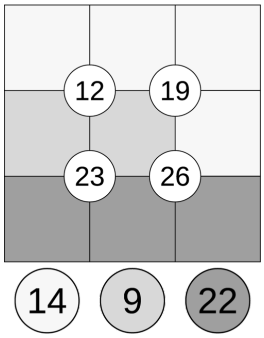
Práctico 2

Sistemas de ecuaciones

(1) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



(2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,
   (a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
   (b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

(5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícitamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

$$\text{(a)} \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

(6) Modificar los sistemas anteriores igualando a 1 cada una de las ecuaciones y describir explícitamente las soluciones de estos sistemas.

(7) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2) o (b_1, b_2, b_3) para los cuales cada sistema tiene solución

$$\text{(a)} \begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x - 2y = b_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + y = b_1 \\ 2x + 2y = b_2 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x - y + 2z + w = b_1 \\ 2x + 2y + z - w = b_2 \\ 3x + y + 3z = b_3 \end{cases}$$

(8) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

(a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

(b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

(9) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

(a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

(b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

Más ejercicios. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(10) Dar todas las posibles matrices 2×2 escalón reducidas por filas.

(11) En cada caso decidir si los sistemas son equivalentes y si lo son, expresar cada ecuación del primer sistema como combinación lineal de las ecuaciones del segundo.

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

(12) Probar que si dos sistemas de ecuaciones lineales en dos incógnitas homogéneos tienen las mismas soluciones entonces son equivalentes.

(13) Mostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes estudiando sus soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

(14) Demostrar que las siguientes matrices no son equivalentes por filas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(15) Como los ejercicios (5) y (6) pero con el sistema: $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

(16) Como el ejercicio (7) pero con el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = b_1 \\ 3x + y + 4z = b_2 \\ -x + 3y + 2z = b_3 \end{cases}$.

(17) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinar para cuales a, el sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ admite solución. Para esos valores de a, calcular todas las soluciones del sistema.