Práctico 9

Ejercicios resueltos.

(1) *a)* Decidir si las matrices del ejercicio 1 del Práctico 5 son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$. En caso de serlo dar una matriz invertible P real tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

b) Decidir si las matrices del ejercicio 1 del Práctico 5 son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. En caso de serlo dar una matriz invertible P compleja tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Solución:

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, hemos visto que se le puede asociar una transformación lineal $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tal que $[T_A]_{\mathcal{C}} = A$. Se definió en el teórico que una matriz A es diagonalizable si y sólo si T_A lo es. Además, los autovalores y autovectores de T_A serán los autovalores y autovectores de A, por lo que en este ejercicio podremos usar todo lo calculado en el Ejercicio 1 del Práctico 5. Por otro lado, si A es diagonalizable y $\mathcal{B}$ es una base de autovectores, entonces $[T_A]_{\mathcal{B}}$ es diagonal, y se tiene $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}A[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = [T_A]_{\mathcal{B}}$, por lo que la P del enunciado será $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}$, que es simplemente poner los autovectores de la base en columna.

(a) Sean A, B, C, D, E las matrices del Ejercicio 1 Práctico 5.

• Como se vio en el práctico 5, A tiene dos autovalores: 1 y -2. Como tiene 2 autovalores distintos y $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, por Corolario 4.7.4, A es diagonalizable.

Ahora bien, se vio en Pr 5 que el autoespacio asociado a 1 tiene base $\{(3, 1)\}$, y el autoespacio asociado a -2 tiene base $\{(0, 1)\}$. Por lo tanto, la base que diagonaliza es $\mathcal{B} = \{(3, 1), (0, 1)\}$, es decir

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}..$$

Así, $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

• Como se vio en el práctico 5, B tiene dos autovalores: 1 con autoespacio con base $\{(0, 1, 0)\}$, y 2 con autoespacio con base $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Como $\dim V_1 + \dim V_2 = 3$, $T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es diagonalizable y la base que diagonaliza es

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Es decir,

$$[T_B]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz P es $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

• En este caso $T_C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ no es diagonalizable pues hay un solo autovalor y la dimensión del autoespacio es 1 pues la base es $\{e_3\}$.

• En este caso $T_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no tiene autovalores reales, y por lo tanto no hay autoespacios y no es diagonalizable.

• En este caso la matriz era

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, 0 \le \theta < 2\pi,$$

y se dividía en 3 casos:

Caso 1. Si $\theta = 0$, entonces la matriz es Id, por lo tanto hay un único autovalor (el 1) y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^3$, en consecuencia cualquier base es base del autoespacio (por ejemplo, la canónica). Obviamente es diagonalizable, pues ya es diagonal y $P = \mathrm{Id}$.

Caso 2. Si $\theta = \pi$. En este caso la matriz también es diagonal, con dos autovalores 1 y -1, el primero con base $\{e_1\}$ y el segundo con base $\{e_2, e_3\}$. De nuevo, $P = \mathrm{Id}$.

Caso 3. Si $\theta \neq 0, \pi$. En este caso hay un solo autovalor 1 y su autoespacio es de dimensión 1, con base $\{e_1\}$. Por lo tanto $T_{F_\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ no es diagonalizable.

(b) Los únicos casos que hay que estudiar son D y E, caso $\theta \neq 0, \pi$, pues son las únicas situaciones donde el polinomio característico tiene algunas raíces complejas, no reales. En todos los demás casos, los autovalores son reales y por lo tanto son los mismos que en el caso complejo. También, las bases de los autoespacios y la matriz P son los mismos. Claramente, si una matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, lo es sobre $\mathbb{C}$ (pues una base de autovectores reales es también una base de autovectores complejos).

• Como se vio en Ejercicio 1 del Práctico 5, $T_D : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tiene autovalores $1+i, 1-i$ (por Corolario 4.7.4, es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$), con $V_{1+i} = \langle(2+i, 1)\rangle_{\mathbb{C}}$ y $V_{1-i} = \langle(2-i, 1)\rangle_{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, la base $\mathcal{B} = \{(2+i, 1), (2-i, 1)\}$ diagonaliza T_D, es decir

$$[T_D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Matriz E, caso $\theta \neq 0, \pi$. En el práctico 5, calculamos que en este caso los autovalores son $1, \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ (lo cual indica que E_θ es diagonalizable, ya que si $\theta \neq 0, \pi$, estos son distintos), con

$$V_1 = \langle(1,0,0)\rangle_{\mathbb{C}}, \qquad V_{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \langle(0,-i,1)\rangle_{\mathbb{C}}, \qquad V_{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} = \langle(0,i,1)\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Luego, $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,-i,1), (0,i,1)\}$ es una base que diagonaliza T_{E_θ}. Es decir

$$[T_{E_\theta}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Además,

$$P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir si la transformación considerada es o no diagonalizable. En caso afirmativo, Hallar una base $\mathcal{B}$ del espacio vectorial tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

Solución:

(a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Por el teórico sabemos que los autovalores y autovectores de T serán los de $[T]_{\mathcal{C}}$. Llamemos a esta matriz A.

$\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & -6 \\ -1 & x & 11 \\ 0 & -1 & x-6 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (por Ejercicio 7 Práctico 5). Tenemos un polinomio cúbico. Una estrategia es probar con los valores -3,-2,-1,0,1,2,3 (casi seguro que alguno de estos va a andar). De hecho, evaluando en 1 encontramos que $\chi_A(1) = 0$. Luego $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. Ahora, por Bhaskara, las raíces de $(x^2 - 5x + 6)$ son $\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, es decir 2 y 3. Por lo tanto $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ y los autovalores de T (o A) son 1,2 y 3. Como tiene 3 autovalores distintos y $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ya podemos decir que T es diagonalizable.

Para hallar la base de autovectores, tenemos que calcular los autoespacios:

Cálculo de V_1: Debemos resolver el homogéneo $(\mathrm{Id} - A)X = 0$, para lo cual reducimos $\mathrm{Id} - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Las soluciones del sistema son $x - 6z = 0$ y $y + 5z = 0$, por lo que una base de V_1 es $\{(6, -5, 1)\}$.

Cálculo de V_2: Debemos resolver el homogéneo $(2\,\mathrm{Id} - A)X = 0$, para lo cual reducimos $2\,\mathrm{Id} - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+4F_2]{F_1+2F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_3]{\substack{F_2+2F_3 \\ -F_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Las soluciones del sistema son $x = 3z$ e $y = -4z$, por lo que una base de V_2 es $\{(3, -4, 1)\}$.

Cálculo de V_3: Debemos resolver el homogéneo $(3\,\mathrm{Id} - A)X = 0$, para lo cual reducimos $3\,\mathrm{Id} - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_3]{\substack{F_1+3F_2 \\ F_1+9F_3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_2]{F_2-3F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Las soluciones del sistema son $x = 2z$ e $y = -3z$, por lo que una base de V_3 es $\{(2, -3, 1)\}$.

Así, $\mathcal{B} = \{(6, -5, 1), (3, -4, 1), (2, -3, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal ya que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Sea $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (recordemos que estas matrices eran denotadas $E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}$ respectivamente). Calculemos $[T]_{\mathcal{C}}$:

$$T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E^{11}. \text{Por lo tanto } [T(E^{11})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 2E^{12} - E^{21}. \text{Por lo tanto } [T(E^{12})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T(E^{21}) = 2E^{21} - E^{12}.\text{Por lo tanto } [T(E^{21})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T(E^{22}) = 2E^{22} - E^{22}.\text{Por lo tanto } [T(E^{22})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llamemos a esta matriz A, sabemos que los autovalores y autovectores de T (en coordenadas de la base $\mathcal{C}$) serán los de A.

Desarrollando por la primera fila y luego por la última se tiene

$$\chi_A(x) = (x-1)^2 \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)^2 - 1 = (x-1)^2(x-3)(x-1) = (x-1)^3(x-1).$$

Luego los autovalores de A (equivalentemente los de T) son 1 y 3.

Para calcular los autovectores, primero los calcularemos en coordenadas (calculando los autovectores de A) y luego los escribiremos en términos de matrices.

Cálculo de V_1: debemos resolver el sistema homogéneo $(\mathrm{Id} - A)X = 0$, para lo cual reducimos $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Las soluciones son (x, y, z, w) tal que $y = z$, por lo que una base de V_1 es $\{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$, la cual escrita en términos de matrices es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Cálculo de V_3: debemos resolver el homogéneo $(3\,\mathrm{Id} - A)X = 0$, para lo cual reducimos $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{\substack{\frac{1}{2}F_1 \\ \frac{1}{2}F_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Las soluciones del sistema son $x = w = y + z = 0$ por lo que una base de V_3 es $\{(0,-1,1,0)\}$, que en términos de matrices es $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Como $\dim V_1 + \dim V_3 = 4 = \dim \mathbb{R}^{2\times 2}$, la transformación T es diagonalizable y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de autovectores tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal, ya que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(3) Sea V un $\mathbb{K}$−espacio vectorial, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $v \in V$ es un autovector de autovalor λ. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \mathrm{Nu}(T)$.

b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \mathrm{Im}(T)$.
c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \mathrm{Id}$ es un isomorfismo.

Solución:

a) $T(v) = \lambda v = 0v = 0$. luego $v \in \mathrm{Nu}(T)$.

b) Como $\lambda \neq 0$, $v = \frac{1}{\lambda}\lambda v = \frac{1}{\lambda}T(v) = T(\frac{1}{\lambda}v)$. Por lo tanto, $v \in \mathrm{Im}(T)$.

c) $(T - \mathrm{Id})(T + \mathrm{Id}) = T^2 - \mathrm{Id} = -\mathrm{Id}$. Por lo tanto, $(T - \mathrm{Id})(-T - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ y en consecuencia $-T - \mathrm{Id}$ es la inversa de $T - \mathrm{Id}$. Ahora bien, un operador lineal tiene inversa si y solo si es un isomorfismo. Otra manera es usar el resultado análogo para matrices (Práctico 3 Ejercicio 9) y usar que $T - \mathrm{Id}$ es isomorfismo si y sólo si $[T]_{\mathcal{B}} - \mathrm{I}_n$ es invertible ($\mathcal{B}$ una base cualquiera de V).

(4) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^n(v) = 0$ pero $T^{n-1}(v) \neq 0$.
a) Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ es una base de V.
b) Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.
c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.

Solución:

(a) Vamos a probar que $\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ es LI. Sea

$$0 = c_0 v + c_1 T(v) + c_2 T^2(v) + \cdots + c_{n-1} T^{n-1}(v),$$

entonces, aplicando T $n-1$ veces a la ecuación anterior, obtenemos

$$0 = c_0 T^{n-1}(v).$$

Notemos que todos los demás términos se hicieron 0 pues $T^n(v) = 0$ y por lo tanto $T^k(v) = 0$ para $k \geq n$.
Luego, como $T^{n-1}(v) \neq 0$ por hipótesis, debe ser c_0. Nos queda entonces

$$0 = c_1 T(v) + c_2 T^2(v) + \cdots + c_{n-1} v T^{n-1} v.$$

Aplicando T $n-2$ veces obtenemos $0 = c_1 T^{n-1}(v)$, de donde debe ser $c_1 = 0$ (pues $T^{n-1}(v) \neq 0$).
Continuando así, llegaremos a $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$, por lo que $\{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ es LI. Como son n vectores LI en un esp. vect de dim n, resultan una base.

(b) Notemos que $T(v) = T(v)$, $T(T(v)) = T^2(v)$, y así siguiendo, $T(T^{n-2}(v)) = T^{n-1}(v)$ y finalmente $T(T^{n-1}(v)) = T^n(v) = 0$. Luego

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Calculemos el polinomio característico de T:

$$\chi_T(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - [T]_{\mathcal{B}}) = \det \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{bmatrix} = x^n.$$

La única raíz de χ_T es 0 y por lo tanto el único autovalor es 0. Es evidente, por la pinta de $[T]_{\mathcal{B}}$ (ya es MERF), que el autoespacio V_0 tiene base $\{e_n\}$, por lo que tiene dimensión 1 y así T no es diagonalizable (salvo que n sea 1, donde T es trivialmente diagonalizable)

(5) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1,2,3),(2,1,-1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3,1,1),(1,1,3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.
b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1,2,3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3,1,1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.
c) Si A es una matriz diagonalizable y nilpotente, entonces $A = 0$.
d) Si A posee autovalores repetidos, entonces A no es diagonalizable.

Solución:

(a)**Falso.** Es claro que $\{(1,2,3),(2,1,-1)\}$ es una base del autoespacio V_0 y $\{(3,1,1),(1,1,3)\}$ es una base del autoespacio V_5. Supongamos que exista tal T. Por Teorema 4.2.8,

$$\dim(V_0 + V_5) = \dim V_0 + \dim V_5 - \dim(V_0 \cap V_5). \qquad (*)$$

Ahora bien, $V_0 + V_5 \subset \mathbb{R}^3$, por lo tanto $3 \geq \dim(V_0 + V_5)$. Por otro lado, $V_0 \cap V_5 = 0$, pues no puede haber un vector no nulo con dos autovalores diferentes. Todo esto implica que, por la ecuación (*),

$$3 \geq \dim(V_0 + V_5) = \dim V_0 + \dim V_5 - 0 = 4.$$

Lo cual es absurdo! y el absurdo vino de suponer que existe una $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con autoespacios V_0, V_5, cada uno con dimensión 2.

(b) **Verdadero.** Como $(1,2,3)$ y $(3,1,1)$ son LI, podemos extender $\{(1,2,3),(3,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\{(1,2,3),(3,1,1),(0,0,1)\}$. Después definimos

$$T(1,2,3) = (0,0,0), \qquad T(3,1,1) = 5(3,1,1), \qquad T(0,0,1) = (0,0,1).$$

Como los vectores de partida son una base, por Teorema 4.3.8 sabemos que existe una T lineal que cumple estas 3 condiciones. Notemos que $(1,2,3) \in V_0$, $(3,1,1) \in V_5$ y $(0,0,1) \in V_1$. Como $\dim V_0 + \dim V_1 + \dim V_5 = 3$, entonces $\dim V_0 = \dim V_1 = \dim V_5 = 1$ (nunca un autoespacio puede tener dimensión 0) luego $V_0 = \langle\{(1,2,3)\}\rangle$ y $V_5 = \langle(3,1,1)\rangle$.

(c) Verdadero. Aquí usaremos una definición equivalente de que una matriz A sea diagonalizable a la vista en el teórico. Se dice que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal (se puede ver en el PDF de la Última Clase Práctica de la Mañana que es equivalente a la definición dada en el teórico).

Supongamos que A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Ahora, si A es diagonalizable, entonces existe P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, llamemosla D. Entonces, por Ejercicio (6b) resulta que $D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}\cdot 0 \cdot P = 0$. Como la matriz D es diagonal, $D^k = 0$ implica $D = 0$, de donde $A = 0$.

(d) Falso (Recontrafalso!). Sea $A = \mathrm{I}_n$ (la matriz identidad de tamaño n), es trivialmente diagonalizable pues ya es diagonal (o si se quiere, $P = \mathrm{Id}$ cumple que $P^{-1}AP = \mathrm{I}_n$ que es diagonal). Sin embargo, el único autovalor es el 1 y se repite n veces.

(6) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Hallar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

b) Probar que dadas $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible se cumple que $(QBQ^{-1})^k = QB^kQ^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizar esto para calcular A^n.

c) Probar por inducción que $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_1 = 1, F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$).

d) Hallar la fórmula general para el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci, F_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

(a) Hallemos una base de autovectores de A.

$\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - x - 1$.

Por Bhaskara, las soluciones son $x_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Cálculo de $V_{x_\pm}$: debemos resolver el sistema homogéneo $(x_\pm \mathrm{Id} - A)X = 0$, para lo cual reducimos $\begin{bmatrix} x_\pm - 1 & -1 \\ -1 & x_\pm \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -x_\pm \end{bmatrix}$. Por lo tanto una base de $V_{x_\pm}$ es $\{(x_\pm, 1)\} = \{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, 1\}$.

Por lo tanto $P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ cumple $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$.

(b) Probemos que $(QBQ^{-1})^k = QB^kQ^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por inducción. Para $k = 1$ se cumple trivialmente. Ahora, asumamos que se cumple para k, entonces $(QBQ^{-1})^{k+1} = (QBQ^{-1})^k(QBQ^{-1}) = QB^kQ^{-1}QBQ^{-1} = QB^kBQ^{-1} = QB^{k+1}Q^{-1}$ como queríamos probar. Por inducción, queda probada la igualdad.

Volviendo al ejercicio, si $P^{-1}AP = D$ entonces $A = PDP^{-1}$, de donde $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$.

Calculemos primero P^{-1}, para eso primero calculamos $\det P = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$. Entonces, $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$.

Ahora,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} \end{bmatrix}$$

(c) Usamos inducción. Si $n = 1$, entonces $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{1-1}\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix}$ por lo que el enunciado es válido. Asumiendo la hipótesis inductiva, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n}\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$ por lo que es válido el paso inductivo, lo cual prueba así la inducción.

(d) Juntando (b) y (c) obtenemos que

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí, resulta

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

Por lo tanto, la fórmula para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (comparese con la fórmula que les dieron en Algebra I/Matemática Discreta I) es

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$