Álgebra II - 28/05/2020

<u>Práctico 7.</u>

(6) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales:

Para el conjunto del Ejercicio 5)b): {A, B, C} $\subseteq$ $M_{2x3}(R)$

A = 1 0 2, B = 1 0 1, C = 1 2 3
0 -1 -3 -2 1 0 3 2 1

Identificamos a las matrices 2 x 3 con vectores en R^6

(*) (1, 0, 2, 0, -1, -3), (1, 0, 1, -2, 1, 0), (1, 2, 3, 3, 2, 1)

Veamos dos formas de resolverlo:

1) Agregamos a los vectores dados, los vectores de una base (cualquiera) del espacio en cuestión. En este caso podemos agregar los vectores de la base canónica de las matrices 2x3:

E1 = 1 0 0, E2 = 0 1 0, E3 = 0 0 1, E4, E5, E6
0 0 0 0 0 0 0 0 0

Que corresponden a los vectores

(**) (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), …, (0, 0, 0, 0, 0, 1)

Formamos una matriz (en este caso 9x6) cuyas primeras filas son los vectores (*) y siguiendo están las filas que corresponden a los vectores que agregamos (**)

1 0 2 0 -1-3
1 0 1 -2 1 0
1 2 3 3 2 1
1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1

Reducimos por filas esta matriz **SIN PERMUTAR FILAS**:

1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1

Las matrices correspondientes a las filas que ocupan el lugar de las filas no nulas de la MERF (EN LA MATRIZ ORIGINAL) resultan una base del espacio:

(1 0 2 0 -1-3), (1 0 1 -2 1 0), (1 2 3 3 2 1), (1 0 0 0 0 0), (0 1 0 0 0 0), (0 0 0 0 0 1)

Es decir que el conjunto: {**A, B, C**, E1, E2, E6} es una base de $M_{2x3}(R)$ que extiende al conjunto dado.

De otra forma:

Si planteamos una combinación lineal que igualamos a cero:

$$x_1\, A + x_2 B + x_3 C + x_4\, E1 + ... + x_9 E6 = 0$$

Nos queda, igualando coeficiente a coeficiente, un sistema homogéneo:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$2x_3 + x_5 = 0$
$2x_1 + x_2 + 3\,x_3 + x_6 = 0$
$-2\,x_2 + 3x_3 + x_7 = 0$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_8 = 0$
$-3x_1 + x_3 + x_9 = 0$

La matriz asociada a este sistema es la que tiene por columnas a los vectores originales:

1 1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 2 0 1 0 0 0 0
2 1 3 0 0 1 0 0 0
0 -2 3 0 0 0 1 0‘0
-1 1 2 0 0 0 0 1 0
-3 0 1 0 0 0 0 0 1

Las columnas de la matriz son los vectores dados seguidos de los vectores de una base (en este caso la canónica).

Reducimos por filas esta matriz (podemos permutar filas si queremos)

1 0 0 -9 0 5 -2 0 0
0 0 0 -8 1 4 -2 0 0
0 1 0 6 0 -3 1 0 0
0 0 1 4 0 -2 1 0‘0
0 0 0 -22 0 12 -5 1 0
0 0 0 -31 0 17 -7 0 1

Por ejemplo, al terminar la reducción llegamos a una matriz MERF

1 0 0 0 0 0 -2 0 0
0 1 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 0‘0
0 0 0 1 0 0 -2 0 0
0 0 0 0 1 0 a c 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1

La base buscada es la que tiene a los vectores (columnas) EN LA MATRIZ ORIGINAL que corresponden a los pivotes de la MERF:

(1 0 2 0 -1- 3), (1 0 1 .2 1 0), (1 2 3 3 2 1), (1 0 0 0 0 0), (0 1 0 0 0 0), (0 0 0 0 0 1).

Esto se puede ver así:

Cuando en la combinación lineal

$$(\#) \qquad x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 E1 + \ldots + x_9 E6 = 0$$

dejamos sólo los vectores A, B, C, E1, E2, E6 (que son los que corresponden a las columnas que contienen a los pivotes de la MERF), resulta que (#) sólo admite la solución trivial $x_1 = x_2 = \ldots = 0$.

Con lo cual el conjunto es linealmente independiente.

Veamos otro ejercicio similar (con cuentas más sencillas):

{(1, 2, 0, 0),(1, 0, 1, 0)} $\subseteq R^4$

Aquí también tenemos una base canónica para R^4:

Si planteo como antes:

$$x_1(1, 2, 0, 0) + x_2 (1, 0, 1, 0) + x_3 (1, 0, 0, 0) + x_4(0, 1, 0, 0) + x_5(0, 0, 1, 0) + x_5(0, 0, 0, 1) = (a, b, c, d)$$

Corresponde a un sistema:

1 1 1 0 0 0 a
2 0 0 1 0 0 b
0 1 0 0 1 0 c
0 0 0 0 0 1 d

Reducimos por filas F2-2F1, F2+2F3, F1-F3, (-½)F2, F1 - F2, F2 ↔ F3

1 0 0 ½ 0 0 a - c + ½ (-2a + b+2c)
0 **1** 0 0 1 0 c
0 0 **1** -½ -1 0 (-½) -2a + b+2c
0 0 0 0 0 **1** d

El conjunto de vectores que extiende a una base de R^4 es el que contiene a los vectores correspondientes a las columnas de los pivotes en la MERF, pero en la matriz original:

{(1, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)}

La razón es que si consideramos sólo estos vectores en la combinación lineal del principio, hubiéramos obtenido un sistema cuya matriz sería igual a la anterior, salvo que no estarían las columnas 4 y 5.

Entonces al reducir por filas se obtiene la MERF a la que llegamos pero sin las columnas 4 y 5 (marcadas en azul): esta es la matriz identidad 4x4. De donde resulta que el sistema tiene única solución y por lo tanto que el conjunto es efectivamente una base.

Ejercicio (7). Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios:

W = {(x, y, z, w, u) ∈ R^5 : y = x − z, w = x + z, u = 2x − 3z}.

En este caso W es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo:

x - y - z = 0
x + z - w = 0
2x - 3z - u = 0

Buscamos la solución de este sistema:

1 -1 -1 0 0
1 0 1 -1 0
2 0 -3 0 -1

Reducimos por filas: F2 - F1, F3-2F1, F1 + F2, F3 -2F2, F1 + F3, F2+F3, ⅓ F3, F2-F3

1 0 0 1 -1
0 1 0 ⅓ -⅔
0 0 1 ⅔ -⅓

$x = -w + u$
$y = -\frac{1}{3} w + \frac{2}{3} u$
$z = -\frac{2}{3} w + \frac{1}{3} u$

La solución del sistema es entonces el conjunto de vectores

$(-w + u, -\frac{1}{3} w + \frac{2}{3} u, -\frac{2}{3} w + \frac{1}{3} u, w, u)$: $w, u \in \mathbf{R}$.

$$w (-1, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0) + u (1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 1): \ w, u \in \mathbf{R}.$$

Notar que la única forma de escribir al vector 0 como $w (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + u (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)$ es tomando $w = u = 0$.

Por lo tanto, $\{(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0), (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)\}$ es base de W.

Entonces dim W = 2. (Porque mostramos una base que tiene 2 vectores).

<u>En el (7)(c)</u>: Cuando el subespacio está dado por un conjunto de generadores, una forma de encontrar una base sería dar una caracterización del subespacio por ecuaciones (es decir una descripción implícita) y luego hacer como en el caso anterior para buscar una base.

Podemos plantear una combinación lineal:

$x_1 (1, 0, -1, 1) + x_2 (1, 2, 1, 1) + x_3 (0, 1, 1, 0) + x_4 (0, -2, -2, 0) = (a, b, c, d)$

Lo cual conduce a un sistema lineal, cuya matriz asociada tiene por columnas a los vectores generadores:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 1 & -2 & b \\ -1 & 1 & 1 & -2 & c \\ 1 & 1 & 0 & 0 & d \end{array}$$

Para encontrar la descripción implícita de W tenemos que determinar los valores de (a, b, c, d) tales que el sistema tenga solución.

Directamente, podemos reducir por filas a la matriz asociada y quedarnos con los vectores que corresponden a las columnas EN LA MATRIZ ORIGINAL que contienen a los pivotes en la MERF.

Estos caminos nos pueden dar bases DISTINTAS.