18. Sean $A$ y $B$ matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

(a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

(b) Si $r > n$, entonces existe un $Y$, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

a) Como $m > n$, el sistema $BX = 0$ tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto tiene soluciones no triviales.
Sea $v \neq 0$ solución de $BX = 0$, es decir $Bv = 0$.
Entonces $ABv = A(Bv) = A0 = 0$, por lo tanto $v$ es solución del sistema $ABX = 0$.

b) Sea $P$ matriz $r \times r$ inversible tal que $PA$ es MERF. Como $r > n$, la matriz $PA$ tiene más filas que columnas y como es MERF la última fila debe ser nula.
Ahora bien, los sistemas $PABX = PY$ y $ABX = Y$ tienen las mismas soluciones, por lo tanto si existe $Y$ tal que $PABX = PY$ no tiene solución, entonces el sistema $ABX = Y$ tampoco tiene solución.
Demostremos entonces, que existe $Y$ tal que $PABX = PY$ no tiene solución:
como $PA$ tiene la última fila nula, $PABX$ también tiene la última fila nula.
Sea $e_r$ la matriz $r \times 1$ con 1 en la coordenada $r$ y 0 en las otras coordenadas.
Entonces $e_r = P(P^{-1}e_r)$ tiene la última fila no nula, por lo tanto el sistema $PABX = P(P^{-1}e_r)$ no tiene solución y, por lo dicho anteriormente, el sistema $ABX = P^{-1}e_r$ no tiene solución.