Segundo Trabajo Práctico

Ejercicio 5.

5. (5 puntos cada item) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,1)$, $T(e_2) = (1,2)$ y $T(e_3) = (1,3)$.
   (a) Calcular $T(10,-1,1)$ y $T(-1,1,0)$.
   (b) Dar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Solución:

a. Sabiendo cuanto vale $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$, usamos que T es transformación lineal para calcular lo pedido:

$$\begin{aligned}
T(10,-1,1) &= T(10e_1 - e_2 + e_3) \\
&= 10T(e_1) - T(e_2) + T(e_3) \\
&= 10(1,1) - (1,2) + (1,3) \\
&= (10 - 1 + 1, 10 - 2 + 3) \\
&= (10, 11) \\
T(-1,1,0) &= T(-e_1 + e_2) \\
&= -T(e_1) + T(e_2) \\
&= -(1,1) + (1,2) \\
&= (-1+1, -1+2) \\
&= (0,1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T(10,-1,1) = (10,11)$ y $T(-1,1,0) = (0,1)$.

b. Ahora nos piden hallar la matriz de la transformación lineal con respecto a las bases canónicas. Primero observamos que $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, así ya sabemos que la matriz será de tamaño 2×3 y tendrá la forma:

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Para hallar los coeficientes a_{ij} debemos evaluar T en los elementos de la base de $\mathbb{R}^3$ y al resultado escribirlo como combinación lineal de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Los escalares que se obtienen de dicha combinación lineal son los coeficientes que estamos buscando. Esto es:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \\
T(e_2) &= (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1) \\
T(e_3) &= (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.

6. (5 puntos cada item) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1,0,-1,2)$, $(0,1,2,-1,)$ y $(0,0,2,2)$ pertenecen a la imagen de T.
   (b) Si $T : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^9$ es una transformación lineal, entonces $\dim \mathrm{Nu}(T) \geq 4$.
   (c) Sea $T : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un epimorfismo y W un subespacio de $\mathbb{R}^6$ con $\dim W = 3$. Entonces existe $0 \neq w \in W$ tal que $T(w) = 0$.

Solución:

a. **Falso.** Supongamos que existe T como en el enunciado y llamemos

$$W = \{(1,0,-1,2),(0,1,2,-1,),(0,0,2,2)\}.$$

Como los vectores que generan a W son linealmente independientes, forman una base para W y por lo tanto $\dim W = 3$. Ahora, estamos suponiendo que $W \subseteq \mathrm{Im}\,(T)$, luego $\dim \mathrm{Im}\,(T) \geq 3$. Pero por el teorema de las dimensiones se cumple que

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Nu}\,(T) + \dim \mathrm{Im}\,(T).$$

Por un lado, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ y por el otro $\dim \mathrm{Nu}\,(T) + \dim \mathrm{Im}\,(T) \geq 3$ y esto contradice el teorema.

b. **Verdadero.** Como $T : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^9$ sabemos que $\dim \mathrm{Im}\,(T) \leq 9$ y usando el mismo teorema que antes

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^{13} &= \dim \mathrm{Nu}\,(T) + \dim \mathrm{Im}\,(T) \leq \dim \mathrm{Nu}\,(T) + 9 \\ 13 &\leq \dim \mathrm{Nu}\,(T) + 9 \\ 4 &\leq \dim \mathrm{Nu}\,(T), \end{aligned}$$

como queríamos probar.

c. **Verdadero.** Vamos a comenzar reescribiendo lo que queremos demostrar. Queremos hallar $w \in W$, $w \neq 0$ tal que $T(w) = 0$. Notemos que como queremos que $T(w) = 0$, estamos pidiendo que $w \in \mathrm{Nu}\,(T)$, y como también pedimos que $w \in W$, lo que estamos buscando es $w \in \mathrm{Nu}\,(T) \cap W$ y $w \neq 0$.

Ahora que ya sabemos que estamos buscamos escribimos cuales son nuestras hipótesis.

Sabemos que $T : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un epimorfismo, esto nos dice que $\dim \mathrm{Im}\,(T) = 2$. También tenemos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^6$ con $\dim W = 3$. Por el teorema que usamos en los incisos anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^6 &= \dim \mathrm{Nu}\,(T) + \dim \mathrm{Im}\,(T) \\ 6 &= \dim \mathrm{Nu}\,(T) + 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dim \mathrm{Nu}\,(T) = 4$. Tanto W como $\mathrm{Nu}\,(T)$ son subespacios de $\mathbb{R}^6$, entonces por teorema $W + \mathrm{Nu}\,(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^6$, luego $\dim (W + \mathrm{Nu}\,(T)) \leq 6$. Pero también sabemos que

$$\begin{aligned} \dim W + \dim \mathrm{Nu}\,(T) - \dim (W \cap \mathrm{Nu}\,(T)) &= \dim (W + \mathrm{Nu}\,(T)) \\ 3 + 4 - \dim (W \cap \mathrm{Nu}\,(T)) &\leq 6 \\ 7 - \dim (W \cap \mathrm{Nu}\,(T)) &\leq 6 \\ -\dim (W \cap \mathrm{Nu}\,(T)) &\leq -1 \\ \dim (W \cap \mathrm{Nu}\,(T)) &\geq 1. \end{aligned}$$

Como $\dim (W \cap \mathrm{Nu}\,(T)) \geq 1$, existe $w \in W \cap \mathrm{Nu}\,(T)$, $w \neq 0$, como deseábamos.

Otra forma: Dado que W es un subespacio de $\mathbb{R}^6$ con $\dim W = 3$, podemos suponer que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base de W con $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^6$, entonces el conjunto

$$H = \{T(w_1), T(w_2), T(w_3)\} \subset \mathrm{Im}\,(T) = \mathbb{R}^2.$$

Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, el conjunto H es linealmente dependiente, lo que implica que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \lambda_2 T(w_2) + \lambda_3 T(w_3) = 0.$$

Usando que T es transformación lineal tenemos que

$$T(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3) = 0.$$

Llamemos $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$. Observemos que $w \in W$, pues los w_i son los elementos de la base de W, y también que $w \neq 0$ ya que de lo contrario si $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$, como $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente tendríamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, lo que es un absurdo, pues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ no todos nulos.

De este modo hemos probado que existe $w \in W$, $w \neq 0$ tal que $T(w) = 0$.