Independencia lineal y generación lineal

Martes 10 de septiembre

Ejercicio 1. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes. Cuando un conjunto no lo sea, mostrar una relación lineal no trivial entre sus elementos.

(1) $\{(1,0,-1),\ (1,2,1),\ (0,-3,2)\}$,

(2) $\{(1,0,-1),\ (1,-2,1),\ (2,-2,0)\}$,

(3) $\{(1,3,-3),\ (2,3,-4),\ (1,-3,1)\}$,

(4) $\{(1,1,1,1),\ (1,2,1,2),\ (1,3,1,3),\ (0,1,2,3)\}$,

(5) $\{(1,1,0,0),\ (0,0,1,1),\ (1,0,0,4),\ (0,0,0,2)\}$,

(6) $\{(1,1,2,4),\ (2,-1,-5,2),\ (1,-1,-4,0),\ (2,1,1,6)\}$.

Ejercicio 2. Probar los siguientes:

(a) Todo subconjunto de un conjunto LI es LI.
(b) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
(c) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
(d) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.
(e) Probar que un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LD si y sólo si alguno de los vectores está en el generado por los otros, esto es: existe $i,\ 1 \le i \le n$ tal que $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$.

Ejercicio 3. Decidir si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de funciones $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son LI:

(a) $\{1, \sin, \cos\}$,

(b) $\{1, \sin^2, \cos^2\}$.

Ejercicio 4. Sea V el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de sucesiones con valores racionales, o sea funciones $: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Encontrar un subconjunto infinito de V que sea LI.

Ejercicio 5. Dar 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

Ejercicio 6. Sea $\mathbb{k}$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{k}^{\mathbb{k}}$ de funciones $: \mathbb{k} \to \mathbb{k}$. Sea $\{f_1, \dots, f_n\}$ un conjunto LI de funciones *pares* en $\mathbb{k}^{\mathbb{k}}$ (i.e., $f(x) = f(-x)\ \forall x$) y sea $\{g_1, ..., g_m\}$ un conjunto LI de funciones *impares* (i.e., $g(-x) = -g(x)\ \forall x$). Probar que $\{f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ es LI.

Ejercicio 7. Sean $\mathbb{k}$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$ y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Sean α, β y γ vectores en V. Probar que si $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es LI , entonces tambien lo es $\{\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\gamma\}$.
Mostrar que esto no es cierto si en lugar del cuerpo $\mathbb{k}$ consideramos $\mathbb{Z}_2$.

★ **Ejercicio 8.** Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ tres vectores en $\mathbb{Q}^4$; en particular, cada uno de ellos es un vector en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. ¿Es cierto que el conjunto de vectores es LI como vectores en $\mathbb{Q}^4$ si y sólo si lo es como conjunto de vectores en $\mathbb{R}^4$?

★ **Ejercicio 9.** Supongamos que tenemos un conjunto LI $\{v_1, \dots, v_n\}$ en un espacio vectorial V. Sea $w \in V$. Probar que si $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ es LD, entonces $w \in \langle v_1, \dots, v_n\rangle$.

Ejercicio 10. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{k}$. Probar que $\langle v_1,\ v_2\rangle = \langle v_1,\ v_2 + \lambda v_1\rangle$.

Presentación de subespacios. Bases y dimensión

Martes 17 de septiembre

Ejercicio 11. Para cada ítem del **Ejercicio 1** denotamos por S_i al subconjunto indicado. Sea W_i el subespacio de $\mathbb{R}^3$ (casos $i = 1, 2, 3$) ó $\mathbb{R}^4$ (casos $i = 4, 5, 6$) generado por S_i.

(a) Hallar la dimensión de W_i y dar una base del mismo.

(b) Caracterizar W_i mediante ecuaciones.

(c) Para $i = 1, 2, 3$ decidir cuáles de los vectores $(4, -5, 1), (5, 15, 5), (-5, 15, -5)$ están en W_i. Para $i = 4, 5, 6$, hacer lo propio con los vectores $(1, 1, -4, 4), (1, 1, -4, -4), (1, 1, 4, 4), (1, 1, 1, 2)$.

Ejercicio 12. Dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$,

(b) $\{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 : w = x + z,\ y = x - z,\ u = 2x - 3z\}$,

(c) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 + a_3 = a_1 + a_2\}$,

(d) $\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p'(0) = 0\}$.

Ejercicio 13. Los siguientes subconjuntos $S_i \subset \mathbb{R}^n$ son LI ($n = 3$ ó 4). Completarlos a una base de $\mathbb{R}^n$.

(1) $S_1 = \big\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\big\}$,

(2) $S_2 = \big\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\big\}$,

(3) $S_3 = \big\{(1, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 2, 2, 1)\big\}$,

(4) $S_4 = \big\{(0, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1)\big\}$.

Jueves 19 de septiembre

Ejercicio 14. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio. Probar que si dim W = dim V, entonces $W = V$.

Ejercicio 15. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Dado $m \in \mathbb{N}_0$ denotamos por $\mathbb{k}_m[x]$ al subespacio de $\mathbb{k}[x]$ formado por los polinomios de grado $\leq m$, junto con el polinomio nulo.

(a) Sean $p_1, \ldots, p_n$ polinomios no nulos en $\mathbb{k}[x]$ tales que sus grados son distintos dos a dos. Probar que $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es LI en $\mathbb{k}[x]$.

(b) Probar que $\{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ es una base de $\mathbb{k}_2[x]$.

(c) Probar que $\mathbb{k}_2[x]$ es generado por $\{1, 2 + 2x, 1 - x + x^2, 2 - x^2\}$. ¿Es ese conjunto una base?

Ejercicio 16. Supongamos que tenemos $q_0, q_1, \ldots q_m \in \mathbb{k}_m[x]$ tales que $q_j(1) = 0$ para todo j. Probar que $\{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ es LD.

Ejercicio 17. Calcular la dimensión de los siguientes espacios vectoriales exhibiendo una base.

(a) $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
(b) $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
(c) $\{A \in \Bbbk^{n\times n} \colon A = A^t\}$.
(d) $\{A \in \Bbbk^{n\times n} \colon A$ es triangular superior $\}$.
(e) $\{A \in \Bbbk^{n\times n} \colon$ tr $A = 0\}$.
(f) $\{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \colon A = (\overline{A})^t\}$ como $\mathbb{R}$-EV.

`Nota:` si $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se define $\overline{A} := \left(\overline{a_{ij}}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (conjugar las entradas de A).

Suma (directa) de subespacios

Martes 24 de septiembre

Ejercicio 18. Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^6$:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_4 + x_5 + x_6 = 0\};$$
$$W_2 = \langle(1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 0, 2, 1, 0, 0), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0)\rangle.$$

(a) Dar una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$. Describirlo con ecuaciones.
(b) Dar una presentación por ecuaciones de $W_1 + W_2$. Obtener una base y su dimensón.
(c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1);\ (0, 0, 0, 1, 0, -1);\ (1, 1, 1, 0, 0, 0);\ (3, 0, 0, 1, 1, 3);\ (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$

Ejercicio 19. Para cada uno de los conjuntos S_i definidos en el **Ejercicio 13**, sea W_i el subespacio de $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$ ó 4) generado por S_i. Hallar un complemento de W_i en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 20. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sea V un espacio vectorial de dimensión 42. Si V_1 y V_2 son subespacios con dim $V_1 = 33$ y dim $V_2 = 9$ tales que $V = V_1 + V_2$, entonces $V = V_1 \oplus V_2$.
(b) Sea V un espacio vectorial de dimensión 42. Si V_1 y V_2 son subespacios con dim $V_1 = 33$ y dim $V_2 = 9$ tales que $V_1 \cap V_2 \neq 0$, entonces $V = V_1 \oplus V_2$.
(c) Si V_1 y V_2 son subespacios de $\Bbbk^8$ con dim $V_1 =$ dim $V_2 = 4$ entonces $\Bbbk^8 = V_1 \oplus V_2$.
(d) Si V_1 y V_2 son subespacios de $\Bbbk^8$ con dim $V_1 =$ dim $V_2 = 5$ entonces $V_1 \cap V_2 = 0$.

`Nota:` los números 42 y 33 no son demasiado especiales para este tipo de problemas, pero si para otros: `https://www.youtube.com/watch?v=ASoz_NuIvP0`

Ejercicio 21. Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial V. Expresar $U + U$ en términos de U.

Ejercicio 22. Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión n y $U \subset V$ un subespacio de dimensión $n - 1$.

(a) Probar que si $v \notin U$ entonces $V = U \oplus \langle v\rangle$.
(b) Probar que si W es un subespacio de V no contenido en U, entonces $V = U + W$.

Ejercicio 23. Sea $\Bbbk$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Consideramos el espacio vectorial $\Bbbk^{\Bbbk}$. Sean $\Bbbk_p^{\Bbbk}$ y $\Bbbk_i^{\Bbbk}$ los subespacios de funciones pares y funciones impares, respectivamente (Ver **Ejercicio 6**). Probar que $\Bbbk^{\Bbbk} = \Bbbk_p^{\Bbbk} \oplus \Bbbk_i^{\Bbbk}$.

Ejercicio 24. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean $V_1, \dots, V_m$ subespacios de V. Probar que si $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, entonces $\dim V = \dim V_1 + \cdots + \dim V_m$.

Ejercicio 25. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Probar los siguientes:

(a) Para cada j con $1 \leq j \leq n$ existe un subespacio de V de dimensión j.

(b) Existen subespacios $V_1, \dots, V_n$ de dimensión 1 tales que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Para ejercitar la resistencia a la frustración

★ **Ejercicio 26.** Probar que $\mathbb{R}$ mirado como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial tiene dimensión infinita.
`Sugerencia 1:` Usar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{Q}[x]$ (por ejemplo, $\alpha = \pi$).
`Sugerencia 2:` Usar que $\mathbb{R}$ es "más infinito" que $\mathbb{Q}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

★ **Ejercicio 27.** Supongamos que $\mathbb{F}$ y $\mathbb{K}$ son cuerpos tales que $\mathbb{F}$ es subcuerpo de $\mathbb{K}$. Entonces $\mathbb{K}$ puede ser mirado como un $\mathbb{F}$-EV. **Supongamos** que $\mathbb{K}$ tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{F}$-EV.
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (también se lo puede ver como un $\mathbb{F}$-EV). Probar que V tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{K}$-EV si y solo si V tiene dimensión finita mirado como $\mathbb{F}$-EV. Mostrar que en tal caso vale

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \, \dim_{\mathbb{K}} V.$$

`Nota:` Esto generaliza lo calculado en **Ejercicio 17 (a), (b)**.

Definición

Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Recordar que dados $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \Bbbk$, denotamos $n\,x := x + \cdots + x$ (n-veces) $\in \Bbbk$. Se define la *característica* de $\Bbbk$, denotada por $\operatorname{car} \Bbbk$, de la siguiente forma:

- si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,1 = 0$, entonces $\operatorname{car} \Bbbk := \min \{n \in \mathbb{N} \colon n\,1 = 0\}$;
- si no existe tal $n \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{car} \Bbbk := 0$.

★ **Ejercicio 28. Cardinalidad de cuerpos finitos**
Sea $\Bbbk$ un cuerpo *finito*. El objetivo de este ejercicio es probar que $\Bbbk$ tiene p^n elementos para algún primo p.

(a) Probar que $\operatorname{car} \Bbbk$ es un número primo, lo denotaremos por p.

(b) Probar que $\Bbbk$ es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial con la suma de $\Bbbk$ y el producto por escalares dado por

$$\cdot \colon \mathbb{Z}_p \times \Bbbk \to \Bbbk, \qquad \bar{j} \cdot x := j\,x.$$

(Es necesario probar que esa función está bien definida, es decir: si $\bar{j} = \bar{h}$ entonces $j\,x = h\,x$.)

(c) Probar que $\Bbbk$ tiene dimensión finita como $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial. La denotaremos por n.

(d) Notar que hay un isomorfismo $(\mathbb{Z}_p)^n \to \Bbbk$ de $\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales. Deducir el cardinal de $\Bbbk$.