

Transformaciones lineales. Núcleo e imagen

Jueves 26 de septiembre

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m son transformaciones lineales.

- (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$ (e) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_n, -x_n)$
 (b) $T(x, y) = (y, x, x - 2y)$ (f) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$
 (c) $T(x, y) = xy$ (g) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n)$
 (d) $T(x, y, z) = 3x - 2y + 7z$ (h) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 \cdot x_2, \dots, x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n).$

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar mediante ecuaciones el núcleo y la imagen de T , dar una base de cada uno de estos subespacios. Verificar que en todos los casos la dimensión del núcleo más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida. Decidir además cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo o en la imagen:

$$(-1, 1, 1), \quad (1, 2, -1), \quad (3, 1, 1), \quad (1, 1, 2), \quad (1, 1, -3).$$

- (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por $T_1(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3y - 5z, 2x - y + z, 4x + 3y - z).$
 (b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por: $T_2(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2y - 2z).$
 (c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T_3(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x - 4y - 2z, -3x + 6y + 3z).$
 (d) $T_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T_4(x, y, z) = (3x - 2y - z, 7x - 5y - 3z, -x - z).$
 (e) $T_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T_5(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x + y + 4z, 5x - y + 8z).$

Ejercicio 3. Para cada una de las siguientes funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} decidir si son \mathbb{R} -lineales o \mathbb{C} -lineales.

- (a) $T(z) = iz,$ (b) $R(z) = \bar{z},$ (c) $S(z) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z).$

Ejercicio 4. Dada $g \in C^1[0, 1]$, sea $T_g : C^1[0, 1] \mapsto C[0, 1]$ la función dada por $T_g(f) = (fg)'$.

- (a) Probar que T_g es lineal y hallar el núcleo de T_g .
 (b) Describir explícitamente el núcleo de T_g en los casos $g(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y hallar su dimensión.

Jueves 26 de septiembre

Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar mediante ecuaciones el núcleo y la imagen de T , dar una base de cada uno de estos subespacios. Verificar que en todos los casos la dimensión del núcleo más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida. Decidir además cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo o en la imagen:

$$(-1, 1, 1), \quad (1, 2, -1), \quad (3, 1, 1), \quad (1, 1, 2), \quad (1, 1, -3).$$

- (a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por $T_1(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3y - 5z, 2x - y + z, 4x + 3y - z).$
 (b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por: $T_2(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2y - 2z).$
 (c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T_3(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x - 4y - 2z, -3x + 6y + 3z).$
 (d) $T_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T_4(x, y, z) = (3x - 2y - z, 7x - 5y - 3z, -x - z).$
 (e) $T_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $T_5(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x + y + 4z, 5x - y + 8z).$

Ejercicio 6. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar el núcleo y la imagen de T , dar sus dimensión y una base de cada uno de ellos. Verificar en todos los casos que la dimensión del núcleo más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida.

(a) $T : P_2 \rightarrow C[0, 1], T(ax^2 + bx + c) = (b - a)e^x + (c - a)e^{2x} + (b - c)e^{3x}.$

(b) $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow P_5, T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b)x^5 + (c + d)x^4 + (a + b)x^3 + (c + d)x^2 + (2b + 3c)x + 7a - 8b.$

(c) $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y - 2z + w & 7x - 6y + 2z - w \\ -2x + 6y - 4z + 2w & -11x + 13y - 6z + 3w \end{pmatrix}.$

(d) $T : P_4 \rightarrow P_4, T(p(x)) = p'(x).$

(e) $T : \mathbb{K}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{K}, T(A) = \text{tr}(A).$

(f) $T : P_3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{pmatrix}.$

(g) $T : P_3 \rightarrow P_4, T(p(x)) = (x + 1)p(x).$

Ejercicio 7. Sea $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la transformación lineal tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, i), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) = (i, 1, 0).$$

Decidir si T es un isomorfismo.

Martes 1 de octubre

Ejercicio 8. En cada caso decidir si es posible dar una transformación lineal T de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m que satisfaga las condiciones exigidas. Si existe, estudiar la unicidad; si no existe explicar por qué.

- (a) $T(0, 1) = (1, 2, 0, 0), T(1, 0) = (1, 1, 0, 0).$
- (b) $T(1, 1, 1) = (0, 1, 3), T(1, 2, 1) = (1, 1, 3), T(2, 1, 1) = (3, 1, 0).$
- (c) $T(1, 1, 1) = (3, 2), T(1, 0, 1) = (1, 1), T(0, 1, 0) = (1, 0)$
- (d) $T(0, 1, 1) = (1, 2, 0, 0), T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0).$

Ejercicio 9. En cada caso definir, cuando sea posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible explicar por qué no es posible.

- (a) $\dim \text{Im } T = 2$ y $\dim \text{Nu } T = 2.$
- (b) $(1, 1, 0) \in \text{Im } T$ y $(0, 1, 1) \in \text{Nu } T.$
- (c) $(1, 1, 0) \in \text{Im } T, (0, 1, 1), (1, 2, 1) \in \text{Nu } T.$
- (d) $\text{Im } T \subseteq \text{Nu } T.$
- (e) $\text{Nu } T \subseteq \text{Im } T.$

Ejercicio 10.

- (a) Dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea al subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$. Hallar $T(x, y, z)$.
- (b) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1, 1) = (0, 1)$ y hallar $T(x, y, z, w)$.

- (c) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) : z = 2x = y\}$ e $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = a - c, b - d = a + c \right\}$. Hallar $T(x, y, z)$.
- (d) Probar que no existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) : z = 2x = y\}$ e $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b - d = a + c \right\}$.

Ejercicio 11. Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.

- (a) Probar que $\text{Nu}(T) \subseteq \text{Nu}(T^2)$.
- (b) Probar que $\text{Nu}(T) = \text{Nu}(T^2)$ si y sólo si $\text{Nu}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$.

Ejercicio 12. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.

- (a) Probar que si n es impar entonces $\text{Nu } T \neq \text{Im } T$.
- (b) Sea n par. Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ tal que $\text{Nu } T = \text{Im } T$.