Espacios Vectoriales 1

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

La materia en general gira alrededor del problema

- Resolver sistemas de ecuaciones

Los conjuntos de soluciones son subconjunto de $\mathbb{R}^n$

En la unidad pasada introdujimos dos operaciones en $\mathbb{R}^n$

- Los vectores de $\mathbb{R}^n$ se pueden sumar y multiplicar por escalares

Además vimos que los conjuntos de soluciones son invariantes por estas operaciones. Dicho de otro modo

- Las soluciones de un sistema se pueden sumar y multiplicar por escalares

Surgen entonces naturalmente algunas preguntas....

Estas son álgunas de las preguntas que responderemos en esta parte de la materia

Preguntas

1. ¿Podremos generar todas las soluciones de un sistema sumando y multiplicando por escalares algunas pocas soluciones?
2. ¿Cuál es la mínima cantidad de soluciones que generan todas las soluciones?
3. ¿Cómo podemos representar cada solución usando el conjunto generador?

Por otro lado, hay otras estructuras matemáticas que tienen suma y producto por escalar

- Matrices
- Polinomios
- Funciones

Las operaciones satisfacen las mismas propiedades que las operaciones en $\mathbb{R}^n$

- asociatividad
- conmutatividad
- distributividad
- neutro y opuesto

Entonces estudiaremos todas estas estructuras en abstracto, sin distinguir si son vectores, matrices, polinomios, funciones o lo que fuere.

Lo importante son las operaciones y las propiedades que satisfacen!

En este archivo introduciremos los espacios vectoriales, los subespacios vectoriales y daremos ejemplos.

Estas diapositivas estan basadas en el capítulo 2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

Definición 2.1.1

Un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) o un $\mathbb{R}$-espacio vectorial es un conjunto V que tiene dos operaciones que satisfacen ciertos axiomas. Llamaremos a los elementos de V vectores.

Operaciones

- Suma de vectores: Dados $v, w \in V$ podemos formar el vector $v + w \in V$
- Producto por escalares: Dado $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos formar el vector $\lambda \cdot v \in V$

Axiomas

- $+$ es conmutativa, asociativa, existe neutro y opuesto
- $\cdot$ es asociativa, distributiva y tiene neutro.

Sean $u, v, w \in W$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Los axiomas son

- $v + w = w + v$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- Existe un vector, que denotaremos 0, tal que $0 + v = v$
- Para cada vector v, existe otro vector denotado $-v$ tal que $v + (-v) = 0$
- $1 \cdot v = v$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

Observación

Son como los axiomas de $\mathbb{R}$ salvo que un vector NO tiene inverso multiplicativo porque NO multiplicamos vectores entre si.

Convenciones

- $\lambda v = \lambda \cdot v$
- $-v$ se llama el opuesto de v
- Gracias a la asociatividad de $+$ y $\cdot$ podemos obviar los paréntesis
- $w - v = w + (-v)$, en palabras "w menos v" significa "w más el opuesto de v"

Ejemplo

El conjunto de los números reales es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la multiplicación

Como dijimos antes son los mismo axiomas.

Más aún $\mathbb{C}$ tiene los mismos axiomas y podemos multiplicar reales por complejos. Entonces

Ejemplo

El conjunto de los números complejos es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la multiplicación

Ejemplo 2.1.2

El conjunto de matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$ es un espacio vectorial con las operaciones que definimos en archivos anteriores.

Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

- $A + B$ es la matriz con entradas $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$
- $\lambda \cdot A$ es la matriz con entradas $[\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij}$

Ya hemos visto que estas operacioens satisfacen los axiomas de la definición. En particular

- El elemento neutro 0 es la matriz con todas las coordenadas iguales a cero
- El opuesto de A es la matriz $(-1) \cdot A$

Ejemplo 2.1.1

El conjunto de vectores filas (o columnas) $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con las operaciones que hemos definido en archivos anteriores.

- La suma coordenada a coordenada
- La multiplicación coordenada a coordenada

Es un caso particular de las matrices dado que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1\times n}$ (filas) o $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ (columnas)

Ejemplo 2.1.3

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\ a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

con la suma y multiplicación que ya conocen

- Suma coeficiente a coeficiente

$$\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \right) + \left(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \right) =$$
$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

- Multiplicación coeficiente a coeficiente

$$\lambda \cdot (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) =$$
$$= (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0)$$

Ejemplo 2.1.3

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\, a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

con la suma y multiplicación que ya conocen

- El neutro es el polinomio con todos coeficientes cero

$$0 = 0x^n + \cdots + 0x + 0$$

- El opuesto del polinomio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es

$$(-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$$

Ejemplo 2.1.3

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\ a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

con la suma y multiplicación que ya conocen

Observación

- Si x^i no aparece en la expresión de un polinomio quiere decir que respectivo coeficiente a_i es cero. Por ejemplo:

$$x^2 + 1 = x^2 + 0x + 1$$

- Para sumar polinomios no es necesario que tengan el mismos grado. Por ejemplo:

$$(x^2 + 1) + (x^5 + 2x^2 + 5x + 2) = x^5 + 3x^2 + 5x + 3$$

Ejemplo 2.1.4

Sea X un conjunto. El espacio vectorial de funciones de X a $\mathbb{R}$ es el conjunto

$$\mathbb{R}^X = \left\{ \text{las funciones } f : X \longrightarrow \mathbb{R} \right\}$$

con la suma y producto por escalar "punto a punto".

Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

- $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $\lambda \cdot f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Ejemplo 2.1.4

Sea X un conjunto. El espacio vectorial de funciones de X a $\mathbb{R}$ es el conjunto

$$\mathbb{R}^X = \left\{ \text{las funciones } f : X \longrightarrow \mathbb{R} \right\}$$

con la suma y producto por escalar "punto a punto".

Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

- $-f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(-f)(x) = -f(x)$$

- El elemento neutro es la función constante igual a cero, la cual denotamos 0

Ejemplo 2.1.4

Sea X un conjunto. El espacio vectorial de funciones de X a $\mathbb{R}$ es el conjunto

$$\mathbb{R}^X = \left\{ \text{las funciones } f : X \longrightarrow \mathbb{R} \right\}$$

con la suma y producto por escalar "punto a punto".

Observación

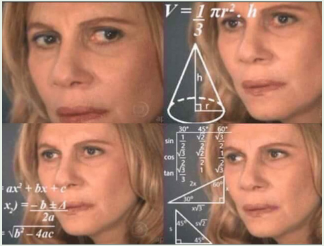
Si $X = \mathbb{R}$ entonces la suma y el producto por escalar es la misma definición que se usa en Análisis Matemático I.

En este caso se suele denotar $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Ejemplo 2.1.5

El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

- $x \oplus y = x \cdot y$ (la "suma" es la multiplicación)
- $\lambda \odot x = x^{\lambda}$ (la "multiplicación" es la potenciación)



- El "neutro" es el 1: $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$
- El "opuesto" es el inverso: $x^{-1} \oplus x = x^{-1} \cdot x = 1$
- $(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda} \cdot x^{\mu} = x^{\lambda} \oplus x^{\mu} = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$ (ejemplo de distributividad)

Proposición 2.1.1

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Entonces

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$
3. Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$
4. $(-1) \cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

Observación

La demostración es idéntica a las propiedades análogas de los números reales dado que lo único que usamos son los axiomas!

Demostración de

- $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) && \text{(axioma elemento neutro)}\\
&\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 && \text{(axioma distributividad)}\\
&\Rightarrow 0 = \lambda \cdot 0 && \text{(sumando el opuesto de } \lambda \cdot 0\text{)}
\end{aligned}
$$

La demostración de

- $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$

es similar

Demostración

- Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$

Si $\lambda = 0$ no hay nada que demostrar.

Supongamos que $\lambda \neq 0$. Sea $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$ su inverso multiplicativo.

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \cdot 0 &= \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) \\ \text{(item 1)} \qquad 0 &= (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v \quad \text{(asociatividad)} \\ 0 &= 1 \cdot v \\ 0 &= v \quad \text{(axioma neutro)} \end{aligned}$$

Demostración de

- $(-1) \cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

item 2 $\quad 0 = 0 \cdot v$

$0 = (1 + (-1))v$ 1 más el opuesto

$0 = 1 \cdot v + (-1) \cdot v$ distributividad

neutro de mult
por escalar

$0 = v + (-1) \cdot v$

$-v + 0 = -v + v + (-1) \cdot v$ sumo el opuest
de v

$-v = (-1) \cdot v$

neutro de +

axioma del opuesto

Definición 2.2.1

Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $W \subset V$ se dice que es un subespacio de V si

1. $W \neq \emptyset$
2. W es cerrado por la suma:
   Si $w_1, w_2 \in W$, entonces $w_1 + w_2 \in W$
3. W es cerrado por la multiplicación por escalares:
   Si $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot w \in W$

También podemos reemplzar (2) y (3) por una sóla condición...

Definición 2.2.1

Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $W \subset V$ se dice que es un subespacio de V si

1. $W \neq \emptyset$
2. Si $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $w_1 + \lambda w_2 \in W$

Observación

Esta propiedad (2) es la que vimos satisfacen los conjuntos de soluciones de sistemas homogéneos

Estas definiciones son equivalentes por lo siguiente. Si la condición (2) de esta filmina vale, entonces vale (2) de la filmina anterior con $\lambda = 1$ y también vale (3) con $w_1 = 0$.

Reciprocamente, (2) de esta filmina, es consecuencia de aplicar primero (3) y luego (2) de la filmina anterior.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}$

Pues si sumamos y multiplicamos números reales siguen siendo números reales y $\mathbb{R} \neq \emptyset$

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El conjunto de soluciones del sistema $AX = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Esto es exactamente lo que probamos en el Ejercicio 11 de la Práctica 3 y en la Proposición de la página 14 del archivo "Álgebras de Matrices 3". Ahí usamos la segunda definición.

A continuación recordamos dicha demostración.

Notar que el conjunto de soluciones es no vacío porque el 0 siempre es solución.

En este caso W es el conj de soluciones

Ejercicio 11 de la Práctica 3

Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.
Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
A(v+tw) &= Av + A(tw) && \text{(dist)}\\
&= 0 + (At)w && (v \text{ es sol + asoc})\\
&= (tA)w && \text{(conm prod por escalar)}\\
&= t(Aw) && \text{(asoc)}\\
&= t0 && (w \text{ es sol})\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por aquellos vectores Y tales que el sistema $AX = Y$ tiene solución es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$

Esto es exactamente lo que probamos en la Proposición de la página 22 del archivo "Álgebras de Matrices 3". Ahí usamos la segunda definición.

A continuación recordamos dicha demostración.

Notar que el conjunto es no vacío porque el sistema $AX = 0$ siempre es solución.

Proposición

Si los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución entonces el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{R}$

Demostración:
Sea v una solución de $AX = Y$ y w una solución de $AX = Z$,

$$\begin{aligned}\Rightarrow A(v+tw) &= Av + A(tw) = Y + (At)w \\ &= Y + (tA)w = Y + t(Aw) \\ &= Y + tZ\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de A. El autoespacio asociado a λ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Esto es exactamente el Teorema 3.6.1 que probamos en la página 13 del archivo "Autovalores y Autovectores". Ahí usamos la segunda definición.

A continuación no la recordaremos :) pueden buscarla.

Notar que el conjunto es no vacío porque, por definición de autoespacio, el vector nulo siempre esta.

Ejemplo

Siendo los polinomio también funciones forman un subespacio vectorial del espacio de funciones $F(\mathbb{R})$

Para demostrarlo hay que verificar que la suma de polinomios es igual a la suma punto a punto de funciones

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{R}_{<n}[x]$ formado por los polinomios de grado estrictamente menor que $n \in \mathbb{N}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.

Este es un ejercicio de la Práctica 6. Más aún

Ejemplo

Si $n < m$, entonces $\mathbb{R}_{<n}[x]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_{<m}[x]$.

Ejemplo

$\mathbb{R}_{<n}[x]$ es un subespacio vectorial de $F(\mathbb{R})$.

Observación 2.2.1

Sea W un subespacio vectorial de V. Entonces $0 \in W$.

Demostración: dado que $W \neq \emptyset$ podemos tomar $w \in W$ y por definición $0 \cdot w \in W$. y por la Proposición 2.1.1 (2) este elemento es cero:

$$0 \cdot w = 0 \in W$$

Observación 2.2.1

Sea W un subespacio vectorial de V. Si $w \in W$, entonces $-w \in W$.

Demostración: $-w = (-1)w$ por la Proposición 2.1.1 (4) y este elemento pertenece a W por la definición de subespacio

Teorema 2.2.1

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalares de V.

Demostración: para que W sea espacio vectorial sus operaciones deben satisfacer los axiomes de la definición. Esto vale puesto que son las mismas operaciones de V y las dos observaciones anteriores nos garantizan que la suma tiene neutro y opuesto.

Teorema 2.2.3

Sea V un espacio vectorial. Entonces la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial

Demostración: Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios vectoriales. Veremos que

$$W = \bigcap_{i\in I} W_i$$

satisface la primera definición de subespacio vectorial.

1. la intersección es no vacía porque $0 \in W_i$ para todo $i \in I$.
2. si $w_1, w_2 \in W$, tenemos que $w_1, w_2 \in W_i$ para todo $i \in I$, luego, como W_i es subespacio vectorial, $w_1 + w_2 \in W_i$ para todo $i \in I$, por lo tanto $w_1 + w_2 \in W$.
3. si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in W$, $w \in W_i$ para todo $i \in I$ y, por lo tanto, $\lambda w \in W_i$ para todo $i \in I$. En consecuencia $\lambda w \in W$.

Observación

La unión de subespacios NO es necesariamente un subespacio.

En la Práctica 6 hay ejercicios en lo que van a ver esto.