Espacios Vectoriales 4

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

En este archivo definiremos y estudiaremos la noción de dimensión.

Estas diapositivas estan basadas en el capítulo 2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

1. Objetivos

2. $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$

3. Dimensión

4. Dimensión de la suma de subespacios
   - Aplicación a sistema de ecuaciones

Repasemos la noción de base en el ejemplo de los números complejos.

Recordemos que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

- Los vectores son los números complejos
- La suma es la suma habitual de números complejos
- La multiplicación por escalares es la multiplicación habitual de un número real por un número complejo

Más aún, $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

- Los vectores son las n-uplas $(z_1, ..., z_n)$ cuyas coordenadas son números complejos
- La suma es coordenada a coordenada
- La multiplicación por escalares es coordenada a coordenada

Afirmación

El conjunto $\{1, i\}$ es una base de $\mathbb{C}$

1. Demostración de que $\{1, i\}$ genera $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle 1, i \rangle$$

(definición de $\mathbb{C}$) (definición de subespacio generado)

2. Demostración de que $\{1, i\}$ es LI:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $0 = a + bi$, entonces $a = b = 0$ por la definición del cero en $\mathbb{C}$

Consideremos los vectores

$$e_j = (0, ..., 1, ..., 0) \in \mathbb{C}^n \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n,$$

es decir, todas sus coordenadas son 0 expcepto un 1 en el lugar j.
Consideremos también los vectores

$$d_j = (0, ..., i, ..., 0) \in \mathbb{C}^n \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Afirmación

El conjunto $\{e_1, ..., e_n, d_1, ..., d_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$

La demostración es similar a la anterior.

1. Objetivos
2. $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$
3. Dimensión
4. Dimensión de la suma de subespacios
   - Aplicación a sistema de ecuaciones

Definición 2.3.2

Un espacio vectorial V se dice que es de dimensión finita si es generado por una cantidad finita de vectores. Es decir,

$$V = \langle v_1, ..., v_m \rangle$$

para algunos vectores $v_1, ..., v_m \in V$.

Recordar que si S es un conjunto finito entonces $|S|$ denota el cardinal de S (la cantidad de elementos de S).

Teorema 2.3.1

Sea $V = \langle v_1, ..., v_m \rangle$ y $S \subset V$ un subconjunto LI. Entonces S es finito y $|S| \leq m$.

Para demostrar el teorema veremos que cualquier subconjunto con más de m vectores es LD.

Demostración

Sea $\{w_1, ..., w_n\} \subset V$ con $n > m$.

Dado que $v_1, ..., v_m$ genera a V, existen escalares a_{ij} tales que

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m \\
w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m \\
&\vdots \\
w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m
\end{aligned}
$$

Notemos que los escalares forman una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con más colummas que filas. Entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene soluciones no triviales por el Teorema 1.2.6 (ver también el archivo "Álgebra de matrices 3", página 31)

Demostración

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_n$ una solución no trivial de $AX = 0$. Es decir

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1n}\lambda_n &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n &= \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1} v_i + \cdots + \lambda_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} v_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \right) v_i = 0 \end{aligned}$$

Demostración

En conclusión, existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$, no todos nulos, tales que $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0$. Por lo tanto los vectores $w_1, , ..., w_m$ son LD como queriamos demostrar

Un espacio vectorial puede tener muchas bases distintas. Por ejemplo: $\{1\}$ y $\{2\}$ son bases del espacio vectorial $\mathbb{R}$. Pero siempre tendran el mismo cardinal.

Corolario 2.3.2

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces todas las bases tienen el mismo cardinal.

Demostración: Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de V.

En particular, $\mathcal{B}$ genera a V y $\mathcal{B}'$ es LI. Entonces $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$ por el teorema anterior.

Pero también es cierto que $\mathcal{B}'$ genera a V y $\mathcal{B}$ es LI. Entonces $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$ por el teorema anterior.

Uniendo amnbas desigualdades resulta que $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}|'$.

Gracias al corolario anterior podemos introducir la siguiente definición.

Definición 2.3.3

Sea V un espacio vectorial dimensión finita. Diremos que la dimensión de V es n y denotaremos

$$\dim V = n,$$

si existe una base de V con n vectores.
Además, se define que la dimensión del espacio nulo es 0.

En otras palabras, si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V entonces

$$\dim V = n = |\mathcal{B}|.$$

Definición 2.3.3

Sea V un espacio vectorial dimensión finita. Diremos que la dimensión de V es n y denotaremos

$$\dim V = n,$$

si existe una base de V con n vectores.
Además, se define que la dimensión del espacio nulo es 0.

Ejemplos 2.3.7

- $\dim \mathbb{R}^n = n$ (usando la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$)
- $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = m \cdot n$ (usando la base canónica $\{E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq i \leq n\}$)
- $\dim \mathbb{C}^n = 2n$ (usando la base $\{e_j, d_j \mid 1 \leq j \leq n\}$)

Definición 2.3.3

Sea V un espacio vectorial dimensión finita. Diremos que la dimensión de V es n y denotaremos

$$\dim V = n,$$

si existe una base de V con n vectores.
Además, se define que la dimensión del espacio nulo es 0.

Ejemplos 2.3.7

El espacio de polinomios $\mathbb{R}[x]$ NO es de dimensión finita porque la base que dimos es infinita $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

En cambio el subespacio de polinomios $\mathbb{R}_{<n}[x]$ de grado estrictamente menor a n SI. Una base es el conjunto $\{x^k \mid 0 \leq k < n\}$ y por lo tanto

$$\dim \mathbb{R}_{<n}[x] = n$$

Corolario 2.3.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $S \subset V$ un subconjunto.

1. Si $|S| > \dim V$, entonces S es LD.
2. Si $|S| < \dim V$, entonces S no genera a V.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base de V. En particular $\dim V = |\mathcal{B}|$.

1. Tenemos que $V = \langle \mathcal{B} \rangle$ y $|S| > \dim V$. Entonces S no puede ser LI por el Teorema 2.3.1. Por lo tanto es LD.
2. Si suponemos S genera tenemos que: $V = \langle S \rangle$ y $\mathcal{B}$ LI. Luego, el Teorema 2.3.1 afirma que $|\mathcal{B}| = \dim V < |S|$. CONTRADICE la hipótesis $|S| < \dim V$. Por lo tanto S no genera.

Lema 2.3.4

Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subconjunto LI. Si $w \notin \langle S \rangle$, entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Demostración: Si $S \cup \{w\}$ es LD, entonces existen vectores $v_i \in S$ y escalares λ_i, λ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0.$$

Notemos $\lambda \neq 0$. Caso contrario la combinación lineal anterior diría que S es LD. Entonces

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \cdots + -\frac{\lambda_n}{\lambda} v_n = w \in \langle S \rangle \quad \text{CONTRADICE LA HIPÓTESIS}$$

Por lo tanto $S \cup \{w\}$ es LI

Lema 2.3.4

Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subconjunto LI. Si $w \notin \langle S \rangle$, entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $S \subset V$ un subconjunto LI. Si $|S| = \dim V$, entonces S es base.

Demostración: Sólo hay que probar que S genera a V. Supongamos que no lo genera. Entonces existe $w \notin \langle S \rangle$ tal que $S \cup \{w\}$ es LI. Lo cual CONTRADICE el Teorema 2.3.1.

El siguiente teorema nos dice que todo subconjunto LI se puede completar o extender a una base.

La demostración consiste en aplicar varias veces el lema anterior.

Teorema 2.3.5

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $S \subset V$ un subconjunto LI. Entonces existen $w_1, ..., w_m$ tales que $S \cup \{w_1, ..., w_m\}$ es una base de V.

Corolario 2.3.6

El teorema anterior vale para subespacios puesto que también son espacios vectoriales

Corolario 2.3.7

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita no nulo, entonces $0 < \dim V$

Demostración: basta notar que si v es un vector no nulo $\{v\}$ es LI y se puede completar a una base.

Corolario 2.3.8

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $W \subset V$ es un subespacio con $W \neq V$, entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.

Demostración: Por el Teorema 2.3.1, cualquier subconjunto LI de W es de cardinal menor a $\dim V$. Usando el Lema 2.3.4, concluimos que W tiene que estar generado por una cantidad finita de vectores. Enonces W es de dimensión finita.

Sea S una base de W. Entonces S es LI pero no genera a V.

Por el Teorema 2.3.5, existen vectores tales que $S \cup \{w_1, ..., w_m\}$ es una base de V. Entonces

$$\dim W = |S| < |S \cup \{w_1, ..., w_m\}| = \dim V$$

Teorema 2.3.9

Sea V un espacio vectorial no nulo y $S \subset V$ un subconjunto finito tal que $V = \langle S \rangle$. Entonce existe un subconjunto $\mathcal{B} \subset S$ que es base de V.

Demostración:

El conjunto $\mathcal{C} = \{|R| \mid R \subset S \text{ y } R \text{ es LI}\}$ satisface que

1. $\mathcal{C} \notin \emptyset$: dado que $V \neq 0$, existe $s \in S$ y $s \neq 0$. Entonces podemos tomar $R = \{s\}$
2. $\mathcal{C}$ es finito: porque S lo es.

Por lo tanto, podemos considerar $\mathcal{B} \subset S$ tal que $|\mathcal{B}|$ es el elemento máximo de $\mathcal{C}$.

Si probamos que $\mathcal{B}$ genera a V queda demostrado el teorema.

Probemos que $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ por el absurdo.

Supongamos que $\langle \mathcal{B} \rangle \neq V$. Como $V = \langle S \rangle$, nuestra suposición implica que hay un $s \in S$ tal que $s \notin \langle \mathcal{B} \rangle$.

Luego, por el Lema 2.3.4, $\mathcal{B} \cup \{s\} \subset S$ es LI y $|\mathcal{B} \cup \{s\}| = |\mathcal{B}| + 1 \in \mathcal{C}$. CONTRADICE $|\mathcal{B}|$ es el máximo de $\mathcal{C}$.

Teorema 2.3.9

Sea V un espacio vectorial no nulo y $S \subset V$ un subconjunto finito tal que $V = \langle S \rangle$. Entonce existe un subconjunto $\mathcal{B} \subset S$ que es base de V.

Corolario

Sea V un espacio vectorial no nulo y $S \subset V$ un subconjunto finito tal que $V = \langle S \rangle$. Si $|S| = \dim V$, entonce S es una base de V.

Demostración: si no fuera así, la base del teorema sería tal que $|\mathcal{B}| < \dim V$ ABSURDO

Observación

- La dimensión de V es la mínima cantidad de vectores con la cual podemos generar a V.
  (esta es la última de las preguntas de )
- En la gran mayoría de los resultados anteriores y los que siguen asumen que los espacios vectorial son de dimensión finita. Esto es así porque en dimensión infinita hay cosas que no valen.

1. Objetivos
2. $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$
3. Dimensión
4. Dimensión de la suma de subespacios
   - Aplicación a sistema de ecuaciones

Definición 2.2.3

Sea V un espacio vectorial y $S_1, ..., S_k$ subconjunto de V. El conjunto suma es

$$S_1 + \cdots + S_k = \{s_1 + \cdots + s_k \mid s_1 \in S_1, ..., s_k \in S_k\}$$

Ejemplo

Si $S_1 = \{(1,0),(2,0)\}$ y $S_2 = \{(0,1),(0,2)\}$ en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$S_1 + S_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Teorema 2.2.5

Sea V un espacio vectorial y $W_1, ..., W_k$ subespacios de V. Entonces $W_1 + \cdots + W_k$ es un subespacio de V.

La demostración es similar a la demostración de que el subespacio generado por vectores es un subespacio.

Más aún, la suma de subespacios generaliza a los subespacios generados por vectores como vemos en el siguiene resultado

Proposición 2.2.6

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces

$$\langle v_1, ..., v_k \rangle = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_k \rangle$$

Haciendo inducción podemos deducir lo siguiente

$$\langle v_1, ..., v_k \rangle = \langle v_1, ..., v_\ell \rangle + \langle v_{\ell+1}, ..., v_k \rangle$$

(como una propiedad asociativa)

Observación

Como ya hemos mencionado la unión de subespacios no es necesariamente subespacio. El teorema anterior nos dice que en el contexto de subespacios hay que tomar la suma en vez de la unión.

Notar que

$$W_1 \cup \cdots \cup W_k \subset W_1 + \cdots + W_k$$

Por ejemplo, si $w_1 \in W_1$, entonces $w_1 + 0 + \cdots + 0 \in W_1 + \cdots + W_k$ dado que 0 pertenece a todos los subespacios.

Además comparar el siguiente teorema con el cardinal de la unión de dos conjuntos.

Teorema 2.3.10

Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de dimensión finita de un espacio vectorial. Entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y vale que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Demostración

Por lo que hemos visto hasta aquí existe $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{u_1, ..., u_k\}$ base de $W_1 \cap W_2$.

Además, podemos extender este conjunto a una base de W_1 y a otra de W_2. Sean entonces

- $\mathcal{B}_{W_1} = \{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_n\}$ base de W_1
- $\mathcal{B}_{W_2} = \{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_n\}$ base de W_2

Entonces la unión $\mathcal{B}_{W_1} \cup \mathcal{B}_{W_2}$ genera a $W_1 + W_2$ (por la Proposición anterior y el comentario posterior).

Si probamos que la unión es LI queda demostrado el teorema. Gracias a la propiedad del cardinal de la unión de dos conjuntos! Pues...

$$\begin{aligned}
\dim(W_1 + W_2) &= |\mathcal{B}_{W_1} \cup \mathcal{B}_{W_2}| \\
&= |\mathcal{B}_{W_1}| + |\mathcal{B}_{W_2}| - |\mathcal{B}_{W_1} \cap \mathcal{B}_{W_2}| \\
&= |\mathcal{B}_{W_1}| + |\mathcal{B}_{W_2}| - |\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2}| \\
&= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)
\end{aligned}$$

La pruba de LI la pueden leer en las Notas de Garcia-Tiraboschi.

Teorema 2.3.10

Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de dimensión finita de un espacio vectorial. Entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y vale que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales tales que $\dim W_1 + \dim W_2 > \dim V$, entonces $W_1 \cap W_2 \neq 0$.

Demsotración: si la intersección es cero entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de mayor dimensión que V ABSURDO

- Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.
- Sean $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $BX = 0$.

El conjunto $V \cap W$ es el conjunto de los $v \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen las ecucaciones de $AX = 0$ y las de $BX = 0$. En otras palabras

Afirmación

Si $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+k)\times n}$, entonces el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $CX = 0$ es $V \cap W$.

Por el último corolario concluimos que

Afirmación

Si $\dim V + \dim W > n$, entonces el sistema $CX = 0$ tiene solución no trivial