Determinante 1

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

En este archivo

- Definiremos el determinante de un matriz,
- Explicaremos como calcularlo y
- Daremos algunas propiedades del mismo.

Este archivo se basa en Sección 1.6 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Introducción

El determinante es una función que le asigna a cada matriz cuadrada un escalar.

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto \det(A)$$

Introducción

El determinante se define de forma recursiva.

Es decir, el determinante de una matriz $n \times n$ se calcula en base de los determinantes de submatrices $n-1 \times n-1$.

Así que primero introduciremos estas submatrices.

Definición 1.6.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sean i, j tales que $1 \leq i, j \leq n$. Entonces

$$\color{red}{A(i|j)} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$$

es la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.6.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sean i, j tales que $1 \leq i, j \leq n$. Entonces

$$A(i|j) \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$$

es la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, entonces $A(1|2) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A(i|j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.6.2

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces el determinante de A, denotado $\det(A)$ ó $|A|$, se define como

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$
2. Si $n > 1$, $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\, a_{i1}\ \det A(i|1)$

$$= a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

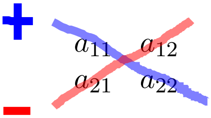
Este es el cálculo del determinante por desarrollo por la primera columna porque estamos usando los coeficientes de la primera columna a_{11}, a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}

Para $n = 2$ y $n = 3$, podemos escribir fórmulas más concretas.

Determinante 2×2

Observación 1.6.1

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$



Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

Observación 1.6.1

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$\begin{array}{ccc} + & & \\ & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} \\ - & & \end{array}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Observación 1.6.1

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Demostración: siguiendo la definición tenemos que

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Observación 1.6.1

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Se puede visualizar esta fórmula así

$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad -$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

+

−

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

+

−

Observación 1.6.1

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$

Demotración: siguiendo la definición tenemos que

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}\ \det A(1|1) - a_{21}\ \det A(2|1) + a_{31}\ \det A(3|1) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\
&\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})
\end{aligned}$$

Calculemos el determinante de una matriz 4×4

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}
= 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}
- 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}
+ 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}
- 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
= 13 - \overset{1}{\cancel{3}} + 0 - 8 \boxed{= 4}
$$

$$
= \cancel{2}
$$

es más fácil calcular el determinante si la primera columna tiene muchos ceros

Como podemos apreciar, si procedemos de igual manera para $n = 5$ nos perderíamos y/o cansaríamos de hacer cuenta.

Para n más grande no nos alcanzaría la cuarentena.

Debemos buscar una forma más fácil de calcular el determinante. Es lo que haremos en la siguiente sección, usando operaciones elementales por fila.

Observación

Las fórmulas para $n = 2$ y $n = 3$ es un caso particular de la fórmula

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

válida para todo n, la cual tiene $n!$ terminos.

($\mathbb{S}_n$ es el conjunto de permutación de $\{1, ..., n\}$ y
$\operatorname{sgn} : \mathbb{S}_n \to \{1, -1\}$ es una función)

Observación

Del modo que lo presentamos, el determinante no es más que una fórmula que le aplicamos a una matriz. Pero aquí sólo estamos viendo el producto final de años y años de estudio.
De hecho, el determinante existió antes que las matrices y se lo utilizaba para "determinar" cuando un sistema de ecuación tiene solución única (si y sólo si el determinante es no nulo). También tiene otras aplicaciones.
Pueden googlear "determinate" (o "determinant" en inglés) para saber más o leer la página de Wikipedia.
Un dato de color es que Charles Lutwidge Dodgson, más conocido como Lewis Carroll y por ser el autor de "Alicia en el país de las maravillas", era matemático y escribió "An Elementary Theory of Determinants" en 1867.

Viendo la fórmula del determinate

$$\det(A) = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

notamos que mientras más ceros tenga la primera columna (o sea, más a_{i1}'s iguales a 0), menos cuentas deberemos hacer.

Por ejemplo, si A es triangular superior o una MERF.

Casos particulares

Proposición 1.6.1

El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de la diagonal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(esto aplica también a las matrices diagonal)

Casos particulares

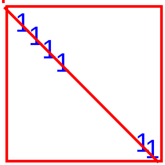
Corolario 1.6.2

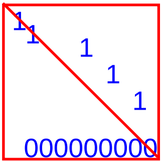
$$\det(\mathrm{Id}_n) = 1$$

Corolario 1.6.3

Si $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una MERF, entonces

$$\det(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \text{ no tiene filas nulas} \\ 0 & \text{si } R \text{ tiene filas nulas} \end{cases}$$





Volvamos a la fórmula del determinate

$$\det(A) = a_{11}\det A(1|1) - a_{21}\det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

y a la observación de que con más ceros en la primera columna menos cuentas deberemos hacer.

Con las operaciones elementales por filas podemos anular las entradas no nulas como lo haciamos para transformar una matriz en MERF.

Entonces deberíamos analizar como estas operaciones afectan en el cálculo del determinate. Esto es el Teorema 1.6.4

Teorema 1.6.4 (1)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ no nulo.
Si B es la matriz que se obtiene de A multiplicando la fila i por c, entonces $\det(B) = c\det(A)$

Ejemplo (verificar cuentas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{10F_1}{\rightarrow} B = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -20 = 10\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.6.4 (2)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$.
Si B es la matriz que se obtiene de A sumando a la fila r la fila s multiplicada por t, entonces $\det(B) = \det(A)$

Ejemplo (verificar cuentas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_2+10F_1}{\rightarrow} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{pmatrix} = -2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.6.4 (3)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando las filas r y s, entonces $\det(B) = -\det(A)$

Ejemplo (verificar cuentas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+10F_1} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{pmatrix} = -2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Intercambiar
fila 1 y 2
y calcular determinante

Observación

En todos los casos $\det(B) = k\det(A)$ para algún $k \in \mathbb{R}$ no nulo

A partir de lo anterior podemos plantear una estrategia general para calcular el determinante

Estrategia para calcular el determinante de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Usamos operaciones elementales por filas para transformar la matriz A en un matriz triangular superior C.
2. Por el Teorema 1.6.4, existen escalares no nulos tales que

$$\det(C) = k_\ell \cdots k_1 \det(A)$$

3. El determinante de C es el producto de la diagonal (Proposición 1.6.1)
4. Entonces podemos despejar

$$\det(A) = \frac{1}{k_\ell \cdots k_1} \det(C)$$

(espero que con el ejemplo que sigue quede clara la estartegia)

Problema

Calcular el determiante de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Respuesta

$$\det A = 35$$

Tarea

Verificar que la respuesta es correcta usando la fórmula del determinante de una 3×3

Apliquemos en este ejemplo la estrategia propuesta en la página anterior para ver como funciona.

Primero, le aplicamos operaciones elementales a A hasta obtener una matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = C$$

Entonces

$$C = e_4(e_3(e_2(e_1(A))))$$

donde e_1, e_2, e_3 y e_4 denotan las operaciones elementales aplicadas en cada paso

Ahora calculamos el determinante de C y utilizamos el Teorema 1.6.4 para "ir sacando los e_i de dentro de $\det$"

$$5 \overset{\text{Prop 1.6.1}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \det\left(e_4(e_3(e_2(e_1(A))))\right)$$

$$\overset{\text{Teo 1.6.4 (2)}}{=} \det\left(e_3(e_2(e_1(A)))\right) \overset{\text{Teo 1.6.4 (1)}}{=} -\frac{1}{7}\det\left(e_2(e_1(A))\right)$$

$$\overset{\text{Teo 1.6.4 (2)}}{=} -\frac{1}{7}\det\left(e_1(A)\right) \overset{\text{Teo 1.6.4 (3)}}{=} -\frac{1}{7}\cdot(-1)\cdot\det(A)$$

De esta igualdad podemos despejar $\det(A)$

$$\det A = 7 \cdot 5 = 35$$

Teorema 1.6.7

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

Teorema 1.6.10: El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.