Práctico 5

Autovalores y autovectores

Objetivos.

- Familiarizarse con las nociones de autovalor y autovector de una matriz $n \times n$.
- Aprender a calcular el polinomio característico y los autovalores de una matriz $n \times n$ y a determinar el conjunto de autovectores asociado a cada autovalor.

Ejercicios.

(1) Decidir si las siguientes matrices tienen autovalores reales y/o complejos.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}, \ c \in \mathbb{R}.$$

(2) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores, y para cada autovalor, dar una descripción explícita del autoespacio asociado.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c \end{bmatrix}, \ c \in \mathbb{R}.$$

(3) Probar que hay una única matriz 2×2, A, con coeficientes reales tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.

(4) Sea A una matriz 2×2.

(a) Probar que el polinomio característico de A es $X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det(A)$.

(b) Si A no es inversible, probar que los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

(5) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Existe una matriz inversible A tal que 0 es autovalor de A.

(b) Si A es inversible todo autovector de A es autovector de A^{-1}.

(c) Si A es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A.

(6) Sea A una matriz $n \times n$ y sea $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, un polinomio con coeficientes reales. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor c es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(c)$.

Más ejercicios. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(7) Repetir el Ejercicio 1 con las matrices

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$$

(8) Repetir el Ejercicio 2 con las matrices

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ c & 2 & 0 & 0 \\ 0 & c & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c & 2 \end{bmatrix}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios un poco más difíciles. Si ya hizo los primeros ejercicios ya sabe lo que tiene que saber. Los siguientes ejercicios le pueden servir si esta muy aburridx con la cuarentena.

(9) Sea A una matriz $n \times n$. Probar que el término independiente del polinomio característico de A es $\det(A)$ y que el coeficiente de grado $(n-1)$ es $-\operatorname{Tr}(A)$.

(Ayuda: evaluar el polinomio característico en valores apropiados / hacer inducción)

(10) Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Probar que si $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

(a) $\det(A) = c_1 \cdots c_n$.

(b) $\operatorname{Tr}(A) = c_1 + \cdots + c_n$.

(11) Sea $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ un polinomio mónico de grado $n \geq 1$. Probar que $(-1)^n f(X)$ es el polinomio característico de la siguiente matriz $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$