Álgebra II - 21/05/2020

Práctico 7, Ejercicio 3:

Sean p, q y r los polinomios

$p = (1 - x)(x + 2)$,
$q = x^2 - 1$ y
$r = x(x^2 - 1)$.

(a) Escribir, si es posible, el polinomio x como combinación lineal de p, q y r.

¿Es posible encontrar escalares a, b y c en **R** tales que

$x = a\,p + b\,q + c\,r$?

$$\begin{aligned} ap + bq + cr &= a\,(1 - x)(x + 2) + b\,(x^2 - 1) + c\,x(x^2 - 1) \\ &= a\,(2 - x^2 - x) + b\,(x^2 - 1) + c\,(x^3 - x) \\ &= 2a - a\,x^2 - ax + b\,x^2 - b + c\,x^3 - cx \\ &= (2a - b) + (-a-c)\,x + (-a + b)\,x^2 + c\,x^3 \end{aligned}$$

La igualdad $x = (2a - b) + (-a-c)\,x + (-a + b)\,x^2 + c\,x^3$ se cumple si y sólo si

$$0\;1 + 1\;x + 0\;x^2 + 0\;x^3 = x = (2a - b)\;1 + (-a-c)\;x + (-a + b)\;x^2 + c\;x^3$$

los coeficientes de las distintas potencias de x coinciden en cada miembro, es decir, si y sólo si se satisfacen:

$2a - b = 0$
$-a - c = 1$
$-a + b = 0$
$c = 0$

Es decir que debemos analizar si existen soluciones (a, b, c) del sistema anterior:

La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La reducimos por filas para ver si existe solución (a, b, c):
F3 : -F3, F2+F3, F2 + F4, F3-F2, F1-F2, F1-2F3

0 0 0 | 1
0 -1 0 | 1
1 0 0 | -1
0 0 1 | 0

Obtenemos así que el sistema NO tiene solución. Por lo tanto NO es posible escribir al polinomio x como combinación lineal de p, q y r.

Práctico 6, Ejercicio (3):

(a) Recordemos que si W es un subespacio de un espacio vectorial V, entonces 0 $\in W$.

En este ítem estamos considerando el subconjunto W = R_{<n}[x] formado por los polinomios de grado estrictamente menor que n.

Ahora: el polinomio 0 no tiene grado.

Por lo tanto $0 \notin W$. Luego W no es un subespacio.

(b) Aquí W = R_{par}[x] = {polinomios de grado par} U {0}.

En este caso sí se cumple que 0 $\in W$. Sin embargo esta condición no es suficiente para garantizar que W sea un subespacio.

Por ejemplo: tomemos p = 1 + x^2, q = 2 + 3x - x^2. Ambos p y q tienen grado 2. Por lo tanto, p, q $\in W$.

Si W fuese un subespacio, entonces p + c q $\in W, \ \forall c \in R$

Ahora: tomando c = 1,

p + q = 2 + 3x tiene grado 1 (impar!!!!) Por lo que p + q $\notin W$.

Entonces W no es un subespacio tampoco.

(3)(c) Se puede pensar un argumento similar al del (3) (b).

(3)(d): Similar al (3)(a).

Un subconjunto que SÍ es subespacio de R[x] es el subconjunto que denotamos $P_n[x]$ formado por todos los polinomio de grado $\leq n$ junto con el polinomio nulo.

Práctico 6, Ejercicio 6:

Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V . Probar que $W_1 \; U \; W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$.

$\Leftarrow$) Supongamos $W_1 \subseteq W_2$. Entonces $W_1 \; U \; W_2 = W_2$ es un subespacio. Análogamente, si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 \; U \; W_2 = W_1$ es también un subespacio.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $W_1 \; U \; W_2 = W_2$ es un subespacio.

Si W_1 no está incluído en W_2, existe un vector w tal que w $\in W_1$, pero $w \notin W_2$.

Si W_2 no está incluído en W_1, existe un vector w' tal que w' $\in W_2$, pero $w' \notin W_1$.

Ahora, $w + w' \in W_1 \cup W_2$, pues $W_1 \cup W_2$ es un subespacio y tanto w como w' pertenecen a $W_1 \cup W_2$.

Esto significa que $w + w' \in W_1$ o $w + w' \in W_2$.

En el primer caso, como W_1 es un subespacio, tendríamos que

$w' = (w + w') - w \in W_1$ lo cual contradice la elección de w'

De manera similar, en el segundo caso, usando que W_2 es un subespacio, llegamos a que

$w = (w + w') - w' \in W_2$ lo que contradice la elección de w.

Luego, alguno de los subespacios debe estar contenido en el otro, que es lo que queríamos probar.

Práctico 7, Ejercicio (1).

Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.

(a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del Ejercicio 5-Práctica 2.

Veamos en el caso del (5) (a) del Práctico 2:

x- 3y + 5z = 0
2x- 3y + z = 0
-y + 3z = 0

Sea W el subespacio de **R**^3 de soluciones de este sistema homogéneo.

Para dar un conjunto de generadores de W, buscamos primero una descripción paramétrica de W.

La matriz asociada al sistema es:

1 - 3 5
2 - 3 1
0 - 1 3

Reducimos por filas (F2-2F1, F1 + F2, F2 + 3F3. F3:(-1)F3, F2 ↔ F3), hasta obtener una MERF:

1   0 -4
0   1 - 3
0   0   0

x = 4z, y = 3z, z variable libre

W = {(4z, 3z, z): z $\in R$} = {z (4, 3, 1): z $\in R$} = <(4, 3, 1)>

Por lo tanto {(4, 3, 1)} es un conjunto de generadores de W.

(b) Los conjuntos descritos en el Ejercicio 7-Práctica 2.

Veamos por ejemplo el tercer caso del Ej 7, P. 2:

x- y + 2z + w = b_1
2x + 2y + z- w = b_2
3x + y + 3z = b_3

W = {(b_1, b_2, b_3): tales que el sistema anterior tiene solución}.

¿Cuál es la descripción implícita de W?

W = {(b1,b2,b3) : b3 - b1 - b2 = 0}

Como en el ejemplo anterior, buscamos una parametrización de los vectores (b1, b2, b3) en W, resolviendo el sistema [descripción implícita] que lo define, en este caso:

b3 - b1 - b2 = 0

Por lo tanto b1 = -b2 + b3, b2, b3: libres

W = {(-b2 + b3, b2, b3): b2, b3 $\in R$} = {b2 (-1, 1, 0) + b3 (1, 0, 1):   b2, b3 $\in R$}

Vemos que W coincide con el conjunto de combinaciones lineales de los vectores

(-1, 1, 0) y (1, 0, 1).

Esto significa que {(-1, 1, 0), (1, 0, 1)} es un conjunto de generadores de W.

Práctico 3, Ejercicio 14.

A: r x n, B: n x m

(b) Si m > n, entonces el sistema ABX = 0 tiene soluciones no triviales.

Como m > n, el sistema BX = 0 tiene más incógnitas (m) que ecuaciones (n). Por lo tanto sabemos que tiene soluciones no triviales.

Además si **X** $\neq 0$ es una solución (no trivial) de B**X** = 0, entonces también es solución (no trivial) de

ABX = 0

Puesto que AB**X** = A (B**X**) = A 0 = 0.

(c) Si r > n, entonces existe un Y , r x 1, tal que ABX = Y no tiene solución.

Como r > n, existe un Y, r x 1, tal que AX = Y no tiene solución. El sistema AX = Y tiene r ecuaciones y n incógnitas.

Para cualquier Y, cuando reducimos la matriz ampliada, necesariamente se anula una fila en la matriz de la izquierda: de no ocurrir esto, tendríamos r filas no nulas y por lo tanto r pivotes. Pero como r > n estos r pivotes no caben en las n filas de la matriz.

Esto implica la afirmación.

Luego ABX = Y tampoco puede tener solución X', si no, BX' sería solución de AX = Y.

Práctico 7, Ejercicio 4.

En cada uno de los casos que siguen caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

(a) W = < (1, 0, 3), (0, 1, −2) > ⊆ R^3

Un vector (a, b, c) pertenece a W si y sólo si existen escalares x, y tales que

$$(a, b, c) = x\,(1, 0, 3) + y\,(0, 1, -2)$$

Esto lo podemos escribir:

$$(a, b, c) = (x, y, 3x-2y)$$

Es decir que (a, b, c) pertenece a W si y sólo si existen x, y que son solución del siguiente sistema:

$x = a$
$y = b$
$3x-2y = c$

Tenemos que dar una descripción implícita de las ternas (a, b, c) tales que el sistema anterior admite solución.

1 0 | a
0 1 | b
3 -2 | c

Reducimos la matriz ampliada (F3-3F1, F3+2F2):

1 0 | a
0 1 | b
0 0 | -3a + 2b + c

Por lo tanto el sistema tiene solución si y sólo si $-3a + 2b + c = 0$.

Es decir que la descripción implícita [= caracterización con ecuaciones] de W es

$$W = \{(a, b, c): -3a + 2b + c = 0\}.$$

(Esto describe a W como subespacio de soluciones de un sistema homogéneo.)

(b) $W = \langle(1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (2, 3, -1, 4)\rangle \subseteq R^4$.

Este resuelve de manera similar al anterior: en este caso se reduce el problema a estudiar un sistema con 4 ecuaciones [corresponden a la cantidad de componentes de los vectores en cuestión] y 3 incógnitas [corresponden a la cantidad de generadores de W], de la forma $AX = Y$, donde Y es un vector genérico en W..

La pregunta que hay que responder es para qué valores de Y el sistema $AX = Y$ tiene solución.