CLASE TP4

$\boxed{1}$ Calcular los siguientes determinant

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}}$$

Los determinantes de mat. de 2x2 son los mas faciles

$$|A| = 4.3 - 5.7 = -23$$

$$\Longrightarrow |A| = -23$$

Obs: Como $|A| \neq 0$, por teorema sigue que A es invertible $\longrightarrow$ existe A^{-1}

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Bigg\}$$

Desarrollo de Laplace

- Elegimos una fila cualquiera de C. Según la fila considerada tenemos la siguiente regla de signos:

$$C = \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$|C| = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Para matrices de mayor tamaño, hay que calcular varios determinantes de matrices cada vez mas pequeñas hasta obtener el det de C

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\underbrace{1 \cdot 5 - 2 \cdot 1}_{3}) + 1(\underbrace{5 \cdot 5 - 1 \cdot 1}_{24}) + 3(\underbrace{5 \cdot 2 - 1 \cdot 1}_{9})$$

$$= 6 + 24 + 27 = \boxed{57}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_{=0} + 1\cancel{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \boxed{-4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{0\begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix}}_{=0} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -13$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}_{=0} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{=7}$$

$$|C| = 2.57 - 3(-4) + 1(-13) - 1.7$$

$$|C| = 106$$

2 Determinar los valores de $c \in \mathbb{R}$ tal que la matriz A sea inversible

$$A \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}$$

En la teoría, tenemos el siguiente Teorema:

<u>Teo</u>: Si $|A| \neq 0$ ent. existe A^{-1}

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -c & c \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ c & c \end{vmatrix} + (-c) \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ c & -c \end{vmatrix}}$$

$$|A| = -c\left(-1 \cdot c - c(-1)\right) - c\left(c - 2c\right)$$
$$= c^2$$

$$|A| \neq 0 \iff c^2 \neq 0 \iff c \neq 0$$

$\boxed{19}$ TP3

A, B conmutan $\longrightarrow A \cdot B = B \cdot A$

Paso inductivo $k = 1 \left.\right\}$ $A + B = A + B$

Veamos que ocurre para $k = 2$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

$$(A+B)^2 = A^2 + A.B + BA + B^2$$

Si no valiese conmutatividad
no podría escribir $AB+BA = 2AB$

A general B mult. de la identidad
$n \times n$ $n \times n$

$\boxed{7}$ / TP3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \text{———} & a_{1n} \\ | & \ddots & | \\ a_{n1} & \text{———} & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow Tr A = a_{11} + a_{22} + \text{———} + a_{nn}$$

(a) Trazas de todas las matrices del
ej 1

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Tr C = 1+1 = 2$$

$\boxed{5}$ $Tr(A + cB) = Tr(A) + c\,Tr(B)$ ←

<u>Obs</u>: Vamos a ver después un concepto llamado transformación lineal.

(*) $Tr(cD) = c \cdot Tr(D)$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \text{—} & d_{1n} \\ | & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \text{—} & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow cD = \begin{bmatrix} c d_{11} & c d_{12} & \text{—} & c d_{1n} \\ & & & \\ c d_{n1} & c d_{n2} & \text{—} & c d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Tr(cD) = c d_{11} + c d_{22} + \text{—} + c d_{nn}$$
$$= c(\underbrace{d_{11} + d_{22} + \text{—} + d_{nn}}_{Tr(D)})$$

$$\boxed{Tr(cD) = c\,Tr(D)}$$

$$\circledast \quad Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{---} & a_{1n} \\ | & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{---} & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \text{---} + a_{nn}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \text{---} & b_{1n} \\ | & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \text{---} & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad Tr(B) = b_{11} + b_{22} + \text{---} + b_{nn}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \text{---} & a_{1n}+b_{1n} \\ | & & \\ a_{n1}+b_{n1} & \text{---} & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + \text{---} + (a_{nn}+b_{nn})$$

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \underbrace{(a_{11} + \cdots + a_{nn})}_{\mathrm{Tr}(A)} + \underbrace{(b_{11} + \cdots + b_{nn})}_{\mathrm{Tr}(B)}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{(v)}\quad \mathrm{Tr}(A+cB) &= \mathrm{Tr}(A) + \underbrace{\mathrm{Tr}(cB)} \\ &= \mathrm{Tr}(A) + c\,\mathrm{Tr}(B) \end{aligned}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Restar F_2 a F_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\text{Restar } F_2 \text{ a } F_1\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, dado $k \in \mathbb{R}$, sumarle k veces F_2 a F_1 es lo mismo que multiplicar A por la matriz

$$F_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \boxed{k} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}}\right\} \text{Restarle la fila } F_1 \text{ a } F_2$$

(V) Multiplicar por un escalar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

⊛ Intercambian F_3 por F_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

E_k tal que $\overbrace{E_k \cdots E_1}^{A^{-1}} A = I$?

- $|A| \neq 0$ seguro existen ⟵

- $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & \cdots & x \\ x & \cdots & x \\ 0 \quad 0 & \cdots & 0 \\ x \quad x & \cdots & x \end{bmatrix}$$

No existen tales E_k

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{0 \quad 0} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Porque}$$

La matriz A no es inversible