Solución de los Ejercicios 1 y 2 del TP2

Escala de notas para ejercicio 1,2

Del ejercicio 1:

1. Si se calcula bien base y dimensión de W (10 pts)

   ♯ Se debe justificar apropiadamente el calculo de la base, caso contrario se restan entre 1 a 5 pts dependiendo casos

   ♯ Si el calculo fue mal hecho, puede ser descontado la totalidad del ejercicio.

2. Si se extiende correctamente a una base de R4 (10 pts)

   ♯ Ídem a los ítem anteriores.

   ♯ Claramente, si el cálculo de la base del ítem a está mal, entonces el error se arrastra a todo el ítem b. Por lo que se puede descontar posiblemente la totalidad del ejercicio.

Del ejercicio 2:

1. Si se caracteriza bien a V con ecuaciones (10 pts)

   ♯ Se debe justificar apropiadamente, caso contrario se restan entre 1 a 5 pts dependiendo casos. Si está todo errado, puede ser descontado la totalidad del ejercicio.

2. Si se da correctamente una base de V (10 otos)

   ♯ Ídem a lo anterior mencionado

   ♯ Si el cálculo de la base del ítem a está mal, entonces el error se arrastra a todo el ítem b.

Por ultimo, la prolijidad y el orden de las justificaciones serán valoradas positivamente.

1. Sea W el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rr} x - z + 2w = 0, & y + 2z - w = 0, \\ -x + 2y + 5z - 4w = 0, & 2x - y - 4z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

   a) Dar una base y la dimensión de W.

   b) Extender a una base de $\mathbb{R}^4$ la base que haya dado en el ítem anterior.

   Solución. Comencemos por resolver el ítem (a): reducimos la matriz que determinan las ecuaciones en la descripción de W; es decir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

De la matriz $\tilde{A}$ se deduce que, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W$, entonces

$$\begin{cases} y = w - 2z \\ x = z - 2w \end{cases}$$

Por lo tanto, si $X = (x, y, z, w) \in W$ entonces $(x, y, z, w) = z\,(1, -2, 1, 0) + w\,(-2, 1, 0, 1)$ de donde deducimos que $S = \{(1, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$ es un conjunto generador de W. Ademas, se prueba fácilmente por definición que S es un conjunto linealmente independiente, de donde resulta una base de W. Así $\dim W = 2$.

Observación. Ver ejercicio 7 del TP7 en el archivo de resolución de ejercicios.

Continuemos ahora por resolver el ítem (b). Queremos extender el conjunto S a una base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^4$. Existen varias formas de hacer esto, una de ellas es agregar dos vectores filas a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que su escalonamiento $\tilde{B}$ sea una matriz triangular superior sin filas nulas. Equivalentemente, que el el determinante de $\tilde{B}$ sea no nulo. O bien la siguiente forma, realizada en el ejercicio 6 del TP7 (archivo de soluciones):

- $\sharp$ Probar que $(1, 0, 0, 0) \notin W = \langle S \rangle$. En efecto, si este fuera el caso, entonces $(z - 2w, -2z + w, z, w) = (1, 0, 0, 0)$, de donde resulta que $z = w = 0$ pero $z - 2w \neq 0$ lo que es absurdo
- $\sharp$ Definimos un nuevo conjunto $\mathfrak{A} = \{(1, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$ e interpretar cual es el subespacio generado.
- $\sharp$ Mostrar que $(0, 1, 0, 0) \notin \langle \mathfrak{A} \rangle$. Con lo cual $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cup \{(0, 1, 0, 0)\}$ es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto una base de $\mathbb{R}^4$

Observación. Puede notar que $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo.

2. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el siguiente conjunto

$$S = \left\{ (1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, -1), (-1, 2, 5, -4), (2, -1, -4, 5) \right\}$$

   a) Caracterizar con ecuaciones a V.

   b) Dar una base de V formada por vectores de S y determinar la dimensión de V.

Solución. Por definición, el subespacio vectorial V generado por los vectores de S es el conjunto de vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que, existen escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ que satisfacen

$$\alpha_1(1, 0, -1, 2) + \alpha_2(0, 1, 2, -1) + \alpha_3(-1, 2, 5, -4) + \alpha_4(2, -1, -4, 5) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

Esto permite dar origen al sistema matricial $A \cdot \alpha = b$. Reduciendo la matriz ampliada que representa el sistema anterior obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \vdots & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & b_2 \\ -1 & 2 & 5 & -4 & \vdots & b_3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & \vdots & b_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \vdots & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_3 + b_1 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4 - 2b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos que $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in V$ si, y solo si, se satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$\begin{cases} b_3 + b_1 - 2b_2 = 0 \\ b_4 - 2b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

Es decir, $V = \left\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3 + b_1 - 2b_2 = 0,\, b_4 - 2b_1 + b_2 = 0\right\}$. Usando la matriz escalonada anterior y teoremas vistos en las clases teóricas, una base de V formada por elementos de S esta dada por $\mathfrak{B} = \left\{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, -1)\right\}$, de donde $\dim V = 2$.