Clase final

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

1. Resumen de la materia

2. Pautas generales para los exámenes finales

3. Contenidos mínimos no alcanzados

Los contenidos de esta materia tienen como eje la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, sistemas que aparecen naturalmente en las ciencias exactas y naturales.

Problema ($\star$)

Calcular el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

Nuestro primer objetivo fue identificar y plantear sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos utilizando el Método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Método de Gauss

$$(A|Y) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} (B|Z)$$

con B una MERF

La sistematización del Método de Gauss conduce al empleo del lenguaje matricial que permite manipular de forma ágil los sistemas de ecuaciones utilizando las operaciones del Álgebra de matrices.

Álgebra de matrices

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times p} \Rightarrow A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B]_{kj}.$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Usando la matriz asociada también podemos dar criterios sobre la existencia o no, la unicidad o multiplicidad de soluciones del sistema.

$$
\left\{
\begin{array}{ccccc}
x_{k_1} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j & = & z_1 \\
x_{k_2} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j & = & z_2 \\
\vdots & & & \vdots & \\
x_{k_r} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j & = & z_r \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & \color{red}{0} & \color{red}{=} & \color{red}{z_i \neq 0} \\
 & & \vdots & & \vdots
\end{array}
\right.
$$

Las nociones de Determinante y Matriz inversa también nos dan información sobre las soluciones del sistema.

Determinante

$$\det(A)$$

Inversa

$$A^{-1}$$

Autovalores y autovectores

$$Av = \lambda v$$

Por otro lado, al usar las operaciones de matrices se puede ver fácilmente que el conjunto de soluciones de un sistema (y el conjunto para el cual un sistema tiene solución) es cerrado por la suma y multiplicación por escalares.

$$Av = 0 \text{ y } Aw = 0 \Longrightarrow A(v + \lambda w) = 0$$

Estas propiedades motivan preguntas sobre la generación lineal de soluciones y la cantidad mínima de generadores; surgen entonces la noción de Espacio Vectorial como la estructura matemática adecuada para estudiar estas preguntas.

Espacio Vectorial

$$v \in V \text{ y } w \in V \Longrightarrow v + w \in V$$

$$v \in V \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot v \in V$$

Las Transformaciones Lineales entre Espacios Vectoriales junto a las nociones de Coordenadas y Cambios de Bases permiten formalizar ideas usadas instintivamente al principio de la materia, por ejemplo, la utilización de vectores en vez de polinomios para resolver ecuaciones referidas a estos últimos.

Transformación Lineal

$$T : V \longrightarrow W$$
$$T(v + \lambda w) = T(v) + \lambda T(w)$$

En este recorrido vislumbramos tres etapas en las que avanzamos en generalización y abstracción de ideas y propiedades, permitiendo así reconstruir el recorrido del quehacer matemático.

1. Sistema de Ecuaciones
2. Álgebra de Matrices
3. Espacios Vectoriales

Asimismo, reafirmamos en cada una de estas etapas el valor de la demostración rigurosa en la matemática como ciencia.

Todo lo que vimos esta en el libro de Garcia-Tiraboschi.

Y hemos abarcado todo el contenido del libro.

Algunos resultados que podemos destacar son:

- Los criterios para decidir sobre la existencia o no de soluciones, si es única o no.
- Las distintas equivalencias para saber si una matriz es inversible o no.
- Los teoremas referidos a la dimensión de la suma de subespacios; de los espacios filas y columnas; y del núcleo e imagen de una transformación lineal.

1. Resumen de la materia
2. Pautas generales para los exámenes finales
3. Contenidos mínimos no alcanzados

Los exámenes finales constarán de:

- **Ejercicios prácticos**: similares a los de los Trabajos Prácticos y las guías de ejercicios.

- **Ejercicios teóricos**: se pedirán definiciones y enunciados, con y sin demostración.
  Deberán saber todas las definiciones y enunciados que se dieron en las clases teóricas, los cuales también figuran en las "Notas de Álgebra II" de Garcia-Tirbasochi.
  Las demostraciones de enunciados que son factibles de ser pedidas en el examen son las que están en las filminas de las clases teóricas.

Cuando haya más precisión sobre los exámenes seremos más específicos.

1 Resumen de la materia

2 Pautas generales para los exámenes finales

3 Contenidos mínimos no alcanzados

Otros cuerpos

Todo lo que hemos hecho es sobre los números reales $\mathbb{R}$.

Es decir, los escalares que aparecen en los Sistemas de Ecuaciones, en las Matrices y en los Espacios Vectoriales son números reales.

Sin embargo todos los resultados valen para los números complejos $\mathbb{C}$ y más generalmente, para cualquier cuerpo $\mathbb{k}$.

De hecho, en el libro de Garcia-Tiraboschi se hace todo sobre cualquier cuerpo $\mathbb{k}$ en vez de $\mathbb{R}$.

Si quisieramos hacer la materia con todo sobre cualquier cuerpo repetiriamos todo de la misma manera. Decidimos hacer todo sobre $\mathbb{R}$ para quitar presión en este contexto de emergencia sanitaria.

Espacios vectoriales con producto interno

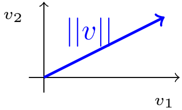
El producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ es la multiplicación entre vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ definida por

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

que e igual al producto del vector fila v por el vector columna w^t.

Por ejemplo, si $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ es la longitud del vector } v$$



Un espacio vectorial con producto interno generaliza estas nociones.

En un espacio vectorial con producto interno se puede definir distancia y ángulos entre vectores. Como lo hacemos en $\mathbb{R}^n$.

Un concepto destacado aquí son las bases ortogonales, en las cuales los vectores son "perpendiculares".

Por ejemplo, la base canónica es una base ortogonales $\mathbb{R}^n$ porque satisface

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(que el producto sea 0 quiere decir que son "perpendiculares")

El proceso de Gram-Schmidt es un algoritmo para construir un base ortogonal partiendo de cualquier base.

Rectas y Planos

Una recta es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión 1

Un plano es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión 2


ASTA LA PROCSIMAA
makeameme.org