

16. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Tenemos que $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

Entonces, por enunciado: $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$

restando A^2 y B^2 : $AB + BA = 2AB$

$2AB = AB + AB$: $AB + BA = AB + AB$

restando AB : $BA = AB$

Por lo tanto $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si $AB = BA$.

b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

Tenemos que $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

Por enunciado $A^2 - B^2 = A^2 + AB - BA - B^2$

Restamos $A^2 - B^2$: $0 = AB - BA \Rightarrow AB = BA$.

Por lo tanto, $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ si y sólo si $AB = BA$.