Coordenadas y Cambio de Base

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

En este archivo introduciremos el concepto de Coordenadas y Matriz de Cambio de coordenadas y explicaremos como calcular estas cosas.

Estas diapositivas estan basadas en la sección 2.6 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

Hasta aquí hemos estudiado espacios vectoriales de manera general, abstrayendo las propiedades de $\mathbb{R}^n$.

Esto nos facilitó deducir propiedades válidas, no sólo para $\mathbb{R}^n$, si no también para polinomios, matrices, funciones, etc. sin tener que hacer cuentas.

Sin embargo, cada vez que queremos operar en ejercicios particulares sí recurrimos al auxilio de números concretos. Por ejemplo, hacemos esto cada vez que en lugar de usar un polinómio nos quedamos con sus coeficientes.

Estos números concretos que determinan de manera precisa a un vector es lo que llamaremos coordenadas. En el caso de $\mathbb{R}^n$, obtendremos las coordenadas usuales.

Las coordenadas nos permiten hacer más tangibles los vectores de un espacio vectorial abstracto.

1. Objetivos

2. Coordenadas
   - Definición
   - Propiedades

3. Cambio de Base
   - Matriz de cambio de coordenadas
   - Como cambiar de coordenadas

Definición 2.6.1

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}$ una base de V. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base ordenada si los vectores que la forman estan ordenados.

Por ejemplo, la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{C} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

es una base ordenada.

Si cambiamos el orden tenemos otra base ordenada. Por ejemplo,

$$\mathcal{C}' = \{e_n, e_{n-1}, ..., e_2, e_1\}$$

es otra base ordenada distinta a $\mathcal{C}$.

El orden es importante para luego definir las coordenadas.

Proposición 2.6.1

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces, para cada $v \in V$, existen únicos escalares $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$$

Demostración: dichos escalares existen porque $\mathcal{B}$ genera a V.

Veamos que son únicos. Sean $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ otros escalares que satisfacen el enunciado. Entonces tenemos que

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$$

Despejando los extremos, vemos que

$$(x_1 - y_1)v_1 + \cdots + (x_n - y_n)v_n = 0.$$

Dado que $\mathcal{B}$ es LI, $x_i - y_i = 0 \ \forall i$, o dicho de otro modo

$$x_i = y_i \quad \forall i$$

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V.

Si $v \in V$, las coordenadas de v en (o con respecto a) la base $\mathcal{B}$ son los únicos escalares $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

Se dice que x_i es la coordenada i-esima de v.

El vector de coordenadas es

$$[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, ..., x_n)$$

y significa que $x_1, ..., x_n$ son las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$

Según nuestra conveniencia, escribiremos las coordenadas como un vector fila o columna.

Ejemplo

Las coordenadas de $v \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ son las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, si $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$v = (x_1, ..., x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Por lo tanto, $x_1, ..., x_n$ son los únicos escalares de la Proposición 2.6.1, que por definición son las coordenadas de v con respecto a la base $\mathcal{C}$.

Ejercicio: $\mathcal{B} = \{(1,-1),(2,3)\}$ es una base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

Problema

Encontrar las coordenadas de $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B}$.

Queremos escalares $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1,0) = x_1(1,-1) + x_2(2,3)$$

Entonces tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

La solución es $x_1 = \frac{3}{5}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$. Es decir

$$[(1,0)]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Problema

Encontrar las coordenadas de $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ en la base ordenada $\mathcal{B} = \{(1,-1),(2,3)\}$.

Respuesta

$$[(1,0)]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Observación

Las coordenadas determinan un único vector.

Ejemplo

¿Qué vector de $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas 1 y 2 en la base ordenada $\mathcal{B} = \{(1,-1),(2,3)\}$?
Dicho de otro modo,
¿Qué $v \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $[v]_{\mathcal{B}} = (1,2)$?

Respuesta

$v = (5,5) \in \mathbb{R}^2$

En efecto, si 1 y 2 son las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$ quiere decir que

$$v = 1(1,-1) + 2(2,3) = (5,5)$$

Observación

El orden de la base es importante para que las coordenadas determinen un único vector.
Por ejemplo, las coordenadas $(1,2)$ y $(2,1)$ con respecto a la base ordenada $\mathcal{B}=\{(1,-1),(2,3)\}$ determinan distintos vectores en $\mathbb{R}^2$.

$$(1,2) \rightsquigarrow v = 1(1,-1)+2(2,3) = (5,5)$$
$$(2,1) \rightsquigarrow w = 2(1,-1)+1(2,3) = (4,1)$$

La siguiente simple observación suele ser muy útil y la usaremos más adelante.

Observación

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V.
Las coordenadas de $v_i \in \mathcal{B}$ son

$$[v_i]_{\mathcal{B}} = (0, ..., 1, ..., 0),$$

es decir, todas 0 salvo un 1 en la i-esima coordenada.

Pues, $v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$.

1. Objetivos

2. Coordenadas
   - Definición
   - Propiedades

3. Cambio de Base
   - Matriz de cambio de coordenadas
   - Como cambiar de coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V.

El vector de coordenadas $[v]_{\mathcal{B}}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ entonces lo podemos sumar y multiplicar por escalares.

A continuación veremos como se relacionan estas operaciones con las operaciones propias del espacio vectorial V.

Proposición 2.6.2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces

1. Las coordenadas de la suma es la suma de las coordenada:
$$[v + w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}} \quad \forall v, w \in V$$
2. Las coordenadas del producto por un escalar es igual a multiplicar las coordenadas por el escalar:
$$[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

A continuación la demostración....

Demostración

Sean v y w vectores de V con coordenadas

$$[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, ..., x_n) \quad \text{y} \quad [w]_{\mathcal{B}} = (y_1, ..., y_n).$$

Esto quiere decir que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \quad \text{y} \quad w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n.$$

Por lo tanto

$$v + w = (x_1 + y_1) v_1 + \cdots + (x_n + y_n) v_n \qquad (\star)$$

Por definición, deducimos que $x_1 + y_1$, ..., $x_n + y_n$ son las coordenadas de $v + w$ (los únicos escalares tales que $(\star)$ vale). En otras palabras

$$[v + w]_{\mathcal{B}} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}}$$

Esto prueba el primer item.

Demostración

La demostración del segundo item es similar.

Sea v un vector de V con coordenadas $[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, ..., x_n)$.

Esto quiere decir que $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Por lo tanto $\lambda v = (\lambda x_1) v_1 + \cdots + (\lambda x_n) v_n$.

Por definición, deducimos que λx_1, ..., λx_n son las coordenadas de λv. En otras palabras

$$[\lambda v]_{\mathcal{B}} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$$

como queriamos probar.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces la función $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$T(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

para todo $v \in V$ es un isomorfismo de espacio vectoriales.

Demostración: T es una transformación lineal por la proposición anterior. Es sobreyectiva porque cualquier vector de coordenadas determina un vector en V. Más aún, determina un único vector entonces es inyectiva.

Corolario

Todo espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Como ya sabemos un espacio vectorial tiene infinitas bases.

Por ejemplo, si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base entonces también lo es

$$\{\lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n\}$$

para cuales quiera escalares no nulos $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Obviamente, las coordenadas en dos bases distintas son distintas.

Aquí veremos como pasar de unas coordenadas a otras.

1 Objetivos

2 Coordenadas
- Definición
- Propiedades

3 Cambio de Base
- Matriz de cambio de coordenadas
- Como cambiar de coordenadas

Definición 2.6.2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con dos bases ordenadas $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1', ..., v_n'\}$.

La matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [v_1']_{\mathcal{B}} & [v_2']_{\mathcal{B}} & \cdots & [v_n']_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

es decir, las columnas de P son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ en la base $\mathcal{B}$.

Lema

La matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ es inversible.

Demostración:

dado que la transformación lineal $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $T(v) = [v]_{\mathcal{B}}$, es un isomorfismo las columnas de P son LI.

Y esto último es equivalente a que P sea inversible por el Teorema 2.2.5 (pues la única solución de $PX = 0$ es la trivial)

1. Objetivos

2. Coordenadas
   - Definición
   - Propiedades

3. Cambio de Base
   - Matriz de cambio de coordenadas
   - Como cambiar de coordenadas

El siguiente teorema nos dice como calcular las coordenadas de un vector en una base conociendo las coordenadas en otra base usando la matriz de cambio de coordenadas.

Teorema 2.6.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con dos bases ordenadas $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1', ..., v_n'\}$. Entonces

1. $[v]_{\mathcal{B}} = P\,[v]_{\mathcal{B}'}$
2. $[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[v]_{\mathcal{B}}$

para todo $v \in V$ donde P es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

(multiplicación de una matriz por un vector columna)

A continuación la demostración...

Demostración

Dado que $[v_i']_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, un 1 en el lugar i, la multiplicación $P[v_i']_{\mathcal{B}'}$ es igual a la columna i de P.

Por definición dicha columna es $[v_i']_{\mathcal{B}}$. Es decir, $[v_i']_{\mathcal{B}} = P[v_i']_{\mathcal{B}'}$ que es justo lo que queremos probar en el primer item para los vectores en la base $\mathcal{B}'$.

Luego, vale para todo $v \in V$ usando que las coordenadas respetan combinaciones lineales al igual que la multiplicación por matrices.

El segundo item se deduce del primero multiplicando por P^{-1}.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con dos bases ordenadas $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1', ..., v_n'\}$.
Si P es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ entonces P^{-1} es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B} = \{(1,-1),(2,3)\}$

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}) \quad [e_2]_{\mathcal{B}} = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$$

$\mathcal{B}' = \mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$

La matriz de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

La matriz de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es P^{-1}

$[1,1]_{\mathcal{B}} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

Cuál es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la canónica $\mathcal{C}$?

Es la matriz con columnas las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base canónica, es decir

$$[(1,-1)]_{\mathcal{C}} = (1,-1) \quad [(2,3)]_{\mathcal{C}} = (2,3)$$

Por lo tanto la matriz

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}$.

Conclusión: En $\mathbb{R}^n$ es fácil calcular la matriz de cambio de coordenadas de una base $\mathcal{B}$ cualquiera a la base canónica $\mathcal{C}$. Es simplemente poner los vectores de $\mathcal{B}$ como columnas.

Sea $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ dicha matriz.

Luego, la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$ es la inversa de $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

Entonces

$$[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\,[v]_{\mathcal{C}}$$

donde $[v]_{\mathcal{C}}$ es simplemente el vector $v \in \mathbb{R}^n$