Álgebra II - 04/06/2020

Práctico 7: Trata sobre la intersección y la suma de dos subespacios.

(9) Sean

$$A1 = \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$A2 = \begin{matrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{matrix}$$

(a) Sean W1 y W2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A1 y A2, respectivamente. Describir implícitamente W1 ∩ W2.

W1, W2 son subespacios de R^5:

W1 = {X = (x, y, z, t, u): A1 X = 0},   W2 = {X = (x, y, z, t, u): A2 X = 0}

Es decir:

W1= {(x, y, z, t, u):   x −2y + 3t + 7u = 0, 2x + y −3z + t + u = 0}

W2 = {(x, y, z, t, u): 3x + 2y + 3u = 0, x −3z + t = 0, −x + y −3z +t −2u = 0}.

Describir implícitamente un subespacio significa describirlo como el subespacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo.

En el caso de la intersección W1 ∩ W2, el sistema homogéneo que le corresponde es el que consta de todas las ecuaciones de W1 junto con las ecuaciones de W2.

En este ejemplo: W1 ∩ W2 es el subespacio solución del sistema homogéneo siguiente:

x −2y + 3t + 7u = 0
2x + y −3z + t + u = 0
3x + 2y + 3u = 0
x −3z + t = 0
−x + y −3z +t −2u = 0

Esta es la descripción implícita del subespacio W1 ∩ W2.

(b) Sean V1 y V2 los subespacios de R^5 generados por las filas de A1 y A2, respectivamente. Dar un conjunto de generadores de V1 + V2.

V1 = <(1 −2 0 3 7), (2 1 −3 1 1)>

V2 = <(3 2 0 0 3), (1 0 −3 1 0), (−1 1 −3 1 −2)>

(*) En general, si S es un conjunto de generadores de V1 y S' es un conjunto de generadores de V2, entonces S U S' es un conjunto de generadores de V1 + V2.

Para ver (*):

V1 = <S>, V2 = <S'>. Para simplificar supongamos que S = $\{v_1, ..., v_n\}$, $S' = \{w_1, ..., w_k\}$:

Para todo $v \in V_1$, $w \in V_2$ existen escalares $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_k$ tales que

$v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, $w = y_1w_1 + ... + y_kw_k$

Ahora, $V_1 + V_2 = \{v + w : v \in V_1, w \in V_2\}$.

Por lo tanto para todo $u \in V_1 + V_2$ existen escalares $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_k$ tales que

$u = v + w = x_1v_1 + ... + x_nv_n + y_1 w_1 + ... + y_kw_k$

De donde vemos que $S \bigcup S' = \{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k\}$ generan $V_1 + V_2$.

En este caso,

V1 + V2 = <(1 −2 0 3 7), (2 1 −3 1 1), (3 2 0 0 3), (1 0 −3 1 0), (−1 1 −3 1 −2)>.

En los contextos de (a) y (b), podemos resumir lo siguiente:

- Si dos subespacios W1 y W2 están presentados por ecuaciones (implícitamente), entonces el sistema que resulta de reunir todas las ecuaciones nos da una presentación implícita de la intersección $W1 \bigcap W2$ [Parte (a).]
- Si dos subespacios V1 y V2 están presentados por generadores, entonces la unión de todos estos generadores nos da un conjunto de generadores de la suma V1 + V2 [Parte (b).]

Ejercicio (7): Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios:

(e) W = {Matrices triangulares superiores n × n para cualquier n ∈ N} subespacio de M_{nxn}(**R**).

W = {A $\in M_{nxn}(R) : A_{ij} = 0, \forall i > j\}$

Sea para cada $1 \leq i, j \leq n$, $E_{ij} \in M_{nxn}(R)$ la matriz cuyos coeficientes son todos 0 salvo que tiene un 1 en el lugar i,j.

Entonces $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ es una base del espacio vectorial $M_{nxn}(R)$: base canónica de $M_{nxn}(R)$.

De hecho, para toda matriz A nxn, se tiene que

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} E_{ij}$$

En particular, si A es triangular superior (es decir que $A_{ij} = 0, \ \forall\, i > j$):

$$A = \sum_{i \leq j} A_{ij} E_{ij}$$

Por lo tanto B = $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ genera el subespacio W.

Además este conjunto es linealmente independiente pues es un subconjunto de un conjunto linealmente independiente, a saber de la base canónica de $M_{nxn}(R)$.

Por lo tanto B es una base de W.

¿Cuál es la dimensión de W? Es la cantidad |B| de elementos de B (o de cualquier otra base):

Notar que hay n^2 pares de índices ij, de los cuales $(n^2 - n)/2$ cumplen que i > j.

Por lo tanto:

dim W = |B| = $n^2 - (n^2 - n)/2 = (n^2 + n)/2$.

Práctico 8.

Ejercicio (5). Sea T : R^3 → R^3 una transformación lineal tal que:

(**) T(e1) = (1, 2, 3), T(e2) = (−1, 0, 5) y T(e3) = (−2, 3, 1).

Calcular T(2, 3, 8) y T(0, 1, −1). Más generalmente, calcular T(x, y, z) para todo (x, y, z) ∈ R^3 (es decir, que T quede definida de manera parecida a las del ejercicio (2)).

Como {e1, e2, e3} es una base de R^3, entonces sabemos que existe una única transformación lineal $T : R^3 \to R^3$ que satisfacen las condiciones (**).

¿Cómo encontramos una fórmula explícita para esta T?

Escribimos a un vector (x, y, z) como combinación lineal de los vectores de la base dada: es decir hallamos los coeficientes a_1, a_2, a_3 en la combinación lineal

$$(x, y, z) = a_1 e1 + a_2 e2 + a_3 e_3$$

En este caso: $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$, o sea

$$(x, y, z) = x e1 + y e2 + z e_3$$

Luego como T es una transformación lineal, entonces:

$$T(x, y, z) = x T(e1) + y T(e2) + z T(e_3)$$

Usando las condiciones (**), resulta:

$$T(x, y, z) = x (1, 2, 3) + y (-1, 0, 5) + z (-2, 3, 1)$$

$$= (x - y - 2z, \ 2x + 3z, 3x + 5y + z).$$

Esta es la fórmula explícita que se pedía. En particular,

$T(2, 3, 8) = (-17, 13, 29)$ y $T(0, 1, -1) = (1, -3, 4)$.

Ejercicio (6).

Consideramos la tl $T: R^3 \to R^3$: $T(v) = Av$.

(a) Podemos usar el teorema que dice que si $T: V \to W$ es tl, entonces

$$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$

Si $T: R^3 \to R^3$ satisface $\dim Nu(T) = 2 = \dim Im(T)$, tendríamos que

$3 = \dim R^3 = 2 + 2 = 4$,

lo cual es absurdo. Por lo tanto no existe una tal T que cumpla estas condiciones.

(b) $T(e2 + e3) = T(e2) + T(e3) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 1, 1) = T(e1)$

Luego T no puede ser inyectiva (si no tendríamos que $e1 = e2 + e3$, lo cual es absurdo).

(c) En este caso usamos lo siguiente: Si $T : V \to W$ es una tl y los vectores $v1, \ldots, vn$ generan V, entonces $T(v1), \ldots, T(vn)$ generan $Im(T)$.

Luego si T es como en este inciso, entonces

$Im(T) = \langle(1,1,1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$

Con lo cual Im(T) tiene dimensión 2, luego no puede ser $Im(T) = R^3$, pues $\dim R^3 = 3$.

Entonces T no puede ser sobreyectiva.

(d) $T(e1) = (1, 1, 0)$, $T(e2) = (0, 1, 1)$ y $T(e3) = (1, 0, 1)$.

Entonces existe tal T y cumple:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x\, e1 + y\, e2 + z\, e3) = x\, T(e1) + y\, T(e2) + z\, T(e3) \\ &= x\, (1, 1, 0) + y\, (0, 1, 1) + z\, (1, 0, 1) \\ &= (x + z, x + y, y + z) \\ &= A\, v, \end{aligned}$$

$v = (x, y, z)$.

Podemos tomar

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}, \qquad \text{y se tiene que } T(v) = Av.$$

En la columna j de A ubicamos al vector T(ej).

(e) Podemos tomar T la única tl tal que

$T(e1) = (1, 1, 0)$: esto basta para asegurar que $(1, 1, 0)$ está en Im(T).

$T(e2) = T(e3) = (0, 0, 0)$: lo hago porque quiero que $T(e2 + e3) = (0, 0, 0)$.

Esta T cumple que $(1, 1, 0)$ está en Im(T) y $T(0, 1, 1) = T(e2 + e3) = (0,0,0)+(0,0,0) = (0,0,0)$.

En este caso

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad \text{y se tiene que } T(v) = Av.$$

Notemos que en este inciso, la transformación lineal T que cumple las condiciones $(1, 1, 0)$ está en $Im(T)$ y $T(0, 1, 1) = (0,0,0)$ no es única. Por lo tanto tampoco es única la matriz A.

(f) El ejemplo del inciso anterior ya nos sirve pues cumple que $\dim Im(T) = 1$, ya que $Im(T) = <(1, 1, 0)>$.

<u>Práctico 7.</u>

Ejercicio (8).

(e) Probar que un conjunto de vectores $\{v_1, . . . , v_n\}$ es LD si y sólo si alguno de los vectores está en el generado por los otros, esto es: existe i, $1 \leq i \leq n$ tal que $v_i \in <v_1, . . . , v_{i-1}, v_{i+1}, . . . , v_n>$.

$\Rightarrow$: Supongamos que $\{v_1, . . . , v_n\}$ es LD. Entonces existen escalares no todos nulos

$$x_1, \dots, x_n$$

tales que
$$x_1 v_1 + \dots, + x_n v_n = 0 \qquad (***)$$

En particular existe un i, $1 \leq i \leq n$ tal que $x_i \neq 0$.

Luego, a partir de (***) podemos despejar a v_i como combinación lineal de los demás v_j:

$$v_i = (- x_1/x_i)\, v_1 + \dots + (- x_{i-1}/x_i)\, v_{i-1} + (- x_{i+1}/x_i)\, v_{i+1} + \dots + (- x_n/x_i)\, v_n$$

Es decir que v_i pertenece al subespacio que generan $<v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots , v_n>$.

$\Leftarrow$ Suponemos que existe i, $1 \leq i \leq n$ tal que $v_i \in <v_1, . . . , v_{i-1}, v_{i+1}, . . . , v_n>$.

Entonces existen escalares $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ tales que

$$v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_n v_n$$

Entonces (restando v_i a ambos miembros) resulta:

$$a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1)\, v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_n v_n = 0$$

Como el coeficiente de v_i en esta combinación lineal es $-1 \neq 0$, resulta que el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LD.