Transformaciones lineales 1

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

Una transformación lineal es una función entre dos espacios vectoriales que respeta la suma y multiplicación por escalares.

Ya conocemos algunas transformaciones lineales, aunque no las llamemos así. Por ejemplo:

- La derivada
- La integral
- La multiplicación por matrices

La propiedad de respetar las operaciones es de utilidad para facilitar cálculos. Como en los dos primeros ejemplos.

Un isomorfismo lineal es una transformación lineal que es biyectiva.

También hemos utilizados isomorfismos sin darnos cuentos. Lo hacemos cada vez que operamos con polinomios olvidándonos de las x^i.

Al resolver preguntas del tipo "Encontrar un polinomio tal que..." hemos operado identificando los polinomios con vectores:

$$T : \mathbb{R}_{<n}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$T(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = (a_{n-1}, ..., , a_0)$$

Esta identificación nos sirve porque respeta las operaciones del espacio de polinomios y de $\mathbb{R}^n$

Como dijimos al motivar los espacios vectoriales, lo importante son las operaciones y las propiedades que satisfacen. La introducción y estudio de las transformaciones lineales se hace siguiendo esta idea.

En el ejemplo de los polinomios y $\mathbb{R}^n$ se ve esto claramente.

En esta parte de la materia estudiaremos las transformaciones lineales y veremos como nos dan información de los espacios vectoriales.

En este archivo introduciremos las transformacines lineales, el núcleo e imagen de las mismas y daremos ejemplos.

Estas diapositivas estan basadas en el capítulo 3 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. Preserva la suma:

$$T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

2. Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. Preserva la suma:

$$T(v+v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

2. Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La función $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es $T_A(v) = Av$. Esta es una transformación lineal gracias a las propiedades de la multiplicación de matrices[a].

[a] luego daremos más detalles de este ejemplo

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. Preserva la suma:

suma de W

$$T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

suma de V

2. Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{C}^1$ el espacio de funciones derivable. Entonces la derivada es una transformación lineal pues:

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{y} \quad (\lambda f)' = \lambda f'$$

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. Preserva la suma:

$$T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

2. Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Sea V un espacio vectorial. La función identidad $\mathrm{Id} : V \longrightarrow V$,

$$\mathrm{Id}(v) = v \quad \forall\, v \in V,$$

es una transformación lineal.

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. Preserva la suma:

$$T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

2. Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

No todas las funciones son transformaciones lineales. La función $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es lineal. Probamos esto dando un ejemplo concreto donde no se verifique algunas de las propiedades. Por ejemplo:

$$(1+1)^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1^2.$$

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. Preserva la suma:
$$T(v+v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$
2. Preserva el producto por escalares
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Podemos dar una definición equivalente que junte las dos condiciones en sólo una.
Algo similar a la definición de subespacio...

Definición 3.1.1

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1. $T(\lambda v + v') = \lambda T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

Podemos usar cualquiera de las dos definiciones para decidir si una función es transformación lineal o no.

Veamos algunas propiedades inmediatas de las transformaciones lineales.

Observación 3.1.3

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.

La demostración es similar a la de la unicidad del elemento neutro.

Demostración:

$$T(0) = T(0+0) \qquad \text{Neutro de la suma}$$
$$T(0) = T(0) + T(0) \qquad \text{T respeta la suma}$$
$$0 = T(0) \qquad \text{sumando el opuesto de T(0)}$$

Observación 3.1.3

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.

Entre otras cosas esta propiedad, es útil para verificar si una función es transformación lineal o no.

Ejemplo de NO lineal

Sea V un espacio vectorial y $v_0 \in V$ un vector no nulo. Entonces la función $f : V \longrightarrow V$ dada por

$$f(v) = v + v_0 \quad \forall v \in V$$

no es lineal dado que

$$f(0) = 0 + v_0 = v_0 \neq 0.$$

Observación 3.1.4

Las transformaciones lineales preservan combinaciones lineales, es decir si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $v_1, ..., v_k \in V$ y $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k)$$

La demostración sigue por inducción y aplicando la definición de transformación lineal.

Por ejemplo, el primer paso es $T(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 T(v_1)$. Lo cual es cierto porque es una de las condiciones de la definición de transformación lineal.

Usaremos esta propiedad, entre otras cosas, para estudiar la imagen de una transformación lineal.

Definición 3.2.1

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

- La imagen de T es el subconjunto de W

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid T(v) = w\}$$

para algun v en V

- El núcleo de T es el subconjunto de V

$$\mathrm{Nu}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

Observación

- $\mathrm{Im}(T)$ se define como la imagen de cualqueir función.
- $\mathrm{Nu}(T)$ serían las raíces de la transformación.
- $\mathrm{Nu}(T)$ es definido de forma implícita al igual que la segunda expresión de $\mathrm{Im}(T)$.
- La primera expresión de $\mathrm{Im}(T)$ es de forma explícita o paramétrica, donde el parámetro es un vector.

El núcleo y la imagen son importante entre otras cosas por lo siguiente.

Teorema 3.2.1

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

- $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de W
- $\mathrm{Nu}(T)$ es un subespacio vectorial de V

A continuación haremos la demostración.

Demostración

Empecemos porverificar que el núcleo satisface la definición de subespacio.

- $\mathrm{Nu}(T) \neq \emptyset$ pues $T(0) = 0$ y por lo tanto $0 \in \mathrm{Nu}(T)$.

- $\mathrm{Nu}(T)$ es cerrado por las operaciones.

  Sean $v_1, v_2 \in \mathrm{Nu}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ queremos ver que
  $$v_1 + \lambda v_2 \in \mathrm{Nu}(T).$$

  Para ver esto tenemos que aplicar T y chequear que de 0:

$$\underbrace{T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2)}_{\text{def de transf lineal}} \underbrace{= 0 + \lambda 0}_{\text{v1 y v2 estan en el núcleo}} = 0$$

Demostración

Verifiquemos ahora que la imagen satisface la definición de subespacio.

- $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$ pues $0 \in V$ y por lo tanto $T(0) \in \mathrm{Im}(T)$.
- $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado por las operaciones.
  Sean $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ queremos ver que
  $$w_1 + \lambda w_2 \in \mathrm{Im}(T).$$
  Sabemos que
  $$\exists v_1, v_2 \in V \text{ tales que } w_1 = T(v_1) \text{ y } w_2 = T(v_2).$$
  Por lo tanto
  $$w_1 + \lambda w_2 = T(v_1) + \lambda T(v_2) = T(v_1 + \lambda v_2) \in \mathrm{Im}(T)$$
  def de
  transf lineal
  como queriamos.

El Teorema 3.2.2 nos dará información sobre los siguientes números y como se relacionan.

Definición 3.2.2

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita. Entonces

- El rango de T es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.
- La nulidad de T es la dimensión de $\mathrm{Nu}(T)$.

Pero para que estas dimensiones realmente existan es necesario verificar que la imagen y el núcleo son de dimensión finita.

Para el núcleo es fácil, esto es el Corolario 2.3.8 dado que V es de dimensión finita.

Para la imagen tenemos el siguiente lema.

Lema

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita. Entonces $\mathrm{Im}(T)$ es de dimensión finita.

Demostración: Por hipotesis, V es generado por un conjunto finito de vectores. Es decir,

$$\begin{aligned} V &= \langle v_1, ..., v_k \rangle \\ &= \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in V\} \\ &= \{T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle T(v_1), ..., T(v_k) \rangle \end{aligned}$$

T respeta comb lineales

como queriamos.

Todas las transformaciones lineales entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son de la forma "multiplicar por una matriz".

Más aún, el Teorema 3.5.2 afirma que toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede expresar de esta forma.

Así que analizemos un poco más en detalle este tipo de transformaciones.

Observación 3.1.2

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función dada por

$$T_A(v) = Av \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Entonces T_A es una transformación lineal.

Demostración: Debemos ver que T_A respeta las operaciones.

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$T_A(v_1 + \lambda v_2) = A(v_1 + \lambda v_2) = Av_1 + \lambda Av_2 = T_A(v_1) + \lambda T_A(v_2)$$

mult es distr

Definición

Se dice que A es la matriz de T_A en la base canónica

Veamos algunos ejemplos concretos.

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

y la correspondiente $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$T_A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}$$

En particular,[1] $(1,-1,0) \in \mathrm{Nu}(T_A)$ pues $T_A(1,-1,0) = 0$ y

$$T_A(1,0,0) = (1,2) \in \mathrm{Im}(T_A)$$

$$T_A(0,1,\pi) = (1+\pi, 2+2\pi) \in \mathrm{Im}(T_A)$$

[1] los pongo horizontal para escribir más fácil

Consideremos la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la correspondiente $T_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T_B(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

En particular,[2] $\mathrm{Nu}(T_B) = 0$ y

$$T_A(1,0) = (0,1) \in \mathrm{Im}(T_B)$$
$$T_A(0,1) = (-1,0) \in \mathrm{Im}(T_B)$$

[2] los pongo horizontal para escribir más fácil

El núcleo y la imagen de T_A es muy fácil de calcular...

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal asociada. Entonces

- El núcleo de T_A es ...
- La imagen de T_A es ...

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal asociada. Entonces

- El núcleo de T_A es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$
- La imagen de T_A es el conjunto de los $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución

Demostración: es cuestión de escribir las definiciones de los respectivos subconjuntos.

$$v \in \mathrm{Nu}(T_A) \Leftrightarrow T_A(v) = Av = 0 \Leftrightarrow v \text{ es solución de } AX = 0$$

$$\begin{aligned} b \in \mathrm{Im}(T_A) &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } T_A(v) = Av = b \\ &\Leftrightarrow \text{ el sistema } AX = b \text{ tienen solución} \end{aligned}$$