

## Repaso: números complejos

Recordar que si  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , su módulo es  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  y su conjugado es  $\bar{z} = a - ib$ .

**Ejercicio 1.** Sean  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Demostrar que:

- (a)  $\bar{\bar{z}} = z$ , (b)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ , (c)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ , (d)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  
 (e)  $z\bar{z} = |z|^2$ , (f)  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  si  $z \neq 0$ , (g)  $|\bar{z}| = |z|$ .

**Ejercicio 2.** Expresar los siguientes números complejos en la forma  $a + ib$ , hallar su módulo y su conjugado.

- (a)  $(-1 + i)(3 - 2i)$ , (b)  $i^{131} - i^9 + 1$ , (c)  $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{i}}$ ,  
 (d)  $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$ , (e)  $\frac{4+2i}{6} - \frac{4+2i}{6i}$ , (f)  $\frac{3i}{1-2i} - \frac{1}{1+\frac{1}{i}}$ .

## Cuerpos

Martes 13 de agosto

**Ejercicio 3.** Sea  $(\mathbb{k}, +, \cdot)$  un cuerpo. Probar los siguientes:

- (a) para todo  $a \in \mathbb{k}$  se cumple  $a \cdot 0 = 0$  (donde  $0 \in \mathbb{k}$  denota el neutro de la suma).  
 (b) si  $a$  y  $b$  son elementos de  $\mathbb{k}$  tales que  $a \cdot b = 0$  entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $n$  un número natural,  $n \neq 1$ . Denotamos por  $\mathbb{Z}/n$  al conjunto de clases de números enteros módulo  $n$ . Utilizando los resultados de aritmética modular vistos en Álgebra I/Matemática discreta, sabemos que existen operaciones

$$+: \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n, \quad \cdot: \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n.$$

Probar que  $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$  es un cuerpo si y sólo si  $n$  es primo.

**Ejercicio 5.** Sean  $(\mathbb{k}, +, \cdot)$  un cuerpo y  $a, b$  y  $c$  elementos de  $\mathbb{k}$ . Probar los siguientes:

- (a)  $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$ .  
 (b) Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  entonces  $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ .  
 (c) Si  $a \neq 0$  y  $a \cdot b = a \cdot c$ , entonces  $b = c$  (*propiedad cancelativa*).  
 (d) Si  $a \neq 0$  entonces para todo  $y \in \mathbb{k}$  existe un único  $x \in \mathbb{k}$  tal que  $a \cdot x = y$ .  
 (e) Si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a^n = 0$ , entonces  $a = 0$  (notación:  $a^n := a \cdots a$   $n$ -veces).

★ **Ejercicio 6.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (a) Sean  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  un cuerpo y  $a \in \mathbb{K}$ . Si existe un natural  $n$  tal que  $na = 0$ , entonces  $a = 0$  (notación:  $na := a + \dots + a$   $n$ -veces). Comparar esto con el **Ejercicio 5 (e)**.  
Sugerencia: probar que si  $a \neq 0$  entonces  $na = 0 \iff n1 = 0$ .
- (b) Sean  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  un cuerpo. Si existen  $a \in \mathbb{K}$  no nulo y un natural  $n$  tales que  $na = 0$ , entonces  $nx = 0$  para todo  $x \in \mathbb{K}$ .

## Espacios vectoriales y sus subespacios

Jueves 15 de agosto

**Ejercicio 7.** Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Sean  $a, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$  y  $v, v_1, v_2 \in V$ . Probar los siguientes:

- (a) Si  $a \cdot v = 0$  entonces  $a = 0$  ó  $v = 0$ .
- (b) Si  $a \neq 0$  y  $a \cdot v_1 = a \cdot v_2$ , entonces  $v_1 = v_2$ .
- (c) Si  $v \neq 0$  y  $a_1 \cdot v = a_2 \cdot v$ , entonces  $a_1 = a_2$ .

**Ejercicio 8.** Sean  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  un cuerpo y  $n$  un número natural. Consideramos el conjunto

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Usando las operaciones de  $\mathbb{K}$ , definimos:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n & (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n & a \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n). \end{aligned}$$

Verificar que  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  es un espacio vectorial.

**Ejercicio 9.** Sea  $(V, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Demostrar los siguientes:

- (a) Sea  $-1$  el opuesto aditivo de  $1$  en  $\mathbb{K}$ . Para todo  $v \in V$ , vale que  $-v$  (el opuesto aditivo de  $v$  en  $V$ ) es igual a  $(-1) \cdot v$ .
- (b) Dados  $v_1, v_2 \in V$ , se cumple  $-(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$ .
- (c) Si  $a \in \mathbb{K}$  y  $v \in V$ , entonces  $-(a \cdot v) = (-a) \cdot v = a \cdot (-v)$ .
- (d) Si  $v \neq 0$  y  $a_1 \cdot v = a_2 \cdot v$ , entonces  $a_1 = a_2$ .

**Ejercicio 10.** Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones abajo definidas.

- (a)  $\mathbb{R}^n$ , con  $v_1 \oplus v_2 = v_1 - v_2$ , y el producto usual.
- (b)  $\mathbb{R}^n$  con la suma usual y  $a \odot v = -av$ .
- (c)  $\mathbb{R}^2$ , con la suma usual y  $a \odot (x, y) = (ax, y)$ .
- (d)  $\mathbb{R}^2$  con  $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$ ,  $a \odot (x, y) = (ax, 0)$ .
- (e) El conjunto de polinomios con coeficientes reales, con el producto por reales usual, y con suma  $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$  (suma de derivadas).

**Ejercicio 11.** Probar que  $\mathbb{R}$  es un  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.

Nota: Lo importante en este ejercicio es identificar las operaciones de suma y producto.

**Ejercicio 12.** Sean  $X \neq \emptyset$  un conjunto y  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial. Consideramos el conjunto

$$V^X = \{ \text{funciones} : X \longrightarrow V \}.$$

Usando las operaciones de  $V$ , definimos:

$$\begin{aligned} \oplus : V^X \times V^X &\longrightarrow V^X, & (f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x), & \text{para todo } x \in X. \\ \odot : \mathbb{K} \times V^X &\longrightarrow V^X, & (a \odot f)(x) &= a \cdot f(x), & \text{para todo } x \in X. \end{aligned}$$

Verificar que  $(V^X, \oplus, \odot)$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

Martes 20 de agosto

**Ejercicio 13.** Sea  $n \geq 3$ . Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  son subespacios vectoriales.

- (a)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ .
- (b)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 = 0\}$ .
- (c)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$ .
- (d)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 = 1\}$ .
- (e)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \pi^{-21}x_1 + \sqrt{17}x_2 + 41x_3 = 0\}$ .
- (f)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{existen } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = 0\}$ .

**Ejercicio 14.** Sean  $W_1$  y  $W_2$  subespacios de un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Probar que si  $W_1 \cup W_2$  es un subespacio vectorial de  $V$ , entonces  $W_1 \subset W_2$  ó  $W_2 \subset W_1$ .

**Ejercicio 15.** A continuación enumeramos una familia de conjuntos. Cada uno de ellos es un subconjunto de algún  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial conocido. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

- (a)  $C^1(0, 1) = \{ \text{funciones derivables} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \}$ .
- (b)  $C[0, 1] = \{ \text{funciones continuas} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \}$ .
- (c)  $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 1\}$ .
- (d)  $\{f \in C[0, 1] : f(1) \neq 1\}$ .
- (e)  $\{f \in C[0, 1] : f(1) = f(0)\}$ .
- (f)  $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f = 0\}$ . Nota: esto no forma parte de los contenidos de la materia.

Ahora pasamos a un cuerpo arbitrario  $\mathbb{k}$ . Fijamos también un número natural  $n$ .

- (g)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n : x_1 = x_n\}$ .
- (h)  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n : \text{existe } j > 1 \text{ tal que } x_1 = x_j\}$ . Atención: La respuesta depende de  $n$ .
- (i) El conjunto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{k}$  de grado par, junto con el polinomio nulo.
- (j) El conjunto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{k}$  de grado  $n$ , junto con el polinomio nulo.
- (k) El conjunto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{k}$  de grado  $\leq n$ , junto con el polinomio nulo.

**Ejercicio 16.** Demostrar que los únicos subespacios de  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial son  $\{0\}$  y  $\mathbb{R}$ . Probar que esto no es cierto si se mira  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.

★ **Ejercicio 17. Cociente por un subespacio.**

Sean  $(V, +, \cdot)$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial y  $W \subseteq V$  un subespacio. Definimos una relación  $\sim$  en  $V$  por

$$v \sim w \iff v - w \in W, \quad v, w \in V.$$

- (a) Probar que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $V$ .

Denotamos por  $V/W = \{[v] : v \in V\}$  al conjunto de clase de equivalencias de  $V$  bajo  $\sim$ . Usando las operaciones de  $V$ , definimos

$$\begin{aligned} \oplus : V/W \times V/W &\longrightarrow V/W, & [v] \oplus [w] &= [v + w]; \\ \odot : \mathbb{k} \times V/W &\longrightarrow V/W, & a \odot [v] &= [a \cdot v]. \end{aligned}$$

Para definir estas operaciones estamos usando representantes en  $V$  de los elementos de  $V/W$ .

- (b) Probar que  $\oplus$  y  $\odot$  están bien definidas como funciones. Es decir que si  $[v] = [v']$  y  $[w] = [w']$  entonces  $[v + w] = [v' + w']$  y  $[a \cdot v] = [a \cdot v']$ .
- (c) Verificar que  $(V/W, \oplus, \odot)$  es un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial.

Este espacio se llama *espacio cociente* de  $V$  por  $W$ .