ALGEBRA II - 2020 **23/04/2020**

Práctico 4. Ej. 4) c): A matriz nxn. Entonces det(-A) = (-1)^n det(A).

-A es la matriz nxn cuyo coeficiente ij es (-A)_{ij} = -A_{ij}, para todo i,j.

Es decir:

$$-A = \begin{matrix} -A_{11} & -A_{12} & \ldots \\ -A_{21} & -A_{22} & \ldots \\ \ldots & & \\ -A_{n1} & -A_{n2} & \ldots \end{matrix}$$

(*) Sabemos que si la matriz B se obtiene de A multiplicando una fila/columna por un escalar c, entonces det(B) = c det(A).

La matriz -A se puede obtener de A multiplicando cada una de sus n filas por el escalar c = -1.

Aplicando reiteradamente (n veces) la propiedad (*), obtenemos que

det(-A) = (-1)...(-1) det(A) = (-1)^n det(A):

-1 aparece n veces porque lo hacemos para cada fila.

Ejercicio 2) b): Determinar todos los valores de c en **R** tales que las siguientes matrices sean inversibles:

$$B = \begin{matrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{matrix}$$

Propiedad: una matriz nxn B es *inversible* si y sólo si det(B) ≠ 0.

En este caso, calculamos el determinante de la matriz B:

$$\det B = \det \begin{matrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{matrix} = \qquad \text{F3 -F2: el determinante no cambia}$$

$$= \det \begin{matrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \text{F1 - 4F3, F2 - cF3: no cambia el determinante}$$

$$= \det \begin{matrix} 0 & c & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \text{Calculo haciendo el desarrollo por la fila 2:}$$

$$= (-1)^{2+1}\, 0 \det \begin{matrix} c & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + (-1)^{2+2}\, 2 \det \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} + (-1)^{2+3}\, 0 \det \begin{matrix} 0 & c \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$= 2 \,.\, \det \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2\,(0.1 - 1.\,(-1)) = 2.$$

Como $2 \neq 0$ (independientemente del valor de c), entonces B es inversible para todo $c \in \mathbf{R}$.

2) Veamos otro caso:

$$A = \begin{matrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{matrix}$$

$\det(A) =$ F3 + cF2

$$\det \begin{matrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & c & 0 \end{matrix} \qquad \text{Calculo el determinante desarrollando por la columna 1:}$$

$$= (-1)^{2+1}\,(-1) \det \begin{matrix} c & -c \\ c & 0 \end{matrix} = (-1)(-1)\,(c.0 - c(-c)) = c^2$$

Luego la matriz A es inversible si y sólo si $\det(A) = c^2 \neq 0$, esto es, si y sólo si $c \neq 0$.

Ejercicio 6. Sabemos que el determinante de la matriz

$$A = \begin{matrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{matrix}$$

es -1.

Nos piden calcular el determinante de la matriz

$$B = \begin{matrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{matrix}$$

Al determinante de B lo calculamos usando operaciones elementales por filas/columnas como sigue:

$$\det B = \begin{matrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{matrix}$$ Por las propiedades del determinante

$$= (-2)\, 3 \det \begin{matrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{matrix}$$ Haciendo F2 - F3 (no cambia el det):

$$= (-2)\, 3 \det \begin{matrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{matrix}$$

$$= (-2)\, 3\, 2 \det \begin{matrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{matrix} = (-2).3.2 \det(A) = (-2).3.2.(-1) = 12.$$

El determinante que se pide vale 12.

Ejercicio 8.

$$A = \begin{matrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$\det(A) =$ $F2 + 3F1$, $F3 + 2F1$:

$$= \det \begin{matrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 7 & 3 \end{matrix} \qquad \text{desarrollo por la columna 1}$$

$$= (-2) \det \begin{matrix} 9 & 9 \\ 7 & 3 \end{matrix} = (-2)\,(9.3 - 7.9) = (-2)\,(27 - 63) = (-2)\,.\,36 = -72 \neq 0.$$

Por lo tanto A es inversible.

$A^{-1} = (\det A)^{-1} C^t$

donde C es la matriz de cofactores: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$.

$$C_{11} = \det \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} = -3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{matrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{matrix} = (-1)\,(-6 - 7) = (-1)(-13) = 13$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{matrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{matrix} = 6$$

$$C_{21} = (-1) \det \begin{matrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{matrix} = 6$$

Calculando los que faltan, obtenemos una matriz C 3x3 (la matriz de cofactores), luego tomamos la traspuesta y la multiplicamos por -1/72: así obtenemos la matriz inversa.

Otro ejemplo:

Sea D la matriz (no es la que está en el práctico):

$$\begin{matrix} \cos(t) & 0 & -\operatorname{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{matrix}$$

$$\det(D) = \det \begin{matrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{matrix} = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1 \neq 0$$

Luego D es inversible.

$$D^{-1} = (\det D)^{-1} C^t = C^t$$

$$C = \begin{matrix} \cos(t) & 0 & -\operatorname{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{matrix}$$

$$D^{-1} = \begin{matrix} \cos(t) & 0 & \operatorname{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{matrix}$$

Ejercicio 9. Consideremos el sistema lineal:

$$3x - 2y = 7$$
$$3y - 2z = 6$$
$$3z - 2x = -1$$

La matriz de coeficientes asociada es

$$A = \begin{matrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{matrix}$$

det A: F3 + F1 (no cambia el det)

$$= \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad F1 - 3F3$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & -9 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{desarrollando por primera columna:}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -8 + 27 = 19 \neq 0, \text{ entonces A es inversible}$$

El sistema tiene entonces una única solución.

La regla de Cramer dice que la solución (única) (x, y, z) de este sistema se obtiene mediante la fórmula

$x = \det(A_1)/ \det(A)$, $y = \det(A_2)/\det(A)$, $z = \det(A_3)/\det(A)$

donde A_1 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la columna 1 por la columna de los términos de la derecha del sistema:

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De manera similar, A_2 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la columna 2 por la columna B y A_3 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la columna 3 por la columna B.

Calculo det(A_1): F1 + 7F3, F2+6F3 (el determinante no cambia)

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 21 \\ 0 & 3 & 16 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$ desarrollo por la primera columna:

$$= (-1) \det \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} = (-1)((-2).16 - 3.\ 21) = 63 + 32 = 95$$

Luego x = 95/19.

De manera similar se determinan y, z.