual a P.
Por lo tanto $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}$, de donde $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = P^{-1}$, y la matriz $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ son los vectores de $\mathcal{B}$ puestos como columnas. Concluyendo, Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = P^{-1}$$

Calculamos P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+2F_2]{F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_3/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Luego

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces $v_1 = \frac{1}{2}(-1,3,-1)$, $v_2 = (0,0,1)$, $v_3 = \frac{1}{2}(1,-1,-1)$.

b)

$$\begin{aligned} [(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

(4) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z) = (x-y, x-z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,-1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.

b) Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x,y,z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

Solución:

a) Para calcular $[T]_{\mathcal{CB}'}$ podemos calcular $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ y escribirlos en términos de la base $\mathcal{B}'$. Esto es equivalente a primero calcular como se escribe la base canónica en términos de la base $\mathcal{B}'$, es decir calcular $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}'}$, y luego usar que $[T]_{\mathcal{CB}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}'}[T]_{\mathcal{CC}}$ ($\mathcal{C}$ indica también la base canónica de $\mathbb{R}^2$). Hagámoslo de esta segunda forma.

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,0) &=& (1,1) \\ T(0,1,0) &=& (-1,0) \\ T(0,0,1) &=& (0,-1) \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad [T]_{\mathcal{CC}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$[T]_{\mathcal{CB}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}^{-1}[T]_{\mathcal{CC}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Usamos el resultado que dice que $[T]_{\mathcal{CB}'}[v]_{\mathcal{C}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$, luego

$$[T(x,y,z)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{CB}'}\,[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{bmatrix}.$$

c) Por Proposición 4.6.6,

$$[T\circ S]_{\mathcal{B}'} = [T\circ S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{CB}'}[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(5) Sea $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$. Calcular $[T]_{\mathcal{BB}'}$ donde $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{1, x, x^2, x^3\}$ y utilizar esto para dar una base de $\mathrm{Nu}\, T$ y para caracterizar con ecuaciones a $\mathrm{Im}\, T$.

Solución:

Tenemos que

$$T(1) = 0,\ T(x) = 1,\ T(x^2) = 2x,\ T(x^3) = 3x^2,$$

luego

$$[T(1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ [T(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ [T(x^2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ [T(x^3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$[T]_{\mathcal{BB}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para calcular $\mathrm{Nu}\, T$, notemos que $T(p(x)) = 0 \iff [T(p(x))]_{\mathcal{B}'} = 0$ (pues tomar coordenadas en una base es un isomorfismo, los isomorfismos cumplen que el único vector que va a parar al 0 es el 0). Por otro lado, por Prop 4.6.2 se tiene que $[T(p(x))]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{BB}'}[p(x)]_{\mathcal{B}}$.

En conclusión, un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathrm{Nu}\, T$ si y sólo si $(a,b,c,d) = [p(x)]_{\mathcal{B}}$ es solución del sistema homogéneo $[T]_{\mathcal{BB}'}X = 0$.

Dada la pinta sencilla de la matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, vemos que el conjunto de soluciones del sistema $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}X = 0$ es $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = c = d = 0\}$. Por lo tanto $\mathrm{Nu}\, T = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \mid b = c = d = 0\} = \langle 1 \rangle$, por lo que una base de $\mathrm{Nu}\, T$ es $\{1\}$ (el polinomio constante 1).

Para calcular $\mathrm{Im}\, T$, notemos que $q(x) = T(p(x)) \iff [q(x)]_{\mathcal{B}'} = [T(p(x)]_{\mathcal{B}'}$ (nuevamente porque tomar coordenadas es un isomorfismo). Como $[T(p(x))]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[p(x)]_{\mathcal{B}'}$, se tiene que

$$\boxed{q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathrm{Im}\, T \iff \text{el sistema } [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ tiene solución.}}$$

Nuevamente, por la pinta sencilla de la matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, vemos que el sistema tiene solución si y sólo si $d = 0$. Luego $\mathrm{Im}\, T = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \mid d = 0\}$.

Comentario: Este ejercicio es un ejemplo de como calcular el núcleo y la imagen de cualquier transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Basta con calcular $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ para alguna base $\mathcal{B}$ (lo más fácil es usar la canónica, ya sea de los polinomios, matrices, $\mathbb{C}^n$ visto como $\mathbb{R}$-esp vect, etc).

(6) Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{U} = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $\mathcal{U}'$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T]_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar $\mathcal{U}'$.

Solución:

De la primera matriz, sacamos que

$$T(v_1) = (1, 2, 3), \ T(v_2) = (-1, 1, 2), \ T(v_3) = (3, 1, 1).$$

Ahora, si llamamos $u_1 = v_1 + v_3$, $u_2 = v_1 + 2v_2 + v_3$, $u_3 = v_2 + v_3$, tenemos que

$$T(u_1) = T(v_1 + v_3) = T(v_1) + T(v_3) = (1, 2, 3) + (3, 1, 1) = (4, 3, 4).$$
$$T(u_2) = T(v_1 + 2v_2 + v_3) = (1, 2, 3) + 2(-1, 1, 2) + (3, 1, 1) = (2, 5, 8).$$
$$T(u_3) = T(v_2 + v_3) = (-1, 1, 2) + (3, 1, 1) = (2, 2, 3).$$

Por otro lado, de la segunda matriz sacamos que

$$[T(u_1)]_{\mathcal{U}'} = (1, 0, 0), \ [T(u_2)]_{\mathcal{U}'} = (1, 1, 0), \ [T(u_3)]_{\mathcal{U}'} = (0, 1, 1).$$

Sean w_1, w_2 y w_3 los vectores de $\mathcal{U}'$. Entonces tenemos que

$$(4, 3, 4) = w_1, \quad (2, 5, 8) = w_1 + w_2, \quad (2, 2, 3) = w_2 + w_3,$$

de donde es fácil deducir que $w_1 = (4, 3, 4)$, $w_2 = (2, 5, 8) - (4, 3, 4) = (-2, 2, 4)$ y $w_3 = (2, 2, 3) - (-2, 2, 4) = (4, 0, -1)$.

(7) Decidir en cada caso si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las siguientes condiciones. En caso afirmativo decidir si es única:

a) $T(3, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $T(1, -2, 0) = (2, 7, 3)$, y $T(-5, 4, 1) = (1, 0, 0)$.

b) $T(1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$ y $T(0, 0, 2) = (2, 3, 1)$.

c) $T(1,0,0) = (4,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (-4,0,1)$ y $T(1,1,0) = (0,-1,1)$.
d) $T(1,0,0) = (4,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (-4,0,1)$ y $T(1,1,0) = (0,-1,-1)$.

Solución:

(a) Notar que $\{(3,0,0),(1,-2,0),(5-4,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, pues $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Como este conjunto es base, por Teorema 4.1.3, existe una única transformación lineal tal que $T(3,0,0) = (1,2,1)$, $T(1,-2,0) = (2,7,3)$ y $T(-5,4,1) = (1,0,0)$.

(b) Notar que $\{(1,1,0),(0,0,2)\}$ es LI (porque los vectores no son uno múltiplo del otro), entonces podemos extenderlo a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo agregando e_2 (pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$). Entonces, por Teorema 4.3.8, existe una transformación lineal $T(1,1,0) = (-1,1,1)$, $T(0,0,2) = (2,3,1)$ y $T(0,1,0) = (1,0,0)$. Notar que podemos definir $T(0,1,0) = w$ para cualquier w de $\mathbb{R}^3$ y se cumplirán las condiciones del enunciado. También podríamos haber extendido agregando un múltiplo de e_2 o incluso otros vectores. Esto nos dice que hay más de una transformación cumpliendo las condiciones del enunciado y por lo tanto no es única.

(c) Si existiera una T, debería cumplirse que $T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,1,0)$ (dado que $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$). Sin embargo, $T(1,1,0) = (0,-1,1)$ y $T(1,0,0) + T(0,1,0) = (4,-1,-2) + (-4,0,1) = (0,-1,-1)$ por lo que $T(1,1,0) \neq T(1,0,0) + T(0,1,0)$. Por lo tanto, no existe tal T como en el enunciado (sucede el mismo fenómeno que en 14c) del Práctico 7).

(d) Notemos que, a diferencia de (c), aquí se cumple que $T(1,0,0) + T(0,1,0) = T(1,1,0)$. Para mostrar la existencia de una T cumpliendo las condiciones del enunciado, basta con exhibir una T que cumpla sólo las dos primeras, es decir $T(1,0,0) = (4,-1,-2)$ y $T(0,1,0) = (-4,0,1)$, pues al ser T lineal, cumplirá la tercera automáticamente. Aquí podemos nuevamente extender $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ a una base agregando por ejemplo $(0,0,1)$ y usar 4.3.8 para argumentar que existe una T tal que $T(1,0,0) = (4,-1,-2)$, $T(0,1,0) = (-4,0,1)$, $T(0,0,1) = (1,\pi,e)$. Nuevamente, no es única ya que definimos $T(0,0,1)$ como nos pintó.

(8) En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal no nula $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:
a) $\{(1,0,1)\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(T)$ y $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ es una base de la $\operatorname{Im}(T)$.
b) $\dim \operatorname{Nu} T \cap \operatorname{Im} T = 1$.
c) $e_1 \in \operatorname{Im}(T)$, $(-5,1,1) \in \operatorname{Nu}(T)$ y $\operatorname{Nu} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

Solución:

(a) Estamos obligados a definir $T(1,0,1) = 0$. Extendamos $\{(1,0,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo agregando $(1,0,0),(0,1,0)$ (es claro que son LI pues $(1,0,1) \notin \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$, ya que su última coord es no nula). Definimos $T(1,0,0) = (1,0,-1)$ y $T(0,1,0) = (0,1,0)$. Recordemos una observación del teórico que dice que si $V = \langle v_1,\dots,v_n\rangle$, entonces $\operatorname{Im} T = \langle T(v_1),\dots,T(v_n)\rangle$. Por lo tanto, en este caso, como $\{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es base, entonces $\operatorname{Im} T = \langle 0,(1,0,-1),(0,1,0)\rangle =$

$\langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle$. Como generan y son LI (pues uno no es múltiplo del otro), son base de $\operatorname{Im} T$ como pide el enunciado. Por otro lado, debe ser $\dim \operatorname{Nu} T = 1$, y dado que $(1,0,1) \in \operatorname{Nu} T$, entonces $\{(1,0,1)\}$ es base de $\operatorname{Nu} T$ como pide el enunciado. La existencia de una T está asegurada por Teorema 4.3.8 ya que la definimos en una base.

Comentario: Si nos piden la fórmula explícita, sabemos como darla a partir de una base, como hacíamos en el Práctico anterior.

(b) Definimos $T(1,0,0) = 0$, $T(0,1,0) = 0$ y $T(0,0,1) = (1,0,0)$. Por Teorema 4.3.8, como la estamos definiendo a la transformación en la base canónica, sabemos que existe una T con estas características. Efectivamente T cumple lo deseado pues $\operatorname{Im} T = \langle(1,0,0)\rangle = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Por otro lado, $\dim \operatorname{Nu} T = 2$ y $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es un conjunto LI que pertenece a $\operatorname{Nu} T$, por lo que estos dos vectores forman una base. Así, $\operatorname{Nu} T = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. De esta manera, $\operatorname{Nu} T \cap \operatorname{Im} T = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0)\rangle$, por lo que $\dim \operatorname{Nu} T \cap \operatorname{Im} T = 1$.

(c) Definimos $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(-5,1,1) = 0$ y $T(0,1,0) = 0$. Es inmediato que $(1,0,0),(-5,1,1)$ y $(0,1,0)$ son una base pues $(-5,1,1) \notin \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$. Por Teorema 4.3.8 tenemos asegurada la existencia de una transformación lineal que cumpla estas condiciones. Por otro lado, $\operatorname{Im} T = \langle 0,0,(1,0,0)\rangle = \langle(1,0,0)\rangle$ por lo que $\dim \operatorname{Im} T = 1$. Así, $\dim \operatorname{Nu} T = 2$. Dado que $\operatorname{Nu} T + \operatorname{Im} T$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, usando Teorema 4.2.8 debe ser $\dim \operatorname{Nu} T \cap \operatorname{Im} T = 0$ luego $\operatorname{Nu} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.