4. (10 puntos) Calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{pmatrix}$

Solución: Comenzamos haciendo operaciones elementales por fila para obtener una matriz triangular.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_3 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_2 \leftrightarrow F_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_4 \leftrightarrow F_5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = B$$

Sabemos que el $\det B$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir, $\det B = 2.1.3.\pi.\frac{1}{3} = 2\pi$. Además, por el Teorema 1.6.4 (3), $\det B = (-1)^3 \det A$, ya que hicimos tres cambios de filas, luego $2\pi = -\det A$, de donde concluimos que $\det A = -2\pi$.

5. (10 puntos cada item) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tales que $\det A = 2$, $\det B = 3$ y $\det C = 4$.

(a) Calcular $\det(-AB^tC^{-1}A^2)$.

(b) Calcular $\det(PQR)$ donde $P$, $Q$ y $R$ son las matrices que se obtienen a partir de $A$, $B$ y $C$ mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+2F_2} P, \quad B \xrightarrow{3F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,
- $P$ se obtiene a partir de $A$ sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- $Q$ se obtiene a partir de $B$ multiplicando la fila 3 por 3.
- $R$ se obtiene a partir de $C$ intercambiando las filas 1 y 4.

Solución: Para la resolver este ejercicio usaremos fuertemente las propiedades del determinante.

a.

$$\begin{aligned} \det\left(-AB^tC^{-1}A^2\right) &= \det(-A)\det\left(B^t\right)\det\left(C^{-1}\right)\det\left(A^2\right) \\ &= (-1)^4\det(A)\det(B)\det(C)^{-1}\det(A)^2 \\ &= \frac{\det(A)^3\det B}{\det C} \\ &= \frac{2^3 3}{4} \\ &= 6. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \det(PQR) &= \det(P)\det(Q)\det(R) \\ &= \det A\,(3\det B)\,(-\det C) \\ &= 2\,(3.3)\,(-4) \\ &= -72, \end{aligned}$$

ya que por el Teorema 1.6.4 (1,2,3) tenemos que

$$\begin{aligned}
\det P &= \det A = 2;\\
\det Q &= 3\det B = 9;\\
\det R &= -\det C = -4.
\end{aligned}$$