Resolución del segundo parcial

Ejercicio 1. Sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por:

$$W_1 = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : u + v = 0,\ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 0, 0) \rangle.$$

(a) Dar una base del subespacio $W_1 \cap W_2$ y calcular su dimensión.

(b) Dar una base del subespacio $W_1 + W_2$ y calcular su dimensión.

(c) Decidir si el vector $(1, 1, -2, 1, 1)$ pertenece a $W_1 + W_2$.

Solución:

(a) Buscamos primero una descripción implícita (como soluciones de un sistema homogéneo) de W_2. Para ésto, usamos que:

$$(x, y, z, u, v) \in W_2 \quad \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : (x, y, z, u, v) = c_1(1, -1, 1, -1, 1) + c_2(0, 1, 0, 0, 0) = (c_1, -c_1 + c_2, c_1, -c_1, c_1)$$

$\Leftrightarrow$ el siguiente sistema tiene solución c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 = x \\ -c_1 + c_2 = y \\ c_1 = z \\ -c_1 = u \\ c_1 = v. \end{cases}$$

Reducimos por filas la matriz ampliada del sistema ($F_2 + F_1$, $F_3 + F_4$, $F_4 + F_5$, $F_5 - F_1$):

$$\begin{matrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ -1 & 0 & u \\ 1 & 0 & v \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x + y \\ 0 & 0 & z + u \\ 0 & 0 & u + v \\ 0 & 0 & -x + v \end{matrix}$$

Así obtenemos una descripción implícita de W_2 como el espacio de soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$W_2 : \quad \begin{cases} z + u = 0 \\ u + v = 0 \\ -x + v = 0. \end{cases}$$

Reuniendo estas ecuaciones (omitiendo las repetidas en este caso) con las que describen a W_1, obtenemos un sistema de ecuaciones que describe a $W_1 \cap W_2$ implícitamente:

$$W_1 \cap W_2 : \quad \begin{cases} u + v = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z + u = 0 \\ u + v = 0 \\ -x + v = 0. \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u + v = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z + u = 0 \\ -x + v = 0. \end{cases}$$

Resolvemos ahora el sistema para encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ ($F_2 + F_4$, $F_2 - F_3$, $F_2 + F_1$, $F_3 - F_1$, y permutaciones de filas):

$$\begin{array}{rrrrr} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

El sistema tiene entonces una variable libre -v- y toda solución es de la forma

$$(v, -2v, v, -v, v) = v\ (1, -2, 1, -1, 1).$$

Por lo tanto el conjunto $\{(1, -2, 1, -1, 1)\}$ es base de $W_1 \cap W_2$ y $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

(b). Buscamos en primer lugar un conjunto de generadores de W_1 (resolviendo el sistema de ecuaciones que lo describe). En este caso hay 3 variables libres -x, y, u- y un vector $(x, y, z, u, v) \in W_1$ si y sólo si:

$$(x, y, z, u, v) = (x, y, -x-y, u, -u) = x\ (1, 0, -1, 0, 0) + y\ (0, 1, -1, 0, 0) + u\ (0, 0, 0, 1, -1).$$

Luego, los vectores $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1, -1)$ generan (y de hecho son base de) W_1.

Reuniendo los conjuntos de generadores de W_1 y de W_2 obtenemos generadores de $W_1 + W_2$:

$$W_1+W_2 = \langle \alpha_1 = (1, -1, 1, -1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \alpha_3 = (1, 0, -1, 0, 0), \alpha_4 = (0, 1, -1, 0, 0), \alpha_5 = (0, 0, 0, 1, -1)\rangle.$$

Para encontrar una base de $W_1 + W_2$ (además de una descripción implícita, que será usada para resolver la parte (c)) planteamos una combinación lineal:

$$(*) \qquad (x, y, z, u, v) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 + x_5\alpha_5.$$

Igualando las componentes de esta igualdad, resulta un sistema de ecuaciones, con incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cuya matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & z \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & v \end{pmatrix}.$$

Reduciendo por filas esta matriz (e.g. $F_2 + F_1$, $F_3 + F_4$, $F_5 + F_4$, $F_1 + F_3$, $F_2 + F_3$, $F_3 + F_4$, $F_1 - F_3$, $(-1)F_3$, y permutaciones de filas), obtenemos:

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x+y+z+u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x+u \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -x-z-2u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u+v \end{pmatrix}.$$

Concluímos entonces que los vectores del conjunto de generadores correspondientes a las columnas de la última MERF que contienen a los coeficientes principales (columnas 1, 2, 3 y 4 en este caso)

$$\alpha_1 = (1, -1, 1, -1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \alpha_3 = (1, 0, -1, 0, 0), \alpha_4 = (0, 1, -1, 0, 0)$$

son base de $W_1 + W_2$, y $\dim(W_1 + W_2) = 4$. (Observar que se cumple la relación $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.)

(c). El desarrollo del ítem anterior nos da una descripción implícita de $W_1 + W_2$ como el subespacio de soluciones del sistema homogéneo

$$u + v = 0.$$

(En efecto, un vector $(x, y, z, u, v) \in W_1 + W_2 \Leftrightarrow$ el sistema que surge de la combinación lineal $(*)$ tiene solución $\Leftrightarrow u + v = 0$, en vista de $(**)$.)

Como el vector $(1,1,-2,1,1)$ no satisface esta ecuación, entonces $(1,1,-2,1,1) \notin W_1 + W_2$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Hallar la matriz de cambio de base de la base ordenada $\mathcal{B}' = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ a la base ordenada $\mathcal{B}$.

(b) Hallar las coordenadas de un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la base ordenada $\mathcal{B}$.

Solución:

(a). Las columnas de la matriz $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ son las coordenadas de los vectores de la base ordenada $\mathcal{B}'$ en la base ordenada $\mathcal{B}$, es decir:

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [[(0,0,1)]_{\mathcal{B}} | [(0,1,0)]_{\mathcal{B}} | [(1,0,0)]_{\mathcal{B}}].$$

Buscamos entonces estas matrices de coordenadas: cada una corresponde a un sistema de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes -la que tiene a los vectores de $\mathcal{B}$ como columnas-, que resolvemos simultáneamente ($F_1 - F_2$, $F_3 - 2F_1$, y permutaciones de filas):

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

Por lo tanto $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nota: Este ítem se podría haber resuelto, de manera alternativa, buscando primero $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (lo cual no requiere cálculos, ya que $\mathcal{B}'$ es una permutación de la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$) y luego usando que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(b). Dado un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}_3$, su matriz de coordenadas en la base ordenada $\mathcal{B}'$ es en este caso:

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

Por la propiedad que caracteriza a la matriz de cambio de base, la matriz de coordenadas que se pide es:

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,[(x,y,z)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z + 2y - 2x \\ -y + x \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z) = (x - y - 2z, -x + y + 2z).$$

(a) Dar una base y una descripción implícita del núcleo de T.

(b) Dar una base y una descripción implícita de la imagen de T.

(c) Hallar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, donde

$$\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \qquad \mathcal{B}' = \{(0,1),(1,0)\}.$$

Solución:

(a). Dado que tenemos una fórmula explícita para $T(x, y, z)$, la definición del núcleo nos da una descripción implícita (sistema de ecuaciones homogéno) para el núcleo de T:

$$\mathrm{Nu}(T) = \{(x, y, z) : T(x, y, z) = (0, 0)\} = \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Para hallar una base de $\mathrm{Nu}(T)$ resolvemos el sistema que lo describe:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \xrightarrow{F_2+F_1} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

El sistema tiene dos variables libres: y, z. Una base del espacio de soluciones se obtiene dando los valores $y = 1$, $z = 0$ y $y = 0$, $z = 1$. Por lo tanto

$$\{((1, 1, 0), (2, 0, 1))\}$$

es base de $\mathrm{Nu}(T)$.

(b). Considerando el sistema más general

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} x - y - 2z = a \\ -x + y + 2z = b, \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es la misma que ya hemos reducido en ítem (a), podemos encontrar una descripción implícita de la imagen de T. En efecto, $(a, b) \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow$ el sistema $(\dagger)$ tiene solución.

Por lo tanto, $\mathrm{Im}(T) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 0\}$ es una descripción implícita de $\mathrm{Im}(T)$.

Para encontrar una base de $\mathrm{Im}(T)$ resolvemos el sistema que lo describe: $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

Luego una base de $\mathrm{Im}(T)$ es $\{(1, -1)\}$. (Observamos que se cumple la relación $\dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Nu}(T) = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$.)

(c). La matriz que se pide tiene como columnas a las matrices de coordenadas de las imágenes por T de los vectores de la base ordenada $\mathcal{C}$ en la base ordenada $\mathcal{B}'$:

$$[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso la respuesta.

(a) El conjunto $\{(1, 0, -1), (-i, 0, i)\}$ se extiende a una base de $\mathbb{C}^3$.

(b) Si W_1 y W_2 son subespacios de $F^{2\times 2}$ tales que $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$, entonces $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (2, -1)$ y $T(1, 0, 0) = (1, 1)$.

Solución:

(a). _Falso:_ Como $(-i, 0, i) = (-i)(1, 0, -1)$, entonces $(-i)(1, 0, -1) + (-1)(-i, 0, i) = 0$ y por lo tanto el conjunto $\{(1, 0, -1), (-i, 0, i)\}$ es linealmente dependiente.

Dado que ninguna base (por ser LI) contiene subconjuntos LD, entonces $\{(1, 0, -1), (-i, 0, i)\}$ no se extiende a una base de $\mathbb{C}^3$.

(b). _Verdadero:_ Por el teorema de la dimensión de la suma de dos subespacios:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

En este caso:

$$\dim(W_1 + W_2) = 3 + 3 - \dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim F^{2\times 2} = 4,$$

la última desigualdad porque $W_1 + W_2$ es un subespacio de $F^{2\times 2}$.

Luego $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 6 - 4 = 2$ y por lo tanto $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(c). *Verdadero:* Como los vectores $\alpha_1 = (1, 0, -1)$ y $\alpha_2 = (1, 0, 0)$ son LI, entonces se extienden a una base de $\mathbb{R}^3$ (aunque no de manera única). Por ejemplo, a la base:

$$\{(1, 0, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Ahora podemos usar que, eligiendo un vector arbitrario $\beta \in \mathbb{R}^2$, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, -1) = (2, -1), \quad T(1, 0, 0) = (1, 1), \quad \text{y} \quad T(0, 1, 0) = \beta.$$

Esto ya demuestra la existencia de T y concluye la demostración de este ítem.

Podemos también dar una transformación explícita T que cumple lo requerido, una vez que hayamos fijado también una elección del vector β. Tomemos por ejemplo $\beta = (0, 0)$.

Dado que $(x, y, z) = (-z)(1, 0, -1) + (x + z)(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$, entonces por la linealidad de T:

$$T(x, y, z) = (-z)T(1, 0, -1) + (x+z)T(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) = (-z)(2, -1) + (x+z)T(1, 1) + y(0, 0) = (x-z, x+2z).$$