Clase práctica virtual - 16/04/2020

Discusión sobre resolución de sistema de ecuaciones.

Problema 1. Determinar el conjunto de soluciones $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ del sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0. \end{cases}$$

Solución. Primero armamos la matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La reducimos por filas haciendo las operaciones F2 + F1, F3 + F1, F2 $\leftrightarrow$ F3, F3 - 2 F2. Obtenemos una MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema original es equivalente al sistema asociado a esta MERF:

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Las variables dependientes corresponden a las columnas de los pivotes : x, y Las demás, z, t, son las variables independientes.

Las soluciones las encontramos despejando del sistema asociado a la MERF las variables dependientes en función de las independientes:

$$x = z - 2t$$
$$y = z - 2t.$$

$z, t \in \mathbb{R}$.

Es decir que un vector de $\mathbb{R}^4$ es solución del sistema si y sólo si es de la forma $(z-2t, z-2t, z, t)$, con $z, t \in \mathbb{R}$.

Respuesta del ejercicio: El conjunto de soluciones es

$$\{(z - 2t, z - 2t, z, t) : \; z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Pasos para resolver el ejercicio:

- Formo la matriz ampliada del sistema.
- Opero con las filas hasta llegar a una MERF.
- Despejo las variables dependientes (correspondientes a las columnas de los pivotes) en función de las independientes.
- Escribo la solución del sistema, haciendo que las variables independientes recorran el conjunto de todos los escalares.

Problema 2. Sea A la matriz 3×4 definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dar una descripción implícita del conjunto de vectores (b_1, b_2, b_3) para los cuales el sistema $AX = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ tiene solución.

Nota: aquí no se pide resolver el sistema.

Formo la matriz ampliada del sistema en cuestión:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & |b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & |b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & |b_3 \end{bmatrix}$$

Reducimos por filas hasta llegar en el lado izquierdo a una MERF: F2+F1, F3 + F1, F2 F3, F3 - 2F2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2| & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2| & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0| & b_1 + b_2 - 2(b_1 + b_3) = -b_1 + b_2 - 2b_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Notamos que el sistema $AX = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ es equivalente al sistema cuya matriz ampliada es (1):

$$\begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ y - z + 2t = b_1 + b_3 \\ 0 = 0x + 0y + 0z + 0t = -b_1 + b_2 - 2b_3 \end{cases}$$

Por lo tanto la respuesta es:

El sistema tiene solución si y sólo si

$$-b_1 + b_2 - 2b_3 = 0$$

Esto da una descripción implícita de los vectores (b_1, b_2, b_3) que se pedía.

Ejercicio 7) de la guía 3).

La traza de una matriz cuadrada $A = (A_{ij})$ es la suma de los coeficientes diagonales de la matriz:

$$\mathrm{Tr}(A) = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}.$$

Para la parte a), con A, B y C del ejercicio 1:

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + (-2) + (-1) = -2, \quad \mathrm{Tr}(B) = 6, \quad \mathrm{Tr}(C) = 2.$$

Parte b): *Probar que Tr*$(AB) =$ *Tr*(BA).

Por definición del producto de matrices:

$$(2) \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj},$$

$$(3) \qquad (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{kj}.$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \quad \text{(Por (2))} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \quad \text{(Por (3))} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de índices entre $i \leftrightarrow k$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \quad \text{(comparando con lo anterior)} \\ &= \mathrm{Tr}(AB). \end{aligned}$$

Ejercicio 5) de la guía 3. A matriz $m \times n$, B, C matrices $n \times p$.

Por lo tanto están definidos los productos AB, AC y $A(B+C)$ y son matrices $m \times p$.

Tenemos que probar una igualdad entre matrices: $A(B+C) = AB + AC$.

Para que dos matrices sean iguales es necesario y suficiente que cada uno de sus coeficientes sean iguales.

Comparamos los coeficientes de ambas matrices $A(B+C)$ y $AB + AC$:

Sean $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$ (porque las matrices que queremos comparar son $m \times p$).

Por definición del producto de matrices:

$$(A.(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (B+C)_{kj}.$$

Ahora por definición de la suma de matrices,

$$(B+C)_{kj} = B_{kj} + C_{kj}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
(A.(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) \quad \text{(distributividad del producto en R)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(A_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj}) \quad \text{(propiedades de la suma de números reales)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} \quad \text{(por definición del producto de las matrices AB y BC)} \\
&= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \quad \text{(por definición de la suma de matrices AB y AC)}
\end{aligned}$$

$= (AC+BC)_{ij}$.

Hasta ahora hemos probado que

$$(A.(B+C))_{ij} = (AC+BC)_{ij}, \quad \forall i,j.$$

Por lo tanto, como todos sus coeficientes son iguales, las matrices son iguales, es decir: $A(B+C) = AB+AC$, como se pedía.

Ejercicio 20) a) de la guía 3.

Sugerencia: si tomamos $B = A^2, A^3, \ldots$ (una potencia de A) , entonces $AB = BA$ [toda matriz conmuta con sus potencias].

Ejemplo: tomemos como A la siguiente matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $B = A^2$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces $AB = BA$, pues B es una potencia de A.

Pero: ni A ni B son diagonales, ni tampoco ninguna de ellas es múltiplo escalar de la otra.

Por lo tanto la afirmación en 20) a) es **falsa**.

Ejercicio 20) b) de la guía 3. A: matriz 3×2, B: matriz 2×3. De donde AB: matriz 3×3.

Tiene sentido preguntarse si AB es o no inversible.

Recordemos que una matriz cuadrada C es inversible si y sólo si el sistema homogéneo $CX = 0$ admite sólo la solución trivial $X = 0$.

Notar en este caso, que como B es 2×3, el sistema homogéneo $BX = 0$ tiene más incógnitas (3) que ecuaciones (2).

Por lo tanto existe una solución no trivial $X_0 \neq 0$ del sistema $BX = 0$.

Notar que X_0 también es solución de $(AB)X = 0$, pues

$$(AB)X_0 = A(BX_0) = A.0 = 0$$

Como $X_0 \neq 0$, el sistema $(AB)X = 0$ tiene solución no trivial.

Por lo tanto matriz producto AB no puede ser inversible nunca y entonces la afirmación 20) b) es **falsa**.

Ejercicio 15) b).

Ayuda: A es de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Aquí: $\mathrm{Tr}(A) = a + d = 0$.

A^2 es la matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$$

Aquí: $\mathrm{Tr}(A^2) = a^2 + bc + cb + d^2 = 0$.