Práctico 6

Espacios y subespacios vectoriales

Objetivos.

- Familiarizarse con los conceptos de espacio y subespacio vectorial.

Ejercicios.

(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales.

(a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 = x_n\}$.
(b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.
(c) $C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
(d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 \leq x_2\}$.
(e) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 1\}$.
(f) $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$.
(g) $C \cup F$
(h) $C \cap F$
(i) $\mathbb{Q}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{Q}\}$.

(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial del espacio vectorial de matrices cuadradas $M_n(\mathbb{R})$.

(a) El conjunto de matrices inversibles.
(b) El conjunto de matrices no inversibles.
(c) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.
(d) El conjunto de matrices simétricas $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ A = A^t\}$
(e) El conjunto de matrices triangulares superiores.
(f) El conjunto de matrices de traza cero $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$
(g) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{tr}(A) = 1\}$

(3) Probar que los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales
(a) El conjunto $\mathbb{R}_{<n}[x]$ formado por los polinomios de grado estrictamente menor que $n \in \mathbb{N}$.
(b) El conjunto $\mathbb{R}_{par}[x]$ formado por los polinomios de grado par, junto con el polinomio nulo.
(c) $\mathbb{R}_{<n}[x] \cup \mathbb{R}_{par}[x]$
(d) $\mathbb{R}_{<n}[x] \cap \mathbb{R}_{par}[x]$

(4) Sea $V = F[0, 1]$ el espacio de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.
(a) $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es continua}\}$.
(b) $C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es derivable}\}$.
(c) $\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es derivable y } f' = 0\}$.
(d) $\{f \in C[0, 1] \ : \ f(1) \geq 0\}$.
(e) $\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ : \ f(1) = 1\}$.
(f) $E = \{f \in C[0, 1] \ : \ f(1) = f(0)\}$.
(g) $F = \{f \in C[0, 1] \ : \ f(1) = 0\}$.
(h) $E \cup F$

(i) $E \cap F$

(5) Sean V un espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

(6) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$.

Más ejercicios.

(7) Sea $V = \mathbb{R}^n$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.
  (a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, j > 1,\ x_1 = x_j\}$.
  (b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 x_n = 0\}$.

(8) Sea $V = C[0,1]$, el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.

  (a) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$.
  (b) $\{f \in C[0,1] \ : \ \int_0^1 f(x)^2 dx = 0\}$.

Ejercicios un poco más difíciles. Si ya hizo los primeros ejercicios ya sabe lo que tiene que saber. Los siguientes ejercicios le pueden servir si esta muy aburridx con la cuarentena.

(9) Decidir si los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, con las operaciones abajo definidas.

  (a) $\mathbb{R}^n$, con $v \oplus w = v - w$, y el producto por escalares usual.
  (b) $\mathbb{R}^2$, con $(x, y) \oplus (x_1, y_2) = (x + x_1, 0)$, $c \odot (x, y) = (cx, 0)$.
  (c) $\mathbb{R}^3$, con:
$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y' - 1, z + z');$$
$$c \odot (x, y, z) = (cx, cy + 1 - c, cz).$$
  (d) El conjunto de polinomios, con el producto por escalares (reales) usual, pero con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).