Práctico 2: Rectas y Planos

1. Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   (a) $2v + 3w - 5u$,
   (b) $5(v + w)$,
   (c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).
2. Calcular los siguientes productos escalares:
   (a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,
   (b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.
3. Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:
$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$
4. Demostrar que:
   (a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   (b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.
5. Encontrar:
   (a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
   (b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
6. Encontrar la longitud de los vectores.
   (a) $(2, 3)$, (b) (t, t^2), $t \in \mathbb{R}$, (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$, $\phi \in \mathbb{R}$.
7. Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.
   (a) $v = (2, 2)$, $w = (1, 0)$, (b) $v = (-5, 3, 1)$, $w = (2, -4, -7)$.
8. Sean $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que $v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3$.
9. Probar, usando sólo las propiedades del producto escalar, que dados $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
   (a) se cumple que :
$$\langle\lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$
   (b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
$$\langle\lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$
10. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son equivalentes y/o paralelos.
    (a) $P = (1, -1)$, $Q = (4, 3)$, $R = (-1, 5)$, $S = (5, 2)$.
    (b) $P = (1, -1, 5)$, $Q = (-2, 3, -4)$, $R = (3, 1, 1)$, $S = (-3, 9, -17)$.
11. Sea L la recta en $\mathbb{R}^2$ descripta por la ecuación $2x - y = 1$. Dar la representación paramétrica de L.
12. Determinar **todos** los vectores en $\mathbb{R}^2$ que son perpendiculares a la recta cuya ecuación es $x = 2y + 7$.

13. Decidir si las rectas que están definidas por las ecuaciones

$$2x - y = 0, \qquad \frac{y}{2} - x = 1$$

son o no paralelas.

14. Dar la ecuación paramétrica de las dos rectas del ejercicio anterior.

15. Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

    (a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
    (b) Graficar en el plano a R_1.
    (c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
    (d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

16. Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

    (a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
    (b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela al vector $(1, 3)$.

17. Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

18. Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.

    (a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
    (b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

19. Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

20. Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

    (a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.
    (b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.
    (c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

21. Dar la ecuación paramétrica de la recta L, en $\mathbb{R}^3$, que pasa por el punto $(0, 1, -1)$ y es perpendicular al plano cuya ecuación es $x + y - z = 1$.

22. Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

    (a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.
    (b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.
    (c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

23. ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio (22c)? Describir la intersección en cada caso.

    (a) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$, (b) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1),\ t \in \mathbb{R}\}$,
    (c) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1),\ t \in \mathbb{R}\}$, (d) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Definición. Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Se define el *producto vectorial entre* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ por:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\,.$$

24. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

    (a) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ (i.e. el vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es perpendicular a $\mathbf{x}$ cómo a $\mathbf{y}$).
    (b) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\,\mathbf{y} \times \mathbf{x}$.
    (c) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$.

(d) $k(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = k\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times k\mathbf{y}$.

(e) $\mathbf{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(f) $||\mathbf{x} \times \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$.

(g) $||\mathbf{x} \times \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||\,\sin(\theta)$, donde θ es el ángulo entre $\overline{\mathbf{0}\,\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{0}\,\mathbf{y}}$.

(h) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son paralelos.

25. Usar el producto vectorial para encontrar:

(a) La ecuación normal e implícita de los siguientes planos:

$$\pi_1 = \{(1+s, 2+t, 3+s+t) \in \mathbb{R}^3 : s,t \in \mathbb{R}\} \quad \mathbf{y} \quad \pi_2 = \{(s+t, s+2t, s+t) \in \mathbb{R}^3 : s,t \in \mathbb{R}\}$$

(b) La intersección entre los planos

$$\pi_3 = \{(x,y,z) : 2x+3y+z=0\} \quad \text{y} \quad \pi_4 = \{(x,y,z) : x+y+z=1\}.$$

Observación: El Ejercicio (19) nos dice que las rectas que pasan por el origen son cerradas por la suma y la multiplicación por escalares. Los subconjuntos que satisfacen esta propiedad se llaman "subespacios vectoriales" y serán nuestro objeto de estudio más adelante.

Ejercicios de repaso

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

26. (a) Encontrar un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ no nulo que sea ortogonal a los vectores

$$u = (4,-1,1), \quad v = (2,1,1) \quad \text{y} \quad w = (1,2,1).$$

¿Hay un único vector con esta propiedad? En caso de que no, ¿Cómo describiría a todos los vectores que satisfacen dicha propiedad?

(b) Decidir si existe un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que pertenezca a la intersección de los planos

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x-y+z=1\},\\ \pi_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=2\},\\ \pi_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=-1\}.\end{aligned}$$

27. Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

28. (Ver ayuda) Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).}$$

29. Demostrar que si $v, w \in \mathbb{R}^n$ vale

$$||v+w|| \leq ||v|| + ||w|| \qquad \text{(Desigualdad triangular).}$$

Ayudas

(28) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.