23. Sea A matriz 2×2 tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$. Mostrar que A es una matriz nilpotente de índice 2. ¿Qué puede decir del recíproco? ¿Puede generalizar el resultado?

Sea A una matriz, decimos que A es nipolente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Para demostrar que una matriz A 2×2 con $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$ es nipolente de índice 2, debemos demostrar que $A^2 = 0$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

Por definición, la traza de A es la suma de sus elementos diagonales:

$\mathrm{Tr}(A) = a + d = 0$, ésto implica que $a = -d$.

Calculamos $\mathrm{Tr}(A^2)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}(A^2) = a^2 + 2bc + d^2$

Reemplazando a por $-d$: $\mathrm{Tr}(A^2) = (-d)^2 + 2bc + d^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por enunciado}}}{=} 0 \Rightarrow 2d^2 + 2bc = 0$

Dividiendo ambos lados por $2d$ obtenemos: $d + \dfrac{bc}{d} = 0$

Como d no puede ser 0, tenemos $\dfrac{bc}{d} = \overset{a}{\overset{\shortparallel}{-d}}$, reemplazando ésto en la matriz A, obtenemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$

Ahora calculamos A^2: $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-ab & ab-b^2 \\ -a^2+ab & -ab+b^2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Tr}(A) = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2$

Como $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, tenemos que $\underbrace{a^2-2ab+b^2}_{(a-b)^2} = 0$. Ésto implica que $(a-b)^2 = 0$, es decir,

$a - b = 0$. Por lo tanto, $a = b$.

Entonces, la matriz A queda de la siguiente manera: $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$ y su cuadrado es

$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-a^2 & a^2-a^2 \\ -a^2+a^2 & -a^2+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Concluimos que $A^2 = 0$, lo que implica que A es una matriz nipolente de índice 2, como se quería demostrar.