Álgebra / Álgebra II - 18/06/2020

Práctico 9.

Ejercicio 1). $C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 0), (1, 1)\}$

a) $P_{C_2 B_2}$ = P: de C_2 a B_2. Por definición esta matriz P es la que tiene en la columna j las coordenadas del j-ésimo vector de la base de partida (en este caso C_2) en la base de llegada (en este caso B_2).

(1, 0) = $P_{11}(1, 0) + P_{21}(1, 1)$ = ($P_{11} + P_{21}, P_{21}$)
(0, 1) = $P_{12}(1, 0) + P_{22}(1, 1) = (P_{12} + P_{22}, P_{22})$

A P_{11} = 1
P_{21} 0

A P_{12} = 0
P_{22} 1

Debo encontrar las coordenadas P_{ij}

Donde A = 1 1
0 1

Resolvemos los sistemas simultáneamente:

1 1| 1 0
0 1| 0 1
F1 - F2:

1 0| 1 -1
0 1| 0 1

La matriz de cambio de base P es la que quedó del lado derecho, una vez que llegamos del lado izquierdo a la matriz Identidad.

$$P = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

b) Hecho general (no depende de que una de las bases sea la canónica):

$P_{B_2 C_2} = P_{C_2 B_2}{}^{-1}$: matriz de cambio de base de B_2 a C_2.

Sin embargo en este caso en que la base C_2 es la base (ordenada) canónica, es muy fácil encontrar $P_{B_2 C_2}$ usando sólo la definición de matriz de cambio de base:

Por definición esta matriz es la que tiene en la columna j las coordenadas del j-ésimo vector de la base de partida (en este caso B_2) en la base de llegada (en este caso C_2).

Es decir que basta poner como columnas a los vectores de la base ordenada B_2.

$$P_{B_2 C_2} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

(e) Determinar las coordenadas de (2, 3) en las bases B2.

La propiedad que caracteriza a la matriz de cambio de base $P = P_{C_2 B_2}$ es que, siendo $[v]_{C_2}$ el vector de coordenadas de v en la base C_2, y $[v]_{B_2}$ el vector de coordenadas de v en la base B_2, se cumple que:

$$P \; [v]_{C_2} = [v]_{B_2}$$

Aquí, como C_2 es la base ordenada canónica, entonces:

$[(2,\ 3)]_{C_2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$

Luego,

$[(2,\ 3)]_{C_2} = P \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \, . \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$

Verficación:

-1 (1, 0) + 3 (1, 1) = (2, 3)

d) Si el vector de coordenadas de un vector v en la base ordenada $B_2 = \{(1,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ es (1, 4), esto significa que:

v = 1 . (1, 0) + 4 . (1, 1) = (5, 1).

Ejercicio 2.

(2) Sean Cn, Bn como en el ejercicio anterior y

T : R 2 −→ R 3 , T(x, y) = (x − y, x + y, 2x + 3y).

$[T]_{C_2 B_3}$: matriz cuya columna j es el vector de coordenadas de

T(j-ésimo vector de la base de partida C_2)

en la base de llegada B_3 .
En este caso:

T(1, 0) = (1, 1, 2)
T(0, 1) = (− 1, 1, 3)

Y la base de llegada es $B_3 = \{(1,\ 0,\ 0), (1,\ 1,\ 0), (1,\ 1,\ 1)\}$

1 1 1| 1 -1
0 1 1| 1 1
0 0 1| 2 3

F1-F3, F2-F3, F1 - F2

1 0 0| 0 -2
0 1 0| -1 -2
0 0 1| 2   3

La matriz que quedó del lado derecho (una vez que llegamos a la identidad del lado izquierdo) es la matriz de la transformación T de la base C_2 en la base B_3 .