Práctico 7

Bases y dimensión

Objetivos.

- Familiarizarse con los conceptos de conjunto de generadores e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.
- Aprender a caracterizar los subespacios de $\mathbb{R}^n$ por generadores y de manera implícita.
- Dado un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, aprender a extraer una base de cualquier conjunto de generadores de W y a completar cualquier subconjunto linealmente independiente de W a una base.

Ejercicios.

(1) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.
  (a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del Ejercicio 5-Práctica 1.
  (b) Los conjuntos descriptos en el Ejercicio 7-Práctica 1.

(2) Sean $u = (1,1)$, $v = (1,0)$, $w = (0,1)$ y $z = (3,4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.
  (a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.
  (b) Escribir z como combinación lineal de u y v.
  (c) Escribir z como combinación lineal de u y w.
  (d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

(En este ejercicio vemos como un vector se puede escribir de muchas maneras como combinación lineal de vectores dado. Esto pasa porque u, v, w son LD en este ejercicio)

(3) Sean p, q y r los polinomios $p = (1-x)(x+2)$, $q = x^2 - 1$ y $r = x(x^2 - 1)$.

  (a) Escribir, si es posible, el polinomio x como combinación lineal de p, q y r.
  (b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.
  (c) Escribir, si es posible, el polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$ como combinación lineal de p, q y r.
  (d) Describir todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.

(4) En cada uno de los casos que siguen caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

  (a) $\langle (1,0,3), (0,1,-2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
  (b) $\langle (1,2,0,1), (0,-1,-1,0), (2,3,-1,4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(5) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

  (a) $\{(1,0,-1), (1,2,1), (0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
  (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(6) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales

(a) Los conjuntos del Ejercicio (5)
(b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^4$.
(c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,3)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(7) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios:

(a) Los subespacios del Ejercicio (1)
(b) $W = \{(x,y,z,w,u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z,\ w = x + z,\ u = 2x - 3z\}$.
(c) $W = \langle (1,0,-1,1),(1,2,1,1),(0,1,1,0),(0,-2,-2,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
(d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.
(e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(8) En este ejercicio no es necesario hacer ninguna cuenta. Es lógica y comprender bien la definición de LI y LD. Probar las siguientes afirmaciones.
(a) Todo subconjunto de un conjunto LI es LI.
(b) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
(c) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
(d) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.
(e) Probar que un conjunto de vectores $\{v_1,\dots,v_n\}$ es LD si y sólo si alguno de los vectores está en el generado por los otros, esto es: existe i, $1 \le i \le n$ tal que $v_i \in \langle v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n\rangle$.

(9) Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
(a) Sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2, respectivamente. Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$.
(b) Sean V_1 y V_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de A_1 y A_2, respectivamente. Dar un conjunto de generadores de $V_1 + V_2$.

(10) Sea $V = \mathbb{R}^6$, y sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(u,v,w,x,y,z) \ : \ u+v+w=0,\ x+y+z=0\},$$
$$W_2 = \langle (1,-1,1,-1,1,-1),(1,2,3,4,5,6),(1,0,-1,-1,0,1),(2,1,0,0,0,0)\rangle .$$

(a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
(b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
(c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1,1,-2,-2,1,1),\ (0,0,0,1,0,-1),\ (1,1,1,0,0,0),\ (3,0,0,1,1,3),\ (-1,2,5,6,5,4).$$

(d) Para los vectores v del punto anterior que estén en $W_1 + W_2$, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

(11) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

(13) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar
(a) Sean W_1 y W_2 subespacios no nulos de $\mathbb{R}^2$. Si $W_1 \cap W_2$ contiene un vector no nulo, entonces $W_1 = W_2$.

(b) Sean W_1 y W_2 subespacios de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ entonces $W_1 \cap W_2$ contiene un vector no nulo.
(c) Si v no pertenece al subespacio generado por $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, v\}$ es un conjunto linealmente independiente.
(d) Todo conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^4$ se extiende a una base.

Más ejercicios.

(14) Dar un conjunto de generadores de los autoespacios del Ejercicio 2-Práctica 4.

(15) Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(-1, 2, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(2, 1, -1)$.

(16) (a) Hallar escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $1 + 2i = a(1 + i) + b(1 - i)$.
(b) Hallar escalares $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $1 + 2i = z(1 + i) + w(1 - i)$.

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios:

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}$.
(b) $W = \langle(-1, 1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 2, -1), (1, 0, 1, 1, 0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^5$.

(18) Repetir el ejercicio (4) con los subespacios:

(a) $\langle(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
(b) $\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.

(19) Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$v_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad v_2 = (3, 4, -2, 5), \quad v_3 = (0, 4, 1, 11), \quad v_4 = (1, 4, 0, 9).$$

(a) Describir implícitamente al subespacio $W = \langle\, S \,\rangle$, es decir, hallar un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, para el cual su espacio de soluciones sea exactamente W.
(b) Si $W_1 = \langle\, v_1, v_2, v_3 + v_4 \,\rangle$ y $W_2 = \langle\, v_3, v_4 \,\rangle$, describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente.

(20) Expresar $\mathbb{R}^2$ como suma de dos subespacios no nulos.

(21) Describir implícitamente $W_1 + W_2$ del Ejercicio (9).

(22) Calcular la dimensión y exhibir una base de los siguientes subespacios.
(a) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_4 \ : \ a + d = b + c\}$.
(b) $W = \{p(x) \in P_4 \ : \ p'(0) = 0\}$.
(c) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A = A^t\}$.
(d) $S = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \ : \ A = \bar{A}^t\}$ (considerado como $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathbb{C}^{n\times n}$).

Ejercicios un poco más difíciles. Si ya hizo los primeros ejercicios ya sabe lo que tiene que saber. Los siguientes ejercicios le pueden servir si esta muy aburridx con la cuarentena.

(23) Mostrar dos complementos distintos del subespacio generado por $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$. Ver la definición de complemento en la Subsección 2.4 de Garcia-Tirboschi.

(24) Sean W_1 y W_2 los subespacios del Ejercicio(10). Ver la Subsección 2.4 de Garcia-Tirboschi para responder lo siguiente.
(a) ¿Es la suma $W_1 + W_2$ directa?
(b) Dar un complemento de W_1.
(c) Dar un complemento de W_2.

(25) (a) Probar que si $p_i(x), i = 1, \ldots, n$, son polinomios en $\mathbb{R}[x]$ tales que sus grados son todos distintos entonces $\{p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ es un conjunto LI en $\mathbb{R}[x]$.
(b) Probar que $\{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ es una base del subespacio $P_3(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado ≤ 3 junto al polinomio nulo.
(c) Probar que $P_3(\mathbb{R})$ est generado por el conjunto $\{1, 2 + 2x, 1 - x + x^2, 2 - x^2\}$. ¿Es este conjunto una base de $P_3(\mathbb{R})$?

(26) Determinar si los siguientes conjuntos de $F(\mathbb{R})$ son linealmente independientes.
(a) $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$.
(b) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$.

(27) En cada caso extender los conjuntos LI dados a una base del espacio vectorial correspondiente de dos maneras distintas.

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(b) $\{x, x - 2x^2, 1 - x + x^2\} \subseteq P_4(\mathbb{R})$.

(28) Sea $\{f_1, ..., f_n\}$ un conjunto LI de funciones *pares* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (i.e., $f(x) = f(-x)$ para todo x) y sea $\{g_1, ..., g_m\}$ un conjunto LI de funciones *impares* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (i.e., $f(-x) = -f(x)$ para todo x). Probar que $\{f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\}$ es LI.