Algebra I
Notas de Clase

J.C. H. A.

14-03-2023

Índice general

Capítulo 1 **Repaso** — Página 3

1.1 Cuerpos — 3
1.2 Propiedades de los cuerpos: — 5
1.3 Numeros complejos: — 5
1.4 Operaciones con complejos — 6
1.5 Identidad de Euler — 8
1.6 Forma polar de un Numero Complejo no Nulo — 8

Capítulo 2 **Sistemas de ecuaciones lineales** — Página 9

Capítulo 3 **Matrices** — Página 12

3.1 Repaso — 14
3.2 Operaciones elementales por filas — 14
3.3 Repaso — 21
3.4 Repaso — 26
3.5 Transpuesta de una matriz — 27
3.6 Matriz elemental — 28
3.7 Matriz Inversa — 30
3.8 Repaso — 31
3.9 Inversa de una matriz elemental — 31
3.10 Determinante — 36
3.11 Repaso — 37
3.12 Repaso — 44

Capítulo 4 **Espacios Vectoriales** — Página 51

4.1 Repaso: F-Espacio vectorial: — 55
4.2 Subespacios de F^n — 59
4.3 Repaso — 59

4.4 Suma de Subespacios 60
4.5 Repaso 65
4.6 Repaso 69
4.7 Repaso 74
4.8 DIA DE REPASO: 80
4.9 Transformaciones lineales 84
4.10 Repaso 86
4.11 Repaso 93
4.12 Espacios de Transformaciones Lineales 104
4.13 Espacio dual 104
4.14 Repaso 109

Capítulo 1

Repaso

1.1. Cuerpos

Estudiaremos sistemas de eucaciones lineales, como encontrar las soluciones, algebra de matrices (objetos que vienen asociados a un sist de ecuaciones lineales), una funcion mas absracta que son los espacios vectoriales y transformaciones lineales.
Todo se resolvera mediante sistema de ecuaciones lineales. Estos son un nuemero finito de ecuaciones de la forma

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\vdots &= \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Coeficientes de lsistema: $a_{11}, \ldots, a_{mn}$
Terminos independientes, $b_1, \ldots, b_m$
Algunos ejemplos de cuerpos son $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$, p primo.

Definición 1.1.1: Cuerpo

Un **cuerpo** es un conjunto F junto con dos operaciones (binarias)

- $+ : F \times F \longrightarrow F,$
- $\cdot : F \times F \longrightarrow F,$

Observación 1.1.1 Notacion

- $+(a, b) \mapsto a + b$
- $\cdot(a, b) \mapsto a \cdot b$ o ab

Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas.
Axiomas:

(1) Asociatividad de +:
$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall a,b,c, \in F..$$

(2) Conmutatividad de +
$$a+b = b+a, \quad \forall a,b \in F..$$

(3) Existe $0 \in F$ tal que
$$a+0 = a, \quad \forall a \in F.$$

(4) $\forall a \in F, \exists b \in F : a+b = 0$

(5) Asociatividad de $*$:
$$(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in F.$$

(6) Conmutatividad de $*$:
$$ab = ba, \forall a,b \in F.$$

(7) Existe $1 \neq 0$ tal que
$$a \cdot 1 = a, \forall a \in F.$$

(8) $\forall a \in F \; a \neq 0, \exists c \in F : ac = 1.$

(9) Distributividad:
$$a(b+c) = ab+ac \quad \forall a,b,c \in F..$$

Nota:-

En los cuerpos no existe relacion de orden.

Ejemplo 1.1.1 (Ejemplo finito, $F_2 = \{0,1\}$ con las siguientes operaciones)

Para la suma

- $0+0 = 0$
- $0+1 = 1$
- $1+0 = 1$
- $1+1 = 0$

Nota:-

Si

$$\begin{aligned} 1+1 &= 1 \\ 1+1+(-1) &= 1+(-1) \\ 1+0 &= 0 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Absurdo pues por axioma 8, el neutro de la suma y el producto deben ser distintos.

Para el producto

- $0 * 0 = 0$
- $0 * 1 = 0$
- $1 * 0 = 0$
- $1 * 1 = 1$

Nota:-

$$0 \cdot a = 0, \quad \forall a \in F,$$

cualquiera sea F cuerpo.

Nota:-

Demostración:

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= (0+0) \cdot a \\ 0 \cdot a &= 0 \cdot a + 0 \cdot a \\ 0 \cdot a + (-0 \cdot a) &= 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-0 \cdot a)) \\ 0 &= 0 \cdot a + 0 \\ 0 &= 0 \cdot a \end{aligned}$$

😃

1.2. Propiedades de los cuerpos:

Los axiomas en principio son axiomas de existencia. Estas son propiedades que se derivan de los axiomas:

(1) 0 y 1 son unicos. Tambien, $\forall a \in F$, el opuesto de a es unico (se denota $(-a)$) y si $a \neq 0$, el inverso de a es unico (se denota (a^{-1})).

(2) "Puedo asociar el $-$"

$$-(ab) = (-a)b = a(-b).$$

(3) $a, b \neq 0$,, entonces $ab \neq 0$ y $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Observación 1.2.1 Notacion:

$$a, b \in F : b \neq 0, \quad ab^{-1} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 1.2.1 ($\frac{1}{a} = a^{-1}$)

1.3. Numeros complejos:

Definir la estructura del cuerpo es definir las dos operaciones que hacen al cuerpo. Entonces:

En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, que denotaremos por $\mathbb{C}$, definimos las operaciones

- $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$
- $(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

Notemos que podemos identificar a $\mathbb{R}$ con $\{(a, 0 : a \in \mathbb{R})\}$
Ademas, si tengo

- $1 = (1,0),\ i = (0,1) \in \mathbb{C}$

Para todo $z \in \mathbb{C} : z = (a,b)$ se cumple que

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib.$$

Notemos que sucede si hago i^2

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1) \cdot (0,1) \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Luego $i^2 = -1$

Nota:-

La multiplicacion de numeros complejos da otro numero complejo.
Sea $z = a + ib, \quad w = a' + ib'$

$$zw = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Nota:-

Debido a que cada numero complejo queda perfectamente determinado por la tupla (a,b) (pues tienen la forma $z = a + ib$) puedo representarlos en el plano

1.4. Operaciones con complejos

El modulo de $z = a + ib,\ a,b \in \mathbb{R}$ es:

$$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Observación 1.4.1 $|z| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i = 0$

El conjugado de $z = a + ib,\ a,b \in \mathbb{R}$ es

$$\overline{z} = a - ib.$$

Observación 1.4.2 $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}(\text{i.e.} : b = 0)$

Contenido:

$$\begin{aligned}
z\overline{z} &= \\
&= (a+ib)(a-ib) = (a\cdot a + b\cdot b) + i(a(-b)+ab) \\
&= a^2+b^2 \\
&= |z|^2
\end{aligned}$$

Proposición 1.4.1 Con las operaciones definidas anteriormente, $\mathbb{C}$ es un cuerpo.

Nota:-

Los elementos de $\mathbb{C}$ se llaman **numeros complejos**.

Demostración: (Idea).
Los axiomas de

- asociatividad (para + y ·)
- conmutatividad (para + y ·), y
- distributividad

se prueban de manera rutinaria.
Se verifica tambien que

- $0 = (0, 0i) = (0, 0)$ es neutro para +
- $1 = (1, 0i) = (1, 0)$ es neutro para ·
- El opuesto de $z = a + ib$ es $-z = -a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Usando la relacion: $z\overline{z} = |z|^2$, podemos probar que $\forall z = a + ib \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2b^2} \quad a, b, \in \mathbb{R}.$$

😊

Observación 1.4.3 Notacion:

$$\begin{aligned}
\frac{a+ib}{a'+ib} &= (a+ib)(a'+ib')^{-1} \\
&= (a+ib)\left(\frac{a'}{a'^2+b'^2} - i\frac{b'}{b'^2+a'^2}\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.1 (Como expreso $\frac{1+2i}{2-i}$ en la forma $a + ib : a, b \in \mathbb{R}$?)

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{2-i} &= (i+2i)(2-i)^{-1}\\ &= (1+2i)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right)\\ &= \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}i\right)\\ &= 0+1i\\ &= i\end{aligned}$$

La ecuacion $x^2+1=0$, que no tiene solucion en $\mathbb{R}$, **ahora si tiene solucion en $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$** . De hecho $i, -i$ son dos soluciones de esta ecuacion.

1.5. Identidad de Euler

$$e^{i\pi=-1}.$$

De forma mas general

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\ sen\theta.$$

1.6. Forma polar de un Numero Complejo no Nulo

Supongamos $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.
z queda perfectamente determinado tanto por el par (a,b) como por el par (θ, r) donde r es el modulo de z. Es decir

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{r}.$$

$$\frac{z}{r} = e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Entonces,

$$z = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Sea F un cuerpo (e.g. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \dots$) un sistema de ecuaciones lineales (*), de m ecuaciones con n incognitas

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Donde $a_{ij} \in F$, $i \leqslant i \leqslant m, i \leqslant j \leqslant n$ y $b_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Definición 2.0.1: Sistema homogeneo

El sistema se dice homogeneo si todos los terminos independientes son iguales a cero, es decir

$$b_i = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$

Nota:-

Una solucion del sistema (*) es una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ $x_i \in F$ tal que satisface todas las ecuaciones.

Observación 2.0.1

Si el sistema es homogeneo, siempre admite al menos una solucion $(0, 0, \dots, 0)$. Esta se dice la solucion trivial.

Estudiaremos el metodo de **elminiacion de variables** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
Una combinacion lineal de las ecuaciones de (*) es una ecuacion que se obtiene de las dadas multiplicando cada una por un **escalar** y luego sumandolas.

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + c_2(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_mb_m.$$

↑ CORREGIR INDICES.
En otras palabras:

$$(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \dots c_ma_{m1})x_1 + c_1(a_{12} + \dots + c_ma_{m2})x_2 + \dots + (c_1a_{1n} + \dots + c_ma_{mn})x_n = c_1b_1 + \dots + c_mb_m$$

Dado otro sistema (**)

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{21}x_1 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{m1}x_1 + \dots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Decimos que (**) es equivalente al (*) si toda ecuacion del (**) es combinacion lineal de las ecuaciones de (*) y reciprocamente toda ecuacion de (*) es combinacion lineal de las ecuaciones de (**).

Observación 2.0.2

Esto define realmente una relacion de equivlencia entre sistemas lineales con n incognitas.

Proposición 2.0.1

Dos sistemas de ecuaciones equivalentes tienen el mismo conjunto de soluciones

Demostración: Por simetria basta probar que si (*) y (**) son equivalentes entonces toda solucion de (*) es solucion de (**)
Para esto recordamos que toda ecuacion de (**) es de la forma

$$c_1(a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1n}x_n) + c_2(a'_{21}x_1 + \dots + a'_{2n}x_n) + \dots + c_m(a'_{m1}x_1 + \dots + a'_{mn}x_n) = c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_mb_m.$$

para ciertos $a_{11}, \dots, a_{mn} \in F$
Luego es dado que si $(x_1, \dots, x_n)$ es solucion de (*), entonces satisface esta ecuacion. 😊

Nota:-

Sistemas equivalentes que se obtienen por combinaciones lineales de uno con el otro tambien poseen las mismas soluciones.

Ejemplo 2.0.1

Consideramos los sistemas

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$2x + y = -1$$
$$x - z = 1$$

Las soluciones del primer sistema son $(1 + 3t, t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Luego $(1, 0, 0)$ es solucion del primer sistema con $t = 0$. Sin embargo no es solucion del segundo. Luego **NO** son sistemas equivalentes por la proposicion anterior.

Nota:-

Usar t y no y viene porque y esta "parametrizando las soluciones de mi sistema".

En el primer sistema:
A la primera ecuacion le sumamos la segunda y conservamos la segunda. Me queda

$$x + 3z = 1$$
$$y + z = 0$$

Si hago la suma de la primera ecuacion $+(-1)$ por la segunda y conservo la segunda recupero el sistema original.
Luego los sistemas si son equivalentes, es decir comparten las mismas soluciones.
En el nuevo sistema $x = 1 - 3z$ e $y = -z$ y z puede tomar cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.
Luego las soluciones del primer sistema son $(1 - 3t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. O tambien $(1 + 3s, s, -s)$ $s \in \mathbb{R}$

Nota:-

Notar como "las ternas" son distintas, pero como los parametros recorren todo $\mathbb{R}$, ambos representan los mismos conjuntos

Capítulo 3

Matrices

Definición 3.0.1

Sean m, $n \in \mathbb{N}$. Una matriz $m \times n$ con coeficientes en F es una funcion

$$A = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow F.$$

Representaremos a A como una ordenacion rectangular

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ & & \vdots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

donde $A_{ij} = A(i, j) \quad \forall i \leqslant i \leqslant m \; i \leqslant j \leqslant n$.
Llamaremos coeficientes de A a $A_{ij} \in F, \quad \forall i, j$.

Nota:-

A_{ij} fila i columna j.

Ejemplo 3.0.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos $F^{m \times n}$ al conjunto de todas las matrices, es decir

$$F^{m \times n} = \{A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}\} \longrightarrow F \text{ matriz } .$$

Definición 3.0.2: Matriz columna

Tendra la forma

$$(A_{11} \ldots A_{m1}) \longrightarrow F^{m \times 1}.$$

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Y a la matriz

Observación 3.0.1 Notacion

Indicaremos al sistema como

$$AX = Y, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Observación 3.0.2

Combinaciones lineales de ecuaciones $\equiv$ a hacer combinaciones lineales de las filas de las matrices (coeficiente a coeficiente)

Vamos a considerar las siguientes operaciones elementales por filas tales que

$$e : A \rightsquigarrow e(A).$$

donde e es

(1) Multiplicar una fila por $c \in F, c \neq 0$.

(2) A una fila i le sumo c veces la fila j con $i \neq j$ y c cualquier escalar.

(3) Permutar dos filas.

Ejemplo 3.0.2

Tomo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $e_1 = F_1 \cdot \frac{1}{2}$

$$e_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $e_2 = F_1 \cdot F_1 + (-2)F_3$

$$e_2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $e_3 = F_1 \leftrightarrow F_2$

$$e_3(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nota:-

Sea cualquiera la operacion elemental e, esta es una combinacion lineal de filas de la matriz A, luego al aplicar las operaciones elementales mantengo las soluciones porque mantengo matrices que representan sistemas equivalentes.

3.1. Repaso

Dada $A \in F^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad A_{ij} \in F.$$

Tenemos operaciones elementales e tales que $A \rightsquigarrow e(A)$ de tres tipos

- Multiplicar una fila de A por $c \in F, c \neq 0$.
- Reemplazar la F_i (fila i) por $F_i + cF_j$, $c \in F, j \neq i$.
- Permutar dos filas de A. $F_i \leftrightarrow F_j$.

3.2. Operaciones elementales por filas

Proposición 3.2.1

Sean $A, B \in F^{m\times n}$. Supongamos que

$$B = e(A), \text{ donde } e \text{ es una operacion elemental por filas }.$$

Entonces existe una operacion elemental por filas e' que es del mismo tipo de e (1,2,3) tal que

$$A = e'(B).$$

Demostración: Consideramos cada posible tipo de operacion elemental e.

Si e es de tipo 1) e multiplica la fila i por $c \neq 0$.

Como $c \neq 0 \Rightarrow \exists c^{-1} \in F$ tal que

$$c^{-1}c = 1.$$

Sea e' la operacion elemental por filas que multiplica la fila i por c^{-1}.

Entonces

$$e'(B) = e'(e(A)) = e'(A).$$

Si e es de tipo 2) e reemplaza la fila i por $F_i + cF_j$, $i \neq j$.

Sea e' la operacion elemental por filas que reemplaza la fila i por $F_i + (-c)F_j$.

Entonces e' es una operacion elemental del mismo tipo que e y

$$e'(B) = e'(e(A)) = A.$$

Si e es de tipo 3) $e : F_i \leftrightarrow F_j$. Entonces

$$e(B) = A.$$

😆

Definición 3.2.1

Dadas dos matrices $A, B \in F^{m \times n}$ decimos que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A mediante un numero finito de operaciones elementales por filas, es decir

$$B = e(e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(A))).$$

Ejemplo 3.2.1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \xrightarrow{F_1 - 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/(-7)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{4}{7} & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B \text{ es equivalente por filas a } A..$$

Nota:-

A es equivalente por iflas a $B \Leftrightarrow$ los sistemas homogeneos asociados tienen los mismos conjuntos de soluciones.

Proposición 3.2.2

La equivalencia por filas define una relacion de equivalencia en el conjunto $F^{m \times n}$.

Demostración: Hay que demostrar que la relacion es reflexiva, simetrica, y transitiva.
Reflexiva: A es equivalente por filas a A pues $A = e(A)$ donde e es multiplicar la fila 1 por $c = 1 \neq 0$
Simetrica: Por la proposicion anterior si $B = e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(A))))$ existen operaciones elementales por filas $e'_k, e_k - 1', \ldots, e'_2, e'_1$ tales que

$$e'_1(e'_2(\ldots e'_k(B))) = A \quad \therefore A \text{ es equivalente a } B.$$

Transitividad: Supongamos que B es equivalente a A y C es equivalente a B. Queremos probar ver que C equivalente a A.

$$e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(B)))) = e_k(e_{k-1}(\ldots e_2(e_1(\underbrace{e'_k(e'_{k-1}(\ldots e'_2(e'_1(A)))}_{B}))))) = C.$$

Esto prueba que C es equivalnte a A.

😆

Nota:-

$A \in F^{m\times n}$: sistema de ecuaciones homogeneo:

$$AX = 0 : \begin{cases} A_{11}X_1 & + & A_{12}X_2 & + & \dots & + & A_{1n}X_n & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & = & \vdots \\ A_{m1}X_1 & + & A_{m2}X_2 & + & \dots & + & A_{mn}X_n & = & 0 \end{cases}$$

Teorema 3.2.1

Sean $A, B \in F^{m\times n}$. Si A es equivalente por filas a B entonces A y B tienen el mismo conjunto de soluciones.

Nota:-

Dos sistemas son equivalentes si cada ecuacion de uno de ellos es combinacion lineal de las ecuaciones del otro.

Demostración: Por hipotesis $B = e_k(e_{k-1}(\dots(e_2(e_1(A)))))$ con $e_1, \dots, e_k$ operaciones elementales por filas. Basta probar el enunciado cuando

$$B = e(A) \quad e \text{ operacion elemental por filas. .}$$

Distinguimos los distintos tipos para e:

Tipo 1) $e : F_1 \longrightarrow cF_j \quad c \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & & A_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

El sistema $BX = 0$ es

$$\begin{matrix} A_{11}X_1 & + & A_{12}X_2 & + & \cdots & + & A_{1n}X_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ cA_{i1}X_1 & + & cA_{i2}X_2 & + & \cdots & + & cA_{in}X_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ A_{m1}X_1 & + & A_{m2}X_2 & + & \cdots & + & A_{mn}X_n & = & 0 \end{matrix} .$$

La i-esima ecuacion de $BX = 0$ es la $i-$esima ecuacion de $AX = 0$ multiplicado por C. Y las otras ecuaciones son las mismas de $AX = 0$

$\therefore$ $AX = 0$ y $BX = 0$ son equivalentes, pues $A = e'(B)$, con $e' : F_i \longrightarrow c^{-1}F_i$.

En $BX = 0$ Si $j \neq i$ la ecuacion j de $BX = 0$

$$0 \cdot \mathrm{Eq}_1^{(A)} + \cdots + 1Ec_j^{(A)} + \cdots + 0 \cdot Ec_m^{(A)}.$$

Si $i = j$, $0 \cdot \mathrm{Eq}_1^{(A)} + \cdots + cEc_i^{(A)} + \cdots + 0 \cdot Ec_m^{(A)} = 0$

Los demas tipos de operaciones elementales se tratan de manera similar.

Sea $B = e(A)$ con e de Tipo 2.

$$F_i : F_i + cF_j, i \neq j.$$

Corresponde a sumar a la ecuacion i de $AX = 0$ c veces la ecuacion j. Y las demas no cambian, luego son combinacion lineal una de la otra y por ende sistemas equivalentes.
Tipo 3: $F_i : F_i + F_j, i \neq j$.
La $r-$ esima ecuacion no cambia si $r \neq i, j$
Las ecuaciones i y j de $AX = 0$ se intercambian. Y las demas no cambian, luego son combinacion lineal una de la otra y por ende sistemas equivalentes. 😊

Nota:-

Dos matrices equivalentes por filas tienen sistemas de ecuaciones asociados equivalentes. Es decir tienen las mismas soluciones. Entonces combinando esto con el teorema anterior obtenemos lo siguiente

Corolario 3.2.1

$A, B \in F^{m\times n}$ son equivalentes por filas, entonces los sistemas homogeneos $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones.

Nota:-

Si quiero resolver $AX = 0$ puedo hacer operaciones elementales por filas en la matriz A para llegar a una matriz resultante B mas facil de resolver al hacer $BX = 0$.

Nota:-

Si dos sistemas tienen conjunto de soluciones distintos, implica por la reciproca que las matrices no son equivalentes.

Ejemplo 3.2.2 (8)b))

$$\begin{cases} 2y + z & = 0 \\ -x + y + 2z & = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$BX = 0 : \begin{cases} x - \frac{3}{2}z & = 0 \end{cases}.$$

Por el corolario las ecuaciones de $AX = 0$ son las mismas que las de $BX = 0$ donde
Es decir (x, y, z) es solucion si y solo si es de la forma $(-\frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}z, z)$

Es decir el conjunto solucion es

$$Solucion : \left\{(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}z, z) : z \in F\right\} = \{(3t, -t, 2t)t \in F\}.$$

Mas adelante veremos que tipo de matriz sencilla B busco para poder buscar las soluciones del sistema asociado a B equivalente a A.

Nota:-

REPASO:
Si tenemos

$$AX = 0, \quad A \in F^{m\times n}.$$

Si B es equivalente a A por filas, entonces $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones.

Decir que son equivalentes por filas significa que podemos obtener B a traves de A mediante una sucesion finita de operaciones elementales por fila.
Queremos encontrar alguna matriz B que sea muy "simple" de modo que $BX = 0$ se pueda resolver facilmente. Que las incognitas se puedan despejar sin ningun esfuerzo.

Definición 3.2.2: Matriz MRF

Una matriz R se dice reducida por filas si (MRF) si satisface lo siguiente

(1) El primer coeficiente no nulo de una fila no nula de R es igual a 1.

(2) Si el primer coeficiente no nulo de una fila de R esta en la columna j, entonces todos los demas coeficientes de la columna j son iguales a 0.

Ejemplo 3.2.3

(1) La matriz identidad $n \times n$: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$ es MRF.

(2) Las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

No son reducidas por filas.

A tiene un elemento-no-nulo como primer elemento en la fila 2. No cumple con la condicion (1). Si cumple con la condicion (2).

B tiene como coeficiente no nulo un 1 en la primera fila, luego necesita que todos los demas elemento en esa columna sean 0. Pero esta ese 2, luego no cumple con la condicion (2).

Nota:-

En la practica, si A es MRF se puede resolver facilmente. Pues, el coeficiente no nulo en cada columna representa la una incognita.

Observación 3.2.1

$$A \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MRF!} \quad B \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ MRF! .}$$

Definición 3.2.3: Coeficientes Principales

El primer coeficiente no nulo de una fila no nula de una matriz A se llama un coeficiente principal de A. A MRF los coeficientes principales son todos uno.

Nota:-

Los coeficientes principales solo nos importan cuando la matriz es MRF.

Teorema 3.2.2

Sea $A \in F^{m \times n}$. Entonces existen operaciones elementales por fila $e_1, \ldots, e_k$ tales que $e_k(e_{k-1}(\ldots e_1(A))) = R$ es MRF. En particular A es equivalente por filas a una matriz reducida por filas.

Nota:-

Mediante una sucesion de operaciones elementales por filas **siempre** puedo llevar a A a una matriz equivalente B MRF.

Demostración: Si $A = 0$ no hay nada que probar.
Supongamos que la primera fila no nula de A es la fila i, F_i , $1 \leqslant i \leqslant m$ (i.e. $F_l = 0 \quad \forall l < i$)
Sea A_{ij} el primer coeficiente no nulo de F_i. Sea e_1 : multiplicar a la F_i por el escalar no nulo $A_{ij}^{-1}(\neq 0)$ (valido pues $A_{ij} \neq 0$ y F cuerpo, luego existe el inverso).
Obtenemos $e_1(A)$, que tiene las mismas primeras filas no nula que A, pero con un 1 en la posicion A_{ij}.
A ese coeficiente principal 1 lo llamo pivot, ahora para cada $m \geqslant l > i$ tal que $A_{lj} \neq 0$. Sea e_l la operacion elemental por filas e_l : Reemplazo F_l por $F_l - A_j \cdot F_i$
Obtenemos luego de aplicar e_l's a $e_1(A)$ una matriz A' donde en la columna j tiene todos coeficiente 0 excepto en la fila i, donde tendra un coefciente principal igual a 1.
Si todas las filas $\neq F_i$ de A' son nulas $\Rightarrow A'$ MRF.
Si no, sea F_t, con $i < t \leqslant m$ la siguiente fila no nula de A'. Repetimos el procedimiento anterior.

Observación 3.2.2 $j' \neq j$

Es decir si $A'_{tj'}$ es el primer coeficiente no nulo de A' entonces multiplicamos F_t por $A_{tj'}^{-1}$ y obtenemos una matriz $e(A')$ donde ahora tengo otro 1 principal en $A_{tj'}$.
Ahora, para cada $1 \leqslant l \leqslant m$, tal que el coeficiente lj' de $e(A')$ sea no nulo (si hubiera alguno) hacemos
e'_l : Reemplazar F_l por $F_l - e(A')_{lj'} \cdot F_t$.

Obtenemos una matriz $e(A')'$ donde en la columna j' tengo todos los coeficientes 0 excepto en la fila t donde tengo un 1 principal.
Esto no altera lo que habiamos conseguido en la fila i: el primer coeficiente $\neq 0$ es 1 y todos los demas en su columna son 0.
Iterando el proceso anterior, llegamos a una matriz R MRF. ☺

Ejemplo 3.2.4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 19 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \cdot \frac{1}{19}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{19} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+2F_3 \text{ y } F_2+4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{18}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{19} \end{pmatrix}.$$

Esta ultima matriz es MRF. Y ademas es **escalonada**.

Si llamo R a la ultima matriz, notar que

Nota:-

El sistema

$$AX = 0 \text{ tiene las mismas soluciones que } RX = 0.$$

Pero $RX = 0$ es mucho mas facil de despejar, pues representa el sistema

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{19}x_4 \\ x_2 = -\frac{18}{19}x_4 \\ x_3 = \frac{24}{19}x_4 \end{cases}.$$

Luego la solucion es

$$\left\{ \left(\frac{9}{19}t, \frac{18}{19}t, -\frac{24}{19}t, t \right) t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aqui x_4 es una **variable independiente** pues no depende de las demas. Las variables dependientes vienen de mis pivotes (mis 1 principales), mis x_1, x_2, x_3 son mis variables **dependientes**.

Nota:-

Las variables dependientes solo aparecen 1 vez en cada ecuacion y con coeficientes iguales a 1. Las variables independientes pueden aparecer varias veces en cualquier ecuacion.

Definición 3.2.4: Matriz MERF

Sea $R \in F^{m \times n}$.
Decimos que R es escalon reducida por filas (MERF) si cumple las siguientes condiciones:

(1) R es MRF.

(2) Ninguna fila nula de R precede a una fila no nula.

(3) Si R tiene r (las primeras r) filas no nulas, sea para cada $1 \leqslant i \leqslant r$ y $1 \leqslant k_i \leqslant n$ tal que el coeficiente principal de la fila i esta en la columna k_i. Entonces $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$

Nota:-
En otras palabras, R es MERF si es MRF y ademas sus filas no nulas estan ordenadas de arriba hacia abajo.

Ejemplo 3.2.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r = 2,\ k_1 =,\ k_2 = 4.$$

Esta matriz es MERF.

Corolario 3.2.2

Toda matriz $A \in F^{m \times n}$ es equivalente por filas a una MERF.

Demostración: Resulta del teorema anterior, ya que toda MRF puede llevarse a una MERF mediante permutaciones de fila.

😄

Nota:-
Como toda matriz por el teorema anterior es equivalente a una reducida por filas y ademas puedo ir de una MRF a una MERF haciendo intercambio entre las filas, entonces toda matriz es equivalente a una MERF.

3.3. Repaso

Vimos que es una MRF con sus dos condiciones. Que cualquier matriz es equivalente por filas a una MRF. La podemos llevar mediante una sucesion de operaciones elementales.
Vimos que es una MERF con sus dos condiciones para ser MRF y dos condiciones extra. Y que como podemos llegar de toda matriz a una MRF y podemos ir de una MRF intercambiando filas a una MERF, entonces que toda matriz A es equivalente por filas a una MERF.
Sea $R \in F^{m \times n}$ MERF, veamos cuales son las soluciones del sistema homogeneo

$$RX = 0.$$

Si R tiene r filas no nulas ($\therefore$ las primeras r). En particular $r \leqslant m$. Digamos que los coeficientes principales correspondientes estan en las columnas $k_1, \ldots, k_n$.

Sea

$$\{1,\dots,n\} = \{k_1,\dots,k_r\} \cup J, \quad J = \left\{1 \leqslant i \leqslant n : i \neq k_j \ \forall j = 1,\dots,r\right\}.$$

Entonces el sistema $RX = 0$ se escribe en la forma

$$\begin{aligned} x_{k_1} + \sum_{j\in J} R_{1j}x_j &= 0 \\ x_{k_2} + \sum_{j\in J} R_{2j}x_j &= 0 \\ &\vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j\in J} R_{rj}x_j &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ las soluciones se obtienen dando valores arbitrarios a $x_j : j \in J$ y poniendo

$$x_{k_j} = -\sum_{j\in J} R_{ij}x_j \qquad (*).$$

Nota:-

Arbitrario significa que x_j puede tomar cualquier valor en el cuerpo.

Observación 3.3.1

Si $r = n$, entonces $J \neq \emptyset$

y la unica solucion sera la trivial: $x_{k_1} = 0 = \cdots = x_{k_n}$

Teorema 3.3.1

Si $A \in F^{m\times n}$ tal que $m < n$, entonces el sistema homogeneo $AX = 0$ tiene soluciones no triviales.

Demostración: Como vimos antes, existe $R \in F^{m\times n}$ MERF tal que los sistemas $AX = 0$ y $RX = 0$ son equivalentes y luego tienen las mismas soluciones. Las soluciones de $RX = 0$ estan dadas por $(*)$.
Si R tiene r filas no nulas $\Rightarrow r \leqslant m < n \quad \therefore J \neq \emptyset$
Sea $j \in J$, dando a x_j el valor $1 \neq 0$ obtenemos una solucion no trivial.

☺

Llamaremos a las $x_j,\ j \in J$ variables independientes del sistema. Y a $x_{k_1}\dots x_{k_r}$ variables dependientes.

Corolario 3.3.1

Sea $A \in F^{n\times n}$. Entonces el sistema homogeneo $AX = 0$ admite solo la solucion trivial si y solo si A es equivalente por filas a la matriz identidad $n \times n, I_n$.

Demostración: $\Leftarrow$
Si A equivalente a I_n, entonces $AX = 0$ y $I_nX = 0$ tienen las mismas soluciones, y el ultimo solo admite la solucion trivial $(x_1 = \cdots = x_n = 0.\ )$ ☺

Demostración: $\Rightarrow$

Sea R MERF equivalente por filas a A. Por hipotesis $RX = 0$ solo admite la solucion trivial (pues $RX = 0$ es equivalente a $AX = 0$) $\Rightarrow$ no tiene variables independientes.

Como antes digamos que R tiene r filas no nulas y sean $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant n$ tal que el coeficiente principal de la fila i esta en la columna k_i.

$$\therefore \{k_1, \ldots, k_r\} = \{1, \ldots, n\} \qquad (J = \emptyset)$$

Como $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant n \quad \Rightarrow \quad r = n$.

Luego $R \in F^{n\times n}$ MERF no tiene filas nulas.

La condicion subrayada sobre $k_i : 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots k_n \leqslant n$ fuerza $k_i = i \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

$\therefore R = I_n$ (por la condicion de ser reducida por filas). 😃

Consideremos el sistema general $AX = Y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in F^{m\times 1}$. El metodo para resolverlo es analogo al anterior, pero realizando operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema:

$$(A|Y) = \tilde{A}.$$

Si obtenemos a partir de A una matriz MERF $R \in F^{m\times n}$ mediante operaciones elementales por filas, entonces las mismas operaciones aplicadas a $\tilde{A}$ nos daran una matriz $\tilde{R} = (R|Z), Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in F^{m\times 1}$.

Que es la matriz ampiada del sistema

$$RX = Z$$

Siendo $r, \quad 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant n$ y J como antes, las soluciones cuando existan estaran dadas por

$$\begin{matrix} x_{k_1} = z_1 - \sum_{j\in J} R_{ij} x_j \\ \vdots \\ x_{k_r} = z_r - \sum_{j\in J} R_{ij} x_j \end{matrix} .$$

La condicion necesaria y suficiente para que haya solucion es

$$\begin{matrix} 0 = z_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = z_m \end{matrix} \quad \longleftarrow \text{ Provienen de las filas nulas de } R \ .$$

Ejemplo 3.3.1

Busquemos todos las posibles $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tales que el sistema $\begin{cases} x - z = y_1 \\ x - y + z = y_2 \\ 2x - y = y_3 \end{cases}$.

Formo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$(A|Y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 2 & -1 & 0 & y_3 \end{array}\right)$$

Comienzo a operar elementalmente (xd)

$$\xrightarrow{F_2 - F_1 \text{ y } F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & -1 & 0 & y_3 - 2y_1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 - 2y_1 - y_2 + y_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right).$$

Que representa al sistema

$$\begin{cases} x - z &= y_1 \\ y - 2z &= y_1 - y_2 \\ 0 &= -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}.$$

O en matrices

$$RX = Z$$

Con

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } \quad Z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 - y_2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ El sistema $AX = Y$ tiene solucion si y solo si

$$-y_1 - y_2 + y_3 = 0.$$

Si este es el caso, las soluciones del sistema estan determinadas por el siguiente sistema

$$\begin{array}{l} x = y_1 + z \\ y = y_1 - y_2 + 2z \\ z: \text{ variable indep. } z = t \in F \end{array}.$$

$$\{(y_1 + t, y_1 - y_2 + 2t, t) : t \in F\}$$

Por ejempo, el sistema tiene solucion si $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y las soluciones son

$$\{(1 + t, 1 + 2t, t) : t \in F\}.$$

Definición 3.3.1

Sean $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times n}$. El producto AB se define como la matriz $\in F^{m\times n}$ en la forma

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} A_{il}B_{lj} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Observación 3.3.2

AB solo esta definido si el numero de columnas de A coincide con el numero de filas de B

Ejemplo 3.3.2

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB$ no esta definido.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $A \in F^{m\times n}, X \in F^{n\times 1}$ Esta definido $AX \in F^{m\times 1}$. De manera que $AX = Y$ resulta una identidad entre matrices pues el coeficiente de AX en la fila i es exactamente

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \cdots + A_{in}X_n = Y_i.$$

Proposición 3.3.1

Sean $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times t}, C \in F^{t\times n}$.
Entonces

$$(AB)C \text{ y } A(BC).$$

estan definidos y son iguales.

Demostración: Como $AB \in F^{m\times t}, C \in F^{t\times n} \Rightarrow ABC$ esta definido y es $m \times n$.
$A \in F^{m\times k}, BC \in F^{k\times n} \Rightarrow A(BC)$ esta definida y es $m \times n$.

$$
\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{l=1}^{t} \underline{(AB)_{il}} C_{lj} \\
&= \underline{\sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{s=1}^{k} A_{is} B_{sl} \right)} C_{lj} \\
&= \sum_{s=1}^{k} A_{is} \underline{\left(\sum_{l=1}^{t} B_{sl} C_{lj} \right)} \\
&= \underline{\sum_{s=1}^{k} A_{is} \left(BC\right)_{sj}} \\
&= [A\left(BC\right)]_{ij}
\end{aligned}
$$

Proposición 3.3.2

$A \in F^{m \times n}$, entonces

$$I_n A \stackrel{*}{=} A I_m = A.$$

Demostración: Veamos (*) $\forall i, j \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad 1 \leqslant j \leqslant n$

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} (I_m)_{il} A_{lj} = (I_m)_{ii} A_{ij} = A_{ij}.$$

Donde

$$(I_m)_{il} = \delta_{il} = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}.$$

Ejemplo 3.3.3

Sea $A \in F^{n \times k}$

$$0_{m \times n} \cdot A = 0_{m \times k}.$$

$$A \cdot 0_{k \times u} = 0_{n \times u}.$$

3.4. Repaso

Se vio como multiplicar 2 matrices. Si $A \in F^{m \times k}, B \in F^{k \times n}$, entonces $AB \in F^{m \times n}$. Donde

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} A_{il} B_{lj} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

La multiplicacion de matrices es asociativa, es decir, $A \in F^{m \times k}, B \in F^{k \times t}, C \in F^{t \times n}$, entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

Observación 3.4.1 El producto sin embargo **NO** es conmutativo, incluso cuando estan definidos los productos AB y BA.

Otro resultado importante es que si $A \in F^{m\times n}$, entonces $I_n A \overset{*}{=} A I_m = A$. Donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$ y I_m es la matriz identidad de $m \times m$.

Ejemplo 3.4.1 ($A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$)

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.4.2 (Dar ejemplos $n \times n$ para cualquier $n \geqslant 2$.)

3.5. Transpuesta de una matriz

Definición 3.5.1: Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de $A \in F^{m\times k}$, es $A^t \in F^{k\times m}$ donde

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}).$$

Nota:-
Se intercambian filas por columnas.

Nota:-
Es importante notar que la transpuesta de la transpuesta de una matriz es la matriz original.

Respecto al producto de matrices, sea $B \in F^{k\times n}$

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Donde $A^t \in F^{k\times m}, B^t \in F^{n\times m}$, entonces $(AB)^t \in F^{n\times m}$ y $B^t A^t \in F^{n\times m}$.

Observación 3.5.1 Sea $A \in F^{m\times k}, B \in F^{k\times n}$

La fila i de AB es la combinacion lineal

$$A_{i1}F_1(B) + A_{i2}F_2(B) + \cdots + A_{ik}F_k(B).$$

donde $F_j(B)$: j-esima fila de B .

Ejemplo 3.5.1 ($A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$)

$$AB = \begin{pmatrix} 1F_1 + 0F_2 + 0F_3 \\ 0F_1 + 1F_2 + (-1)F_3 \\ 0F_1 + 0F_2 + 1F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e(B).$$

donde $e : F_2 : F_2 - F_3$.

3.6. Matriz elemental

Definición 3.6.1: Matriz elemental

Una **matriz elemental** $n \times n$ es una matriz

$$E = e(I_n), .$$

donde e es una operacion elemental por filas.

Ejemplo 3.6.1 ($n = 2$)

Tipo 1) Multiplicar una fila por c no nulo. $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, c \neq 0$.

Tipo 2) Sumar a una fila el multiplo de otra. $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in F$.

Tipo 3) Permutar dos filas. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observación 3.6.1 Para un n dado hay

Tipo 1) n (elementos de la diagonal)

Tipo 2) $n^2 - n = n(n-1)$ (elementos fuera de la diagonal)

Tipo 3) $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ (maneras de permutar las filas)

matrices elementales.

Teorema 3.6.1

Sea $A \in F^{m \times n}$ y sea e una operacion elemental por filas. Entonces

$$e(A) = EA, \quad \text{donde} \quad E = e(I_m) \in F^{m \times m}.$$

Demostración: Sean $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Comparemos los coeficientes i, j, de cada lado. Distinguimos los distintos tipos de operaciones elementales e.

Tipo 1) e : multiplicar la fila r por un escalar $c \neq 0$

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \text{ si } i \neq r \\ cA_{rj} \text{ si } i = r \end{cases}.$$

$$E = e(I) \qquad E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & , i \neq r \\ c\delta_{rk} & , i = r \end{cases}.$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} c\delta_{rk}A_{kj} = cA_{rj}, & i = r \end{cases}.$$

$\therefore e(A) = EA.$

Tipo 2) e : Reemplazar fila r por $F_r + cF_s$, $r \neq s$.

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & i = r \end{cases}.$$

$$E = e(I) \qquad E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & , i \neq r \\ S_{rj} + cS_{sj} & , i = r \end{cases}.$$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r \\ \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}A_{kj} + c\sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}A_{kj} = A_{rj} + cA_{sj}, & i = r \end{cases}.$$

Tipo 3) e : Permutar fila r y s . Queda de ejercicio.

😄

Corolario 3.6.1

Sean $A, B \in F^{m\times n}$, entonces son equivalentes:

(I) B es equivalente por filas a A.

(II) $B = E_l E_{l-1} \dots E_2 E_1 A$, donde $E_1, \dots, E_l \in F^{m\times m}$ son matrices elementales.

(III)

Demostración:

(I) Significa que

$$B \overset{(*)}{=} e_l(e_{l-1} \dots e_2(e_1(A)) \dots).$$

con $e_1, \dots, e_l$ operaciones elementales por filas. Luego

$$E_i = e_i(I).$$

Por teorema $(*) \Leftrightarrow B = E_l \dots E_2 E_1 A$

😊

Ejemplo 3.6.2 ($A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$)

Reduciendo llego a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = R \text{ MERF} .$$

Por el corolario deberia chequear que

$$R = \dots E_2 E_1 A \quad ?? .$$

Viendo las operaciones elementales que use para llegar a R ahora las aplico a la identidad, es decir busco

$$E_1 = e_1(I_2) = \dots .$$

$$E_2 = e_2(I_2) = \dots .$$

$$E_3 = e_3(I_2) = \dots .$$

$$E_4 = e_4(I_2) = \dots .$$

Y voy a tener que

$$R = E_4 E_3 E_2 E_1 A.$$

Nota:-

Notar el orden pues el producto no es conmutativo.

Observación 3.6.2

Si e : operacion elemental por filas. Sabemos que $\exists\ \tilde{e}$ del mismo tipo que e y tal que $\tilde{e}(e(A)) = e(\tilde{e}(A)) = A$ $\forall A$ adecuada.

Aplicado esto a $I = A \Rightarrow \tilde{E}E = E\tilde{E} = I$.

3.7. Matriz Inversa

Definición 3.7.1

Sea $A \in F^{n\times n}$. Una **inversa a izquierda** de A es una matriz $B \in F^{n\times n}$: $BA = I_n$.

Definición 3.7.2

Sea $A \in F^{n\times n}$. Una **inversa a derecha** de A es una matriz $C \in F^{n\times n}$: $AC = I_n$.

Definición 3.7.3

Si B es inversa a izquierda y a derecha, B se dice **inversa bilateral** o **inversa** de A y en tal caso A se dice **invertible**

Lema 3.7.1

Supongamos que A tiene inversa a izquierda B e inversa a derecha C. Entonces $B = C$

Demostración:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

☺

Corolario 3.7.1

Si A es inversible, su inversa es unica. Se denota A^{-1}.

Proposición 3.7.1

Sea $A \in F^{n\times n}, B \in F^{n\times n}$.

(I) A invertible $\Rightarrow A^{-1}$ es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

(II) A, B invertible $\Rightarrow AB$ es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración:

(I) Por hipotesis:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Luego A es inversa de A^{-1}, en particular A^{-1} es invertible.

(II) Hacemos el producto:

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

☺

3.8. Repaso

La clase pasada se vio

(1) $A \in F^{n\times n}$ invertible $\Rightarrow A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$.

(2) El producto de matrices invertibles es invertible.

3.9. Inversa de una matriz elemental

Teorema 3.9.1

Si $E \in F^{n\times n}$ es una matriz cuadrada elemental, entonces E es invertible y su inversa E^{-1} es tambien una matriz elemental elemental del mismo tipo que E.

Demostración: Por hipotesis E es una matriz elemental, por definicion esto significa que $E = e(I_n)$, donde e es una operacion elemental por filas.
Sea $\tilde{e}$ la operacion elemental inversa de e y sea $\tilde{E} = \tilde{e}(I_n)$ es una atriz elemental.

$$\underbrace{\tilde{E}E = \tilde{e}(E)}_{\text{resultado anterior}} = \tilde{e}e(I) = I$$

Analogamente

$$E\tilde{E} = I.$$

$\therefore$ E es invertible y $E^{-1} = \tilde{E}$. ☺

Ejemplo 3.9.1

(1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. Entonces $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $E^{-1} = E$ (Pues la inversa es permutar de nuevo las mismas filas.)

Corolario 3.9.1

Sean $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales. Entonces el producto $E_1 \ldots E_k$ es invertible y

$$(E_1 \ldots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \ldots E_1^{-1}.$$

Teorema 3.9.2

Sea $A \in F^{n \times n}$. Son equivalentes:

(I) A invertible.

(II) A equivalente por filas a I_n.

(III) A es producto de matrices elementales.

Demostración: Notemos primero lo siguiente: Si $R \in F^{n \times n}$ MERF. R es invertible si y solo si R $R = I_n$, si y solo si R no tiene filas nulas.
Sea R MERF tal que A equivalente por filas a R.

$$(*) \qquad A = E_k \ldots E_2 E_1 R.$$

Donde $E_k, \ldots, E_1$ son matrices elementales $n \times n$.

(I) $\Rightarrow ii)$ Tenemos $R = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} A$.

Si A invertible $\Rightarrow R$ invertible $\Rightarrow R = I_n$.

$\therefore$ vale ii)

(II) $\Rightarrow iii)$ Si $A \rightsquigarrow I_n$, $R = I_n$ y sigue de (*) que A es producto de matrices elementales.

(III) $\Rightarrow i)$ SI $A = E_k \dots E_1$, E_i elementales $\Rightarrow A$ invertible.

☺

Corolario 3.9.2

Sea $A \in F^{n\times n}$ invertible. Si $e_1, \dots, e_k$ son operaciones elementales por filas tal que $e_k(\dots e_2(e_1(A))\dots) = I_n$, entonces

$$e_k(\dots e_2(e_1(I_n))\dots) = A^{-1}.$$

Demostración:

Sean $E_1, \dots, E_k$ las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales $e_1, \dots, e_k$. Entonces

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I.$$

Como A es inversible, multiplicando A^{-1} a ambos miembros

$$E_k \dots E_2 \underbrace{E_1}_{e_1(I_n)} = A^{-1}.$$

Que es lo mismo a

$$e_k(\dots e_2(e_1(I_n))\dots) = A^{-1}.$$

☺

Obtenemos el siguiente metodo para calcular A^{-1} cuando exista:

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{e_k} I_n.$$

$$I \xrightarrow{e_1} I_1 \xrightarrow{e_2} I_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{e_k} A^{-1}.$$

Luego para dinamizar las cuentas puedo hacer

$$A|I_n \xrightarrow{e_1} A|I_1 \xrightarrow{e_2} A|I_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{e_k} I_n|A^{-1}.$$

Ejemplo 3.9.2

(1) $A = \begin{pmatrix} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces A **NO** es invertible.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 01 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = I|A^{-1}.$$

(3)

Nota:-

$R \in F^{n\times n}$ tiene fila nula, digamos la fila r y $B \in F^{n\times n}$. Entonces RB tiene la fila r nula.
Pues la fila r de RB es $R_{r1}F_1(B) + \cdots + R_{rn}F_n(B)$. Como todos los R_ri son 0, la fila r es 0.
En particular $RB \neq I_n$.

Nota:-

Si los coeficientes de A estan en un subcuerpo de F, los coeficientes de la inversa (si tiene) tambien lo estaran.

Corolario 3.9.3

$A, B \in F^{m\times n}$. Entonces A equivalente por filas a B si y solo si $B = PA$, donde $P \in F^{m\times m}$ invertible.

Demostración:

$\Rightarrow B = \underbrace{E_k \dots E_2 E_1}_{P \text{ invertible}} A$, donde E_i son matrices elementales $m \times m$

$\Leftarrow P$ invertible y $B = PA = E_k \dots E_1 A$ entonces,

$$P = E_k \dots E_2 E_1 \quad \Rightarrow \quad B \text{ equivalente a } A.$$

Con E_i matrices elementales. ☺

Teorema 3.9.3

$A \in F^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) A es invertible.

(II) $AX = 0$ **solo** admite la solucion trivial

(III) Para todo $Y \in F^{n\times 1}$, el sistema $AX = Y$ admite solucion y esta es unica.

Demostración:

(I) $\Leftrightarrow ii)$ Sea R MERF, $n \times n$ tal que A equivalente por filas a R. Entonces,

$$A = PR, \quad P \text{ invertible } n \times n \ .$$

y $AX = 0$ y $RX = 0$ tienen las mismas soluciones.

Sabemos A invertible $\Leftrightarrow R = I_n \Leftrightarrow RX = 0$ admite solo la solucion trivial.

Veamos ahora que

(I) $\Rightarrow iii)$ Sea $Y \in F^{n\times 1}$. A invertible, puedo tomar $X = A^{-1}Y \in F^{n\times 1}$ luego

$$AX = A(A^{-1}Y) = \underbrace{(AA^{-1})}_{I_n} Y = Y..$$

Luego $X = A^{-1}Y$ es solucion $AX = Y$

$iii) \Rightarrow i)$ Sea R MERF tal que $A = PR$, P invertible. Tomamos $Y = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}$. Luego

$$AX = Y \text{ tiene solucion } X.$$

$$PRX = PY = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X \text{ solucion de } RX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ R no tiene filas nulas $\Rightarrow R = I_n \Rightarrow A$ invertible. 😃

Corolario 3.9.4

$A \in F^{n\times n}$ tal que A es invertible a izquierda (y por algo visto anteriormente a derecha tambien) $\Rightarrow A$ es invertible.

Demostración:

Supongamos A invertible a izquierda $\Rightarrow AX = 0$ solo admite la solucion trivial. (Si $BA = I \Rightarrow X = BAX = B0 = 0$).

Si A a derecha, digamos $AC = I \Rightarrow C$ invertible a izquierda $\Rightarrow C$ invertible y $C^{-1} = A$ es invertible.

☺

3.10. Determinante

Nota:-

Puedo definir determinante por el grupo de combinaciones y como la unica funcion n lineal alternada (qsy, algo asi), pero es mucho mas dificil trabajar con esas definiciones. Se lo definira en esta materia en terminos de una sumatoria, mas adelante.

Definición 3.10.1

Sea $A \in F^{n\times n}$, para cada $1 \leqslant i, j \leqslant n$, denotamos por $A(i|j)$ a la matriz $(n-1)\times(m-1)$ que se obtiene de A suprimiendo la fila i y la columna j.

Ejemplo 3.10.1

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Luego $A(1|1) = d, A(2|2) = a, A(1|2) = c, A(2|1) = b$.

Si por otro lado tengo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Entonces } A(2|3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 3.10.2

Sea $A \in F^{n\times n}$.

Se define $det(A)$, el determinante de A, de manera recurrente (o recursiva), como sigue:

- Si $n = 1$,

$$det(A) = A \in F$$

- Si $n > 1$,

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} \cdot detA(i|1)$$

Ejemplo 3.10.2

$n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$det(A) = (-1)^{1+1} a \cdot \underbrace{detA(1|1)}_{d} + (-1)^{2+1} c \cdot detA \underbrace{(2|1)}_{b} = ad - cb.$$

3.11. Repaso

(1) Vimos determinante como una sumatoria. Donde $A(i|1)$: es A pero suprimiendo la fila i columna 1.

(2) $detA(i,j)$ lo llamo **menor** i,j de A.

(3) Sea $C_{i,j} = (-1)^{i+j} detA(i|j)$ cofactor i,j de A, llamamos
$C = (C_{ij}), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$ a la matriz de cofactores.

(4) $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$

Mas adelante veremos como calcular el determinante sin hacer tantas operaciones ($n!$) con la forma de sumatoria. Y veremos que me dice el determinante.

Definición 3.11.1

$A \in F^{n \times n}$ se dice triangular superior si $A_{ij} = 0 \; \forall i > j$.

Definición 3.11.2

$A \in F^{n \times n}$ se dice triangular inferior si $A_{ij} = 0 \; \forall i < j$.

Proposición 3.11.1

$A \in F^{n \times n}$ triangular superior, entonces
$$det(A) = \prod_{i=n}^{n} A_{ii}$$

Demostración: Por induccion sobre $n \in \mathbb{N}$
Caso base, el resultado es claro. $n = 1$, $det(A) = A_{11}$.
Caso inductivo.
Supongamos $n > 1$, A triangular superior.

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} det(A|1)$$

.
Por hipotesis inductiva, el resultado vale para $A(i|1), i = 1, \ldots, n$
Noto que

$$A(1|1) = \begin{pmatrix} A_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es triangular superior. $\therefore detA(1|1) = A_{22} \dots A_{nn}$
Por hipotesis, $A_{i1} = 0, \forall i > 1$ luego

$$det(A) = (-1)^{i+1} A_{11} detA(1|1) = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn}.$$

☺

Veo algunos ejemplos con matrices triangulares superiores.

Ejemplo 3.11.1

(1) $det(I_n) = 1$, $det(-I_n) = (-1)^n$, de la misma forma $det(cI_n) = c^n$

(2) R MERF $(n \times n\ ) \Rightarrow R$ triangular superior. Luego

$$det(R) = \begin{cases} 0, & \text{si } R \text{ tiene una fila nula} \\ 1, & \text{pues } R = I_n \end{cases}.$$

Teorema 3.11.1

$A \in F^{n \times n}$, y sean e una operacion elemental por filas y $B = e(A)$. Entonces,

(1) Si e : multiplicar la fila r por el escalar $c \in F - \{0\}$,

$$det(B) = c \cdot det(A)$$

(2) Si e : sumar a F_r c veces F_s, $r \neq s$, $c \in F$,

$$det(B) = det(A)$$

(3) Si e : permutar F_r y F_s, $r \neq s$,

$$det(B) = -det(A).$$

Demostración: Caso por caso por induccion sobre n.

(1) $A \xrightarrow{cF_r} B \qquad B(i|1) = \begin{cases} \tilde{e}(A(i|1)), i \neq r \\ A(r|1), \quad i = r \end{cases} \; B_{i1} = \begin{cases} A_{i1}, i \neq r \\ cA_{r1}, i = r \end{cases}$

Por HI:

$$detB(i|1) = \begin{cases} c \cdot detA(i|1), i \neq r \\ detA(R|1), i = r \end{cases}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
det(B) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} detB(i|1) \\
&= (-1)^{r+1} B_{r1} detB(r|1) + \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} B_{i1} detB(i|1) \\
&= (-1)^{r+1} cA_{r1} detA(r|1) + \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} c \cdot detA(i|1) \\
&= c\left((-1)^{r+1} A_{r1} detA(r|1) + \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} A_{ij} detA(i|1)\right) \\
&= cdet(A).
\end{aligned}$$

Esto prueba el caso 1).

Observación 3.11.1

El caso 1) tambien es valido cuando $c = 0$.

Se usara el siguiente lema para demostrar el siguiente caso

Lema 3.11.1

Sean $A, B, C \in F^{n\times n}$ tal que A, B solo difieren en una fila y C solo difiere de A y B en la misma fila, que es la sma de la fila de A y la fila de B:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r + \tilde{F}_r \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$detC = detA + detB.$$

Demostración: Induccion sobre $n \geqslant 1$. Si $n = 1$, es claro: $C = A + B$.

Si $n > 1$:

$$\begin{aligned}
detC &= \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} C_{i1} detC(i|1) + (-1)^{r+1} C_{r1} detC(r|1) \\
&= \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} detA(i|1) + detB(i|1) + (-1)^{r+1}(A_{r1} + B_{r1}) detA(r|1) \\
&= \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} A_{i1} detA(i|1) + \sum_{i\neq r} (-1)^{i+1} B_{i1} detB(i|1) + (-1)^{r+1} A_{r1} detA(r|1) + (-1)^{r+1} B_{r1} detA(r|i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} A_{i1} detA(i|1) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} detB(i|1) \\
&= detA + detB
\end{aligned}$$

😄

Observación 3.11.2

No es cierto que en general
$$det(A+B) = detA + detB.$$

Ejemplo 3.11.2

Dar un ejemplo . (eg: tomando triangulares superiores).

(2) $A \xrightarrow{F_r:F_r+cF_s} B$

$$B_{i1}\begin{cases} A_{i1}, & i \neq r \\ A_{r1} + c\cdot A_{s1}, & i = r \end{cases}.$$

Sea $\tilde{e}$: sumar a una fila un multiplo de otra.

$$B_{i1}\begin{cases} \tilde{e}(A(i|1)), & i \neq r \\ A(r|1), & i = r \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{i\neq r}(-1)^{i+1}B_{i1}detB(i|1) + (-1)^{r+1}B_{r1}detB(r|1) \\ &= \sum_{i\neq r}(-1)^{i+1}A_{i1}\overbrace{detA(i|1)}^{\text{HI}} + (-1)^{r+1}(A_{r1}+cA_{s1})detA(r|1) \\ &= \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}A_{i1}detA(i|1) + (-1)^{r+1}cA_{s1}detA(r|1) \end{aligned}$$

(3) e : permutar dos filas $(r, s,$ con $r \neq s)$.

$$B = e(A), \quad det(B) = -det(A)..$$

Notemos que permutar F_r y F_s ($r < s$) equivale a realizar una sucesion de $2(s-r)-1$ permutaciones de filas consecutivas.

Nota:-

Si probamos 3) en el caso en que las filas son consecutivas, como cada permutacion aporta -1, finalmente

$$detB = (-1)^{2(s-r)-1}detA = -det(A).$$

Supongamos que las iflas filas son consecutivas: r y $r+1$.

Hacemos induccion sobre n, el tamano de la matriz. Si $n = 1$ no hay nada que probar.

Si $n > 1$.

$$\begin{aligned} detB &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}B_{i1}detB(i|1) \\ &= \sum_{i\neq r,r+1}(-1)^{i+1}B_{i1}detB(i|1)+(-1)^{r+1}B_{r1}detB(r|1)+(-1)^{r+2}B_{r+1,1}detB(r+1|1) \end{aligned}$$

Nota:-

Como $i \neq r, \wedge i \neq r+1$, $B(i|1)$ se obtiene de $A(i|1)$ permutando dos filas consecutivas.
Por HI

$$detB(i|1) = -detA(i|1).$$

Por otro lado

$$B_{r1} = A_{r+1}, \quad B(r|1) = A(r+1|1).$$

$$B_{r+1,1} = A_{r,1}, \quad B(r+1|1) = A(r|1).$$

Luego me queda

$$\begin{aligned} &= \sum_{i\neq r,r+1}(-1)^{i+1}A_{i1}(-1)detA(i|1)+(-1)^{r+1}A_{r+1,1}detA(r+1|1)+(-1)^{r+2}A_{r1}detA(r|1) \\ &= (-1)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}A_{i1}detA(i|1) \\ &= (-1)det(A) \end{aligned}$$

😃

Lema 3.11.2

Si A tiene dos filas iguales, entonces $det(A) = 0$.

Demostración: Sea A matriz donde $F_r = F_s$ con $r \neq s$. Luego, intercambiando la fila r con la s, obtenemos la misma matriz. Es decir $A \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} A$. Por el resultado que vimos que intercambiar las filas cambia el signo del determinante, tenemos que $detA = -detA$, y por lo tanto $detA = 0$. 😃

Lema 3.11.3

Si A tiene una fila nula, entonces det $A = 0$.

Demostración: Sea F_r una fila nula de A, por lo tanto multiplicar por 2 esa fila no cambia la matriz. Es decir $A \xrightarrow{2F_r} A$. Por el resultado que vimos que multiplicar una fila por un escalar multiplica el determinante por ese escalar, tenemos que $detA = 2detA$, y por lo tanto $detA = 0$.

😃

Lema 3.11.4 Sea $E = e(I_n)$ matriz elemental.

(1) Si $e : cF_r,\ c \neq 0 \implies det(E) = c$.

(2) Si $e : F_r + cFs,\ r \neq s \implies det(E) = 1$.

(3) Si $e : F_r \leftrightarrow F_s,\ r \neq s \implies det(E) = -1$.

Demostración: Se deduce facilemente del teorema anteriro y del hecho de que $det(Id_n) = 1$.

😊

Lema 3.11.5

Sean A, E matrices tal que E es elemental, entonces $det(EA) = det(E)det(A)$.

Demostración: Tenemos $EA = e(A)$, si $E = e(I_n)$.
El resultado sigue dle teorema anterior, junto con el lema que determina $det(E)$.

(Tipo 1) $e : cF_r$. Entonces $det(EA) = det(eA) = cdet(A) = det(E)det(A)$.

Analogamente se demuestra para (2) y (3).

😊

Corolario 3.11.1

$A \in F^{n\times n}$, $F_1, \dots, F_k \in F^{n\times n}$ elementales

$$det(E_k \cdots E_1 A) = det(E_k) \cdots det(E_1) det(A).$$

Teorema 3.11.2

$A \in F^{n\times n}$. Entonces, A es invertible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Como A es invertible $A = E_k \cdots E_1$, con E_i matrices elementales.

Por corolario anterior

$$det(A) = det(E_k \cdots E_1) = det(E_k) \cdots det(E_1) \neq 0$$

Pues por el lema, $det(E_i) \neq 0$ para todo i.

$\Rightarrow$) Supongamos que $detA \neq 0$.

Sea R MERF tal que $R = E_k \cdots E_1 A$, E_i elemental.

$\Rightarrow detR = detE_k \cdots detE_1 detA \neq 0$ por corolario.

$\Rightarrow R$ no tiene filas nulas

$\Rightarrow R = I_n. \therefore A$ es invertible.

😊

Ejemplo 3.11.3

Hallar todos los valores tal que A sea invertible.

$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ Debo ver entonces para que valores de c el determinante es $\neq 0$.

$$det(A) \overset{F_2 - cF_1}{=} det \begin{pmatrix} 1 & c & -1 \\ 0 & 1-c^2 & 1+c \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna ahora puedo aprovechar todos esos ceros

$$det \begin{pmatrix} 1 & c & -1 \\ 0 & 1-c^2 & 1+c \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = 1det \begin{pmatrix} 1-c^2 & 1+c \\ 1 & c \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} (1+c)(1-c) & 1+c \\ 1 & c \end{pmatrix}.$$

Como se que aplicar operaciones elementales cambia el determinante (por resultados anteriores), puedo notar que

$$\underset{E=e(I_2),\ e:F_1\cdot(1+c)}{\overset{det(EA)=det(E)det(A)}{=}} (1+c)det \begin{pmatrix} 1-c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}.$$

Luego aplicando definicion de determinante para matrices 2×2, me queda

$$det(A) = (1+c)\cdot((1-c)c - 1\cdot 1) = (1+c)\cdot(c - c^2 - 1) = (-1)\cdot(c+1)\cdot(c^2 - c + 1).$$

Como tengo un producto de tres factores, esto es igual a 0 si y solo si alguno de ellos es cero. Es decir debo buscar las raices de estos tres polinomios.

En este caso el primero nunca se me hace cero, el segundo es facilmente deducible que es 0 cuando $c = -1$ y con el tercero al ser un polinomio cuadratico, puedo aplicar Bhaskara y buscar sus raices, hago eso

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ con } a = 1,\ b = -1,\ c = 1\ .$$

Es decir

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Entonces, el A es invertible $\Leftrightarrow c \neq -1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Teorema 3.11.3

$A, B \in F^{n\times n}$. Entonces

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Demostración:

Si A es invertible, $A = E_k \cdots E_1$ con E_i elementales para todo i.

$$det(AB) = det(E_k \cdots E_1 B) = \underbrace{det(E_k)\cdots det(E_1)}_{det(A)} det(B).$$

Si A no es invertible, sabemos que $det(A) = 0$
Basta probar que $det(AB) = 0$
Si $det(AB) \neq 0 \Rightarrow AB$ es invertible .
$\Rightarrow \exists C \in F^{n\times n}$ tal que

$$ABC = I_n.$$

Pero esto implicaria que BC es la inversa de A, absurdo pues parti de suponer que A no era invertible.

😆

Definición 3.11.3

Sea $A \in F^{m\times n}$. La transpuesta de A, denotada $A^t \in F^{n\times m}$ es la matriz tal que

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

Nota:-

Es decir, intercambio filas por columnas.

Observación 3.11.3

Diremos que A es simetrica si $A^t = A$.

Proposición 3.11.2

Sean $A \in F^{m\times k}$ y $B \in F^{k\times n}$.

(1) $(A^t)^t = A$

(2) $(AB)^t = B^t A^t$

(3) Si $k = n$, A es invertible $\Leftrightarrow A^t$ invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Demostración:

(1) Ej.

(2)
$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{l=1}^{k} A_{jl}B_{li} = \sum_{l=1}^{k} B^t_{il}A^t_{lj} = (B^tA^t)_{ij}.$$

(3) $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. Si y solo si (transponiendo los 3 miembros)

$$(AA^{-1})^t = I^t = (A^{-1}A)^t.$$

Que por lo visto en 2) es

$$(A^{-1})^tA^t = I = A^t(A^{-1})^t.$$

😆

3.12. Repaso

Vimos

- $(A^t)_{ij} = A_{ji}$

Propiedades de la traspuesta

- $(A^t)^t = A$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- A invertible $\Leftrightarrow A^t$ invertible y $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Lema 3.12.1

$E \in F^{n\times n}$ elemental, entonces E^t tambien es elemental y del mismo tipo que E. Ademas $det(E) = det(E^t)$.

Demostración: Veamos los distintos casos:

$$(E \text{ tipo } 1) \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} c \in F - \{0\} \quad E^t = E \text{ y vale en este caso. } det(E) = det(E^t) = c.$$

$$(E \text{ tipo } 2) \; E_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ c & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, E^t = \begin{pmatrix} 1 & & c & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{elemental } det(E) = det(E^t) = 1.$$

$(E$ tipo $3)$ E_{rs} es la identidad tras intercambiar fila r por fila s.

$(E^t)_{rs} = E_{sr} = 1 = E_{rs}$

$(E^t)_{sr} = E_{rs} = 1 = E_{sr}$

$det(E^t) = -1 = detE$

😆

Observación 3.12.1

$$A, B \in F^{n\times n} det(AB) = \underbrace{det(A)det(B)}_{\text{escalares}} = det(B)det(A) = det(BA)$$

Nota:-

Pues det(AB) es un numero (escalar).

Teorema 3.12.1

$A \in F^{n\times n}$ entonces $det(A) = det(A^t)$

Demostración: Si A no es invertible $\Rightarrow det(A) = 0$ y A^t tampoco invertible.
$\therefore det(A) = 0 = det(A^t)$.
Si A invertible: $A = E_k \dots E_2 E_1$

$detA = det(E_k)\dots det(E_1).$, donde $E_1,\dots,E_k$ elementales $n\times n$.
$A^t = E_1^t E_2^t \dots E_k^t$.
$det(A^t) = det(E_1^t)\dots det(E_k^t) \overset{(*)}{=} det(E_1)\dots det(E_k) = det(A)$

Nota:-
(*) Por lema anterior.

😄

Observación 3.12.2

Notar que la columna j (fila i) de A^t es la fila j (columna i) de A.
Todo lo que probamos se traduce, por el teorema anterior, a un enunciado sobre las columnas: $k_1,\dots,k_n$

Teorema 3.12.2 Teorema ^{t} (teorema traspuesto jaja)

(1) $A \xrightarrow{cK_j} B, det(B) = c\cdot det(A)$

(2) $A \xrightarrow{K_r+cK_s} B, det(B) = det(A)$

(3) $A \xrightarrow{K_r\leftrightarrow K_s} B, det(B) = -det(A)$

Teorema 3.12.3 Teorema 2 ^{t}

Sea $A\in F^{n\times n}$

(1) A tiene columna nula $\Rightarrow det(A) = 0$

(2) Si A tiene dos columnas iguales $\Rightarrow det(A) = 0$

Ejemplo 3.12.1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5 & -2 & i & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{2}K_4} \dots det(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & i & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ejemplo 3.12.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x+1 & 0 \\ x-1 & x^2-1 & x-1 \\ 0 & x+1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(x-1)^{-1}F_2}{=} (x-1) det \begin{pmatrix} 0 & x+1 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(x+1)^{-1}K_2}{=} (x-1)(x+1) det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)(x+1)(-1) \underbrace{det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{-1} = (x-1)(x+1)$$

Cofactor i,j de A : $C_{ij} = (-1)^{i+j} detA(i|j)$

Por def:

$$detA = \sum_{i=1}^{n} C_{i1}A_{i1}$$

La matriz de cofactores de A es $C = (C_{ij})$. Y se denota $C = Cof(A)$.

Ejemplo 3.12.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Cof(A) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo $C_{12} = (-1)^{1+2} detA(i|j) = (-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -2$

Ejemplo 3.12.4

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad Cof(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ b & a \end{pmatrix} \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Observación 3.12.3

$AA_{dj}(A) = det(A)I$ Luego

$det(A) \neq 0 : \underbrace{A\left(\frac{1}{det(A)}A_{dj}(A)\right)}_{A^{-1}} = I$

Definición 3.12.1

La matriz adjunta de A es $A_{dj}(A) = Cof(A)^t$.

Teorema 3.12.4

$A \in F^{n\times n}$. El $det(A)$ se puede calcular por su expansion por cualquier columna o fila de A.
Es decir

(1) Expansion por la columna j:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}\, detA(i|j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}C_{ij}.$$

(2) Expansion por la fila i:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}\, detA(i|j) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}C_{ij}.$$

Demostración:

(1) Sea K_j la j-esima columna de A. Es decir

$$A = (K_1 K_2 \dots K_n).$$

Sea $B = (K_j K_1 K_2 \dots K_n)$.

$$det(A) = (-1)^{j-1} \cdot det(B).$$

Por definicion de determinante.

$$= (-1)^{j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{i1} \; det B(i|1).$$

$B_{i1} = A_{ij}$, $B(i|1) = A(i|j)$. Por lo tanto

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \; det A(i|j).$$

(2) Usamos que $det(A) = det(A^t)$: lo desarrollo por la columna i usando que vale (1) .

$$det(A) = det(A^t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (A^t)_{ji} \; det A^t(j|i).$$

Como $(A^t)_{ji} = A_{ij}$ y $A^t(j|i) = A^t_{i|j}$.

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \underbrace{det\left(A(i|j)^t\right)}_{det A(i|j)}.$$

😃

Ejemplo 3.12.5

$A = \begin{pmatrix} c & 0 & -c \\ i & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ Si desarrollo el $det(A)$ por la segunda colummna.

$$det(A) = (-1)^{2+2} \cdot 1 \; det \begin{pmatrix} c & -c \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = c\sqrt{2} + c = c(\sqrt{2} + 1).$$

Teorema 3.12.5

$A \in F^{n \times n}$. Entonces:

$$\sum_{l=1}^{n} C_{li} A_{lj} = \begin{cases} det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

(C_{li}: cofactor l, i)

Demostración: $j = 1$:

$$\sum_{l=1}^{n} A_{li}C_{li} = det(A).$$

Por teorema anterior, parte (1) (desarrollo por la columna i).
$j \neq i$: Sea la matriz con k_j en la columna i y K_j en la columna j . $B = (K_1 \dots K_j \dots k_j \dots k_n)$, donde $A = K_1 \dots K_n$. Entonces

$$detB = 0,$$

pues tiene dos columnas iguales.
Desarrollando $det(B)$ por la columna i

$$0 = detB = \sum_{l=1}^{n} B_{li} \underbrace{C_{li}}_{(*)} = \sum_{l=1}^{n} A_{lj}C_{li}.$$

(*) El cofactor l, i de B es igual al $\underbrace{\text{cofactor } l, i \text{ de } A}_{C_{li}}$ ☺

Teorema 3.12.6

Sea $A \in F^{n\times n}$. Entonces $A_{dj}(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n$

Demostración: Sean $i \leqslant i, j \leqslant n$, calculamos:

$$(A_{dj}(A)A)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} Adj(A)_{il} \cdot A_{lj} = \sum_{l=1}^{n} C_{li}A_{lj} = \begin{cases} detA, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}..$$

☺

Corolario 3.12.1

$A \in F^{n\times n}$ invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} Adj(A).$$

Observación 3.12.4

$$cB = \begin{pmatrix} cB_{11} & cB_{12} & \cdots & cB_{1n} \\ cB_{21} & \cdots & \cdots & cB_{2n} \\ \vdots & & & \\ cB_{n1} & \cdots & \cdots & cB_{nn} \end{pmatrix}$$

$det(cB) = c^n detB$

Demostración: Calculamos

$$\frac{1}{detA}(Adj(A) \cdot A) \overset{(*)}{=} \frac{1}{det(A)}(det(A) \cdot I_n) = I_n.$$

Luego $A^{-1} = \frac{1}{detA} Adj(A)$

Nota:-

(*) Por el teorema.

😄

Capítulo 4

Espacios Vectoriales

Sea F cuerpo.

Definición 4.0.1

Un F espacio vectorial (espacio vectorial, e.v.) es un conjunto V de vectores junto con dos operaciones:

(I) $+ : V \times V \longrightarrow V$ suma de vectores $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \in V$

(II) $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ producto por escalares $(c, \alpha) \mapsto c \cdot \alpha \in V$

que satisfacen lo siguiente
$(V, +)$ es un grupo abeliano, esto es

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \quad \forall \alpha, \beta \in V$

(2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in V$

(3) $\exists 0 \in V : \alpha + 0 = \alpha \quad \forall \alpha \in V$

(4) $\forall \alpha \in V \exists \beta \in V : \alpha + \beta = 0$

y ademas:

(5) $1 \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in V$

(6) $c_1(c_2\alpha) = (c_1c_2)\alpha \quad \forall c_1, c_2 \in F, \alpha \in V$

(7) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta \quad \forall c \in F, \alpha, \beta \in V$

(8) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \quad \forall c_1, c_2 \in F, \alpha \in V$

Observación 4.0.1

(I) Por 3), ningun espacio vectorial es $\emptyset$.

(II) Si β y β' son opuestos de α, es decir

$$\alpha + \beta = 0 = \alpha + \beta' \implies \beta = \beta' = -\alpha.$$

(III) 0 es unico.

Demostración: *ii*) y *iii*)

(II) $\beta = \beta + 0 = \beta + (\alpha + \beta') = (\beta + \alpha) + \beta' = 0 + \beta' = \beta'$

(III) Supongamos $\tilde{0}$ neutro para +, o sea $\alpha + \tilde{0} = \alpha \quad \forall \alpha \in V$

$$0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}.$$

😄

Ejemplo 4.0.1 ((1))

$n \in \mathbb{N}, F^n : N \times \ldots\ldots N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) x_i \in F\}$

Es un F espacio vectorial con

- $+ : F^n \times F^n \longrightarrow F^n$ definida por

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

- $\cdot : F \times F^n \longrightarrow F^n$ definida por

$$c \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n) \quad \forall c \in F$$

En efecto, los axiomas de grupo abeliano siguen (1) $\longrightarrow$ (4) de que $(F, +)$ es grupo abeliano.
El neutro para + es $(0, \ldots, 0)$ y el opuesto de $(x_1, \ldots, x_n)$ es $(-x_1, \ldots, -x_n)$.
Veamos (5) $\longrightarrow$ (8).
5) $1 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$
6) $c_1(c_2(x_1, \ldots, x_n)) = c_1(c_2x_1, \ldots, c_2x_n) = (c_1c_2x_1, \ldots, c_1c_2x_n)$
7) $c((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n))$.

$$= c(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$= (c(x_1 + y_1), \ldots, c(x_n + y_n))$$

$$= (cx_1 + cy_1, \ldots, cx_n + cy_n)$$

$$= (cx_1, \ldots, cx_n) + (cy_1, \ldots, cy_n)$$

$$= c(x_1, \ldots, x_n) + c(y_1, \ldots, y_n)$$

8) $(c_1 + c_2)(x_1, \ldots, x_n) = ((c_1 + c_2)x_1, \ldots, (c_1 + c_2)x_n)$

$$= (c_1x_1 + c_2x_1, \ldots, c_1x_n + c_2x_n)$$

$$= (c_1x_1, \ldots, c_1x_n) + (c_2x_1, \ldots, c_2x_n)$$

$$= c_1(x_1, \ldots, x_n) + c_2(x_1, \ldots, x_n)$$

Cuando $n = 1$, $F^1 = F$ es un F-espacio vectorial. Donde la suma y el producto son de F.

Nota:-

Hasta ahora se mostro que F es un F modulo.

(2) $F_1 \subset F$ subcuerpo, es decir F_1 es un cuerpo con las operaciones de F.
Entonces F es un F_1-espacio vectorial con las operaciones de $+$ y $\cdot$ en F definidas por $+ : F \times F \to F$ y $\cdot : F_1 \times F \to F$.

Ejemplo 4.0.2

$\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $\mathbb{Q}$ espacio vectorial.
$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$+(z, w) \mapsto z + w$ y $\cdot(q, z) \mapsto qz$

Nota:-

Notar que si
$z = (a + ib)$ y $w = (c + id)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$ se identifica con $\mathbb{R}^2$ con R espacio vectorial.

(3) $F^{m\times n}$ es F-espacio vectorial con
$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ y $(cA)_{ij} = cA_{ij}$ $\quad A, B \in F^{m\times n}$ y $\forall c \in F$
0 matriz nula $m \times n$ $0_{ij} = 0$

(4) $\mathbf{X}$ conjunto no vacio

$$F^{\mathbf{X}} = \{f : \mathbf{X} \to F, \text{ con } f \text{ funcion } \}.$$

$F^{\mathbf{X}}$ es F-espacio vectorial con

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F^{\mathbf{X}} \text{ y } \forall x \in \mathbf{X}$$

y

$$(cf)(x) = cf(x) \quad \forall c \in F \text{ y } \forall f \in F^{\mathbf{X}} \text{ y } \forall x \in \mathbf{X}$$

(5) $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua } \}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares definidas en (4).
Estan bien definidas pues la suma de continuas es continua y el producto de escalar por continua es continua.
(6) $P_n[x] = \{f : F \to F : f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx \text{ para algun } n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } a_i \in F\}$.
Funciones polinomiales de grado menor o igual a n con coeficientes en F.
Con las operaciones de suma y producto por escalares definidas en (4) es un F-espacio vectorial.
Sea V un F-espacio vectorial.

Proposición 4.0.1

Se tienen

(I) $0 \cdot \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in V$

(II) $0 \cdot \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in V$

(III) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha \quad \forall \alpha \in V$

(IV) Si $c \neq 0$ o que es lo mismo $c \in F - \{0\}$, $\alpha \in V$ tal que $c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Demostración:

(I) $c \cdot 0 = c(0+0) = c \cdot 0 + c \cdot 0 \Rightarrow 0 = c \cdot 0$

(II) $0 = 0 + 0$ y $0 = 0 \cdot \alpha$

$$\Rightarrow 0 \cdot \alpha = (0+0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha \Rightarrow 0 \cdot \alpha = 0$$

(III)

$$\alpha + (-1) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \alpha = (1 + (-1)) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = 0$$

$\therefore (-1) \cdot \alpha = -\alpha$

(IV) $c \cdot \alpha = 0$ y $c \neq 0 \rightsquigarrow \exists c^{-1} : c^{-1}c = 1$

$$\begin{aligned} c^{-1} \cdot (c\alpha) &= c^{-1} \cdot 0 = 0 \\ (c^{-1}c)\alpha &= 0 \\ 1\alpha &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

☺

Definición 4.0.2

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$, V F-espacio vectorial.
Un vector $\alpha \in V$ se dice combinacion lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in F$ tales que

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n.$$

A $c_1, \ldots, c_n$ se les llama coeficientes.

Nota:-

Cualquier α_i es combinacion lineal de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pues

$$\alpha_i = 0 \cdot \alpha_1 + \cdots + 0 \cdot \alpha_{i-1} + 1 \cdot \alpha_i + 0 \cdot \alpha_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \alpha_n$$

Ejemplo 4.0.3

$F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ Que vectores son combinacion lineal de $\underbrace{(1,0,-1)}_{\alpha_1}$ y $\underbrace{(1,2,1)}_{\alpha_2}$?

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2,$$

veo que $\alpha = (a,b,c), \quad a,b,c \in \mathbb{R}$.

$$(a,b,c) = c_1(1,0,-1) + c_2(1,2,1) = (c_1 + c_2, 2c_2, -c_1 + c_2).$$

$\alpha = (a, b, c)$ es combinacion lineal $\Leftrightarrow \exists c_1, c_2$ tales que

$$\left.\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & a \\ & & 2c_2 & = & b \\ -c_1 & + & c_2 & = & c \end{array}\right\} (*).$$

$\Leftrightarrow$ (*) tiene solucion, es decir $\exists c_1, c_2$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Veo eso, hago la matriz ampliada y reduzco por filas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & b \\ -1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 2 & a+c \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a+c-b \end{array}\right).$$

Luego el sistema (*) tiene solucion $\Leftrightarrow a + c - b = 0$
Esto quiere decir que el conjunto de las combinaciones lineales de α_1, α_2 es el conjunto de soluciones del sistema homogeneo $a - b + c = 0$.
$(2, 1, -1)$ es combinacion lineal de α_1, α_2.
Por ejemplo

$$(2, 1, -1) = \frac{3}{2}(1, 0, -1) + \frac{1}{2}(1, 2, 1).$$

Donde c_1 y c_2 son $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

Nota:-

Uso que $c_1 = a - \frac{b}{2}$ y $c_2 = \frac{b}{2}$

Ejemplo 4.0.4

En $\mathbb{C}$, visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, todo vector $z \in \mathbb{C}$ es combinacion lineal de 1 y de i pues, sean $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ &= a \cdot 1 + i \cdot b \\ &= a \cdot 1 + b \cdot i \end{aligned}$$

4.1. Repaso: F-Espacio vectorial:

Es un conjunto con una operacion de suma y producto por escalar definidos como

- $V \times V \xrightarrow{+} V, \alpha + \beta$
- $F \times V \to V, c\alpha$

- $\alpha, \beta \in V, c \in F$

Tambien existe $0 \in V, \alpha \in V - \alpha \in V$

Definición 4.1.1

Sea V un espacio vectorial sobre F. Un subconjunto W de V se dice subespacio si $W \neq \emptyset$ y ademas $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in F, \quad c\alpha + \beta \in W$

Proposición 4.1.1

Sea $W \subseteq V$. Entonces W es subespacio si y solo si W es un espacio vectorial con las operaciones de V (suma y producto por escalar).

Demostración: $\Rightarrow$ Suponemos que W es un subespacio.
Si $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \cdot \alpha + \beta$ luego por escalar $c = 1$ esto pertenece a W.
$\therefore$ W es cerrado para la suma de vectores.
Como $W \neq \emptyset, \exists \alpha \in W \Rightarrow \quad (-1)\alpha + \alpha = 0 \in W \Rightarrow -\alpha = (-1)\alpha + 0 \in W$.
Sigue de los axiomas que satisface V, que W es un grupo abeliano con la $+$.

Nota:-
Notar que la $+$ es conmutativa y asociativa pues lo es en V.

Ahora $\forall c \in F, \alpha \in W : c\alpha = c\alpha + 0$. Y como $0 \in W \Rightarrow c\alpha = c\alpha + 0 \in W$.
$\therefore$ W es cerrado para la multiplicacion por escalares.
Los axiomas restantes se satisfacen en W por satisfacerse en V.

😊

Demostración: $\Leftarrow$
Sea $W \subseteq V$ espacio vectorial para las operaciones definidas en V. (En particular W es cerrado para estas operaciones.)
Como $0 \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$. Ademas, si $\alpha, \beta \in W$ y $c \in F \Rightarrow c\alpha \in W \ \wedge \ \beta \in W \Rightarrow c\alpha + \beta \in W$.
$\therefore$ W es un subespacio. 😊

Ejemplo 4.1.1 ((1))

Sea V un espacio vectorial: V y $\{0\}$ son subespacios de V. Estos suelen ser llamados subespacios triviales.
Veamos como se comporta $\{0\}$.
$W = \{0\} : \quad W \neq \emptyset (0 \in W), \alpha, \beta \in W, c \in F$
Debo ver si $c + \alpha + \beta \in W$ esta en W. Lo cual es cierto pues

$$0 = c \cdot 0 + 0.$$

Ejemplo 4.1.2 (2)

$V = F^n = \{(x_1, \ldots, x_n : x_i \in F)\}$
Sea $A \in F^{m \times n}$. Entonces el subconjunto $W \subseteq F^n$ de soluciones del sistema homogeneo. $AX = 0$ es un subespacio de V.
En efecto, como $0 \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$.
Si $c \in F, x, \tilde{x} \in W \Leftrightarrow AX = 0 \wedge \tilde{X} = 0$

Luego $A(cX+\tilde{X}) = cAX + A\tilde{X} = c\cdot 0 + 0 = 0$
$\therefore\ cX+\tilde{X} \in W \in W$.

Ejemplo 4.1.3 (3)

Si V espacio vectorial y $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in V$ $(r \geqslant 1\ )$
El conjunto $W \subseteq V$ forado por todas las combinaciones lineales de $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ es un subespacio de V.
$W = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_{r\alpha_r : c_{i\in F}}\}$
En efecto: $W \neq \emptyset : \alpha_i \in W, \forall i = 1,\ldots,r.$
(De otra forma: $0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_r \in W$)
Con $c_{1,\ldots,c_r,x_1,\ldots,x_r \in F}$.
Tengo que

$$c\alpha+\beta = c(c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r)+(x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r).$$

$$= c(c_1\alpha_1)+\cdots+c(c_r\alpha_r)+(x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r).$$

$$(cc_1\alpha_1+\cdots+cc_r\alpha_r)+(x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r).$$

$$(cc_1+x_1)\alpha_1+\cdots+(cc_r+x_r\alpha_r \in W).$$

Ejemplo 4.1.4 (4)

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio formado por las combinaciones de $\alpha_1 = (1,0,-1), \alpha_2(-1,2,0)$
Luego

$$W = \{c_1(1,0,-1) + c_2(-1,2,0) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Esta es la descripcion parametrica de W.
Existe un sistema homogeneo tal que W es el subespacio de soluciones:
$(x,y,z) = \alpha \in W \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 :$

$$\begin{aligned}\alpha &= c_1(1,0,-1)+c_2(-1,2,0)\\ &= (c-c_2, 2c_2, -c_1)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ El sistema $\left.\begin{aligned} c_1 - c_2 &= x\\ 2c_2 &= y\\ -c_1 &= z\end{aligned}\right\}$ tiene solucion c_1, c_2.
Si reduzco para ver si el sistema tiene solucion tengo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x\\ 0 & 2 & y\\ -1 & 0 & z\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2 \wedge F_3+F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x\\ 0 & 1 & y/2\\ 0 & -1 & x+z\end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2 \wedge F_3+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y/2\\ 0 & 1 & y/2\\ 0 & 0 & x+y/2+z\end{array}\right)$$

$\therefore (x,y,z) \in W \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}y + z = 0 \longleftarrow$ DESCRIPCION IMPLICITA DEL SUBESPACIO. (Representado por ecuaciones, es una representacion existencial de alguna forma.)
$\therefore W =$ subespacio de soluciones de $AX = 0, A = (1, \frac{1}{2}, 1), X = (x,y,z) \longleftarrow$ Cuando el sistema tiene solucion $c_1 = x + y/2$ y $c_2 = y/2$.

Ejemplo 4.1.5

En la direccion opuesta.
Sea $W \in R^4$ el subespacio de soluciones:

$$W = \left\{ (x,y,z,t) : \begin{matrix} x+y+z+t & = & 0 \\ -x-z+2t & = & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Reduzco por filas

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{matrix}.$$

Luego, z, t variables libres $z = c_1 \in \mathbb{R}, t = c_{2 \in \mathbb{R}}$

$$\begin{matrix} x = -c_1 + 2c_2 \\ y = -3c_2 \end{matrix}.$$

$\therefore (x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-c_1 + 2c_2, -3c_2, c_1, c_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = c_1(-1,0,1,0) + c_2(2,-3,0,1) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\therefore W$ es el subespacio de combinaciones lineales de $\alpha_1 = (-1,0,1,0)$ y $\alpha_2 = (2,-3,0,1)$

Lema 4.1.1

Sea V F-espacio vectorial y sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de V. Entonces

$$W = \cap_{i \in I} W_i.$$

es un subespacio.

Nota:-

"La interseccion de una familia (conjunto) de subespacios arbitrarios es un subespacio."

Demostración: Como W_i es un subespacio $\Rightarrow 0 \in W_i, \forall i \in I$.
$\Rightarrow 0 \in \cap_{i=I} W_i = W$.
$\therefore W \neq \emptyset$
$c \in F,\ \alpha, \beta \in W \ \Leftrightarrow\ \alpha, \beta \in W_i, \forall i \in I$.
$c\alpha + \beta \in W$?
Como, para cada $i \in I$ el W_i es subespacio $\Rightarrow c\alpha + \beta \in W_i$
Luego $c\alpha + \beta \in \cap_{i \in I} W_i = W$ y asi W es un subespacio. ☺

Observación 4.1.1

La union de subespacios, en general, no es un subespacio.

Ejemplo 4.1.6

$V = \mathbb{R}^2, W_1 = \{c \cdot (1,0) : c \in \mathbb{R}\}$
$W_2 = \{c(0,1) : c \in \mathbb{R}\}$
Notar como el W_1 seria como el eje de las x y w_2 el eje de las y en un eje de coordenadas. Pero no es cierto que $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ pertenezca a la union de $W_1 \cup W_2$. Luego la union no es subespacio.

Definición 4.1.2

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V. El subespacio generado por S, que se denota $\langle S \rangle$, se define como la interseccion de todos los subespacios de V que contienen a S.

Observación 4.1.2

Por el lema anterior, $\langle S \rangle$ es un subespacio de V.

Nota:-

Notacion: Si

$$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}, \quad \langle S \rangle = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle .$$

Proposición 4.1.2

Sea $S \subseteq V$. Si $S \neq \emptyset$, entonces $\langle S \rangle$ coincide con el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.

Demostración: Notemos que el conjunto de combinaciones lineales de vectores de S es un subespacio de V, digamos W_0 tal que $S \subseteq W_0$.
$\Rightarrow W_0 \subseteq \cap_{W \text{ subesp } S \subseteq W} W \overset{=}{\text{def}} \langle S \rangle$.
Para la otra inclusion, observemos que $\langle S \rangle$ es un subespacio de V y $S \subseteq \langle S \rangle$. Como $\langle S \rangle$ es cerrado para $+$ y producto por escalar $\Rightarrow \langle S \rangle \subseteq \{$ combinaciones lineales de vectores de $S = W_0\}$
Luego $W_0 = \langle S \rangle$.

☺

S se dice un conjunto de generadores de $\langle S \rangle$.

4.2. Subespacios de F^n

- Generadores $\rightsquigarrow$ Descripcion parametrica.
- Ecuaciones (sistema homogeneo) $\rightsquigarrow$ Descripcion implicita.

4.3. Repaso

Fijamos un cuerpo F y V sea un F-espacio vectorial
$W \subset V$ subespacio: $W \neq \emptyset$, $c\alpha + \beta \in W$, $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in F$.
La interseccion de subespacios es subespacio, la union no.

$$\cap_{i \in I} W_i$$

subespacio.
Vimos que puedo hablar de generadores

$$\langle S \rangle = W \Leftrightarrow \forall \alpha \in W : \alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \quad \alpha_i \in S, c_i \in F..$$

4.4. Suma de Subespacios

Definición 4.4.1

$W_1, \dots, W_k$ subespacios de V. Definimos la suma de W_i's como:

$$W_1 + \cdots + W_k = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k : \alpha_i \in W_i, \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Proposición 4.4.1

$W_1 + \cdots + W_k$ es un subespacio de V y ademas $W_1 + \cdots + W_k = \langle W_1 \cup \cdots \cup W_k \rangle$

Demostración: Como W_i es un subespacio $\forall i = 1, \dots, k \Rightarrow 0 \in W_i, \forall i$.
$\Rightarrow 0 = 0 + \cdots + 0 \in W_1 + \cdots + W_k \Rightarrow W_1 + \cdots + W_k \neq \emptyset$ (Sumo los 0s de cada subespacio W_i)
$\alpha, \beta \in W_1 + \cdots + W_k, c \in F$:

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \alpha_i \in W_i.$$

$$\beta = b_1 + \cdots + b_k, \quad b_i \in W_i.$$

$$c\alpha + \beta = c(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) + (\beta_1 + \cdots + \beta_k) = (c\alpha_1 + \beta_1) + c\alpha_2 + \beta_2 + \cdots + (c\alpha_k + \beta_k).$$

Donde $c\alpha_i + \beta_i \in W_i$.
$\therefore c\alpha + \beta \in W_1 + \cdots + W_k$
$\therefore W_1 + \cdots + W_k$ es subespacio.

Veamos ahora $W_1 + \cdots + W_k = \overbrace{\langle W_1 \cup \cdots \cup W_k \rangle}^{W}$
Por lo visto antes, W es el menor subespacio de V que contiene a $W_i, \forall i = 1, \dots, k$.. ($W = \cap_{u \text{ subespacio } \wedge u \subseteq W_i \forall i} u$)
Ahora, $\forall i, W_i \subseteq W_1 + \cdots + W_k$. Pues si tomo $\alpha_i \in W_i$ lo escribo como $0 + \cdots + \alpha_i + \cdots + 0$ y como el 0 esta en cada uno de los otros entonces esto esta en $W_1 + \cdots + W_k$.
Esto $\Rightarrow W \subseteq W_1 + \cdots + W_k$
Reciprocamente, como W es un subespacio y $W_i \subseteq W, \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \forall \alpha_i \in W_i$ tengo que

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha k \in W \Rightarrow W_1 + \cdots + W_k \subseteq W.$$

😃

Observación 4.4.1

Supongamos que W_i estan dados por un conjunto de generadores es decir, $W_i = \langle S_i \rangle, 1 \leqslant i \leqslant k$.
Entonces $\alpha_i \in W_i$ se escribe como $\alpha_i = c_1^i \alpha_1^i + \cdots + c_{r_i}^i \alpha_{r_i}^i$. $W_1 + \cdots + W_k$ con $c_j^i \in F,\ \alpha_j^i \in S_i\ \forall j = 1, \dots, r_i$.
Luego,

$$\alpha \in W:\ \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} c_j^i d_j^i.$$

Esto implica que $W_1 + \cdots + W_k = \langle S_1 \cup \cdots \cup S_k \rangle$

Ejemplo 4.4.1

Sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$W_1 : \begin{cases} x + y - z + t & = 0 \\ y - t & = 0 \end{cases}, \quad W_2 = \langle (0,0,1,-1), (0,1,0,1) \rangle .$$

Dar un conjunto de generadores para $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

Para $W_1 \cap W_2$:

Como W_1 son las soluciones del sistema asociado. Yo puedo buscar un sistema asociado a W_2 y formar un nuevo sistema resultante de unir las ecuaciones.

Primer paso: Busco ecuaciones para

$$W_2 : \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ -1 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & t+z-y \\ 0 & 0 & x \end{array}\right) \text{MERF ..}$$

Luego las ecuaciones que caracterizan al subespacio W_2 son

$$W_2 : \begin{cases} -y + z + t & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}.$$

Luego $W_1 \cap W_2$ es el sbuespacio solucion del sistema que se obtiene juntando todas las soluciones, es decir.

$$W_1 \cap W_2 : \begin{cases} -y + z + t & = 0 \\ x & = 0 \\ x + y - z + t & = 0 \\ y - t & = 0 \end{cases}.$$

Segundo paso: Resuelvo el sistema para dar los generadores.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2 \wedge F_4-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3, F_2-F_4 \dots} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la solucion del sistema es unicamente el vector $0 = (0, \dots, 0)$. Esto quiere decir que

$$\therefore W_1 \cap W_2 = \{0\} .$$

Para $W_1 + W_2$

Primer paso: Busco generadores para W_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x & = z - t \\ y & = t \\ z & = c_1 \in \mathbb{R} \\ t & = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Luego el conjunto de soluciones es el conjunto de soluciones de los vectores

$$W_1 = \{(c_1 - 2c_2, c_2, c_1, c_2) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Que es lo mismo a decir

$$W_1 = \{c_1(1,0,1,0) + c_2(-2,1,0,1) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Y esto es el subespacio generado por estos dos vectores, es decir

$$W_1 = \langle (1,0,1,0), (-2,1,0,1) \rangle.$$

Segundo paso: Reuniendo los conjuntos de generadores obtenemos generadores para la suma $W_1 + W_2$, es decir:

$$W_1 + W_2 = \langle (1,0,1,0), (-2,1,0,1), (0,0,1,-1), (0,1,0,1) \rangle.$$

Definición 4.4.2

Un subconjunto S de V se dice linealmente independiente (LI) si y solo si cada vez que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son vectores distintos de S, $c_1, \ldots, c_n \in F$, se tiene:

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

En caso contrario, S se dice linealmente dependiente (LD).

Definición 4.4.3

Un subconjunto S de V se dice linealmente dependiente (LD) si y solo si... S LD $\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ distintos y $c_1, \ldots, c_n \in F$ no todos nulos tales que

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0..$$

Observación 4.4.2

S LD, digamos $c_1\alpha_1 + \cdots + c_i\alpha_i + \cdots + c_n\alpha_n = 0$ con $c_i \neq 0$.
$\Rightarrow \alpha_i = (-c_1/c_i\alpha_i + \cdots + (-c_n/c_i\alpha_n))$
O que es lo mismo

$$\sum_{j \neq i} \left(-\frac{c_j}{c_i\alpha_j} \right).$$

Algunas observaciones

Observación 4.4.3

Ningun subconjunto S tal que $0 \in S$ puede ser LI.

Demostración: Supongamos $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0\}$. Tomo la combinacion lineal

$$0 \cdot \alpha_1 + \cdots + 0 \cdot \alpha_r + 1 \cdot 0 = 0.$$

Pero el ultimo coeficiente es $1 \neq 0$, luego al existir coeficiente no nulo tal que la combinacion lineal de los α_i sea 0, el conjunto es linealmente dependiente.

😃

Observación 4.4.4

Todo subconjunto de un conjunto LI es LI.

Observación 4.4.5

Si S es LD y $S \subseteq \tilde{S} \Rightarrow \tilde{S}$ LD.

Ejemplo 4.4.2

Sea $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in F^n,\ i \leqslant i \leqslant n$. (0 en todos los lugares menos i.)
Por ejemplo en F^3 tengo $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. El conjunto

$$\{e_1, \dots, e_n\} \text{ es LI.}$$

Para verlo planteamos

$$c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = 0 \quad c_1, \dots, c_n \in F..$$

Pero esto es lo mismo que decir

$$c_1(1, 0, \dots, 0) + \cdots + c_n(0, \dots, 1) = (0, \dots, 0).$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0) \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Ejemplo 4.4.3

Analicemos la independencia lineal de

$$S = \{(1,0,2,-1), (1,1,1,1), (-1,-2,0,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Para saber si es LD o Li planteo una combinacion lineal que de 0 y veo que me tienen que dar los coeficientes.
Hago eso,

$$c_1(1,0,2,-1) + c_2(1,1,1,1) + c_3(-1,-2,0,-3) = 0.$$

Va a depender si encuentro una solucion no trivial (LI) o trivial (LD)
Desarrollando me queda

$$(c_1 + c_2 - c_3, c_2 - 2c_3, 2c_1 + c_2, -c_1 + c_2 - 3c_3) = (0,0,0,0).$$

Esto representa el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 - 3c_3 &= 0 \end{cases} (*).$$

Entonces S LI $\iff$ el sistema admite solo la solucion trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
Formo la matriz del sistema homogeneo (*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_1, F_4+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noto que tiene una variable independiente. c_3. Luego si damos a c_3 un valor $\neq 0 \in F$ obtenemos soluciones no triviales.
$\therefore$ S es LD.

Definición 4.4.4

Una base de V es un subconjunto LI que genera V. Diremos que V es de “dimension finita” si tiene una base finita.

Nota:-
Base finita es una base con numero finito de elementos.

Entonces $\mathcal{B}$ es base $\iff$

- $\mathcal{B}$ es LI.
- $\langle \mathcal{B} \rangle = V$.

Ejemplo 4.4.4

$C = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de F^n. Esta se llama la base canonica.

Demostración: Ya vimos que C es LI. Para ver que genera F^n:

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

😃

Ejemplo 4.4.5

Los vectores $(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$ forman una base de R^3
Planteamos:

$$c_1(1,1,1) + c_2(0,1,1) + c_3(0,0,1) = (x, y, z).$$

El sistema que me aparece es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2 \wedge F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y \end{array}\right).$$

Como llegue a la identidad, quiere decir que el sistema homogeneo asociado a esa matriz, solo admite la solucion trivial. Es decir, si $(x, y, z) = (0,0,0)$ el sistema solo admite solucion trivial.
Luego, por definicion el conjunto es LI.
Ademas tiene solucion $\forall (x, y, z)$, es decir

$$\langle (1,1,1),(0,1,1),(0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$$

Notar que cualquier

$$(x, y, z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1).$$

4.5. Repaso

Bases y dimension.
Sea V F-espacio vectorial.
$\mathcal{B}$ base de V si

- $\mathcal{B}$ genera V.
- $\mathcal{B}$ es LI.

Ejemplo 4.5.1 (1)

Base canonica de F^n : $\{e_1, \dots, e_n\}$ $e_i = (0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$(1 en la posicion i)

Similarmente $F^{m\times n}$: $\left\{ E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}$ (1 en el lugar ij : $1 \leqslant i \leqslant m, i \leqslant j \leqslant n$) base canonica.

$W \subseteq F^n$ subespacio de soluciones de un sistema homogeneo $AX = 0$, donde $A \in F^{m\times n}$.
Base de W?
Sea $R \in F^{m\times n}$ MERF. A equivalente a R.
Luego, W = subespacio de soluciones de $RX = 0$.
Veamos como es R. Supongamos que R tiene r filas no nulas (las primeras).
Sean $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqslant n$ las columnas que contienen a los coeficientes principales.

Es decir $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ son variables dependientes. Entonces las variables libres son

$$J = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_r\}.$$

Luego $x_{j, j \in J}$: variables libres.
Entonces las soluciones seran

$$W = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_{k_i} = \sum_{j=J} (-R_{ij}) x_j \right\}.$$

Donde $x_j, j \in J$, pueden tener cualquier valor. $x_j = t_j \in F$.
Para cada eleccion de los parametros $T_j, j \in J$, hay una unica solucion tal que $x_j = t_j$.
Sea, $j \in J$, $\alpha_j \in W$ el vector que se obtiene dando a x_j el valor $t_j = 1$ y $t_l = 0 \ \forall l \in J, l \neq j$.
Afirmacion:

$$\left\{ \alpha_j : j \in J \right\} \text{ es base de } W .$$

Para demostrar esto debo ver que son LI y que generan W.
Son LI: Supongamos

$$\sum_{j \in J} c_j \alpha_j = 0 : c_j \in F.$$

Noto que la componente $j - esima$ es c_j
$\therefore c_j = 0, \forall j \in J$.

Ejemplo 4.5.2

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$$
$$\alpha_3 = (0, -2, 1, 0, 0)$$
$$\alpha_5 = (0, 1, 0, 2, 1)$$

Entonces si hago una combinacion lineal de estos vectores tengo algo del tipo

$$c_1 \alpha_1 + c_3 \alpha_3 + c_5 \alpha_5 = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Resolviendo me queda

$$c_1, *, c_3, *, c_5 = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Lo cual es cierto si y solo si c_1, c_2, c_3 son 0. Lo cual demuestra que los c_i son LI.
Veamos que generan W: Toda solucion α se obtiene dando un valor t_j a cada $j \in J$

$$\alpha = \sum_{j \in J}^{j} t_j a_j).$$

pues es la unica solucion tal que $x_j = t_j, \forall j \in J$.

Teorema 4.5.1 MUY IMPORTANTE, ENTRA EN FINAL

Sea V un espacio vectorial generado por un numero finito de vectores $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Entonces cualquier subconjunto LI de V es finito y a lo sumo tiene n elementos.

Demostración: Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ con $k > n$. Por hipotesis $\beta_1, \ldots, \beta_n$ generan a V.
Tengo que

$$0 \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{k} x_j \alpha_j \quad \text{y} \quad \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\beta_i,$$

para ciertos $A_{ij} \in F$.
Luego ($\Rightarrow$)

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_j\beta_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} A_{ij}x_j\right)\beta_i.$$

Luego puedo armar la matriz

$$A = (A_{ij})_{i,j} \in F^{n\times k}.$$

Como $k > n$, sabemos que el sistema $AX = 0$ tiene una solucion no trivial (tiene mas incognitas que ecuaciones) $(x_1, \ldots, x_k) \Rightarrow$ Por el teorema

$$\sum_{j=1}^{k} x_j\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\beta_i = 0$$

y algun x_j es $\neq 0$
$\therefore \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ LD. 😃

Corolario 4.5.1 NECESARIO PARA EXPLICAR LO DE ARRIBA, ENTRA EN FINAL

Si V espacio vectorial de dimension finita. Entonces dos bases de V tienen el mismo numero de elementos.

Demostración: Supongo que tengo dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Entonces ambos conjuntos son finitos (pues son LI, por el teorema anterior) y ademas:
Si

$$|\mathcal{B}_1| = k,\ |\mathcal{B}_2| = n.$$

Como $\mathcal{B}_2$ genera a V y $\mathcal{B}_1$ es LI $\stackrel{*}{\Rightarrow} k \leqslant n$
Como $\mathcal{B}_1$ genera a V y $\mathcal{B}_2$ es LI $\stackrel{*}{\Rightarrow} kn \leqslant k$
Luego $k = n$.
(* Teorema anterior) 😃

Por el corolario del teorema, si V es de dimension finita, dos bases de V son finitas y tienen la misma cantidad de elementos.

Definición 4.5.1

El numero de elementos de elementos de una base (cuaquiera) de V se llama la dimension de V y se denota

$$dimV$$

(o tambien $dim_F V$).

Ejemplo 4.5.3 (1)

$dim F^n = n$. En general $dim_F F = 1$, tengo $\{c\}$ base con $c \neq 0$.

Ejemplo 4.5.4 (2)

$dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$ (no es finita)

Ejemplo 4.5.5 (3)

$dim F^{m \times n} = mn$.

Ejemplo 4.5.6 (4)

$W : AX = 0$

Sea R MERF equivalente a A y

$$r = \#\{ \text{ filas no nulas de } R \ \}.$$

y

$$J = \{1, \ldots, n\} - \{k_1, \ldots, k_r\} \quad \text{Base } \left\{\alpha_j : j \in J\right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} dim W &= n - r \\ &= \#\{ \text{ variables libres del sistema } \} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.7 (5)

$\emptyset$ base de $\{0\}$

$\therefore dim \{0\} = 0$

$\emptyset$

(1) LI :

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = 0.$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \emptyset$ dist. $\Rightarrow$

$$c_1 = \cdots = c_k = 0.$$

(2) genera

$$\langle \emptyset \rangle = \cap_{w \subseteq \emptyset \wedge W \text{ subespacio}} W = \{0\}.$$

Notar que $dim W = 0$ Si $W \neq \{0\}$ sea $0 \neq \alpha \in W \Rightarrow$

$$\{\alpha\} \text{ es LI }.$$

Por el teorema

$$|\{\alpha\}| = 1 \leqslant 0 = dim W \text{ ABSURDO }.$$

Luego $W = 0$.

Ejemplo 4.5.8 (6)

COMPLETAR

4.6. Repaso

El ultimo teorema que vimos decia:
Si tengo un espacio vectorial de dimension finita, es decir $dimV < \infty$. Y sea

$$V = \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$$

todo subconjunto LI de V es finito y tiene a lo sumo n vectores.

Corolario 4.6.1

Sea V un espacio vectorial de dimension n. Entonces

(a) Todo subconjunto con mas de n vectores es LD.

(b) Ningun subconjunto con menos de n vectores puede generar V.

Demostración: Por hipotesis V tiene una base $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ con n vectores. En particular $\mathcal{B}$ es LI y $\langle \mathcal{B} \rangle = V$.

(a) Por el teorema todo subconjunto LI de V tiene a lo sumo n vectores.

$\therefore$ Si el conjunto tiene mas de n vectores debe ser LD.

(b) Si $S \subseteq V : \langle S \rangle = V$ y $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ $k < n$. Por el teorema $\mathcal{B}$ no podria ser LI, pues $n > k$.

☺

Lema 4.6.1

Sea S un subconjunto LI de V y sea $\beta \in V$ tal que $\beta \notin \langle S \rangle$. Entonces el conjunto $S \cup \{\beta\}$ es de nuevo LI.

Demostración: Supongamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ distintos , y escalares $c_1, \ldots, c_n, c \in F$ tales que

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n + c\beta = 0.$$

Si fuese $c \neq 0$:

$$\beta = \left(-\frac{c_1}{c}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{c_2}{c}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c}\right)\alpha_n \in \langle S \rangle .$$

Contradice la hipotesis. Luego $c = 0$.

$$\therefore c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0$$

lo cual implica pues S es LI

$$c_1 = \cdots = c_n = 0..$$

Asi, $S \cup \{\beta\}$ es LI. ☺

Teorema 4.6.1

Sea V un espacio vectorial de dimension finita y sea $W \subseteq V$ un subespacio. Entonces todo subconjunto LI de W se extiende a una base de W.

Observación 4.6.1

Es decir: si $S \subseteq W$ es LI $\Rightarrow$ existe una base $\mathcal{B}$ de W tal que $S \subseteq \mathcal{B}$.

Demostración: Sea $S_0 \subseteq W$ LI. Si $\langle S_0 \rangle = W$. Entonces S_0 es base de W y se cumple el teorema.
Si

$$\langle S_0 \rangle \subset W \Rightarrow \exists \beta_1 \in W : \beta_1 \notin \langle S_0 \rangle .$$

Por el lema anterior,

$$S_1 = S_0 \cup \{\beta_1\}$$

es LI.
Y ademas $|S_1| = |S_0| + 1$
Si $\langle S_1 \rangle = W \Rightarrow S_1$ base de W y $S_0 \subseteq S_1$ ya esta.
Si no, repetimos el argumento anterior:

$$\exists \beta_2 \in W : \beta_2 \notin \langle S_1 \rangle$$

que por el lema implica que $S_2 = S_1 \cup \{\beta_2\}$ es LI.
Y ademas $|S_2| = |S_0| + 2$.
Inductivamente, dado que todo subconjunto LI de V tiene a lo sumo $dimV$ vectores, encontramos algun $k \geqslant 0$ tal que $S_k = S_0 \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ LI y genera $W \Rightarrow S_k$ base de W.

😃

Corolario 4.6.2

Todo espacio vectorial de $dim < \infty$ tiene una base.

Corolario 4.6.3

V espacio vectorial de dimension finita y W es un subespacio propio de V (ie: $W \neq V$) $\Rightarrow dimW < dimV$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ base de W. Como

$$W \neq V \Rightarrow \exists \beta \in V : \beta \notin \langle \mathcal{B} \rangle$$

entonces por el Lema

$$\mathcal{B} \cup \{\beta\} \text{ LI } \Rightarrow |\mathcal{B} \cup \{\beta\}| = dimW + i \leqslant dimV.$$

😃

Ejemplo 4.6.1

Sea $A \in F^{n \times n}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ filas de A, con $\alpha_i \in F^n$ tengo que

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = F^n \Leftrightarrow A \text{ es invertible .}$$

Luego $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ base de F^n.

Ejemplo 4.6.2

$|F| = q$ cuantas matrices invertibles $n \times n$ hay con coeficientes en F.
Veo que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_1, \ldots, a_n \in F^n..$$

α_1 : cualquiera salvo $(0, \ldots, 0) \rightsquigarrow q^n - 1$ posibilidades.
$\alpha_2 \notin \langle \alpha_1 \rangle : F^n - \{c \cdot \alpha_1 : c \in F\} \rightsquigarrow q^n - q$ (pues tengo q posibildades para c)
$\alpha_3 \notin \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\alpha_3 \in F^n - \{\alpha_1, \alpha_2\} = F^n - \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 : c_1, c_2 \in F\} \rightsquigarrow q^n - q^2$ posibilidades.
Inductivamente ,hay

$$\left(q^n - 1\right)\left(q^n - q\right) \cdots \left(q^n - q^{n-1}\right) \text{ matrices invertibles } n \times n \ .$$

Ejemplo 4.6.3

$F = F_3 : |F| = 3$ cuantas invertibles 2×2?

$$\left(3^2 - 1\right)\left(3^2 - 3\right) = 8 \cdot 6 = 48.$$

Teorema 4.6.2

Sea V espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de V de dimension finita. Entonces $W_1 + W_2$ es de dimension finita y

$$dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2).$$

Recordemos $W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta : \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$

Demostración:
Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ base de $W_1 \cap W_2 \subseteq W_i \ i = 1, 2$.
Por el teorema, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ se extiende a bases

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m\} \text{ de } W_1 \ .$$

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1 \ldots, \gamma_r\} \text{ de } W_2.$$

Asi tengo que

$$dimW_1 = k + m, \quad dimW_2 = k + r, \quad dim(W_1 \cap W_2) = k.$$

Afirmacion:

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$$

es base de $W_1 + W_2$.
La afirmacion implica el teorema pues tendriamos

$$dim(W_1 + W_2) \overset{(*)}{=} k + m + r = (k + m) + (k + r) - k = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2).$$

(*) Por la afirmacion.
Basta probar la afirmacion . Para esto, sea $\alpha \in W_1 + W_2$ luego

$$\alpha = \beta + \gamma, \quad \beta \in W_1, \gamma \in W_2,$$

pero por como eleji los β tengo que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k + x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m$$

$$\gamma = c_1'\alpha_1 + \cdots + c_k'\alpha_k + y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma r.$$

Entonces

$$\alpha = (c_1 + c_1')\alpha_1 + \cdots + (c_k + c_k')\alpha_k + x_1\beta_1 + \cdots + x_m(\beta_m y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r).$$

Por lo tanto

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \text{ genera } W_1 + W_2 \ .$$

Veamos que son LI, debo ver

$$(*) \qquad c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k + x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m + y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r = 0.$$

Esto me dice que

$$y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r = -c_1\alpha_1 - \cdots - c_k\alpha_k - x_1\beta_1 - \cdots - x_m\beta m.$$

Noto que

$$y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r \in W_2 \cap W_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

Entonces

$$y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r = a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k = -c_1\alpha_1 - \cdots - c_k\alpha_k - x_1\beta_1 - \cdots - x_m\beta_m.$$

Esto implica

$$(\alpha_1 + c_1)\alpha_1 + \cdots + (a_k c_k \alpha_k) + x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m = 0.$$

Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$ es LI $\Rightarrow a_1 + c_1 = \cdots = a_k + c_k = 0 = x_1 = \cdots = x_m$
Si vuelvo a la identidad (*)

$$(*) \qquad c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k + x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m + y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r = 0.$$

Ahora implica que

$$(*) \qquad c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k + \underbrace{x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m}_{=0} + y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r = 0$$

(Lo subrayado es 0 es decir)
Entonces esto me implica

$$(*) \qquad c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k + y_1\gamma_1 + \cdots + y_r\gamma_r = 0.$$

Como

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \text{ es LI}$$

$\Rightarrow$

$$c_1 = \cdots = c_k = 0 = y_1 = \cdots = y_r.$$

$\therefore$ El conjunto es LI. ☺

Definición 4.6.1

La suma $W_1 + W_2$ se dice directa si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Se denota en este caso

$$W_1 \oplus W_2.$$

Tenemos (W_i de dimension finita)

Lema 4.6.2

Son equivalentes:

(I) La suma $W_1 + W_2$ es directa.

(II) $dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2$.

(III) $\forall \alpha \in W_1 + W_2,\ \exists! \beta \in W_1, \gamma \in W_2 : \alpha = \beta + \gamma$.

Demostración: Por teorema anterior

$$dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_1).$$

Ademas

$$(dimW_1 \cap W_2) = 0 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$\therefore (i) \Leftrightarrow (ii)$
$(i) \Rightarrow (iii) : \alpha \in W_1 + W_2$ tengo que

$$\alpha = \beta + \gamma = \beta' + \gamma'.$$

Donde $\beta, \beta' \in W_1 \quad, \gamma, \gamma' \in W_2$ Luego

$$\beta - \beta' = \gamma' - \gamma \in W_2 \cap W_1 = \{0\}\,.$$

Esto implica que $\beta = \beta', \gamma = \gamma'$ (pues ambos miembros son $= 0$ al pertenecer a $\{0\}$).
$\therefore$ la unicidad.
$(iii) \Rightarrow (i) : \alpha \in W_1 \cap W_2$ entonces

$$\alpha = 0 + \alpha = \alpha + 0.$$

con $\alpha \in W_2$ y $0 \in W_1$ en la segunda igualdad y
con $\alpha \in W_1$ y $0 \in W_2$ en la segunda igualdad
Por $(iii) \Rightarrow 0 = \alpha \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$
y la suma es directa. ☺

Definición 4.6.2

Sea V espacio vectorial de dimension finita. Una base ordenada de V es una sucesion (finita) de vectores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de V que son LI y generan V.

Abuso de notacion:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \equiv \mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}.$$

Sin perder de vista el orden en que aparecen.
Sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base ordenada de V. Entonces
$\forall \alpha \in V$, existen unicos $c_1, \dots, c_n \in F$:

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n.$$

El vector

$$(c_1, \dots, c_n) \in F^n$$

se llama el vector de coordenadas de α en la base ordenada $\mathcal{B}$.
Tambien, indicaremos a las coordenadas de α en la base ordenada $\mathcal{B}$ como

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}.$$

Ejemplo 4.6.4

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$base ordenada canonica de F^n

$$[(x_1, \dots, x_n)]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si $\tilde{C} = \{e_2, e_1, e_3, \dots, e_n\}$

$$[\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\alpha}]_{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

4.7. Repaso

Sea V espacio vectorial de dimension finita sobre F.
Vimos que es una Base Ordenada de V: $\mathcal{B} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
Para cada $\alpha \in V$, existen unicos $x_1, \dots, x_n \in F : \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$.

Coordenadas de α en la base ordenada $\mathcal{B} : (x_1, \dots, x_n \in F^n)$ o bien $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}$.

- Existen: pues $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ generan a V.
- Son unicos: sigue de la independencia lineal de $\mathcal{B}$:

  Si $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \alpha = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n \Rightarrow (x_1 - y_1)\alpha_1 + \cdots + (x_n y_n)\alpha_n = 0$

  $\Rightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

Ejemplo 4.7.1 (1)

Si $\mathcal{B} : \alpha_1, \dots, \alpha_n$ es base ordenada.

$$[\alpha_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y en general las coordenadas de

$$[\alpha_j] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Ejemplo 4.7.2 (2)

Sea $W : \left\{ x - y + z - t = 0, \quad w \subseteq \mathbb{R}^2 \right\}$.
Dar una base ordenada de W y encontrar las coordenadas de $\alpha \in W$ en esta base.

$$(x, y, z, t) \in W \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (y - z + t, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1).$$

Una base ordenada de W es

$$\mathcal{B} : \alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (-1, 0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0, 0)$$

Si $(x, y, z, t) \in W$:

$$[(x, y, z, t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.7.3 (2)

Sea $\mathcal{B}$ la siguiente base ordenada de R^3 :

$$\mathcal{B} = \underbrace{(1, 0, -1)}_{\alpha_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{\alpha_2}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{\alpha_3}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha = (x, y, z) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 1, 1)$$

$\rightsquigarrow$

$$x_1 = x$$
$$x_2 + x_3 = y$$
$$-x_1 + x_3 = z$$

Lo cual me representa el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x+z \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y+-x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & x+z \end{array}\right).$$

$$\therefore [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ -x+y-z \\ x+z \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.7.1

Sean $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\mathcal{B}' : \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ bases ordenadas de V. Entonces existe una unica matriz $P = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, necesariamente invertible tal que:

$$P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [\alpha]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \alpha \in V.$$

Mas aun

$$P = \left([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \ldots [\alpha'_j]_{\mathcal{B}} \ldots [\alpha_{n'}]_{\mathcal{B}}\right),$$

es decir la columna j de P es $[\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$. Luego

$$P = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

se llama la matriz de cambio de base de la base ordenada B' a la base ordenada $\mathcal{B}$.

Demostración: Sea $P = \left([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \ldots [\alpha'_j]_{\mathcal{B}} \ldots [\alpha_{n'}]_{\mathcal{B}}\right)$ y probemos que cuple la condicion del teorema:
Por construccion:

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \cdot \alpha_i \qquad (*).$$

Pues: $[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} =$ col.j de P $= \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$

Sea $\alpha \in V$ y sea

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}.$$

Entonces

$$\therefore \alpha = \sum_{j=1}^{n} x'_j \alpha'_j \overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \right)$$

Que operando la sumatoria es

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij}x'_j \cdot \alpha_i.$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j\right)\alpha_i.$$

$\therefore$ Si $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$

$$P\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

o bien

$$P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Veamos que P es invertible: Si $X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ es solucion de $PX = 0 \Rightarrow PX = [x'_1\alpha'_1 + \cdots + x'_n\alpha'_n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$x'_1\alpha'_1 + \cdots + x'_n\alpha'_n = 0 = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_n.$$

$\Rightarrow$

$$x'_1 = \cdots = x'_n = 0, \text{ pues } \mathcal{B}' \text{ es LI }.$$

Luego $PX = 0$ solo admite la solucion trivial $\Leftrightarrow$ P es invertible.
Unicidad: Supongamos que $Q \in F^{n\times n}$ es tal que

$$Q[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [\alpha]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \alpha \in V..$$

La columna j de Q es el producto

$$Q\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ademas

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}'}.$$

$\Rightarrow$

$$Q\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Q[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}.$$

$\Rightarrow$

$$\text{Columna } j \text{ de } Q \text{ es } = \text{Columna } j \text{ de } P \quad \forall j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow Q = P\ .$$

😆

Ejemplo 4.7.4 (1)

Sean

$$\mathcal{B}' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$
$$\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,0),(0,1,1)\}$$

1Base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Calculemos $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

$$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [[(1,1,1)]_{\mathcal{B}}[(1,1,0)]_{\mathcal{B}}[(1,0,0)]_{\mathcal{B}}]\,.$$

Busco estas coordenadas:

- $[(1,1,1)]_{\mathcal{B}}$ son las soluciones de
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $[(1,1,0)]_{\mathcal{B}:}$ soluciones de
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $[(1,0,0)]_{\mathcal{B}}$: soluciones de
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ resolver 3 sistemas que tienen la imsma matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y disinta matriz ampliada.

Resolvemos simulaneamente

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(Id \mid P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right)$$

Lo hago, resolviendo me queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4.7.5 (2)

$\mathcal{B}$ base ordenada de F^n. $\mathcal{B} = \alpha_1, \dots, \alpha_n$. $\mathcal{C}$ base ordenada canonica de F^n.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = ([\alpha_1]_\mathcal{C}[\alpha_2]_\mathcal{C} \dots [\alpha_n]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{B} : (1,1,1), (-1,1,0), (1,0,0).$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(Id \mid P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\right).$$

Y tengo que $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

Proposición 4.7.1

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases ordenadas de V. Entonces se cumplen

(1) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$

(2) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

(3) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$

Demostración: Vamos a usar que $P = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es la unica que cumple :

$$P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [\alpha]_\mathcal{B}, \quad \forall \alpha \in V..$$

(1)

$$I_n[\alpha]_{\mathcal{B}} = [\alpha]_{\mathcal{B}} \Rightarrow I_n = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$$

(2) Como $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [\alpha]_{\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ invertible $\Rightarrow$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}} \Rightarrow P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

(3) $\forall\alpha : (P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}'}) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}[\alpha]_{\mathcal{B}} = [\alpha]_{\mathcal{B}''} \Rightarrow$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}.$$

😃

Proposición 4.7.2

Sea $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ base ordenada de V. La aplicacion $\kappa : V \longrightarrow F^{n\times 1}$ dada por

$$\kappa(\alpha) = [\alpha]_{\mathcal{B}}, \quad \forall\alpha \in V.$$

Satisface :

$$\kappa(c\alpha + \beta) = c\kappa(\alpha) + \kappa(\beta), \quad \forall\alpha, \beta \in V, \quad \forall c \in F.$$

Demostración: Sea

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Tengo que

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n, \quad \beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha n.$$

Luego

$$c\alpha + \beta = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\alpha_n.$$

Por lo tanto

$$\therefore [c\alpha + \beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} cx_1 + y_1 \\ \vdots \\ cx_n + y_n \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = c[\alpha]_{\mathcal{B}} + [\beta]_{\mathcal{B}}.$$

😃

4.8. DIA DE REPASO:

Proposición 4.8.1

V espacio vectorial de $dim < \infty$, S finito y $S \subseteq V : \langle S\rangle = V$. Entonces existe un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq S$ tal que $\mathcal{B}$ es base de V.

Nota:-

De cualquier conjunto de generadores puedo sacar una base.

Demostración: Sea $\mathcal{B} \subseteq S$ subconjunto LI tal que $|\mathcal{B}|$ maximo.
$\Rightarrow \forall \alpha \in S$ se tiene $\alpha \in \langle \mathcal{B} \rangle$.
Si no $\Rightarrow \mathcal{B} \cup \{\alpha\}$ LI, pero $|\mathcal{B} \cup \{\alpha\} = |\mathcal{B}| + 1 > |\mathcal{B}|$. ABSURDO.
$\therefore \alpha \in \langle \mathcal{B} \rangle \ \forall \alpha \in S \Rightarrow V \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ y luego $\langle \mathcal{B} \rangle = V$.
$\Rightarrow \mathcal{B}$ base de V. ☺

Ejemplo 4.8.1 (1)

Sea
$$W_1 = \langle (-1,1,0,0),(-1,0,1,0) \rangle \ , \ W_2 = \langle (0,1,-1,0),(1,-1,1,-1),(-2,1,1,0) \rangle \ .$$

Si tengo
$$W = W_1 + W_2 \subseteq R^4.$$

Tengo que
$$W = \left\langle \underbrace{(-1,1,0,0)}_{\alpha_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{\alpha_2}, \underbrace{(0,1,-1,0)}_{\alpha_3}, \underbrace{(1,-1,1,-1)}_{\alpha_4}, \underbrace{(-2,1,1,0)}_{\alpha_5} \right\rangle .$$

La proposicion anterior me dice que hay un subconjunto de vectores que forman una base de W. Lo que no me dice es como encontrarlos.

1) Dar una base ordenada de W y dar dimension.

2) Dado $\alpha = (a,b,c,d) \in W$, hallar sus coordenadas en la base ordenada de 1).

3) Describir implicitamente de W.

Para resolver todo esto lo que hacemos es plantear una combinacion lineal

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha 4 + x_5\alpha_5 = (a,b,c,d).$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Si quiero estudiar la independencia lineal hago $(a,b,c,d) = 0$. Pero si quiero dar una base me conviene trabajar con (a,b,c,d) genericos.
Entonces comienzo a reducir por filas

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & a \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccccc|r} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & a+b \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccccc|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a+b+c \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+F_2,F_1+F_3,F_1+F_4,F_2-F_4,F_3+F_4,\ldots} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & b-d \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & c+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -d \end{array}\right).$$

Permutando filas me queda

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & b-d \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & c+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \end{array}\right).$$

Luego las variables libres son x_3, x_5. Y las variables dependientes x_1, x_2, x_4.
Me fijo en los pivotes y vuelvo a la matriz original, como la matriz a la que llegue tiene pivotes en la columna $1, 2, 4$, que vienen de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ llego a que

(1) Base ordenada de W : $\mathcal{B} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

Son base pues $\mathcal{B}$ LI pues si planteo

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_4\alpha_4 = 0.$$

Es lo mismo a poner

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + 0\alpha_3 + x_4\alpha_4 + 0\alpha_5 = 0.$$

(*) con $(a, b, c, d) = 0$, $x_3 = x_5 = 0$

$\Rightarrow$

$$x_1 = -x_3 - x_5 = 0,\ x_2 = x_3 - x_5 = 0,\ x_4 = 0.$$

$\mathcal{B}$ genera W: basta ver que $\alpha_i \in \langle \mathcal{B} \rangle$ $\forall i = 1, \ldots, 5$.

$\Leftrightarrow$

$\alpha_3, \alpha_5 \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Pero es facil de ver pues

$$\alpha_3 = x_3 = 1, x_5 = 0 \quad (\text{con } (a, b, c, d) = 0 \text{ para despejar } \alpha_3\ )$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = -x_3 - x_5 = -1,\ x_2 = x_3 - x_5 = 1,\ x_4 = 0$$

tal que

$$(-1)\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 + 0\alpha_5 = 0.$$

Y puedo despejar α_3

$$\alpha_3 = \alpha_1 + (-1)\alpha_2.$$

Puedo hacer lo mismo para α_5 :

$$x_3 = 0,\ x_5 = 1\ \Rightarrow\ x_1 = -x_3 - x_5 = -1,\ x_2 = x_3 - x_5 = -1,\ x_4 = 0.$$

Entonces

$$(-1)\alpha_1 + (-1)\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 + 1\alpha_5 = 0.$$

Es decir

$$\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 \in \langle \mathcal{B} \rangle .$$

(2) $(a,b,c,d) \in W$, dar $[(a,b,c,d)]_{\mathcal{B}}$. Pero ya lo tengo hecho, es

$$[(a,b,c,d)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b-d \\ c+d \\ -d \end{pmatrix}.$$

(3)

$$W : a+b+c+d = 0.$$

Tengo que

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) &= (-b-c-d,b,c,d) \\ &= b(-1,1,0,0) + c(-1,0,1,0) + d(-1,0,0,1)\end{aligned}$$

Luego existe otra base ordenada de W.

$$\mathcal{B}' = \underbrace{(-1,1,0,0)}_{\alpha_1'}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{\alpha_2'}, \underbrace{(-1,0,0,1)}_{\alpha_3'} .$$

Luego si quiero encontrar la matriz cambio de base

$$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = ([\alpha 1']_{\mathcal{B}}[\alpha 2']_{\mathcal{B}}[\alpha 3']_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si quiero la matriz de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ puedo sacar la inversa de esta.

Nota:-

La moraleja del siguiente teorema es que cualquier matriz invertible es una matriz de cambio de base.

Teorema 4.8.1

Sea $dimV = n$. Y sea $\mathcal{B} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una base ordenada de V. Sea $P \in F^{n\times n}$ invertible. Entonces existe una base ordenada B' de V tal que $P = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Demostración: Sea $\mathcal{B}' : \alpha_1', \ldots, \alpha_n'$, donde

$$\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} a_i.$$

Basta ver que $\mathcal{B}'$ es base (LI y genera a V). Para esto, a su vez basta ver que $\alpha_i \in \langle \mathcal{B}' \rangle\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Esto implica que $\langle B' \rangle = V$ y $\mathcal{B}'$ es base pues tiene a lo sumo$n = dimV$ vectores.
Entonces, sea

$$Q = P^{-1} \quad \alpha_j = \sum_{l=1}^{n} Q_{lj} \alpha l'.$$

😊

En el ejemplo anterior, dar una base ordenada $\tilde{\mathcal{B}}$ de W tal que

$$P_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathcal{B} \text{ como en el item 1) }).$$

Luego

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\alpha_1}, \tilde{\alpha_2}, \tilde{\alpha_3}\}.$$

Es decir

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha_1} &= 1\alpha 1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_4 = 1(-1,1,0,0) + 1(-1,0,1,0) + (1,-1,1,-1) = (-1,0,2,-1) \\
\tilde{\alpha_2} &= 1\alpha 1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 = 1(-1,1,0,0) + 2(-1,0,1,0) + 4(1,-1,1,-1) = \\
\tilde{\alpha_3} &= 1\alpha 1 + (-1)\alpha_2 + 1\alpha_4 = 1(-1,1,0,0) + -1(-1,0,1,0) + (1,-1,1,-1) = .
\end{aligned}$$

4.9. Transformaciones lineales

Definición 4.9.1

Sean V, W espacio vectorial sobre F. Una funcion $T : V \longrightarrow W$ se dice una transformacion lineal (t.l.) si

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta), \qquad \forall c \in F, \forall \alpha, \beta \in V..$$

Equivalentemente, $T(c\alpha) = cT(\alpha)$ y $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta) \forall \alpha, \beta \in V \forall c \in F$.

Ejemplo 4.9.1 (1)

$Id_v : V \longrightarrow V$, es transformacion lineal pues

$$Id_v(c\alpha + \beta) = c\alpha + \beta = cId_v(\alpha) + Id_v(\beta) \quad \forall c, \quad \forall \alpha, \beta..$$

Ejemplo 4.9.2 (2)

$0 : V \longrightarrow W$, definida como $0(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha in V$, es transformacion lineal pues

$$0(c\alpha + \beta) = 0 = c0 + 0 = c0(\alpha) + 0(\beta) \quad \forall c, \forall \alpha, \beta.$$

Observación 4.9.1

Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformacion lineal $\Longrightarrow T(0) = 0$.

Demostración: En efecto

$$T(0) = T(0+0) \stackrel{*}{=} T(0) + T(0)$$

$\Rightarrow$
$$0 = T(0).$$

(*) Pues es transformacion lineal ☺

Luego puedo llegar al siguiente corolario

Corolario 4.9.1

La unica funcion constante $T : V \longrightarrow W$ que es transformacion lineal es $T = 0$.

Ejemplo 4.9.3 (2)

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y) = (x + y, -x + 2y, 0)$ pues

$$T(c(x, y,) + (x', y')) = T(cx + x', cy + y') = (cx + x' + cy + y', -cx - x' + 2cy + 2y', 0).$$

$$= (c(x + y) + (x' + y'), c(-x + 2y) + (-x' + 2y')).$$

$$= c(x + y, -x + 2y, 0) + (x' + y' - x' + 2y', 0) = cT(x, y) + T(x', y').$$

Ejemplo 4.9.4 (3)

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

no es transformacion lineal pues

$$T(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y

$$T(c.(1, 0)) = T(c, 0) = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =? = cT(1, 0) = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Leftrightarrow c^2 = c$, por ej $c = -1$ no se cumple.

Ejemplo 4.9.5 (4)

$T : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow F^{2\times 3}$.

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 1 \end{pmatrix}.$$

Basta ver que $T(0) \neq 0$, es decir

$$T(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \therefore \text{ T no es transformacion lineal.}$$

Ejemplo 4.9.6 (5)

$A \in F^{m\times n}$, $T : T_A : F^{n\times 1} \longrightarrow F^{m\times 1}$ tal que $T(x) = AX$.

Es transformacion lineal pues

$$T(cx = x') = A(cX = X')$$

que es igual a

$$\begin{aligned} &= A(cX) + AX' \\ &= c(AX) + AX' \\ &= cT(x) + T(X') \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.7 (6)

$det : F^{n\times n} \to F$ no es transformacion lineal si $n > 1$ pues $det(A+B) \neq detA + detB$ en general.

Ejemplo 4.9.8 (7 (Ejemplo exotico))

Sea p primo.$F = \mathbb{F}_p(2 = \mathbb{Z}_p)$ y la transformacion lineal

$$T : \mathbb{F}_p[x] \to \mathbb{F}_p[x], \text{ tal que } T(f) = f^p.$$

Debo ver que preserva el producto por escalar

$$T(cf) = (cf)^p = c^p f^p = cf^p \stackrel{*}{=} cf^p.$$

(*) Por fermat $c^p = c$, o $a^p \equiv a(p) \forall a, \in \mathbb{Z}$

$$T(f+g) = (f+g)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} f^j g^{p-j} = f^p + g^p = T(f) + t(g).$$

Como p primo $\Rightarrow p| \binom{p}{j} \forall j = 1, \ldots, p-1$

4.10. Repaso

Sean dos espacios vectoriales V y W, llamamos una transformacion lineal de V en W a

$$T : V \to W$$

que cumple

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) \quad \forall c \in F, \forall \alpha, \beta \in V.$$

Ejemplo 4.10.1 (1)

Sea $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ base ordenada de V, entonces

$$[]_{\mathcal{B}} : V \to F^{n\times 1}$$

que a cada $\alpha \mapsto [\alpha]_{\mathcal{B}}$.
Habiamos probado que

$$[c\alpha + \beta]_{\mathcal{B}} = c[\alpha]_{\mathcal{B}} + [\beta]_{\mathcal{B}}$$

Observación 4.10.1

Una transformacion lineal "preserva" combinaciones lineales, es decir: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V, c_1, \ldots, c_n$, y sea $T : V \to W$ una transformacion lineal

$$T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = c_1T(\alpha_1) + c_2T(\alpha_2) + \cdots + c_nT(\alpha_n).$$

Ejemplo 4.10.2 (PREGUNTA TIPICA)

Existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,0,2) = (1,-1),\ T(1,0,-1) = (0,1),\ T(0,0,1) = (2,-1)?.$$

Noto que

$$(0,0,1) = \frac{1}{3}(1,0,2) - \frac{1}{3}(1,0,-1).$$

Si T es transformacion lineal, entonces

$$T(0,0,1) = \frac{1}{3}T(1,0,2) - \frac{1}{3}T(1,0,-1).$$

Pero $T(1,0,2) = (1,-1)$ y $T(1,0,-1) = (0,1)$, luego

$$T(0,0,1) = \frac{1}{3}(1,-1) - \frac{1}{3}(0,1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(0, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Si la pregunta hubiese sido existe una transformacion lineal tal que

$$T(1,0,2) = (1,-1),\ T(1,0,-1) = (0,1),\ T(0,0,1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)?.$$

Nota:-

EN EL PARCIAL ENTRA HASTA EL 14 DE TRANSFORMACIONES LINEALES.

Teorema 4.10.1

Sea V espacio vectorial de dimension finita y $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una base ordenada de V. Sean ademas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores en W.
Entonces existe una unica transformacion lineal $T : V \to W$ tal que

$$T(\alpha_i) = \beta_i,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Demostración: Sea para cada $\alpha \in V, [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in F^{n\times 1}$. Tengo que

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$$

es la unica(*) expresion de α como combinacion lineal de $\mathcal{B}$.
Luego, sea $T : v \longrightarrow W$,

$$T(\alpha) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n$$

esta bien definida por (*).
Ademas

$$T(\alpha_i) = 0\beta_1 + \cdots + 1\beta_i + \cdots + 0\beta_n = \beta_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Luego T es transformacion lineal: Sean $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n, \alpha' = c_1'\alpha_1 + \cdots + c_n'\alpha_n \in V, c \in F : c\alpha + \alpha'$ tengo que

$$c\alpha + \alpha' = (cc_1 + c_1')\alpha_1 + \cdots + (cc_n + c_n')\alpha_n.$$

$$T(c\alpha + \alpha') = (cc_1 + c_1')\beta_1 + \cdots + (cc_n + c_n')\beta_n.$$

$$T(c\alpha + \alpha') = c(c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n) + (c_1'\beta_1 + \cdots + c_n'\beta_n) = cT(\alpha) + T(\alpha').$$

Unicidad: Supongamos $\tilde{T} : V \longrightarrow W$ tal que $\tilde{T}(\alpha_i) = \beta_i, \forall i$

$$\forall \alpha \in V : \quad \alpha = c_1\alpha 1 + \cdots + c_1\alpha_n.$$

Luego

$$\tilde{T}(\alpha) = c_1\tilde{T}(\alpha_1) + \cdots + c_n\tilde{T}(\alpha_n) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n = T(\alpha).$$

Luego $T = \tilde{T}$. 😊

Nota:-

Para definir una transformacion lineal basta con tomar una base ordenada y diga donde van a parar los vectores. Eso determina una transformacion lineal univocamente.

Ejemplo 4.10.3

Dar una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$T(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; T(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con la notacion anterior $\alpha_1 = (1,-1), \alpha_2 = (1,1)$ y $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, notar como $T(\alpha_i) = \beta_i$.

Uso el teorema anterior. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^2, \alpha = (x,y) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$?

Resuelvo como siempre, hago la matriz columna de α_1, α_2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x-y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x+y}{2} \end{array}\right).$$

Es decir las coordenadas de α ahora son

$$\alpha = (x, y) = \left(\frac{x-y}{2}\right)\alpha_1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)\alpha_2.$$

Luego $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}, T(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}\right)\beta_1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)\beta_2$ que es lo mismo a

$$= \left(\frac{x-y}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Me queda

$$= \begin{pmatrix} -\frac{x+y}{2} & x-y \\ \frac{x-y}{2} & \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.10.4

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 2) = (1, -1)(*1),\ T(1, 0, -1) = (0, 1)(*2),\ T(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)(*3).$$

Basta ver que si existe una transformacion lineal tal que cumpla (1) y (2) pues si ese es el caso automaticamente se cumple (3).

Como $\alpha_1 = (1, 0, 2)$ y $\alpha_2 = (1, 0, -1)$ son LI $\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2\}$ se extiende a una base (ordenada) de $\mathbb{R}^3$. Concretamente hagamos esto

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & z-2x \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}(z-2x) \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & x + \frac{x+z}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2x-z}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \end{array}\right)(**).$$

Notar como tengo pivotes en la columna $1, 2, 4$ luego mis vectores LI son las columnas $1, 2, 4$ originales.
Ahora $\mathcal{B} : \alpha_1, \alpha_2, e_2$ es Base ordenada de $\mathbb{R}^3$.
Luego podemos definir

$$T(\alpha_1) = (1, -1),\ T(\alpha_2) = (0, 1),\ T(e_2) = \underline{(0, 0)}(*).$$

Puedo mandar $T(e_2)$ a cualquier vector en $\mathbb{R}^2$.

Luego por (**)

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x+z}{3}\right)(1,-1) + \left(\frac{2x-z}{3}\right)(0,1) + y\cdot(0,0)$$
$$= \left(\frac{x+z}{3}, \frac{x-2z}{3}\right) \quad \text{es una posible } T.$$

Nota:-

T no es unica

- Si completo base con otro $e_2 \rightsquigarrow$ cambia T.
- Si cambio el valor (arbitrario) que di a $T(e_2)$.

Definición 4.10.1

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Se definen el nucleo $Nu(T)$ y la imagen $Im(T)$ de T como

$$Nu(T) = \{\alpha \in V : T(\alpha) = 0\} \subseteq V.$$
$$Im(T) = \{T(\alpha) : \alpha \in V\} \subseteq W.$$

Proposición 4.10.1

$Nu(T)$ es subespacio de V y $Im(T)$ es subespacio de W.

Demostración: Para $Nu(T).\alpha, \beta \in Nu(T), c \in F$. Tengo que

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) = c0 + 0 = 0.$$

Ademas $Nu(T) \neq 0$ pues $0 \in Nu(T)$ (vimos antes que $T(0) = 0 \forall$ T.L. T).
$\therefore cafa + \beta \in Nu(T)$.
Para $Im(T)$: $Im(T) \neq 0$ pues $0 = T(0) \in Im(T)$. Sea $\delta, \gamma \in Im(T), c \in F$.

$$\delta = T(\alpha), \gamma = T(\beta) \quad \text{para ciertos } \alpha, \beta \in V$$

$\Rightarrow$

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) = c\ \delta + \gamma.$$

y como $T(c\alpha + \beta) \in Im(T)$ $Im(T)$ es un subespacio.

😄

Ejemplo 4.10.5 (1)

$T : F^{n\times 1} \longrightarrow F^{m\to 1}$, $T(x) = AX, (A \in F^{m\times n}$ fija) tengo que

$$Nu(T) = \{X : AX = 0\} : \text{ espacio solucion del sistema homogeneo } AX = 0\ .$$

$$\begin{aligned} Im(T) &= \left\{Y \in F^{m\times 1} : AX = Y, \text{ para algun } X \in F^{n\times 1}\right\} \\ &= \left\{Y \in F^{m\times 1} : AX = Y \text{ tiene solucion } X \in F^{n\times 1}\right\} \end{aligned}$$

En general si $T : V \to W$ y $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = V$. Entonces

$$\langle T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n) \rangle = Im(T).$$

En efecto, $\beta \in Im(T) \Rightarrow \beta = T(\alpha) \quad \alpha \in V$ y

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \Rightarrow \beta = T(\alpha) = c_1T(\alpha_1) + \cdots + c_nT(\alpha_n).$$

Si $C_1, \ldots, C_n$ son las columnas de A, entonces

$$C_i = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\therefore Im(T) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$.

Ejemplo 4.10.6

Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x + y, z, y + t).$$

$$Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x + y = 0 \wedge z = 0 \wedge y + t = 0 \right\} \quad \text{Descripcion implicita de } Nu(T) \text{ .}$$

Y una base del $Nu(T)$ la calculo resolviendo el sistema homogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y tengo que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para la imagen tengo que

$$Im(T) = \left\langle T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

$$= \langle(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\rangle = \mathbb{R}^3.$$

Teorema 4.10.2 De la dimension

Sea V un espacio vectorial de dimension finita y $T : V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Entonces

$$dimV = dim\ Nu(T) + dim\ Im(T).$$

Demostración: Como $Nu(T) \subseteq V$ subespacio $\Rightarrow Nu(T)$ es de $dim < \infty$.
Sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ base de $Nu(T)$. Como α_i son LI $\Rightarrow$ lo podemos extender a una base de V:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$$

de modo que

$$dim\ V = k + m$$

y

$$dim\ Nu(T) = k..$$

Afirmacion: $T(\gamma_1), \dots, T(\gamma_m)$ forman una base de $Im(T)$.
En efecto:
Generan: $\beta \in Im(T) : \beta = T(\alpha),$ para $\alpha \in V$.
α sera de la forma

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_k\alpha_k + y_1\gamma_1 + \cdots + y_m\gamma_m.$$

Tengo que

$$\beta = T(\alpha) = x_1T(\alpha_1) + \cdots + x_kT(\alpha_k) + y_1T(\gamma_1) + \cdots + y_mT(\gamma_m).$$

Uso que $\alpha_i \in Nu(T)$, luego $T(\alpha_i) = 0$

$$\beta = y_1T(\gamma_1) + \cdots + y_mT(\gamma_m).$$

Son LI: Supongamos $y_1T(\gamma_1) + \cdots + y_mT(\gamma_m) = 0$ Luego

$$T(y_1\gamma_1 + \cdots + y_m\gamma_m) = 0$$

$\Rightarrow$

$$y_1\gamma_1 + \cdots + y_m\gamma_m \in Nu(T)$$

$\Rightarrow$

$$y_1\gamma_1 + \cdots + y_m\gamma_m = x_1\alpha_1 + \cdots + x_k\alpha_k$$

$\Rightarrow$

$$(-x_1)\alpha_1 + \cdots + (-x_k)\alpha_k + y_1\gamma_1 + \cdots + y_m\gamma_m = 0.$$

Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ LI $\Rightarrow x_1 = \cdots = x_k = 0 \ \wedge \ y_1 = \cdots = y_m = 0$. Luego

$$\{T(\gamma_1), \ldots, T(\gamma_m)\} \text{ LI y luego base } Im(T)$$

$\Rightarrow$

$$dim\ Im(T) = m..$$

$\therefore dim\ V = k + m = dim\ Nu(T) + dim\ Im(T).$

😃

Nota:-

Si aplicamos este resultado a los ejemplos de antes, este teorema implica que para cualquier matriz el rango fila es igual al rango columna. La dimension del espacio fila es igual a la dimension del espacio columna.

4.11. Repaso

Vimos que, sea $T : V \longrightarrow W$ transformacion lineal de dimension $dimV < \infty$ tengo que

$$dim\ V = dim\ Nu(T) + dim\ Im(T).$$

Observación 4.11.1

Sea $T : V \longrightarrow W$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow Im(T) = W$.

Proposición 4.11.1

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Son equivalentes

(I) T inyectiva.

(II) $Nu(T) = \{0\}$.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$: Sea $\alpha \in V.T(\alpha) = 0 = T(0) \Rightarrow \alpha = 0$.
$\therefore Nu(T) = \{0\}$.
$ii) \Rightarrow i)$: Supongamos $\alpha, \beta \in V : T(\alpha) = T(\beta)$.
Como T es lineal: esto equivale a

$$0 = T(\alpha) - T(\beta) = T(\alpha - \beta).$$

$\Rightarrow \alpha - \beta \in Nu(T) = \{0\}$.

$$\therefore \alpha - \beta = 0$$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta$.

😃

Nota:-

Sea una transformacion lineal $T : V \longrightarrow W$.

- Es sobreyectiva si la imagen es todo el espacio de llegada W
- Es inyectiva si y solo si el $Nu(T) = 0$.

Observación 4.11.2

$Nu(T) = \{0\} \Leftrightarrow dim\ Nu(t) = 0$

Luego

$$(dimW < \infty) \quad Im(T) = W \Leftrightarrow dim\ Im(T) = dim\ W.$$

Ejemplo 4.11.1 (1)

Sea $T : F^n \longrightarrow F^m$ es una transformacion lineal sobreyectiva.

$\Leftrightarrow dim\ Im(T) = m.$

El teorema de la dimension me dice

$$n = \underbrace{dim\ Nu(T)}_{\geqslant 0} + m \geqslant m.$$

Ejemplo 4.11.2 (2)

Sea $T : F^n \longrightarrow F^m$ inyectiva $\Leftrightarrow Nu(T) = \{0\}$. Me implica

$$n = \underbrace{dim\ Nu(T)}_{=0} + dim\ Im(T) = dim\ Im(T) \leqslant m..$$

Nota:-

$\leqslant m$ pues F es inyectiva.

Ejemplo 4.11.3 (3)

Existe alguna transformacion lineal $T : R^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, -1) = (0, 0, 0)$$

y que los vectores

$$(1, 2, 3), (\sqrt{2}, 0, -1) \in Im(T)?$$

Como el

$$(1, -1) \in Nu(T) \Rightarrow dim\ Nu(T) \geqslant 1.$$

Si $\underbrace{(1, 2, 3), (\sqrt{2}, 0, -1)}_{LI} \in Im(T) \Rightarrow Im(T) \geqslant 2.$

Si existiera T con tales condiciones esto $\Rightarrow$

$$\underbrace{2}_{dim\ \mathbb{R}^2} = dim\ Nu(T) + dim\ Im(T) \geqslant 1 + 2 = 3.$$

ABSURDO.

$\therefore$ No puede existir una T asi.

Habiamos dicho que dada una matriz $A \in F^{m\times n}$

$$\text{Rango fila de } A \ = dim\ \langle F_1, \dots, F_n \rangle\,.$$

$$\text{Rango columna de } A = dim\ \langle C_1, \dots, C_n \rangle\ .$$

Teorema 4.11.1

Sea $A \in F^{m\times n}$. Entonces

$$\text{Rango fila de } A = \text{Rango columna de } A\ .$$

Este se llama el rango de A y se denota $rg(A)$.

Demostración: Sea la transformacion lineal $T : F^{n\times 1} \longrightarrow F^{m\times 1}$, tal que $T(x) = AX\ \forall x \in F^{n\times 1}$.
Se que

$$dim\ F^{n\times 1} = n = dim\ Nu(T) + dim\ Im(T).$$

Ademas, se que el nucleo

$$Nu(T) = \{x : AX = 0\}\,.$$

Si R MERF : $A \rightsquigarrow R$ entonces

$$Nu(T) = \{x : RX = 0\}\,.$$

Pero

$$dim\,\{x : RX = 0\} = n - r \text{ donde } r \text{ es el numero de filas no nulas de } R\ .$$

Luego

$$Im(T) = \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subseteq F^{m\times 1},\ C_i : \text{ columna } i \text{ de } A\ .$$

Por lo tanto

$$dim\ Im(T) = \text{ rango columna de } A\ .$$

Como el espacio fila de A y el de R coinciden
$\Rightarrow$

$$\text{rango fila } (A) = \text{rango fila } (R) = r\ .$$

$= r$ pues R MERF.
Luego

$$n = \underbrace{n - r}_{dim\ Nu(T)} + \underbrace{\text{rango columna } (A)}_{dim\ Im(T)} = n - \text{ rango fila } (A) + \text{ rango columna } (A)\ .$$

Esto implica que rango fila (A) = rango columna (A). 😄

Ejemplo 4.11.4

Sea la matriz MERF

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si planteo combinaciones lineales de los tengo

$$c_1(0,1,2,0,-1) + c_2(0,0,0,1,-2) = (0,0,0,0,0).$$

Me implica la igualdad siguiente

$$(0, c_1, 2c_1, \dots) + (0,0,0,c_2,\dots) = (0,0,0,0,0).$$

Las filas no nulas de una MERF son LI.

Teorema 4.11.2

Sean V, W espacios vectoriales de dimension finita y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada transformacion lineal $T : V \longrightarrow W$, existe una unica matriz

$$A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in F^{m\times n}$$

donde $m = dim\ W,\ n = dim\ V$ tal que

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \alpha \in V.$$

Demostración: La bases

$$\mathcal{B} : \alpha_1, \dots, \alpha_n, \qquad \mathcal{B}' : \beta_1, \dots, \beta_n.$$

Se que $\forall j = 1, \dots, n$

$$\underbrace{T(\alpha_j)}_{\in W} = \sum_{l=1}^{m} A_{ij}\beta_i, \quad \text{para cierto } A_{ij} \in F\ .$$

Nota:-

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{3j} \end{pmatrix}.$$

Sea $A = (A_{ij})$ con $1 \leqslant i \leqslant m\ \wedge\ i \leqslant j \leqslant n$.
Veamos que A cumple con el teorema anterior:
Sea $\alpha \in V$:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j, \quad [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Como T preserva las combinaciones lineales

$$\begin{aligned}
T(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} x_j T(\alpha_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right) \beta_i
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{mj} x_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

$\therefore$ Se cumple la igualdad del teorema, falta probar que esta matriz A es unica.
Recordemos $A = (C_1 | \cdots | C_n)$ donde $C_j = [T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}$.
Para probar launicidad, supongamos que $B \in F^{m \times n}$ tambien cumple la igualdad del teorema:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = B[\alpha]_{\beta'}, \quad \forall \alpha \in V.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
C_j &= [T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} \\
&= B[a_j]_{\mathcal{B}} \qquad \mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\
&= B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{ columna } j \text{ de } B
\end{aligned}$$

$\therefore A = B.$ 😃

Diremos lo siguiente por ahora, mas formalmente lo definiremos

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Es la matriz de T con respcto a las bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Ejemplo 4.11.5

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, tal que

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & z \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, donde

$$\mathcal{B} : (0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)$$
$$\mathcal{B}' : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada columna j de $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ tiene las coordenadas de $T(\alpha_j)$ en la base ordenada $\mathcal{B}'$.

$$T(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{11}\beta_1 + A_{21}\beta_2 + \cdots + A_{41}\beta_4 \rightsquigarrow \text{ Sistema \#1.}$$
$$T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{12}\beta 1 + \cdots + A_{42}\beta_4 \rightsquigarrow \text{ Sistema \# 2}$$
$$T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{13}\beta 1 + \cdots + A_{43}\beta_4 \rightsquigarrow \text{ Sistema \# 3}$$

Resolviendo los sistemas
#1

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow Id_4|[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Cada columna que amplie depende del primer, segundo, y tercer sistema.
Reduciendo seria

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Corolario 4.11.1

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz de cambio de base $P_{BB'}$ es exactamente $[Id_v]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Demostración: $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ esta caracterizada por

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}} = [\alpha]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall \alpha \in V.$$

Lo cual tambien caracteriza a $[Id]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

☺

Lema 4.11.1

Sean $T : V \longrightarrow W$, $S : W \longrightarrow U$ transformaciones lineales. Entonces

$$SoT : V \longrightarrow U$$

es una transformacion lineal.

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in V, c \in F$.

$$(SoT)(c\alpha + \beta) = S(T(c\alpha + \beta)) = S(cT(\alpha) + T(\beta)).$$

$$= cS(T(\alpha)) + S(T(\beta)) = c(SoT)(\alpha) + (SoT)(\beta).$$

😄

Corolario 4.11.2

Sean V, W, U espacios vectoriales de dimension finita. $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases ordenadas de V, W, U, respectivamente. Sean $T : V \longrightarrow W, S : W \longrightarrow U$ transformaciones lineales. Entonces

$$[SoT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Demostración: Basta probar que la matriz

$$A = [S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

satisface

$$A[\alpha]_{\mathcal{B}} = [(SoT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''}, \quad \forall \alpha \in V$$

pues $[SoT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}$ es la unica que cumple esto.

$$A[\alpha]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}\underbrace{[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}}_{[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}} = [S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [S(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} = [(SoT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''}.$$

😄

Corolario 4.11.3

Sea $T : V \longrightarrow W.\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ bases ordenadas de V, $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1$ bases ordenadas de W. Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'_1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'_1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}} &= [Id_w]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'_1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[Id_v]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}} \\ &= [Id_w oToId_v]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1} \\ &= [T]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}'_1} \end{aligned}$$

Aplicando dos veces el corolario anterior.

😄

Sea una transformacion lineal $T : V \longrightarrow W$.

Definición 4.11.1

(1) T se dice monomorfismo si es inyectiva.

(2) T se dice epimorfismo si es sobreyectiva.

(3) T se dice isomorfismo si es biyectiva.

$\Leftrightarrow T$ invertible.

Lema 4.11.2

Si $T : V \longrightarrow W$ isomorfismo $\Rightarrow T^{-1} : W \longrightarrow V$ tambien lo es.

Demostración: Basta ver que T^{-1} es transformacion lineal. Sean $\beta_1, \beta_2 \in W$, $c \in F$, $\beta_1 = T(\alpha_1), \beta_2 = T(\alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 \in V$, $T^{-1}(\beta_1) = \alpha_1, T^{-1}\beta_2 = \alpha_2$.

$$\begin{aligned} T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) &= T^{-1}(cT(\alpha_1) + T(\alpha_2)) \\ &= \underbrace{T^{-1}(T}_{Id}(c\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= c\alpha_1 + \alpha_2 \\ &= cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2) \end{aligned}$$

😊

Notacion: Si existe un isomorfismo (iso) $T : V \longrightarrow W$ diremos que V es ismorofo a W y lo denotaremos $V \cong W$.

Proposición 4.11.2

La relacion " $\cong$ " es de equivalencia.

Demostración:

- Reflexividad: Cualquiera sea V e.v. $\Rightarrow V \cong V$ en efecto,

$$Id_V : V \longrightarrow V$$

es iso.

- Simetria: $V \cong W$.

$$\exists T : V \longrightarrow W \text{ iso } \Rightarrow T^{-1}W \longrightarrow V \text{ iso}$$

y,

- Transitividad: $V \cong W$ y $W \cong U \Rightarrow \exists T : V \longrightarrow W$ y $SW \longrightarrow U$, entonces

$$SoT : V \longrightarrow U \text{ iso y } V \cong U.$$

😊

Nota:-
MUY IMPORTANE, EL SIGUIENTE TEORMA ENTRA FINAL

Teorema 4.11.3

Sean V, W espacios vectoriales de dimension finita tales que $\dim V = \dim W$ y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Son equivalentes

(I) T isomorfismo.

(II) T monomorfismo.

(III) T epimorfismo.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ y $iii)$ es cierto en general (def de funcion biyectiva)
$ii) \Rightarrow iii)$ y $i)$: Por teorema de la dimension

$$\dim V = \underbrace{\dim Nu(T)}_{0} + \dim Im(T).$$

T mono (inyectiva) $\Leftrightarrow Nu(T) = \{0\}$, luego

$$\dim Im(T) = \dim V = \dim W.$$

$\Rightarrow Im(T) = W$ y T epimorfismo.
Analogamente $iii) \Rightarrow ii)$ y $i)$:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim Nu(T) + \dim Im(T) \\ &= \dim Nu(T) + \dim W \\ &= \underbrace{\dim Nu(T)}_{\Rightarrow = 0} + \dim V \end{aligned}$$

$\therefore Nu(T) = \{0\} \Leftrightarrow T$ monomorfismo.

☺

Teorema 4.11.4

Bajo las hipotesis del teorema anterior, las condiciones $i), ii), iii)$ son equivalentes a las siguientes:
$iv)$ Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son base de $V \Rightarrow T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)$ son base de W.
$v)$ Existe una base $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de V tal que $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)$ son base de W.

Demostración: $ii) \Rightarrow iv)$ Basta ver que $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)$ es linealmente independiente, luego T es mono pues en tal caso

$$\underbrace{\langle T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n) \rangle}_{\dim = n = \dim W} = W.$$

Si $c_1 T(\alpha_1) + \cdots + c_n T(\alpha_n) = 0$
T lineal:

$$T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = 0 \Rightarrow c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \in Nu(T) = \{0\}$$

$\Rightarrow$

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

$iv) \Rightarrow v)$ Sale claro.
$v \Rightarrow \underbrace{iii)}_{T \text{ epi}}$ Tenemos que existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ base de V tal que $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)$ es base de W.
Como $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = V \Rightarrow \underbrace{\langle T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n) \rangle}_{v) \Rightarrow W}$ ☺

Teorema 4.11.5

Sea V espacio vectorial sobre F tal que $\dim V = n$. Entonces $V \cong F^n$.

Demostración: Sea $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ base ordenada de V. Sea $T : V \longrightarrow F^n$. $T(\alpha) = [\alpha]_{\mathcal{B}}$, es decir

$$T(\alpha) = (x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

Vimos antes que T TL.
Ademas

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F^n, \exists!\ \alpha \in V : \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

$\therefore$ T biyectiva y luego iso.

☺

Corolario 4.11.4

Sean V, W espacios vectoriales de dimension finita. Entonces $V \cong W$ si y solo si $\dim V = \dim W$.

Teorema 4.11.6

Sea $T : V \longrightarrow W$ transformacion lineal entre espacios vectoriales de dimension finita y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V y W, respectivamente.
Entonces T iso $\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ invertible y en tal caso

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [T]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Demostración: Supongamos T iso $\Rightarrow T^{-1} : W \longrightarrow V$.

$$T \circ T^{-1} = Id_W,\ T^{-1} \circ T = Id_V.$$

$\Rightarrow$

$$[T^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}][T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [Id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n.$$

$\therefore$ $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ invertible y $T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$
Reciprocamente, supongamos $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ invertible. $B = [T]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.
Definimos $U : W \longrightarrow V$, por definicion

$$U(y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n) = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

Luego si $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\mathcal{B}' : \beta_1, \ldots, \beta_n$ donde

$$B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

U es transformacion lineal (Ejercicio).
Ademas $[U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = B$ por definicion de U, ya que $[U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es la unica que cumple

$$[U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[\beta]_{\mathcal{B}'} = [U(\beta)]_{\mathcal{B}}.$$

A su vez

$$[U \circ T]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = B[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I.$$

$\Rightarrow$

$$U \circ T = Id_V$$

y analogamente

$$T \circ U = Id_W.$$

$\therefore$ T es iso. 😄

Ejemplo 4.11.6

Sea $B : (1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$.
Supongamos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la unica transformacion lineal tal que

$$T(1, 0, -1) = (0, 2, 1),\ T(1, 1, 0) = (1, 0, 0),\ T(0, 1, 0) = (0, 1, 0).$$

Probar que T invertible y hallar $T^{-1}(x, y, z)$
Respuesta:
Como $(0, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ es base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ iso (teorema visto hoy)

$$[T]_{\mathcal{B}C} = \Big[[T(\alpha_1)]_C \quad [T(\alpha_2)]_C \quad [T(\alpha_3)]_C\Big] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T^{-1}]_{C\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\Big[T^{-1}(x, y, z)\Big] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Big((x, y, z)\Big)_C = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y - 2z \end{pmatrix}.$$

Que es lo mismo a

$$[T^{-1}(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{C\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T^{-1}(x,y,z) &= z\alpha_1 + x\alpha_2 + (y-2z)\alpha_3 \\ &= z(1,0,-1) + x(1,1,0) + (y-2z)(0,1,0) \\ &= (z+x, x+y-2z, -z) \end{aligned}$$

4.12. Espacios de Transformaciones Lineales

Sean V, W espacios vectoriales sobre F. $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W : T \text{ TL }\}$.
$\mathcal{L}(V,W)$ es un F-espacio vectorial con las operaciones:

$$(cT)(\alpha) = cT(\alpha), \quad (T+S)(\alpha) = T(\alpha) + S(\alpha), \quad c \in F, S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}).$$

Y

$$0(\alpha) = 0, \forall \alpha \in V.$$

Observación 4.12.1

Fijadas las bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente.
Cuando $\dim V = n$ y $\dim W = m$ la aplicacion

$$[?]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(V,W) \to F^{m\times n}$$

($T \mapsto [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$) es un isomorfismo.

4.13. Espacio dual

El espacio vectorial dual de V es $\mathcal{L}(V,F)$ y se denota V^*.

Teorema 4.13.1

Supongamos $\dim V = n$ y sea $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ base ordenada de V. Entonces $f_1, \ldots, f_n$ son base ordenada de V^*, donde f_i estan determinadas por:

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}, \ \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Demostración: Sea $\alpha \in V$.

$$\begin{aligned} \alpha &= c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \\ \Leftrightarrow f_i(\alpha) &= c_1 f_i(\alpha_1) + \cdots + c_n f_i(\alpha_n) \\ &= c_i \end{aligned}$$

Sea $f \in V^*$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= c_1 f(\alpha_1) + \cdots + c_n f(\alpha_n) \\
&= f_1(\alpha) f(\alpha_1) + \cdots + f_n(\alpha) f(\alpha_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \right)(\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \quad \text{y} \quad \langle f_1, \ldots, f_n \rangle = V^*.
$$

Si

$$
x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = 0 \qquad x_1, \ldots, x_n \in F
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x_1) f_1 + \cdots + x_n f_n)(\alpha_i) = 0 \\
&\quad x_1 f_1(\alpha_i) + \cdots + x_n f_n(\alpha_i) = 0
\end{aligned}
$$

Pero a su vez

$$
\begin{aligned}
0 &= x_1 0 + \cdots + x_i f_i(\alpha_i) + \cdots + x_n 0 \\
&= x_i \Rightarrow f_1, \ldots, f_n \text{ LI}
\end{aligned}
$$

😃

Sea V espacio vectorial de dimension finita sobre F.
Una transformacion lineal $T : V \to V$ se dira operador lineal en V.
Si $\mathcal{B}$ base ordenada de V, se denota $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$.
Recordar:

$$
[S \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}
$$

$$
P_{BB'} = [Id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \quad \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ BO de } V \ .
$$

Corolario 4.13.1

Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son base ordenada de V y T operador lineal en V entonces

$$
[T]_{\mathcal{B}'} = P[T]_{\mathcal{B}} P^{-1}, \quad \text{donde } P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} (P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}).
$$

Demostración: Lado derecho

$$
P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [Id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.
$$

$$
P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}} = [Id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} [Id_V]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.
$$

Con

$$
P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [Id_V \circ T \circ Id_V]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'}.
$$

😃

Definición 4.13.1

Sean $A, B \in F^{n\times n}$ se dicen semejantes si existe una matriz invertible $Pn \times n$ tal que $B = PAP^{-1}$, .

Esto define una relacion de equivaencia entre matrices $n \times n$.
Por el corolario anterior, si dos matrices representan al mismo operador lineal en base ordenada de $V \Rightarrow$ son semejantes.
Lo que buscamos con lo que sigue es encontrar representantes de las clases de equivalencia de matrices $n \times n$ que sean tan "simples" como sea posible.

Lema 4.13.1

$A, B \in F^{n\times n}$ semejantes $\Rightarrow det(A) = det(B)$ y $Tr(A) = Tr(B)$.

Demostración:

$$B = PAP^{-1} \Rightarrow det(B) = det(P)det(A)det(P^{-1}) = det(A).$$

$$Tr(QP) = TR(PQ) \Rightarrow Tr(B) = Tr([PA]P^{-1}) = Tr(P^{-1}PA) = Tr(A).$$

😃

Definición 4.13.2

$T : V \to V$ operador lineal. Definimos

$$det(T) = det([T]_{\mathcal{B}}).$$

$$Tr(T) = Tr([T]_{\mathcal{B}}).$$

donde $\mathcal{B}$ alguna base ordenada de V.
Por lema anterior, no dependen de la base ordenada que use.

Definición 4.13.3

Sea $A \in F^{n\times n}$ se dice diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal: Es decir $\exists Q$ invertible: QAQ^{-1} es diagonal.

Ejemplo 4.13.1

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Supongamos que A es diagonalizable. Luego

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} P^{-1}, P \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ invertible }.$$

$$det(A) = 1 = d_1 d_2$$
$$Tr(A) = 0 = d_1 + d_2$$

$\Rightarrow d_1^2 = -1$. Absurdo! ($d_1 \in R$)

Miremos en cambio $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Es diagonalizble?
Con el argumento anterior determinar que si lo fuera $\Rightarrow d_1, d_2 = \pm i$. En este caso la respuesta es Si (veremos mas adelante).

Ejemplo 4.13.2
$A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Supongamos A diagonalizable entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Como antes:

$$\begin{cases} d_1 d_2 & = 0 \\ d_1 + d_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ABSURDO.
$\therefore A$ no es diagonalizable.

Definición 4.13.4

Sea $T : V \longrightarrow V$ operador lineal. Un autovalor de T es un escalar $c \in F$ tal que existe $0 \neq \alpha \in V$ con

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

Si c autovalor, un vector $\alpha \in V$ (cualquiera): $T(\alpha) = c\alpha$ se llama un autovector de autovalor c (o asociado al autovalor c).

El conjunto $V_c = \{\alpha \in V : \alpha$ autovector de autovalor c $\}$ se llama el autoespacio de V asociado al autovalor c.

Lema 4.13.2
Para todo autovalor c, V_c es un subespacio de V.

Demostración:

$$0 \in V_c \text{ pues } T(0) = 0 = c0.$$

Si $\alpha, \beta \in V_c : T(\alpha) = c\alpha$ y $T(\beta) = c\beta$.

$$\forall r \in F : \quad T(r\alpha + \beta) = rT(\alpha) + T(\beta) = rc\alpha + c\beta = c(r\alpha + \beta).$$

$\therefore \alpha + \beta \in V_c$.

😃

Como encontramos los autovalores, autoespacios de T?

Teorema 4.13.2

Sea $T : V \longrightarrow V$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) c es autovalor de T.

(2) El operador $c\ Id_v - T$ no es invertible.

(3) $det(c\ Id_V - T) = 0$.

Demostración: 1) $\Rightarrow ii)$: Por $i)$ $\exists 0 \neq \alpha \in V : T(\alpha) = c\alpha \Leftrightarrow c\alpha - T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (cId_V - T)(\alpha) = 0$ $\Rightarrow$

$$Nu(cId_V - T) \neq 0 \Rightarrow cId_V - T \text{ no invertible } .$$

$ii) \Leftrightarrow iii)$: Sigue de que una matriz A es invertible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.
$ii) \Rightarrow i)$: Si $cId_V - T$ no invertible $\Rightarrow$

$$\underbrace{Nu(cId_V - T) \neq 0}_{\Leftrightarrow cId_V - T \text{ no inyectiva}} \Rightarrow \exists 0 \neq \alpha : (cId_V - T)(\alpha) = 0..$$

$\therefore c$ tal que

$$c\alpha - T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = c(\alpha)$$

es autovalor de T. 😀

Definición 4.13.5

$A \in F^{n\times n}$. El polinomio caracterisico de A es

$$f_A = det(XI_n - A) \in F[X] \quad \text{(de grado n)} .$$

$c \in F$ se dice autovalor de A si $f_A(c) = 0$.

Lema 4.13.3

$A, B \in F^{n\times n}$ semejantes $\Rightarrow f_A = f_B$

Demostración: Por hipotesis, existe P invertible $n \times n$: $B = PAP^{-1}$.

$$f_B = det(XI_n - B) = det(X \underbrace{I_n}_{PP^{-1}} - PAP^{-1}) = det(P(XI_n)P^{-1} - PAP^{-1})$$

$$= det(P(XI_n - A)P^{-1}) = det(XI_n - A) = f_A.$$

😀

Definición 4.13.6

$T : V \to V$ operador lineal, definimos el polinomio caracteristico de T, f_T, como f_A donde

$$A = [T]_{\mathcal{B}}$$

para alguna base ordenada de $\mathcal{B}$ de V.
Esa definicion no depende de $\mathcal{B}$, por el lema anterior.

Ejemplo 4.13.3 (1))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_A = det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1.$$

A no tiene autovalores reales.
Si tiene 2 autovalores complejos: $i, -i$.

Ejemplo 4.13.4 (2)

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y, z) = (3x + 2y + 2z, x + 2y + 2z, -x - y).$$

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_T = det(XI - [T]_C).$$

$$det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} = det\begin{pmatrix} x-3 & -2 & -2 \\ 0 & x-1 & x-2 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-C_1} = det\begin{pmatrix} x-3 & 0 & x-4 \\ 0 & x-1 & x-2 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

$$= (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2).$$

Luego los autovalores de T son:

- $c = 1$ multiplicidad 1.
- $c = 2$ multipicidad 2.

0

4.14. Repaso

Sea un espacio vectorial V de dimension finita, llamo a $T : V \to V$ operador lineal.
Sean bases ordenadas $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1}, \quad P = P_{BB'}.$$

Tambien definimos lo que era el polinomio caracteristico

$$f_T = F_A, \quad A = [T]_{\mathcal{B}}.$$

Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio caracteristico. Recordar ademas que el polinomio caracteristico de A es

$$f_A = det(xI - A).$$

Vimos ademas que $c \in F$ es autovalor de $T \Leftrightarrow f_T(c) = 0$ que ademas $\Leftrightarrow cId_T$ no es invertible.

Ejemplo 4.14.1

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$T(x, y, z) = (2x, x + 2y, y - z).$$

Fijemos $C : e_1, e_2, e_3$.

$$[T]_C = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Busquemos los autovalores y autoespacios de T.
Para los autovalores debo calcular las raices del polinomio caracteristico.

$$f_T = f_A = det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & -1 & x+1 \end{pmatrix} = (x - 2^2)(x + 1).$$

Luego los autovalores son:

- $c = 2$, con multiplicdad 2.
- $c = -1$, con multiplicidad 1.

Autoespacios:

$$V_2 = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^3 : T(\alpha) = 2\alpha\right\} = Nu(2Id - T).$$

Lo calculo

$$2Id - T \text{ representado por } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} : \text{ Resolvemos } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = 3z$$

Luego

$$(x, y, z) = z(0, 3, 1).$$

$\therefore V_2 = \langle(0, 3, 1)\rangle$, y $\dim(V_2) = 1$.
Notar que la dimension del autoespacio es distinta de la multiplicidad.
Para $c = -1$:

$$V_{-1} = Nu((-1)Id - T) : \text{ espacio solucion del sistema } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0, \ z \text{ libre }.$$

Luego

$$V_{-1} = \langle (0,0,1) \rangle, \quad \dim V_{-1} = 1.$$

Definición 4.14.1

El operador lineal T se dice diagonalizable si existe una base ordenada $\mathcal{B}$ de V cuyos vectores son todos ellos autovectores de T

Observación 4.14.1

Si $\mathcal{B} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ esta formada por autovectores de $T \Rightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in F : T(\alpha_i) = c_i \alpha_i$ no necesariamente con c_i distintos.

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \text{ diagonal ..}$$

Ejemplo 4.14.2

$B : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$T(\alpha_1) = 2\alpha_1, T(\alpha_2) = -\alpha_2, T(\alpha_3) = \alpha_3, T(\alpha_4) = 0.$$

$$c_1, c_2 = -1, c_3 = -1, c_4 = 0.$$

Luego

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} (\mathbb{R}^4)_2 = \langle \alpha_1 \rangle, (\mathbb{R}^4)_{-1} = \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle, (\mathbb{R}^4)_0 = \langle \alpha_4 \rangle.$$

En particular toda matriz que representa a T es diagonalizable.

Sea T operador lineal en V y $f \in F[X]$.

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k.$$

Entonces definimos

$$f(T) = a_0 Id_V + a_1 T + \cdots + a_k T^k : V \longrightarrow V \text{ operador lineal }.$$

Donde $T^k = T \circ \cdots \circ T$, k veces.

Lema 4.14.1

Sean $c_1, \dots, c_k \in F$ distintos entre si. Entonces existen polinomios $f_1, \dots, f_k \in F[X]$ tales que

$$\forall i, f_i(c_i) = 1 \quad \text{y} \quad f_i(c_j) = 0, \forall j \neq i.$$

Demostración: Sea

$$f_i = \prod_{j \neq i} \frac{(x - c_j)}{(c_i - c_j)}$$

😊

Lema 4.14.2

Sea $T : V \longrightarrow V$, un operador lineal en V de dimension finita. Sean $c_1, \dots, c_k$ los autovalores distintos de T y sea $W_i = V_{c_i}, i = 1, \dots, k$. Si $W = W_1 + \cdots + W_k$ y $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ son bases de $W_1, \dots, W_k$ respectivamente. Entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ (que es disjunta) es base de W. En particular:

$$\dim W = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k.$$

Demostración: Supongamos $\beta_i \in W_i, i = 1, \dots, k$ tal que $\beta_1 + \cdots + b_k = 0$.
Sabemos

$$T(\beta_i) = c_i \beta_i \Rightarrow \forall f \in F[X], \quad f(T)(\beta_i) = f(c_i)\beta_i.$$

En efecto:

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m..$$

Como

$$T(\beta_i) = c_i \beta_i \Rightarrow T^2(\beta_i) = T(c_i \beta_i) = c_i T(\beta_i) = c_i^2 \beta_i.$$

Inductivamente vemos que $T^r(\beta_i) = c_i^r \beta_i \ \forall i$.
Luego

$$f(T)(\beta_i) = (a_0 Id_V + a_1 T + \cdots + a_m T^m)(\beta_i) = a_0 \beta_i + a_1 c_i \beta_i + \cdots + a_m c_i^m \beta_i.$$

Que es lo mismo a

$$f(T)(\beta_i) = (a_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_m c_i^m)\beta_i.$$

$$f(T)(\beta_i) = f(c_i)\beta_i.$$

Sean $f_1, \dots, f_k \in F[X]$ como en el lema anterior $f_i(c_i = 1), f_i(c_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.
Ver que si hacemos

$$0 = f_i(T)\underbrace{(\beta_1 + \cdots + \beta_k)}_{0} = f_i(T)(\beta_1) + \cdots + f_i(T)(\beta_k) = f_i(c_1)(\beta_1) + \cdots + f_i(c_k)\beta_k$$

$$= f_i(c_i)\beta_i = \beta_i$$

$\therefore \beta_i = 0, \forall i = 1, \dots, k$.
Como $\mathcal{B}_i$ genera $W_i \Rightarrow \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ genera $w_1 + \cdots + w_k = W$.

Supongamos:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha\in\beta_i} x_\alpha \alpha = 0.$$

O que es lo mismo, sean $\mathcal{B}_i = \alpha_1^i, \dots, \alpha_{n_i}^i \quad 1 \leqslant i \leqslant k$ y tengo

$$\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} x_j^i \alpha_j^i}_{\in W_i} = 0.$$

Luego por lo anterior cada sumatoria es 0. es decir $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_j^i \alpha_j^i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Luego $x_j^i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$

$$\Rightarrow x_j^i = 0 \; \forall i, j \text{ pues } \mathcal{B}_i \text{ es base de } W_i \;.$$

😄

Teorema 4.14.1

Sea $T : V \longrightarrow V$, $\dim V < \infty$. Sean $c_1, \dots, c_k$ los autovalores distintos de T y sea $W_i = V_{c_i}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

(I) T es diagonalizable.

(II) $f_T = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$ con $d_i = \dim W_i$.

(III) $\dim W_1 + \cdots + \dim W_k = \dim V$.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ Sea $\mathcal{B}$ una base ordenada de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & \\ & & c_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & c_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c_k \end{pmatrix}$$

con $n_i = \dim W_i$.
Pues $\mathcal{B} : \alpha_1^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(2)}, \dots$
$\Rightarrow T(\alpha_j^{(i)}) = c_i \alpha_j^{(i)}$
Luego

$$W_i = \left\langle \alpha_i^{(i)}, \dots, \alpha_{n_i}^{(i)} \right\rangle.$$

$$\Rightarrow f_T = (x - c_1)^{n_1} \dots (x - c_k)^{n_k} = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}.$$

$\therefore$ Vale $ii)$.
Pruebo que $ii) \Rightarrow iii)$

$$\begin{aligned} n &= \dim V = gr(F_T) \text{ (grado de } F_T) \\ &= d_1 + \cdots + d_k = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k \end{aligned}$$

Pruebo que $iii) \Rightarrow i)$: La hipotesis $\Rightarrow V = W_1 + \cdots + W_k$.
Por el lema anterior $\mathcal{B}$ tiene una base $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ donde $\mathcal{B}_i$ es una base de W_i. En particular $\forall \alpha \in \mathcal{B}$, α es autovalor de T.

😄

Nota:-

El mismo criterio se aplica a las matrices A : para esto consideramos el operador $T : F^n \longrightarrow F^n$ tal que $T(X) = AX$.

Nota:-

Para ver si un operador es diagonalizable debo calcular el polinomio caracteristico, busco las raices, esos son los autovalores. Luego determino los autoespacios, que son los nucleos de $cId - T$. Si calculo el polinomio caracteristico y no tiene todas las raices en el cuerpo que estoy trabajando listo, no es diagonalizable porque no tiene autovalores.
Una vez que calcule el polinomio y tiene todas las raices en el cuerpo, calculo los autoespacios y me fijo si la dimension del autoespacio coincide con la multiplicidad del autovalor. Si coincide para todos es diagonalizable, si no no lo es.
Llegado el caso de que sea diagonalizable puede ser que se me pregunte que yo de una base de autovectores, para ello basta que junte bases de los autoespacios que ya encontre.

Ejemplo 4.14.3

Tomo $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. El polinomio caracteristico $f_A = det(xId - A) = (x-2)^2(x-1)$.
Al calcular los autoespacios tengo

$$V_1 = \left\langle \underbrace{(3,-1,3)}_{\alpha_1} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \underbrace{(2,1,0)}_{\alpha_2}, \underbrace{(2,0,1)}_{\alpha_3} \right\rangle.$$

Si tomo $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego como es diagonalizable

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pero, quien es P?

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$