Álgebra II - 30/04/2020

Práctico 5: (2) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del conjunto de autovectores asociado.

Sea A la matriz:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{matrix}$$

<u>Primer paso: calculamos los autovalores.</u>

Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico de A: f = det (A - X I)

$$\det \begin{matrix} 2-X & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1-X \end{matrix} =$$

$$\det \begin{matrix} 2-X & 1 \\ -1 & 4-X \end{matrix} . \det \begin{matrix} 1-X & 1 \\ 3 & -1-X \end{matrix} = ((2-X)(4-X) + 1) . ((1-X) (-1-X) - 3)$$

= (9 - 6X + X^2) . (-4+X^2) = f = (X - 3)^2 (X^2 - 4) = (X - 3)^2 (X + 2) (X - 2).

Raíces de f: 2, -2, (6 +-√(36 - 36))/2 = 3

Luego los autovalores de A son 2, -2 y 3.

<u>Segundo paso: para cada uno de estos autovalores, buscamos el conjunto de autovectores asociado.</u>

1): Autovalor c = 2.

El conjunto de autovectores asociado es el espacio de vectores X en **R^4** que satisfacen:

AX = 2X ⇔ (A - 2 I) X = 0

Es decir que es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz A - 2 I

$$A - 2 I = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{matrix}$$

F1 ↔ F2, F1: -F1, F1 + 2F2, F3: -F3, F4-3F3

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Por lo tanto las soluciones (x, y, z, t) de este sistema se despejan de:

x = 0, y = 0, z = t, t: independiente

Conjunto de soluciones (= conjunto de autovectores asociados al autovalor c = 2) es

{(0, 0, t, t): t ∈ **R**}

2): Autovalor c = -2.

El conjunto de autovectores asociado es el espacio de vectores X en **R^4** que satisfacen:

AX = -2X ⇔ (A + 2 I) X = 0

Es decir que es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz A + 2 I

$$A + 2I = \begin{matrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

F1 ↔ F2, F2 + 4 F1, F1: -F1, F2: (1/25) F2, F1+6F2, F4 - F3, F3: (1/3)F3

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Por lo tanto las soluciones (x, y, z, t) de este sistema se despejan de:

x = 0, y = 0, z = -(1/3)t, t: independiente

Conjunto de soluciones (= conjunto de autovectores asociados al autovalor c = -2) es

{(0, 0, -t, 3t): t ∈ **R**}

3): Autovalor c = 3.

El conjunto de autovectores asociado es el espacio de vectores X en **R^4** que satisfacen:

AX = 3X ⇔ (A - 3 I) X = 0

Es decir que es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz A - 3 I

$$A - 3I = \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{matrix}$$

F2-F1, F1: -F1, F4 + F3, F3 + 2F4, F3 ↔ F4, F4: -(1/5)F4, F3 + 3F4:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Por lo tanto las soluciones (x, y, z, t) de este sistema se despejan de:

x = y, z = 0, t = 0, y: independiente

Conjunto de soluciones (= conjunto de autovectores asociados al autovalor c = 3) es

$$\{(y, y, 0, 0): y \in \mathbf{R}\}$$

(d): A es la matriz nxn:

$$\begin{matrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & c & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & & 1 & c \end{matrix}$$

<u>Primer paso: calcular los autovalores.</u>

f = det (A - X I)

$$\det \begin{matrix} c-X & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & c-X & 0 .. & 0 \\ 0 & 1 & c-X \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & & 1 & c-X \end{matrix} = (c-X)(c-X)\dots(c-X) = (c-X)^n$$

Autovalores de A = raíces de f = det (A - X I): tiene una única raíz c
A tiene un único autovalor que es c.

<u>Segundo paso: describir paramétricamente el conjunto de autovectores.</u>

Aquí hay un único autovalor.
Queremos describir el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$(A-cI)\, X = 0$

$$A-cI = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{matrix}$$

Ya casi es MERF: permutando filas

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}$$

Las soluciones del sistema homogéneo asociado se obtienen
$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = t$ variable libre

Conjunto de autovectores asociado al autovalor c es

$$\{(0, 0, \dots, 0, t) : t \in \mathbf{R}\}$$

Ejercicio (4): Sea A una matriz 2x2.

(a) Probar que el polinomio característico de A es $X^2 - Tr(A)\, X + \det(A)$.

$$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

$Tr(A) = a+d$ y $\det(A) = ad - bc$

El polinomio característico de A es $f = \det(A - X\, I)$

$$f = \det \begin{matrix} a-X & b \\ c & d-X \end{matrix} = (a-X)(d-X) - cb = ad - (a+d)\, X + X^2 - cb = X^2 - Tr(A)\, X + \det(A)$$

(b) Si A no es inversible, probar que los autovalores de A son 0 y Tr(A).

Usando la parte (a), tenemos que el polinomio característico de A es
$X^2 - Tr(A)\, X + \det(A)$

Como A no es inversible: $\det A = 0$, entonces el polinomio característico de A es

$X^2 - Tr(A)\, X = X(X - Tr(A))$

Por lo tanto los autovalores de A, que son las raíces de su polinomio característico son $c = 0$ y $c = Tr(A)$.

(5) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justicar.

(a) Existe una matriz inversible A tal que 0 es autovalor de A.

¿Qué quiere decir que 0 sea autovalor de una matriz A?

0 es autovalor de A si y sólo si es raíz del polinomio característico de A que es $\det(A - XI)$, es decir si y sólo si $\det(A - 0 I) = 0$.

Como $A - 0 I = A$, entonces 0 es autovalor de A si y sólo si $\det(A) = 0$ si y sólo si A no es inversible.

Por lo tanto la afirmación es FALSA. Ninguna matriz inversible puede tener a 0 como autovalor.

(b) Si A es inversible todo autovector de A es autovector de A^{-1}.

Podemos usar que X es autovector de A con autovalor $c \in \mathbf{R}$ si y sólo si

$$(*) \qquad AX = cX$$

Si A es inversible, por la parte (a) sabemos que $c \neq 0$.

Multiplico ambos miembros de (*) por A^{-1} y luego por c^{-1}

$X = A^{-1} A X = A^{-1} cX = c A^{-1} X$

$c^{-1} X = A^{-1} X$

$\therefore$ X es autovector de A^{-1} (de autovalor c^{-1}).

Luego la afirmación es VERDADERA.

(c) Si A es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A.

A nilpotente: existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $A^n = 0$.

Supongamos que c es autovalor de A. Esto significa que el sistema homogéneo

$(A-cI)X = 0$ tiene solución no trivial X.

O sea que existe $X \neq 0$ tal que $AX = cX$.

Luego multiplicando por A a ambos miembros:

$A^2 X = c AX = c^2 X$
$A^3 X = A A^2 X = A c^2 X = c^2 AX = c^3 X$
…
$A^k X = c^k X$, para todo $k \in \mathbf{N}$ (Ejercicio: demostrar esto formalmente por inducción).

En particular $A^n X = c^n X$ y como estamos suponiendo que $A^n = 0$, entonces

$c^n X = 0$

Como $X \neq 0$, esto sólo puede ocurrir si $c^n = 0$ o sea sólo si $c = 0$.

Esto prueba que 0 es el único autovalor de A.
Luego la afirmación es VERDADERA.

Sugerencia para el Ejercicio (6): usar un argumento similar al que vimos en el (5) c).

De hecho en el 5)c) probamos la afirmación del ejercicio 6) para el caso del polinomio $f = X^k$.

Luego notar que cualquier polinomio es una combinación lineal de potencias de X.