Resolución del primer parcial

Ejercicio 1. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar todas las matrices $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \end{bmatrix}$ tales que $AB = C$.

Solución:

Haciendo el producto de matrices: $AB = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_5 - x_7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & 2x_5 + x_6 - 2x_7 + x_8 \end{bmatrix}$.

Las columnas de AB son $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto para que B cumpla la condición del ejercicio, éstas deben coincidir con las respectivas columnas de C, entonces la condición equivale a:

$$(1)\ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad (2)\ A \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora buscamos las soluciones de los sistemas de ecuaciones (1) y (2).

Ambos tienen a la matriz A como matriz de coeficientes, para reducir cálculos consideramos ambas matrices ampliadas simultáneamente:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0| & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1| & -1 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0| & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1| & -7 & 5 \end{matrix}$$

Como la matriz de la izquierda es una MERF, ya podemos despejar las soluciones de los sistemas.

En el sistema (1): x_3 y x_4 son variables independientes, pueden tomar valores arbitrarios en el cuerpo: $x_3 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in F$, y resulta:

$$x_1 = 3 + s, \qquad x_2 = -7 - t, \qquad x_3 = s, \qquad x_4 = t, \qquad s, t \in F.$$

En el sistema (2): x_7 y x_8 son variables independientes, pueden tomar valores arbitrarios en el cuerpo: $x_7 = u$, $x_8 = v$, $u, v \in F$, y resulta:

$$x_5 = -2 + u, \qquad x_6 = 5 - v, \qquad x_7 = u, \qquad x_8 = v, \qquad u, v \in F.$$

De modo que las matrices B que satisfacen la condición $AB = C$ son exactamente aquellas de la forma

$$B = \begin{bmatrix} 3 + s & -2 + u \\ -7 - t & 5 - v \\ s & u \\ t & v \end{bmatrix}, \qquad s, t, u, v \in F.$$

Ejercicio 2. Determinar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b \end{cases}$$

(a) ... tenga solución.

(b) ... tenga una única solución.

Solución:

a) La matriz ampliada del sistema es $\begin{bmatrix} a & 0 & b| & 2 \\ a & a & 4| & 4 \\ 0 & a & 2| & b \end{bmatrix}$

Reducimos por filas haciendo operaciones elementales:

$$\begin{matrix} a & 0 & b| & 2 \\ a & a & 4| & 4 \\ 0 & a & 2| & b \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_2 - F_1} \quad \begin{matrix} a & 0 & b & | & 2 \\ 0 & a & 4-b & | & 2 \\ 0 & a & 2 & | & b \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_3 - F_2} \quad \begin{matrix} a & 0 & b & | & 2 \\ 0 & a & 4-b| & & 2 \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_2 + F_3}$$

$$\begin{matrix} a & 0 & b & | & 2 \\ 0 & a & 2 & | & b \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_1 - F_3} \quad \begin{matrix} a & 0 & 2 & | & 4-b \\ 0 & a & 2 & | & b \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{matrix}.$$

<u>Si $a \neq 0$:</u> Multiplicando F_1 y F_2 por a^{-1}, obtenemos:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2/a| & (4-b)/a \\ 0 & 1 & 2/a| & b/a \\ 0 & 0 & b-2| & b-2 \end{matrix} \tag{1}$$

Si $b \neq 2$, hacemos (en este orden) las operaciones elementales: $1/(b-2)F_3$, $F_2 - (2/a)F_3$ y $F_1 - (2/a)F_3$, y obtenemos:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0| & (4-b)/a - 2/a \\ 0 & 1 & 0| & b/a - 2/a \\ 0 & 0 & 1| & 1 \end{matrix}$$

Luego en este caso el sistema tiene solución (única).

Si, en cambio, $b = 2$, la matriz (1) es

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2/a| & (4-b)/a \\ 0 & 1 & 2/a| & b/a \\ 0 & 0 & 0 \ | & 0 \end{matrix}$$

Y el sistema tiene solución pues el término independiente correspondiente a la fila nula de la MERF de la izquierda es 0.

Por lo tanto en este caso el sistema tiene solución **para todo** b.

<u>Si $a = 0$:</u> La matriz a la que llegamos es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 4-b \\ 0 & 0 & 2 & | & b \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{bmatrix}$. Seguimos con la reducción por filas:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & | & 4-b \\ 0 & 0 & 2 & | & b \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_2 - F_1} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & | & 4-b \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b-4 \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(1/2)F_1} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & | & 2-b/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b-4 \\ 0 & 0 & b-2| & & b-2 \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_3 - (b-2)F_1} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1| & 2-b/2 \\ 0 & 0 & 0| & 2(b-2) \\ 0 & 0 & 0| & (b-2)(b/2-1) \end{matrix}$$

Por lo tanto en este caso es sistema tiene solución si y sólo si $2(b-2) = 0$ y $(b-2)(b/2-1) = 0$ si y sólo si $b = 2$.

En conclusión: *el sistema tiene solución si y sólo si $a \neq 0$ y b es cualquiera o bien $a = 0$ y $b = 2$.*

b) El sistema tiene **única** solución si y sólo si la MERF asociada (3×3) no tiene filas nulas (que corresponderían a variables libres del sistema).

Según lo desarrollado en a) esto último ocurre si y sólo si $a \neq 0$ y $b \neq 2$.

Luego *el sistema tiene solución única si y sólo si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 2$.

Ejercicio 3. Sea $A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & x+i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2x \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Probar que $A(i)$ es invertible y calcular su inversa.

(b) Escribir a la matriz $A(i)$ como producto de matrices elementales.

(c) Calcular $\det(A(x))$.

(d) Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{C}$ tales que $A(x)$ sea invertible.

Solución:

a) Usando que $i^2 = -1$, calculamos: $A(i) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2i \end{bmatrix}$.

Para ver si $A(i)$ es invertible y determinar su inversa, reducimos por filas la matriz ampliada $(A(i)|I)$: si podemos llegar a una matriz de la forma $(I|B)$, entonces $A(i)$ será invertible y su inversa $A(i)^{-1}$ será la matriz B.

Entonces:

$$\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2i & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{e_1 : F_3 - F_2} \quad \begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{e_2 : F_1 - F_3} \quad \begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{e_3 : F_2 + F_1} \quad \begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{e_4 : (-1)F_1} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{e_5 : (-i/2)F_3} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & i/2 & -i/2 \end{array}$$

Por lo tanto $A(i)$ es invertible y $A(i)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & i/2 & -i/2 \end{bmatrix}$.

b) Tomamos las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales por filas utilizadas en la reducción del ítem a): $E_i = e_i(I)$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \end{bmatrix}.$$

De modo que:

$$E_5E_4E_3E_2E_1A(i) = I \quad \Longleftrightarrow \quad A(i)^{-1} = E_5E_4E_3E_2E_1 \quad \Longleftrightarrow \quad A(i) = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1}(E_3)^{-1}(E_4)^{-1}(E_5)^{-1}.$$

La inversa de una matriz elemental es una matriz elemental (del mismo tipo): $e(I)^{-1} = \tilde{e}(I)$, donde $\tilde{e}$ es la operación elemental por filas inversa de e.

Por lo tanto $A(i)$ tiene la siguiente expresión como producto de matrices elementales:

$$A(i) = \tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_3\tilde{E}_4\tilde{E}_5,$$

donde

$$\tilde{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}.$$

c) Calculamos el determinante haciendo operaciones elementales por filas y/o columnas:

$$\det \begin{bmatrix} x^2 & 0 & x+i \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2x \end{bmatrix} \underset{F_3 - F_2}{=} \det \begin{bmatrix} x^2 & 0 & x+i \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \underset{C_1 - C_2}{=} \det \begin{bmatrix} x^2 & 0 & x+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{bmatrix}.$$

Como la última matriz es triangular superior, su determinante es el producto de los coeficientes de la diagonal. Así:

$$\det(A(x)) = x^2.1.2x = 2x^3.$$

d) La matriz $A(x)$ es invertible si y sólo si $\det(A(x)) \neq 0$. Por lo obtenido en el ítem c), $\det(A(x)) = 2x^3 \neq 0$ si y sólo si $x \neq 0$.

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso la respuesta.

(a) Si $A, B \in F^{2\times 2}$ son tales que $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

(b) Si $A \in F^{n\times n}$ es tal que $A^n = 0$, entonces $\det(A) = 0$.

(c) Si $A \in F^{n\times n}$ es tal que $\det(A) = 0$, entonces el sistema $AX = 0$ admite una solución no trivial.

Solución:

a) Falso: Tomamos por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$.

Las soluciones del sistema $AX = 0$ son de la forma $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$, $t \in F$.

En particular, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son solución de $AX = 0$.

Sea $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces $B \neq 0$ y haciendo el producto:

$$AB = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Verdadero: $A^n = A.A....A$ (n veces).

Como el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes:

$$\det(A^n) = \det(A).\det(A)....\det(A) \ (n \ \text{ veces}) = \det(A)^n.$$

Pero $A^n = 0 \Longrightarrow \det(A^n) = 0$.

Entonces $\det(A)^n = 0$ y por lo tanto $\det(A) = 0$.

c) Verdadero: Por resultados demostrados en clase:

$$\det(A) = 0 \iff A \text{ no es invertible} \iff AX = 0 \text{ tiene soluciones no triviales.}$$