Sistemas de ecuaciones lineales: Matriz, MERF y Operaciones elementales.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

En el archivo "Sistemas de ecuaciones lineales: Introducción y Ejemplos" motivamos la idea general del Método de Gauss a través de ejemplos.
En este archivo presentaremos las nociones de:

- Matriz
- Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)
- Operaciones elementales por fila

basados en la Sección 1.2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Seguiremos la misma numeración de estas notas para las Definiciones, Teoremas, etc. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

1. Introducción
2. Matriz
3. MERF
4. Operaciones elementales por fila

Definición

Una matriz $m \times n$ es un arreglo de números reales de m filas y n columnas.

$\mathbb{R}^{m\times n}$ y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denotan el conjunto de matrices $m \times n$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Convenciones

La notación $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ quiere decir que A es una matriz $m \times n$ de la siguiente forma

$$
\begin{array}{r c}
 & \\
\text{fila i} \rightarrow & \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

entrada o coeficiente

columna j

Conveciones

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz. Escribiremos $[A]_{ij}$ para denotar la entrada a_{ij} de A.
- Dos matrices del mismo tamaño $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ son iguales si cada una de sus entradas lo son:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}\,\forall i, j$$

Notación

Usaremos matrices para representar los sistemas de ecuaciones.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $Y = (y_j) \in \mathbb{R}^m$ entonces

$$AX = Y$$

representa al sistema de ecuaciones

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$(E)\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & = 3 \end{cases}$$

es representado de la forma $AX = Y$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observación

- Si una incognita no aparece en una ecuación, el correspondiente coeficiente de la matriz es 0.
- La cantidad de incognita queda determinada por la cantidad de columnas de la matriz A.

Una Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF) es una matriz de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & * & 0 & * & * \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Ejemplos de MERF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.2.6

Una matriz A es MERF si satisface lo siguiente:

1. La primera entrada no nula de una fila es 1. Este 1 es llamado 1 principal.
2. Cada columna con un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a cero.
3. Todas las filas nulas estan al final de la matriz.
4. En dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior ("los 1 principales estan de forma escalonada").

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 principal

Observación

Los sistemas de ecuaciones más faciles de resolver son los representados por una MERF.

Ejemplo

La solución del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$.

En efecto, si escribimos explicitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

(notar que este es el sistema al que llegamos Ejemplo 1 del archivo anterior)

Ejemplo

El conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es

$$\left\{(-2x_3 + 1,\ \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3},\ x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

En efecto, si escribimos explicitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \underset{\text{despejando}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_3 + 1 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{array}$$

(notar que este es el sistema al que llegamos Ejemplo 3 del archivo anterior)

Motivación

Las Operaciones elementales por fila son:

- las maneras en que podemos modificar una matriz de manera tal que los correspondientes sistemas de ecuaciones tengan las mismas soluciones.
- la versión "matricial" de las combinaciones lineales de ecuaciones que hicimos en el archivo anterior para encontrar las soluciones de los sistemas.

Observación

Hay tres tipos de operaciones las cuales definiremos a continuación.

El primer tipo de operación elemental es:

multiplicar la fila i por un número real $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{c^*F_i} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c\,a_{i1} & c\,a_{i2} & \cdots & c\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Multiplicar la primer fila por -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)^*F_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

El segundo tipo de operación elemental es:

sumar a la fila r un múltiplo de la fila s

r

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r + t*F_s} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + ta_{s1} & a_{r2} + ta_{s2} & \cdots & a_{rn} + ta_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sumar a la segunda fila la primer fila multiplicada por 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3*F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 + 3 \cdot 1 & 4 + 3 \cdot 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

El tercer tipo de operación elemental es:

intercambiar las fila r y s

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{r1}} & \color{blue}{a_{r2}} & \cdots & \color{blue}{a_{rn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{s1}} & \color{red}{a_{s2}} & \cdots & \color{red}{a_{sn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r \longleftrightarrow F_s} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{s1}} & \color{red}{a_{s2}} & \cdots & \color{red}{a_{sn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{blue}{a_{r1}} & \color{blue}{a_{r2}} & \cdots & \color{blue}{a_{rn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Intercambiar la segunda y tercer fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A modo de ejemplo le aplicaremos operaciones elemental por fila a una matriz para transformarla en una MERF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2*F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1/3)*F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+3*F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Estas matrices y operaciones se corresponden con las combinaciones lineales que hicimos de las ecuaciones en el Ejemplo 3 del archivo anterior)

Convenciones

- Si A es una matriz, $e(A)$ denotará la matriz que obtenemos despues de modificar a A por cierta operación elemental e.

Ejemplo

Si e es la operación intercambiar la segunda y tercer fila y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $e(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Como hicimos en los ejemplos, cuando le apliquemos una operación elemental a una matriz especificaremos arriba de una flecha que operación aplicamos:

$$A \quad \xrightarrow{e} \quad e(A)$$

Así podemos recordar que operación aplicamos. También es oblilgatoria para la corrección de exámenes.

En el próximo archivo presentaremos el Método de Gauss.