FINAL – ÁLGEBRA

<u>UNIDAD I</u>: Cuerpos

<u>**Definición**</u>: Un **cuerpo** es un conjunto K con 2 operaciones,

ambas cerradas en K:

$+: K \times K \rightarrow K\ (suma)$

$\bullet: K \times K \rightarrow K\ (multiplicación)$

Dichas operaciones cumplen:

i) La suma es **asociativa.** $(x + y) + x = x + (y + z), \forall x, y, z \in K$.
ii) Existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$ (**neutro para la suma**), $\forall x \in K$.
iii) Existe $(-x) \in K$ tal que $x + (-x) = 0$ (**opuesto**), $\forall x \in K$.
iv) La suma es **conmutativa.** $x + y = y + x, \forall x, y \in K$.
v) La multiplicación es **asociativa.** $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in K$.
vi) Existe $1 \in K$, $1 \neq 0$, tal que $1.x = x$ **(neutro para la multiplicación)**. $\forall x \in K$.
vii) Si $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in K$ tal que $x.x^{-1} = 1$ (**inverso**), $\forall x \in K$.
viii) La multiplicación es **conmutativa.** $xy = yx, \forall x, y \in K$.
ix) La multiplicación es **distributiva respecto a la suma.** $x(y + z) = xy + xz,\ \forall x, y, z \in K$.

<u>**Ejemplos**</u>:

1) $\mathbb{R}, +, \bullet$ es un cuerpo.
2) $\mathbb{C}, +, \bullet$ es un cuerpo.
3) $\mathbb{Q}, +, \bullet$ es un cuerpo.
4) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ no son cuerpos (no está definido el inverso).

<u>**Propiedades de los cuerpos**</u>:

1) El 0 es único. Si $0' \in K,\ 0' + x = x \Rightarrow 0' = 0. \forall x \in K$
2) El opuesto de cualquier $x \in K$ es único. Si $\exists y \in K\ tal\ que\ x + y = 0\ \Rightarrow y = (-x)$.
3) El 1 es único. Si $1' \in K,\ 1'.x = x \Rightarrow 1' = 1. \forall x \in K$
4) El inverso de $x \in K, x \neq 0$ es único. Si $\exists y \in K\ tal\ que\ xy = 1\ \Rightarrow y = x^{-1}$.
5) Dados $x, y \in K$, se tiene que $xy = 0\ \Leftrightarrow x = 0$ ó $y = 0$.

▶ <u>**Afirmación**</u>: $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo $\Leftrightarrow n$ es primo.

Denotamos por $\bar{a}$ tomar módulo n

$a \equiv x\ (n)$

<u>**Dem**</u>:

($\Rightarrow$) Supongamos que n no es primo. Entonces $n = ab, 1 < a, b < n$.

Luego $\bar{a}, \bar{b} \neq 0\ en\ \mathbb{Z}_n$ y $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{n} = 0$, es un absurdo. Luego n debe ser primo.

($\Leftarrow$) Consideremos $m\ \in\ \mathbb{Z}_n$ con $m < n$. Por ser n primo tenemos que $m\ y\ n$ son primos entre sí y por lo tanto existen enteros tales que $1 = am + bn$, entonces $1 =\ am + bn = am + 0n = am$. Luego m tiene inverso en $\mathbb{Z}_n$.
?

<u>Subcuerpos</u>

<u>**Definición**</u>: Un **subcuerpo** de K es un conjunto $K' \subseteq K$ que a su vez es cuerpo respecto de $+\ y\ \ \bullet$. Es decir, si se verifican:

a) $0,1 \in K'$.
b) $x + y, xy\ \in K'$.
c) $Si\ x \in K' \Rightarrow (-x) \in K'$.
d) Si $\ x \in K', x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in K'$.

<u>UNIDAD II</u>: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

<u>**Definición**</u>: Un sistema de $\boldsymbol{m}$ **ecuaciones,** $\boldsymbol{n}$ **incógnitas y** $\boldsymbol{a}$ **coeficientes** es un sistema en el cuerpo K del tipo:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{donde } a_{ij} \in K, b_j \in K \ (i\ filas, j\ columnas).$$

<u>Obs</u>:

- Cada n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ que satisface las ecuaciones de $(*)$ se dice **solución del sistema.**
- Si $b_1 = \cdots = b_m = 0$, el sistema se dice **homogéneo**.
- Para resolver el sistema, se busca eliminar variables y escribirlas en términos de las otras.

▶ <u>Propiedad</u>: El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es subespacio de K^n.

<u>Dem</u>: Si $m = 1, W = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n: a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ es un subespacio ($W \neq \emptyset$, pues $(0, \dots, 0) \in W$ es solución)

Sean $v = (x_1, \dots, x_n)$ y $w = (x_1', \dots, x_n')$, $v, w \in W$. Entonces para cada $\lambda \in K$ se cumple que

$v + \lambda w = (x_1 + \lambda x_1', \dots, x_n + \lambda x_n') \in W$, ya que:

$a_1(x_1 + \lambda x_1') + \cdots + a_n(x_n + \lambda x_n') = (a_1x_1, \dots, a_nx_n) + \lambda(a_1x_1', \dots, a_nx_n')$

Si $m > 1$, el conjunto de todas las soluciones es

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n: a_{11}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n: a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0\}$$

Que es un subespacio por ser intersección de subespacios. $\square$

<u>Definición</u>: Dos sistemas de ecuaciones lineales de n incógnitas son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

<u>Operaciones que nos dan sistemas equivalentes</u>

1) Intercambiar el orden de las ecuaciones.
2) Reemplazar una ecuación por ella misma multiplicada por un escalar $\neq 0$.
3) Reemplazar la i-ésima ecuación por ella misma sumada a la j-ésima multiplicada por algún escalar $\neq 0$.
4) Quitar (o agregar) una ecuación trivial.

Matrices

Definición: Una **matriz $m \times n$** sobre un cuerpo K es una función

$A:\{(i,j): 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \to K$. Se representa mediante un arreglo rectangular:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{(Sistema homogéneo)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{(Matriz ampliada para sistema no homogéneo)}$$

Cada elemento a_{ij} se dice la entrada (i,j). El conjunto de todas las matrices $m \times n$ se denota $M_{m\times n}(K)$.

Operaciones elementales por fila (e)

Son operaciones que nos devuelven matrices equivalentes.

1) Intercambiar filas.
2) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
3) Reemplazar la fila i por ella misma sumada a la fila j multiplicada por un escalar no nulo.

Definición: Dos matrices A y B se dicen equivalentes por fila si B se obtiene de A luego de un número finito de operaciones elementales por fila. Se denota $A{\sim}B$.

- Si $A{\sim}B \Rightarrow$ los sistemas homogéneos asociados a A y B son equivalentes y tienen exactamente las mismas soluciones.
- La equivalencia por filas es una relación de equivalencia:
  i) $A{\sim}A$
  ii) $A{\sim}B \Leftrightarrow B{\sim}A$
  iii) Si $A{\sim}B$ y $B{\sim}C \Rightarrow A{\sim}C$

Definición: Una matriz se dice **escalonada reducida por filas** (MERF) si:

a) El primer elemento no nulo de cada fila es $=1$.
b) Cada columna que tiene un 1 como en a) tiene todos sus elementos restantes $=0$.
c) Las filas nulas están al final
d) Si las filas $1, \dots, r$ son las no nulas con el 1 en las posiciones $k_1, \dots, k_r$ entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

▶ **Teorema**: Toda matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ es equivalente a una M.E.R.F.

▶ **Teorema**: Si $A \in M_{m\times n}(K)$ y $m < n$ (si hay más incógnitas que ecuaciones) $\Rightarrow$ el sistema homogéneo asociado tiene soluciones no triviales.

Dem: Sabemos que A~B donde B es una MERF. También sabemos que el sistema asociado a B tiene las mismas soluciones. Entonces si B tiene r filas no nulas, hay r variables principales. Como $r \leq m < n$ hay $n - r \geq 1$ variables libres. Si alguna de las $n - r$ incógnitas es no nula, obtenemos una solución no trivial del sistema asociado a B y por lo tanto de A. ▯

▶ **Teorema**: Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Asumimos que el sistema no homogéneo

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{tiene solución } p = (p_1, \dots, p_n) \in K^n.$$

Sea S el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado a A.
Entonces el conjunto de soluciones de $(*)$ es $p+S=\{p+s: s\in S\}$

Dem: Llamemos M el conjunto de soluciones de $(*)$. Sea $m\in M\subseteq K^n, m=(m_1,\dots,m_n)$, entonces:

$m=p+(m-p)\Rightarrow(m-p)=(m_1-p_1,\dots,m_n-p_n)$. Veamos que $s=(m-p)\in S$

$a_{i1}(m_1-p_1)+\cdots+a_{in}(m_n-p_n)=(a_{i1}m_1,\dots,a_{in}m_n)-(a_{i1}p_1,\dots,a_{in}p_n)=b_i-b_i=0$

$\forall i=1,\dots,m. \quad \therefore M\subseteq p+S.$

Tomemos $z\in p+S, z=(p_1+s_1,\dots,p_n+s_n); (s_1,\dots,s_n)\in S$ tq z es solución de $(*)$

$a_{i1}(p_1+s_1)+\cdots+a_{in}(p_n+s_n)=(a_{i1}p_1,\dots,a_{i1}p_n)-(a_{i1}p_1,\dots,a_{in}p_n)=b_i-b_i=0$

$\forall i=1,\dots,m.$

Luego, $p+S\subseteq M$ ▯

Operaciones con matrices

Matrices canónicas y matriz identidad

- **Matriz canónica**: Se denota $E^{kl}\in K^{m\times n}$, $1\le k\le m, 1\le l\le n$. Se define como:
  $(E^{kl})_{ij}=\begin{cases}1, & i=k\ \wedge j=l\\ 0, & i\neq k\vee\ j\neq l\end{cases}$
  Ejemplo: $K^{2\times 2}\Rightarrow\ E^{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E^{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E^{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E^{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

- **Matriz Identidad**: Se denota Id_n. Se define como:
  $(Id_n)_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$
  Ejemplo: $Id_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, Id_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Definición: Suma y multiplicación por escalares de matrices.

$+: K^{m\times n}\times K^{m\times n}\to K^{m\times n}, (A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\ \forall\ A,B\in K^{m\times n}.$

$\bullet: K\times K^{m\times n}\to K^{m\times n}, (\lambda A)_{ij}=\lambda A_{ij}\ \forall\ \lambda\in K, A\in K^{m\times n}.$

Definición: Sea $A\in K^{m\times n}, B\in K^{n\times p}$. El **producto de A con B** es la matriz $C\in K^{m\times p}$:

$$(C)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj},\qquad 1\le i\le m\wedge 1\le j\le p.$$

Propiedades del producto entre matrices

- **Asociatividad**: $\forall A\in K^{m\times n}, B\in K^{n\times p}\ y\ C\in K^{p\times r}: (AB)C=A(BC)$
  Dem: Para cada $1\le i\le m, 1\le j\le r$ tenemos que:
  $$\big((AB)C\big)_{\boldsymbol{ij}}=\sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}C_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n}A_{il}B_{lk}\right)C_{kj}$$
  $\big(A(BC)\big)_{\boldsymbol{ij}}=\sum_{l=1}^{n}A_{il}(BC)_{lj}=\sum_{l=1}^{n}A_{il}\left(\sum_{k=1}^{p}B_{lk}\,C_{kj}\right)$ Notar que $\big((AB)C\big)_{\boldsymbol{ij}}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}A_{il}B_{lk}\,C_{kj}=\big(A(BC)\big)_{\boldsymbol{ij}}$ ▯

- **Identidad:** Para cualquier matriz $A \in K^{m\times n}$, se tiene que $Id_m A = A = A Id_n$.
  Dem: Para cada $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ tenemos que:

$$(Id_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (Id_m)_{ik} A_{kj} = 0A_{1j} + \cdots + 1A_{ij} + 0A_{(i+1)j} + \cdots = A_{ij}\text{ . Luego, } Id_m A = A$$

$$(A Id_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (Id_n)_{kj} = A_{i1}0 + \cdots + 1A_{ij} + A_{i(j+1)}0 + \cdots = A_{ij}\text{ . Luego, } A Id_n = A \ \square$$

- **Distributividad**: $\forall\, A, A' \in K^{m\times n}, B, B' \in K^{n\times p}$ se tiene que $(A + A')B = AB + A'B$ y $A(B + B') = AB + AB'$.
  Dem: Para cada $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ tenemos que:

$$\big((A + A')B\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A + A')_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} + A'_{ik}) B_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + A'_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A'_{ik}B_{kj} = (AB)_{ij} + (A'B)_{ij}$$

Luego, $(A + A')B = AB + A'B$. Análogamente se obtiene que $A(B + B') = AB + AB'$.$\square$

- **Conmutatividad con escalares**: $\forall \lambda \in K, A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times p}$, se tiene que $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
  Dem: Para cada $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ tenemos que:

$$\big(\lambda(AB)\big)_{ij} = \lambda(AB)_{ij} = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda A_{ik}) B_{kj} = \big((\lambda A)B\big)_{ij} \therefore\ \lambda(AB) = (\lambda A)B.\ \square$$

Matrices elementales y operaciones por fila

Definición: Una matriz $E \in K^{n\times n}$ se dice **elemental** si se obtiene luego de realizar exactamente una operación elemental por fila a la matriz identidad correspondiente.

a) Intercambiar filas r y s: $\left(E^{(r,s)}\right)_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \ne s, r \\ 1, i = r, j = s \lor i = s, j = r. \\ 0,\ \text{en los demás casos} \end{cases}$

   También se puede escribir como: $E^{(r,s)} = Id_n - E^{rr} - E^{ss} + E^{rs} + E^{sr}$

b) Multiplicar fila r por $c \in K, c \ne 0$: $\left(E_c^{(r)}\right)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \ne r \\ c, & i = j = r \\ 0, & i \ne j \end{cases}$

   También podemos escribir: $E_c^{(r)} = Id_n - E^{rr} + cE^{rr}$.

c) Sumar a la fila s la fila r multiplicada por $c \ne 0$: $\left(E_c^{(sr)}\right)_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ c, i = s \lor j = r. \\ 0, \text{en otro caso} \end{cases}$

   También podemos escribir: $\left(E_c^{(sr)}\right)_{ij} = Id_n + cE^{sr}$

▶ **Teorema**: Sea E una operación elemental por filas, e la correspondiente matriz elemental, $e \in K^{m\times m}$. Entonces $E(A) = eA, \forall A \in K^{m\times n}$.

Dem: Usaremos la siguiente afirmación:

Afirmación: $E^{rs}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ A_{s1} & \cdots & A_{sn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, 1 \le r, s \le m$

Dem. de afirmación: $(E^{rs})_{ij} = \begin{cases} 1, & i = r, j = s \\ 0, & i \neq r \vee j \neq s \end{cases}$

$$Si\ i \neq r, 1 \leq j \leq n\ \Rightarrow (E^{rs}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (E^{rs})_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} 0 A_{mj} = 0$$

$$Si\ i = r, 1 \leq j \leq n\ \Rightarrow (E^{rs}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (E^{rs})_{rk} A_{kj} = A_{sj}.$$

Ahora, probemos el teorema para cada operación elemental por fila.

a) $e^{s,r}A = (Id_m - E^{rr} - E^{ss} + E^{rs} + E^{sr})A = Id_m A - E^{rr}A - E^{ss}A + E^{sr}A + E^{rs}A$

$$= A - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{fila\ r\ de\ A}{\text{(lugar r−esimo)}}} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{fila\ s\ de\ A}{\text{(lugar s−esimo)}}} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{fila\ r\ de\ A}{\text{(lugar s−esimo)}}} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{fila\ s\ de\ A}{\text{(lugar r−esimo)}}} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E(A)$$

b) $e_c^{(r)}A = (Id_m - E^{rr} + cE^{rr}) = Id_m A - E^{rr}A + cE^{rr}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ A_{r1} & \cdots & A_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ A_{r1} & \cdots & A_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E(A)$

c) $e_c^{(sr)}A = (Id_m + cE^{sr})A = Id_m A + c(E^{sr}A) = A + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ cA_{r1} & \cdots & cA_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E(A)$ ▯

Lugar s-ésimo

Corolario: $A \sim B \Leftrightarrow B = PA$, donde P es producto de matrices elementales.

Matrices inversibles

Definición: Una matriz $A \in K^{n \times n}$ se dice **inversible** si $\exists B \in K^{n \times n}$ tal que $AB = Id_n = BA$.

Obs:

1) No toda matriz es inversible.
2) Si $BA = Id_n = AC \Rightarrow B = C$

▶ **Proposición**:

a) Id_n es inversible: $(Id_n)^{-1} = Id_n$.
b) Si A es inversible, A^{-1} también lo es. Además, $(A^{-1})^{-1} = A$.
c) Si A y B son inversibles $\Rightarrow AB$ también lo es y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dem:

a) Por definición, $Id_n B = Id_n \Leftrightarrow B = Id_n$. $\therefore Id_n^{-1} = Id_n$
b) Si A es inversible entonces existe $B = A^{-1}$ tal que $AA^{-1} = Id_n$. Ahora bien, A^{-1} es inversible si existe B tal que $A^{-1}B = Id_n$. Luego, multiplicando ambos lados por A:
   $A(A^{-1}B) = AId_n \Rightarrow Id_n B = A \Rightarrow B = A$ y entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Calculamos: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AId_n A^{-1} = AA^{-1} = Id_n$.
   $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}Id_n B = B^{-1}B = Id_n$
   $\therefore AB$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$▯

Corolario: El producto de matrices inversibles es inversible: $(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

▶ **Teorema**: Toda matriz elemental es inversible.

Dem: Sea E una operación elemental por filas, e la correspondiente matriz elemental, sea e' la matriz elemental correspondiente a la operación elemental por filas inversa a E. Por el teorema sobre matrices elementales, $\forall A \in K^{n \times n}$, se tiene que:

$eA = E(A)$ (hacerle a A la operación elemental por filas e)

$e'A = E'(A)$ (hacerle a A la operación elemental por filas e')

Ahora bien, $ee' = e(e'Id_n) = E(e'Id_n) = E\big(E'(Id_n)\big) = Id_n$. Análogamente con $e'e$.□

▶ **Teorema**: Sea $A \in K^{n\times n}$, son equivalentes:

(i) A es inversible.
(ii) A es equivalente por filas a Id_n
(iii) A es producto de matrices elementales.

Dem: Sea R una MERF tal que $A \sim R$. Sea r la cantidad de filas no nulas en R, $r \leq n$, entonces hay 2 posibilidades:

a) $r = n \Rightarrow R = Id_n$
b) $r < n \Rightarrow$ la última fila es nula.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Asumimos que A es inversible. Luego, R también lo es. Supongamos que $R \neq Id_n$ con lo cual vale b), es decir, la última fila de R es nula.

$$\text{Pero } Id_n = RR^{-1} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{(n-1)1} & \cdots & \cdots & r_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{(n-1)1} & \cdots & \cdots & s_{(n-1)n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right] n-1 \\ \leftarrow \text{Debería ser 1. Absurdo} \end{array}$$

Luego, $R = Id_n$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si $A \sim Id_n$, por el corolario que dice que $A \sim B \Leftrightarrow B = PA$,tenemos que $Id_n = PA$ donde P es producto de matrices elementales $P = E_1 \dots E_k$.
$Id_n = E_1 \dots E_k A \Rightarrow E_1^{-1} Id_n = E_1^{-1} E_1 \dots E_k A \Rightarrow E_1^{-1} = E_2 \dots E_k A \Rightarrow E_2^{-1} E_1^{-1} = E_3 \dots E_k A$
Siguiendo se obtiene $E_k^{-1} \dots E_1^{-1} = A$. Cada E_i^{-1} es una matriz elemental, con lo cual A es producto de matrices elementales.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Asumimos que $A = E_1 \dots E_k$, donde cada E_i es una matriz elemental. Por teorema, toda matriz elemental es inversible, y producto de matrices elementales es inversible. Por lo tanto, al ser A producto de matrices inversibles, A es inversible. □

Corolario: Sean $A, B \in K^{m\times n}$. Entonces $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in K^{m\times m}$ inversible tal que $B = PA$.

▶ **Teorema**: Sea $A \in K^{n\times n}$. Las siguientes son equivalentes:

(i) A es inversible.
(ii) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene única solución $X = 0$.
(iii) $\forall b \in K^{n\times 1}$, el sistema $AX = b$ tiene solución.

Dem:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Asumimos que A es inversible. Si $X_0 \in K^{n\times 1}$ es solución, entonces:

$$X_0 = Id_n X_0 = (AA^{-1})X_0 = A^{-1}(AX_0) \Rightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la única solución para el sistema es la trivial.

$(ii) \Rightarrow (i)$Por el contrarrecíproco. Asumimos que A no es inversible, entonces $A \sim R$, donde R es escalonada reducida por filas, con una fila nula. Luego, el sistema $RX = 0$ tiene soluciones no triviales, porque hay al menos una variable libre. Entonces $AX = 0$ también tiene soluciones no triviales.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Asumimos que A es inversible. Para cada $b \in K^{n\times 1}$, veamos que $X_0 = A^{-1}b \in K^{n\times 1}$ es solución del sistema $AX = b$

$$AX_0 = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Id_n b = b$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Por el contrarrecíproco. Asumimos que A no es inversible. entonces $A \sim R$, donde R es escalonada reducida por filas, con la última fila nula. Luego, $A = PR$, P inversible. Como la última fila de R es nula, $RX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no tiene solución. De hecho, $(RX)_{n1} = \sum_{k=1}^{n} R_{nk} X_{k1} = 0 \neq 1$. ▯

<u>Corolario</u>: Sea $A \in K^{n \times n}$. Son equivalentes:

(i) A es invertible
(ii) El sistema $AX = b$ tiene única solución $\forall b \in K^{n \times 1}$

<u>Dem</u>:

Asumimos que A es inversible. Si, $AX = b \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow Id_n X = A^{-1}b \Rightarrow$

$X = A^{-1}b$. Así, existe solución. Para la unicidad, tomamos $U \in K^{n \times 1}$. Si U es solución, $AU = b$. Multiplicando ambos lados por A^{-1}, se tiene que $A^{-1}AU = A^{-1}b \Rightarrow U = A^{-1}b$.▯

<u>Aplicación</u>: Invertir matriz

1) Ampliar la matriz A (debe ser cuadrada) a invertir con Id_n: $(A|Id_n)$.
2) Reducir por filas. Si llego a algo de la forma $(Id_n|B) \Rightarrow B = A^{-1}$. Si obtengo alguna fila de ceros, la matriz no es inversible.

UNIDAD III: Espacios vectoriales y bases

Espacios y subespacios vectoriales

Definición: Sea K un cuerpo, V un conjunto no vacío, $+: V \times V \to V$, $\bullet: K \times V \to V$. Decimos que la terna $(V, +, \bullet)$ es un **k-espacio vectorial** (k-ev) si:

1) La suma satisface para $u, v, w \in V$:
   (i) $(u + v) + w = u + (v + w)$.
   (ii) $u + v = v + u$.
   (iii) Existe $0 \in V$ tal que $0 + v = v$.
   (iv) Para cada $v \in V$, existe $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.
2) La multiplicación por escalares satisface para $v, w \in V$; $a, b \in K$:
   (i) Existe $1 \in V$ tal que $1v = v$.
   (ii) $a(bv) = (ab)v$.
   (iii) $a(v + w) = av + aw$.
   (iv) $(a + b)v = av + bv$.

Los elementos de V son **vectores** y los elementos de K son **escalares**.

Obs: Si K' es un subconjunto de K, entonces K es un K'-espacio vectorial.

▶ **Propiedad**: Sea V un k-ev, $v \in V$ y $c \in K$.
a) $cv = 0 \Leftrightarrow c = 0 \vee v = (0, \ldots, 0)$
b) $-v = (-1)v$

Dem:

a) $(\Leftarrow)$ $0 \cdot v = (0 + 0)v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$.
   Luego, $0 = 0 \cdot v + (-0 \cdot v) = (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) = 0 \cdot v + \big(0 \cdot v + (-0 \cdot v)\big)$
   $= 0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v$.
   $\therefore\ 0 = 0 \cdot v$. Análogamente $c \cdot 0 = 0$
   $(\Rightarrow)$ Sea $v \in V, c \in K$ tal que $cv = 0$. Si $c = 0$, ya está. Asumimos $c \neq 0$.
   Como $c \neq 0, \exists\, c^{-1} \in K$ tal que $cc^{-1} = 1$. Entonces, $c^{-1} \cdot 0 = c^{-1}vc$. Ya probamos que $c^{-1} \cdot 0 = 0$. Entonces $0 = c^{-1}vc = c^{-1}cv = 1 \cdot v = v$.
b) Sabemos que $v + (-v) = 0$. Tenemos que $v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1)v$
   $= \big(1 + (-1)\big)v = 0 \cdot v = 0$. Como el opuesto es único, $(-1) \cdot v = -v$ ▯

Subespacios

Definición: Sea V un k-ev. Un subconjunto $W \subseteq V$ se dice **subespacio** de V si es un espacio vectorial respecto de $+$ y $\bullet$. Es decir, si se verifican:

a) $0 \in W$.
b) $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$.
c) $\lambda \in K, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$.

▶ **Teorema**: Un subconjunto $W \subseteq V$ no vacío es un subespacio $\Leftrightarrow (*) v + \lambda w \in W$,

$v, w \in W, \lambda \in K$.

Dem:

$(\Leftarrow)$ Sea W un subespacio. Tomemos $v, w \in W$ y $\lambda \in K$. Por definición de subespacios, $\lambda w \in W$ y $v + \lambda w \in W$.

(⇒) Sea $W \neq \emptyset$ un subconjunto tal que vale (∗). Tomemos $u \in W. u + (-1) = 0 \in W$ $(v = u, w = u, \lambda = -1)$ Por (∗), $v + w \in W$ $(v, w, \lambda = 1)$. Por último, si tomamos $v = 0$, obtenemos que $0 + \lambda w = \lambda w \in W$. ▯

▶ **Proposición**: Sea V un k-ev, $W_1, \dots, W_n$ subespacios de V.

Entonces $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ es un subespacio.

Obs: La unión de subconjuntos no es necesariamente un subespacio.

Dem: Tenemos que $W \neq \emptyset$, ya que los W_i son subespacios y por ende $0 \in W$.

Dados $v, w \in W, \lambda \in K$ se tiene que $v, w \in W_i\ \forall i \Rightarrow v + \lambda w \in W_i\ \forall i \Rightarrow v + \lambda w \in W$. ▯

Dependencia lineal

Definición: Sea V un k-ev. Dados $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ subconjunto, una **combinación lineal del conjunto** es una suma de la forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $< v_1, \dots, v_n > \subseteq V$ es un subespacio (subespacio generado por $v_1, \dots, v_n$).

Obs: Si $S \subseteq V, S$ no finito $\Rightarrow < S > = \{combinaciones\ lineales\ de\ finitos\ elementos\ de\ S\}$.

Definición: Un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ se dice **linealmente dependiente** (LD) si existe una combinación lineal que da cero de manera no trivial, o sea $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ no todos nulos tal que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Obs: Si $\vec{0}$ está en el conjunto de vectores, éstos son automáticamente LD.

Definición: Un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ se dice **linealmente independiente** (LI) si no es LD.

▶ **Proposición**: $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq K^n$ son LD ⇔ el sistema $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $A = (v_1 | \cdots | v_m) \in K^{n \times m}$ tiene solución no nula.

Dem: Por definición, $(v_1, \dots, v_m)$ son LD ⇔ $\exists x_1, \dots, x_m$ no todos nulos tal que $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = \vec{0}$. Tenemos que:

$$\left[v_1 = \left(v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(n)}\right) x_1\right] + \left[v_2 = \left(v_2^{(1)}, \dots, v_2^{(n)}\right) x_2\right] + \cdots + \left[v_m = \left(v_m^{(1)}, \dots, v_m^{(n)}\right) x_m\right] =$$

$$\left(v_1^{(1)} x_1 + \cdots + v_m^{(1)} x_m, v_1^{(2)} x_1 + \cdots + v_m^{(2)} x_m, \dots, v_1^{(n)} x_1 + \cdots + v_m^{(n)} x_m\right)$$

$$\begin{cases} v_1^{(1)} x_1 + \cdots + v_m^{(1)} x_m = 0 \\ v_1^{(2)} x_1 + \cdots + v_m^{(2)} x_m = 0 \\ \vdots \\ v_1^{(n)} x_1 + \cdots + v_m^{(n)} x_m = 0 \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \cdots & v_m^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{(n)} & \cdots & v_m^{(n)} \end{pmatrix} \text{ es la matriz del sistema. ▯}$$

Obs: Si $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq K^n$ y $m > n \Rightarrow$ son LD.

Obs 2: En K^n hay n vectores LI, pues tenemos que:

$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), 1 \leq i \leq n$. Si planteamos la matriz del conjunto $\{e_1, \dots e_n\}$, tenemos que:

$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = Id_n \Rightarrow Id_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ son LI. (Y además $K^n = < e_1, \dots, e_n >$)

<u>**Bases y dimensión**</u>

<u>**Definición**</u>: Sea V un k-ev. Llamamos **base *B*** al subconjunto de V que satisface:

1) B genera a V, es decir, $V = < B >$ (todos los vectores de V son combinación lineal de B).
2) B es LI.

▶ <u>**Proposición**</u>: $\{v_1, \dots, v_n\} \in K^n$ es base de K^n ⇔la matriz del sistema $A = (v_1| \dots |v_n)$ es inversible.

<u>**Dem**</u>: (⇒) Si es base, genera. Es decir, $\forall (w_1, \dots, w_n) \in K^n$, el sistema $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ tiene solución ⇒ A es inversible por teorema. (Sólo chequeamos una propiedad de base porque la matriz es cuadrada)

(⇐) Chequeamos que cumpla las condiciones de base:

1) Como A es inversible, el sistema $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ tiene solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ para cualquier $w_i \in K^n$ y por lo tanto genera.
2) Como $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene única solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, son LI.

∴ $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de K^n.▯

<u>**Obs**</u>: Si B es base de V, todo elemento $v \in V$ se escribe de manera **única** como combinación lineal de elementos de B.

<u>**Dem**</u>: Supongamos que $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n,\ v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n, v_i \in V;\ a_i, b_i \in B$.

Entonces $0 = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n$. Como B es LI, $(a_i - bi) = 0$ y, por lo tanto, $a_i = b_i$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$. ▯

▶ <u>**Teorema**</u>: Sea V un k-ev, $< v_1, \dots, v_n > = V$ y $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ LI. Entonces $n \geq m$.

<u>**Dem**</u>: Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ generan a V, dado $w_i \in V$ lo podemos escribir como combinación lineal:

$w_1 = a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n$ ↘

$\vdots \quad \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

$w_m = a_{1m} v_1 + \dots + a_{nm} v_n$ ↗

Sea $A \in K^{n \times m}$. Si $n < m$, el sistema $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene alguna solución no trivial $(b_1, \dots, b_m) \neq (0, \dots, 0)$. Como los $\{w_1, \dots, w_m\}$ son LI, $\begin{cases} a_{11} b_1 + \dots + a_{n1} b_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1m} b_1 + \dots + a_{nm} b_m = 0 \end{cases}$

$(0, \dots, 0) \neq w = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m = b_1(a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n) + \dots + b_m(a_{1m} v_1 + \dots + a_{nm} v_n)$

$= v_1(b_1 a_{11} + \dots + b_m a_{n1}) + \dots + v_n(b_1 a_{11} + \dots + b_m a_{n1}) = v_1 \cdot 0 + \dots + v_n \cdot 0 = (0, \dots, 0)$. ¡Absurdo!

Luego, $n \geq m$. ▯

Corolario: Si Ves un k-ev y B_1, B_2 son bases finitas de $V \Rightarrow B_1$ y B_2 tienen la misma cantidad de elementos.

Dem:

$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$. Como B_1 es base, generan y como B_2 es base, son LI $\Rightarrow n \geq m$.

$B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$. Como B_2 es base, generan y como B_1 es base, son LI $\Rightarrow m \geq n$.
$\therefore n = m$. ▯

Definición: Si V es un k-ev con finitos generadores, definimos su **dimensión** como el número de vectores que tiene cualquier base. Se denota $dim(V)$.

▶ **Proposición**: Sea V un k-ev, $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ generadores $\Rightarrow \exists B' \subseteq B$ que es base del espacio.

Dem: Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LI, entonces es una base de V. Si no es LI, alguno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los otros. Supongamos que

$v_i \in < v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n >$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideramos ahora

$B' =< v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n >$ un sistema de generadores de V. Si B' fuera LD, podemos seguir quitando los vectores que son combinación lineal de los demás hasta obtener una base. ▯

▶ **Proposición**: Sea $W \subseteq V, S \subseteq W$ un conjunto LI. Si W tiene dimensión finita $\Rightarrow S$ es finito y se extiende a una base. Es decir, si $S = \{v_1, \dots, v_r\}, \exists v_{r+1}, \dots, v_n \in W$ tal que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es base de W.

Dem: Similar a la demostración anterior pero agregando vectores que no sean combinación lineal de los otros. ▯

Suma de subespacios

Definición: Sean U, W subespacios de V. La suma es el conjunto

$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$, y cumple:

(i) $U + W$ es subespacio de V.
(ii) $U + W$ es el menor subespacio (con la inclusión) que contiene a U y W.
(iii) Si $\{u\}_{i \in I}$ y $\{w_j\}_{j \in J}$ son generadores de U y W respectivamente, entonces $\{u_i\} \cup \{w_j\}$ genera a $U + W$.

Dem:

(i) Como U y W son subespacios, $0 \in U, 0 \in W \Rightarrow 0 + 0 \in U + W \Rightarrow$la suma no es vacía. Sean $v, v' \in U + W, \lambda \in K$, veamos que $v + \lambda v' \in U + W$: Como $v, v' \in U + W$, existen $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$ tal que $v = u + w,\ v' = u' + w'$. Entonces $v + \lambda v' = (u + w) + \lambda(u' + w')$ $= u + w + \lambda u' + \lambda w'$. Si asociamos y conmutamos, tenemos que $u + \lambda u' \in U$ (por ser U un subespacio) y que $w + \lambda w' \in W$ (porque W es subespacio). Luego, $v + \lambda v' \in U + W$.

(ii) Para cada $u \in U$ tenemos que $u = u + 0 \in U + W$, ya que $0 \in W$. Luego, $U \subseteq U + W$. Análogamente, $W \subseteq U + W$. Sea Y un subespacio de V que contiene a U y W. Queremos ver que $U + W \subseteq Y$. Sea $v \in U + W$. Por definición, $\exists u \in U, w \in W$ tal que $v = u + w$. Como $U \subseteq Y$ y $W \subseteq Y$ se tiene que $u, w \in Y$. Como Y es un subespacio, $u + w \in Y \Rightarrow v \in Y$. Luego, $U + W \subseteq Y$.

(iii) Sea $v \in U + W$ tal que $v = u + w, u \in U, w \in W$. Como $\{u_i\}_{i \in I}$ genera a U, existen $a_i \in K$ $(i \in I)$ con $a_i = 0$ salvo para finitos $i \in I$ tales que $u = \sum_{i \in I} a_i u_i$. De la misma manera, existen $b_j \in K$ $(j \in J)$ tales que $w = \sum_{j \in J} b_j w_j$
Luego, $v = \sum_{i \in I} a_i u_i + \sum_{j \in J} b_j w_j$ resulta una combinación lineal de $\{u\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J} \subseteq U + W$. ▯

▶ **Teorema**: Sean $U, W \subseteq V$ subespacios de dimensión finita. Entonces $U + W$ es de dimensión finita y $dim(U + W) + dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W)$.

Dem: Como U y W tienen dim. finita, $\exists S_u, S_w$ conjuntos finitos de generadores de U y W respectivamente. Por el teorema de la suma de subespacios, $S = S_u + S_w$ genera a $U + W$. Como S es finito por ser unión de conjuntos finitos, se tiene que $U + W$ es de dim finita. Si $U = 0 \Rightarrow U + W = W$ y $U \cap W = 0 \Rightarrow$ vale el teorema. Lo mismo si $W = 0$.

Supongamos ahora que $U, W \neq 0$. Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ base de $U \cap W \Rightarrow dim(U \cap W) = r$. Como $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq U$ es LI, $\exists u_{r+1}, \dots, u_m \in U$ tal que $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ es base de U, y por lo tanto $dim(U) = m$. Análogamente, $\exists w_{r+1}, \dots, w_n \in W$ tal que $\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es base de W y por ende $dim(W) = n$.

Afirmación: $B = \{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m, w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es base de $U + W$.

Dem de afirmación:

$$Como\ \{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}\ es\ base\ de\ U\ \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{i=r+1}^{m} a_i u_i$$

$$Como\ \{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}\ es\ base\ de\ W\ \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{r} b_i v_i + \sum_{i=r+1}^{n} b_i w_i$$

$$\Rightarrow v = \left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{i=r+1}^{m} a_i u_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} b_i v_i + \sum_{i=r+1}^{n} b_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{r} (a_i + b_i) v_i + \sum_{i=r+1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=r+1}^{n} b_i w_i.$$

$Luego, U + W =< B >$. Veamos que B es LI. Sean $a_i, b_j, c_k \in K$ tales que

$$0 = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=r+1}^{m} b_j u_j + \sum_{k=r+1}^{n} c_k w_k \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=r+1}^{m} b_j u_j = \sum_{k=r+1}^{n} -c_k w_k \Rightarrow \sum_{k=r+1}^{n} -c_k w_k \in U \cap W.$$

$$Como\ \{v_1, \dots, v_r\}\ es\ base\ de\ U \cap W, \exists d_i \in K\ tal\ que\ \sum_{k=r+1}^{n} -c_k w_k = \sum_{k=r+1}^{n} d_i v_i$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=r+1}^{n} d_i v_i + \sum_{k=r+1}^{n} c_k w_k\ .\ Como\ \{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}\ es\ LI\ \Rightarrow d_1 = \dots = d_r = 0$$

$$y\ 0 = c_{r+1}, \dots, c_n.\ Reemplazando:\ \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{j=r+1}^{m} b_j u_j = 0$$

Como $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ $es\ LI\ \Rightarrow a_1 = \dots = a_r = 0 = b_1 = \dots = b_m$

Luego, $dim(U + W) = |B| = r + (m - r) + (n - r) = m + n - r = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$ □

Suma directa

Definición: Sean U, W dos subespacios de V. Decimos que V es la **suma directa de U y W** si $V = U + W, U \cap W = 0$. Se denota $V = U \oplus W$.

▶ **Proposición**: Si $V = U \oplus W \Rightarrow$ Cada $v \in V$ se escribe de modo único como $v = u + w,\ u \in U, w \in W$.

Dem: Como $V = U + W$ sabemos que cada $v \in V$ se escribe $v = u + w,\ u \in U, w \in W$. Veamos la unicidad

Fijamos $v \in V$ tal que $v = u + w, v = u' + w'$ donde $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$. Entonces,

$u - u' = w - w' \in U \cap W = \{0\}$. Luego, $u = u'$ y $w = w'$. □

Aplicación: Calcular Base

1) Si tenemos $V = < v_1, \ldots, v_n >$, sólo basta ver que sean LI. Para ello, colocar $v_1, .., v_n$ como filas de una matriz y reducir. Si no obtengo filas nulas, son LI. Si hubiera filas nulas, las quito y me quedo con las filas no nulas, que serán base de V.
2) Si tenemos V caracterizado por ecuaciones, las igualamos a 0, armamos la matriz y resolvemos el sistema. Los vectores obtenidos serán LI y generarán V.

Aplicación: Pasar de base a ecuaciones

1) Si $S = < v_1, \ldots, v_n >$, primero vemos que sean LI. Si alguno es combinación lineal de los demás, lo quitamos. De los restantes, los colocamos como columnas de una matriz y ampliarla con las variables necesarias:

$\left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & \cdots & v_n & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \end{array}\right)$. Reducir la matriz. Las ecuaciones igualadas a 0 son las ecuaciones que caracterizan a S.

<u>UNIDAD IV</u>: Transformaciones lineales y cambios de base

<u>Definición</u>: Sean V, W dos k-ev. Una **transformación lineal de V en W** (TL) es una función $f: V \to W$ tal que:

a) $f(v+v') = f(v) + f(v')\ \forall v, v' \in V$.
b) $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall v \in V, \lambda \in K$.

<u>Obs</u>: Si $f: V \to W$ es una TL $\Rightarrow f(0_v) = 0_w$ y $f(-v) = -f(v)\ \forall v \in V$.

<u>Dem</u>: $f(0_v) = f(0_v + 0_v) = f(0_v) + f(0_v) \Rightarrow f(0_v) = 0_w$.

$f(-v) = f\big((-1)v\big) = (-1)f(v) = -f(v)$. ▯

▶ <u>Proposición</u>: Sea $f: V \to W$ una TL.
a) Si U es un subespacio de $V \Rightarrow f(U)$ es subespacio de W.
b) Si Z es subespacio de $W \Rightarrow f^{-1}(Z)$ es subespacio de V.

<u>Dem</u>:

a) Como $U \neq \emptyset \Rightarrow f(U) \neq \emptyset$. Sean $w, w' \in f(U)$: $\exists u, u' \in U$ tal que $w = f(u), w' = f(u')$. Entonces para cada $\lambda \in K, w + \lambda w' = f(u) + \lambda f(u') = f(u) + f(\lambda u') = f(u + \lambda u')$. Como U es un subespacio, $u + \lambda u' \in U$. Luego, $w + \lambda w' = f(u + \lambda u') \in f(U)$. Por el teorema que caracteriza subespacios, $f(U)$ es subespacio de W.
b) Como $f(0_v) = 0_w \in Z$, tenemos que $0_v \in f^{-1}(Z)$. Sean $v, v' \in f^{-1}(Z), \lambda \in K$. Por definición, $f(v), f(v') \in Z$. Como Z es un subespacio, $f(v) + \lambda f(v') \in Z$. Por ser f una TL, $f(v) + \lambda f(v') = f(v + \lambda v') \Rightarrow v + \lambda v' \in f^{-1}(Z)$. Por el mismo teorema que en a), $f^{-1}(Z)$ es subespacio de V.▯

▶ <u>Proposición</u>: Sea V un k-ev de dimensión finita, $n = \dim(V)$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Para cada $x \in V$, existen únicos $a_1, \dots, a_n \in K$ tq $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$

<u>Dem</u>:

Sea $x \in V$. Como B genera a V, existen $a_1, \dots, a_n \in K$ que verifican $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Supongamos que existen $b_1, \dots, b_n \in K$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \Rightarrow 0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$

$= \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i - b_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i$. Como $v_1, \dots, v_n$ es LI, se tiene que $a_i - b_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i$. ▯

<u>Definición</u>: Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, el vector $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ se dice **vector de coordenadas de x en la base B**. Se denota $(x)_B$.

<u>Obs</u>: $(v + v')_B = (v)_B + (v')_B$; $(\lambda v)_B = \lambda (v)_B\ \ \forall v, v' \in V$; $\lambda \in K$. Es decir, $(\bullet)_B: V \to K^n$ es una TL.

<u>Dem</u>: Fijemos $v, v' \in V, \lambda \in K$. Sea $(a_1, \dots, a_n) = (v)_B, (b_1, \dots, b_n) = (v')_B$. Entonces tenemos que:

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\, , v' = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \ \to v + v' = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i$. $\therefore (v + v')_B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

$= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (v)_B + (v')_B$. Ahora, $\lambda v = \lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) v_i$

$\therefore (\lambda v)_B = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda (a_1, \dots, a_n) = \lambda (v)_B$.▯

▶ **Teorema**: Sean V, W dos k-ev, $dim(V) = n$ (finito). Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $w_1, \dots, w_n \in W$ arbitrarios. Entonces **existe una única TL** $f: V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i$.

Dem: Veamos que para cada $v \in V$, $f(v)$ tiene un único valor posible. Como B es base de V, podemos escribir cada elemento de V como $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ de modo único (por teorema sobre bases y combinación lineal). Si existiera f, $f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$.

Para la existencia, definimos la función $f: V \to W, f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$, donde $(a_1, \dots, a_n) = (v)_B$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}, v_i = 0v_1, \dots .,1v_i, 0v_{i+1}, \dots ,0v_n \Rightarrow (v_i)_B = (0, \dots ,1,0, \dots ,0) \Rightarrow$

$f(v_i) = 0w_1, \dots .,1w_i, 0w_{i+1}, \dots ,0w_n = w_i$.

Ahora falta ver que f es TL. Sea $v, v' \in V; \lambda \in K, (v)_B = (a_1, \dots, a_n); (v')_B = (b_1, \dots, b_n)$.

$$f(v + v') = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i w_i = (v)_B + (v')_B$$

$f(\lambda v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \lambda (v)_B$ Luego, f es una TL tal que $f(v_i) = w_i \ \forall i \in \{i, \dots, n\}$. ▯

Núcleo e Imagen de una TL

Definición: Sean V, W dos k-ev, $f: V \to W$ una TL. Llamamos **núcleo de f** al conjunto $Nu(f) = \{v \in V: f(v) = 0\}$ (también se denota $Ker(f)$).

Obs: $Nu(f)$ es un subespacio de V

Definición: Llamamos **imagen de f** al conjunto $Im(f) = f(v)$, o sea:

$Im(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n: \exists v_1, \dots, v_n \ con \ f(v_1, \dots, v_n) = x_1, \dots, x_n\}$.

Definición: Sea $f: V \to W$, entonces:

(i) f se dice un **monomorfismo** si es inyectiva.
(ii) f se dice un **epimorfismo** si es suryectiva.
(iii) f se dice un **isomorfismo** si es biyectiva.

▶ **Proposición**: $f: V \to W$ es un isomorfismo $\Leftrightarrow Nu(f) = 0$.

Dem: ($\Rightarrow$) Asumimos que f es inyectiva. Como $f(0) = 0$, si $v \in Nu(f) \Rightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ porque f es inyectiva. Luego, $Nu(f) = 0$

($\Leftarrow$) Asumimos que $Nu(f) = 0$. Sean $v, v' \in V$ tal que $f(v) = f(v')$. Luego, $0 = f(v0 - f(v')$

$\Rightarrow v - v' \in Nu(f) = 0$. Luego, $v = v'$ y así f es inyectiva. ▯

▶ **Proposición**: Sea $f: V \to W$ una TL. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de $V \Rightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $Im(f)$.

Dem: Tenemos que probar que $Im(f) =< \{f(v_1), \dots, f(v_n)\} >$

($\subseteq$)Si $w \in Im(f), \exists v \in V$ tal que $f(v) = w$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V, $\exists a_1, \dots, a_n \in K$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \qquad w = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \in < \{f(v_1), \dots, f(v_n)\} >.$$

($\supseteq$) Como cada $f(v_i) \in Im(f)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, vale la inclusión. $\square$

Composición e inversa de una TL

▶ **Proposición**: Sean V, W, Z k-ev, $f: V \to W, g: W \to Z$ dos TL $\Rightarrow g \circ f: V \to Z$ es una TL.

Dem: Tomamos $v, v' \in V, \lambda \in K$.

$$g \circ f(v + v') = g\big(f(v + v')\big) = g\big(f(v) + f(v')\big) = g\big(f(v)\big) + g\big(f(v')\big) = g \circ f(v) + g \circ f(v')$$

$$g \circ f(\lambda v) = g\big(f(\lambda v)\big) = g\big(\lambda f(v)\big) = \lambda g\big(f(v)\big) = \lambda g \circ f(v) \square$$

▶ **Proposición**: Sean V, W dos k-ev, $f: V \to W$ un isomorfismo. Entonces $f^{-1}: W \to V$ es una TL.

Dem: Ya sabemos que f^{-1} es biyectiva. Veamos que es TL. Fijamos $w, w' \in W, \lambda \in K$. Como f es biyectiva, $\exists v, v' \in V$ tal que $f(v) = w, f(v') = w'$. O sea, $f^{-1}(w) = v, f^{-1}(w') = v'$.

Ahora, $w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v') \Rightarrow f^{-1}(w + w') = v + v' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$

Por otro lado, $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \Rightarrow f^{-1}(\lambda w) = \lambda v = \lambda f^{-1}(w)$. $\square$

Espacios vectoriales de dimensión finita

▶ **Teorema**: Sean V, W dos k-ev, V de dimensión finita, $f: V \to W$ una TL. Entonces $dim(V) = dim\big(Nu(f)\big) + dim\big(Im(f)\big)$

Dem: Sean $n = dim(V), m = dim\big(Nu(f)\big)$. Entonces $0 \leq m \leq n$. Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de $Nu(f)$. Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ es LI, $\exists v_{m+1}, \dots, v_n \in V$ tal que $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es base de V.

Ahora bien, como $\{f(v_1), \dots, f(v_m), f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ generan $Im(f)$ y $f(v_1) = \cdots = f(v_n)$=0 porque $v_1, \dots, v_n \in Nu(f)$, se tiene que $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ genera a $Im(f)$. Sean $a_{m+1}, \dots, a_n \in K$ tal que $0 = a_{m+1} f(v_{m+1}) + \cdots + a_n f(v_n) \Rightarrow f(a_{m+1} v_{m+1} + \cdots + a_n v_n) = 0$, es decir,

$v = a_{m+1} v_{m+1} + \cdots + a_n v_n$. Sean $b_1, \dots, b_m \in K$ tal que $v = b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m$

Ahora, $0 = v - v = (b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m) - (a_{m+1} v_{m+1} + \cdots + a_n v_n)$

$= b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m + (-a_{m+1}) v_{m+1} + \cdots + (-a_n) v_n$. Como $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es base de V, tenemos que $b_1 = \cdots = b_m = 0 = a_{m+1} = \cdots = a_n$. Luego, $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ es LI y por lo tanto es base de $Im(f)$.

Ahora, $dim\big(Im(f)\big) = n - m = dim(V) - dim\big(Nu(f)\big)$. $\square$

Corolario: Sean V, W dos k-ev de dimensión n, $f: V \to W$ una TL. Entonces son equivalentes:

(a) f es un isomorfismo.
(b) f es un monomorfismo.
(c) f es un epimorfismo.

Dem:

$(a) \Rightarrow (b)$ Si f es biyectiva, también es inyectiva.

$(b) \Rightarrow (c)$ Asumimos que f es inyectiva tal que $Nu(f) = 0 \Rightarrow dim\big(Im(f)\big) = n$. Pero $Im(f)$ es un subespacio de W, y $dim(W) = n$. Entonces $Im(f) = W$ y por lo tanto f es suryectiva.

$(c) \Rightarrow (a)$ Asumimos que f es suryectiva, falta ver que es inyectiva. Sabemos que $Im(f) = W \Rightarrow dim\big(Nu(f)\big) = dim(V) - dim\big(Im(f)\big) = n - n = 0$. Luego, $Nu(f) = 0$, y por la propiedad que relaciona núcleo de TL e inyectividad, f es inyectiva. $\square$

Obs: El corolario no vale si la dimensión no es finita.

Matrices y transformaciones lineales

Definición: Sean V, W dos k-ev de dimensión finita, $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Sea $f: V \to W$ una TL.

Para cada $j = 1, \dots, n$, $f(r_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_i$, la matriz de f con respecto a las bases

B_1 y B_2 es $[f]_{B_2}^{B_1} = (a_{ij}) \in K^{mxn}$.

Obs: En general, si $A \in K^{mxm}$ y consideramos la TL $f: K^n \to K^m$:

$f_A(X) = AX \Rightarrow$ la matriz de f_A con respecto a las bases B_1 y $B_2 \in K^n$ y K^m es $[f_A]_{B_2}^{B_1} = A$

▶ **Proposición**: Sean V, W k-ev de dimensión finita, B_1 y B_2 las respectivas bases $\Rightarrow$ para cada $x \in V$, $(f_{(x)})_{B_2} = [f]_{B_2}^{B_1}(x)_{B_1}$

Dem:

Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$. Fijemos $x \in V$ tal que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$

$(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Llamemos $[f]_{B_2}^{B_1} = (a_{ij}) \to f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right) w_i$$

$$\Rightarrow (f(x))_{B_2} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [f]_{B_2}^{B_1}(x)_{B_1}. \square$$

Matriz de la composición y matriz de la inversa

▶ **Proposición**: Sean V, W, U k-ev de dimensión finita, B_1, B_2 y B_3 las respectivas bases, $f: V \to W$, $g: W \to U$ dos TL. Entonces $[g \circ f]_{B_3}^{B_1} = [g]_{B_3}^{B_2}[f]_{B_2}^{B_1}$.

Dem: Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}, B_3 = \{u_1, \dots, u_r\}$. Llamemos $A = [f]_{B_2}^{B_1} \in K^{m\times n}$, $B = [g]_{B_3}^{B_2} \in K^{r\times m}$, $C = [g \circ f]_{B_3}^{B_1} \in K^{r\times n}$. Por definición:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \;, g(w_i) = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} u_k \,, g \circ f(v_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{kj} u_k$$

$$\Rightarrow g\left(f(v_j)\right) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki} u_k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{ki} u_k$$

$= \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_{ki}\right)u_k$. Como la expresión de $g \circ f(v_j)$ en la base B_3 es única, se tiene que:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_{ki} = (BA)_{ij} \Rightarrow C = BA.$$ ▯

<u>Corolario</u>: Sean V, W dos k-ev de dimensión finita y $f: V \to W$ un isomorfismo. Sean B_1 y B_2 las respectivas bases de V y W. Entonces $[f^{-1}]_{B_1}^{B_2} = \left([f]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$.

<u>Dem</u>: $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$. Notar que $[Id_V]_{B_1}^{B_1} = Id_n = [Id_W]_{B_2}^{B_2}$. Como f es un isomorfismo, $f \circ f^{-1} = Id_W; f^{-1} \circ f = Id_V$. Usando la proposición de la matriz compuesta de TL, tenemos que $[f]_{B_2}^{B_1} \circ [f^{-1}]_{B_1}^{B_2} = [f \circ f^{-1}]_{B_2}^{B_2} = Id_n$ y $[f^{-1}]_{B_1}^{B_2} \circ [f]_{B_2}^{B_1} = [f^{-1} \circ f]_{B_1}^{B_1} = Id_n$. ▯

<u>**Cambio de base**</u>

<u>**Definición**</u>: Sea V un k-ev de dimensión $n, B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ dos bases de V.

Para cada $j = 1, \dots, n$ escribimos $v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_i$, $a_{ij} \in K$.

La **matriz de cambio de base de B_1 a B_2** es la matriz $C_{B_2}^{B_1} = a_{ij} \in K^{n\text{x}n}$ (la j-ésima columna de $C_{B_2}^{B_1}$ son las coordenadas de v_j en la base B_2)

<u>**Obs**</u>: $C_{B_2}^{B_1} = [Id_V]_{B_2}^{B_1}$

▶ <u>**Proposición**</u>: Sea V un k-ev de dimensión finita, B_1 y B_2 bases de V. Para cada

$x \in V, (x)_{B_2} = C_{B_2}^{B_1}(x)_{B_1}$.

<u>**Dem**</u>: $C_{B_2}^{B_1}(x)_{B_1} = [Id_V]_{B_2}^{B_1}(x)_{B_1} = [Id_V(x)]_{B_2} = (x)_{B_2}$. ▯

▶ <u>**Proposición**</u>: Sea V un k-ev de dimensión finita, B_1, B_2, B_3 bases de V.

a) $C_{B_3}^{B_1} = C_{B_3}^{B_2}C_{B_2}^{B_1}$
b) $C_{B_1}^{B_2} = \left(C_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

<u>**Dem**</u>:

(a) $C_{B_3}^{B_1} = [Id_V]_{B_3}^{B_1} = [Id_V \circ Id_V]_{B_3}^{B_1} = [Id_V]_{B_3}^{B_2}[Id_V]_{B_2}^{B_1} = C_{B_3}^{B_2}C_{B_2}^{B_1}$.

(b) $C_{B_1}^{B_2} = [Id_V]_{B_1}^{B_2} = [(Id_V)^{-1}]_{B_1}^{B_2} = \left([Id_V]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} = \left(C_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$. ▯

▶ <u>**Proposición**</u>: Sean V, W dos k-ev de dimensión finita, B_1, B_1' dos bases de V; B_2, B_2' dos bases de W; $f: V \to W$ una TL entonces: $[f]_{B_2'}^{B_1'} = C_{B_2'}^{B_2}\,[f]_{B_2}^{B_1}C_{B_1}^{B_1'}$.

<u>**Dem**</u>: $f = Id_W \circ f \circ Id_V \Rightarrow [f]_{B_2'}^{B_1'} = [Id_W \circ (f \circ Id_V)]_{B_2'}^{B_1'} = [Id_W]_{B_2'}^{B_2}[f \circ Id_V]_{B_2}^{B_1'} = [Id_W]_{B_2'}^{B_2}[f]_{B_2}^{B_1}\,[Id_V]_{B_1}^{B_1'}$

$= C_{B_2'}^{B_2}\,[f]_{B_2}^{B_1}C_{B_1}^{B_1'}$. ▯

▶ **Proposición**: Sean V, W dos k-ev de dimensión finita, $f: V \to W$ TL. Entonces f es un isomorfismo $\Leftrightarrow \exists\, B_1, B_2$ bases de V y W tal que $[f]_{B_2}^{B_1}$ es inversible.

Dem:($\Rightarrow$) Sabemos que si f es un isomorfismo, $\Rightarrow [f]_{B_2}^{B_1}$ es inversible para cualquier par de bases B_1, B_2 de V y W respectivamente.

($\Leftarrow$) Asumimos que existen bases B_1, B_2 de V y W respectivamente tal que $[f]_{B_2}^{B_1}$ es inversible. En particular, como $[f]_{B_2}^{B_1}$ es cuadrada, $dim(V) = n = dim(W)$.Para ver que es un isomorfismo, basta ver que sea un monomorfismo ($Nu(f) = 0$).

Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$, $[f]_{B_2}^{B_1} = (a_{ij})\ 0 \le i, j \le n = A$. Sea $v \in Nu(f)$ tal que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j,\ x_j \in K \Rightarrow (v)_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \text{Como } v \in Nu(f) \Rightarrow f(v) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(f(v)\right)_{B_2} = [f]_{B_2}^{B_1}(v)_{B_1} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \text{Como } A \text{ es inversible,} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 0.$$ ▯

Rango fila de una matriz

Sea A$\in K^{m\times n}$ entonces escribimos A=$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ como filas; A=$\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ como columnas $\to F_i \in K^{1\times n} \simeq K^n, C_j \in K^{m\times 1} \simeq K^m$

- El **espacio fila** de A es el subespacio de K^n generado por $F_1, \dots, F_n$
- El **espacio columna** de A es el subespacio de K^n generado por $C_1, \dots, C_n$
- El **rango fila** de A es la dimensión del espacio fila. Se denota $vgf(A)$.
- El **rango columna** de A es la dimensión del espacio columna. Se denota $vgc(A)$.

▶ **Teorema**: Si $A \sim B \Rightarrow$ los espacios fila de A y B coinciden $\Rightarrow vgf(A) = vgf(B)$.

Dem: Si B se obtiene a partir de A mediante operaciones por fila, las filas de B son combinaciones lineales de las filas de A.Entonces cualquier combinación lineal de las filas de B es automáticamente una combinación lineal de las filas de A. Entonces $vgf(B) \subseteq vgf(A)$. Como las operaciones por fila son reversibles, haciendo el mismo proceso obtenemos que $vgf(A) \subseteq vgf(B)$. Luego, $vgf(A) = vgf(B)$. ▯

Lema: $A \in K^{mxn}, S = \{x \in K^n : Ax = 0\} \Rightarrow dim(S) = n - vgc(A)$

Dem: Consideremos $f_A: K^n \to K^m, f_A(x) = AX$. Notar que $S = Nu(f_A)$.

Como $C_i = Ae_i - f_A(e_i)$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $K^n \Rightarrow \{f_A(e_1) = C_1, \dots, f_A(e_n) = C_n\}$ genera $Im(f_A)$, es decir, $Im(f_A)$ es el espacio columna de A y por lo tanto $vgc(A) = dim\big(Im(f_A)\big) = n - dim\big(Nu(f_A)\big) = n - dim(S)$. ▯

Definición: El **rango** de A es $vg(A) = vgf(A) = vgc(A)$

▶ **Teorema**: Sea $A \in K^{m\times n} \Rightarrow vgf(A) = vgc(A)$

Dem: Sea $S = \{x \in K^n : AX = 0\}$. Sea R una MERF tal que $A \sim R$ y tal que $vgf(A) = vgf(R)$, (teorema sobre matrices equivalentes por filas y rango fila) y además $S = \{x \in K^n : RX = 0\}$.

Escribimos $R = \begin{pmatrix} F_1' \\ \vdots \\ F_r' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donde r es el número de filas no nulas de R. Como R es MERF, $vgf(R) = r$ ya que $F_1', \dots, F_r'$ son LI, sus elementos principales están en las posiciones $k_1 < \dots < k_r$. Ahora, $dim(S)$ coincide con el mismo número de variables libres $n - r$.

Por lema, $vgc(A) = n - dim(S) = n - (n - r) = r = vgf(R) = vgf(A)$. ▯

<u>**Lema**</u>: Sean V, V', V'' k-ev, $f: V \to V', g: V'' \to V$ dos TL $\Rightarrow$ $Nu(f) \cap Im(g) = g(Nu(f \circ g))$

<u>**Dem**</u>: ($\subseteq$) Sea $v \in Nu(f) \cap Im(g)$ tal que $f(v) = 0$ y $\exists x \in V''$ tal que $v = g(x)$. Ahora, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(v) = 0 \Rightarrow x \in Nu(f \circ g)$.

($\supseteq$) $Sea\ v \in g(Nu(f \circ g))$ tal que $\exists x \in Nu(f \circ g)$ tal que $v = g(x)$. Entonces $v \in Im(g)$ y $f(v) = f(g(x)) = f \circ g(x) = 0 \Rightarrow v \in Nu(f \circ g)$▯

<u>**Aplicación**</u>: Calcular núcleo e Imagen de una TL.

1) Para el núcleo. Si tenemos $T: V \to W$, proponemos $Nu(f) = \{v \in V: f(v) = 0\}$. Obtener las ecuaciones planteando un sistema homogéneo y resolverlo.
2) Para la imagen. Debemos calcular una base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de V y aplicarle T a sus elementos. Luego, $Im(T) =< T(b_1), \dots, T(b_n) >$.

<u>**Aplicación**</u>: ¿Cómo hacer cambios de base?

1) Si tengo la transformación lineal $T(v) = w$, $T: V \to V$
   - La matriz de cambio de base con respecto a la base canónica es:

   $[T]_C^C = (T_{(e_1)} \quad \cdots \quad T_{(e_n)})$ → Aplicar T a la base canónica de V y ponerlos como columna.

   - Si tengo una base B =$\{v_1, \dots, v_n\}$:
     $[I]_C^B$=$(v_1 \quad \cdots \quad v_n)$ → poner los vectores de B como columna.
     $[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$
   - Si me piden $[T]_D^B$ $\Rightarrow debo\ calcular$: $[I]_D^C[T]_C^C[I]_C^B$
2) $T(v) = w$, $T: V \to W$
   - $[T]_D^B$ → debo calcular: $[I]_D^{C'}[T]_{C'}^C[I]_C^B$ donde $C\ es$ base de $V\ y\ C'$ es base de W.
   - $[T]_{C'}^C$ → aplicar Ta C. Colocar vectores en columna.
   - $[I]_C^B$ →poner los vectores de B como columna (B y C son bases del mismo espacio)
   - $[I]_D^{C'}$ debo calcular $[I]_{C'}^D$ → poner los vectores de D como columna y luego invertir la matriz.

<u>**Aplicación**</u>: Decidir si existe una TL $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,0) = (4,3,5)$,

$f(0,1,2) = (2,3,1)$.

1) Notar que $\{(1,1,0), (0,1,2)\}$ es LI. Podemos extenderlo a una base de $\mathbb{R}^3$:
   $B = \{(1,1,0), (0,1,2), (0,1,0)\}$
2) Usando el teorema, existe $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,0) = (4,3,5)$,
$f(0,1,2) = (2,3,1)\ y\ f(0,1,0) = (1,3,2)$(este último es arbitrario)
3) Luego, $(x, y, z) = a(1,1,0) + b(0,1,2) + c(0,1,0) = (a, a + b + c, 2b) \Rightarrow a = x$,

$$b = \frac{z}{2}, c = -x - y - \frac{z}{2}$$

$$f(x, y, z) = xf(1,1,0) + \frac{z}{2} f(0,1,2) + \left(-x - y - \frac{z}{2}\right) f(0,1,0)$$

$$f(x, y, z) = x(4,3,5) + \frac{z}{2}(2,3,1) + \left(-x - y - \frac{z}{2}\right)(1,3,2)$$

$$f(x, y, z) = \left(3x + y + \frac{z}{2}, 3y, 3x + 2y - \frac{z}{2}\right)$$

<u>UNIDAD V</u>: Formas multilineales y determinantes

<u>**Definición**</u>: Una **forma bilineal** de V en W (k-ev) es una función $f: V \to W$ que es "lineal en cada variable".

$f(v + v', u) = f(v,u) + f(v', u);\ f(\lambda v, u) = \lambda f(v,u)\ \forall\ v, v', u\ \in V;\ \lambda \in\ K$

$f(v, u + u') = f(v,u) + f(v, u');\ f(v, \lambda u) = \lambda f(v,u)\ \forall\ v, u, u'\ \in V;\ \lambda \in\ K$

<u>**Obs:**</u> Muchas veces se considera el caso $V = W$.

<u>**Lema**</u>: $f(u, v) = [u]_B^t [f]_B [v]_B$

<u>**Definición**</u>: F se dice **no degenerada** si $[F]_B$ es invertible (no depende de la base).

<u>**Definición**</u>: Una función $F: V \times \ldots \times V \to K$ se dice **r-multilineal** si es lineal en cada entrada:

$F(v_1, \ldots, v_i + v'_i, \ldots, v_r) = F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + F(v_1, \ldots, v'_i, \ldots, v_r)$

$F(v_1, \ldots, \lambda v_i \ldots, v_r)\ =\ \lambda\, F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$

Una forma multilineal $F: V \times \ldots \times V \to K$ se dice **alternada** si al evaluarla en una r-upla con dos entradas iguales, nos da 0.

$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = 0\ si\ v_i = v_j$

<u>**Obs**</u>: $F(v, u)\ =\ -F(u, v)$

▶ <u>**Propiedades**</u>:

Sea $F: V \times \ldots \times V \to K$ una forma r-multilineal alternada:

1) $F(v_1, \ldots, 0, \ldots, v_r) = 0$
2) $F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -F\big(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r\big), i < j.$
3) $F(v_1, \ldots, v_i + \alpha v_j, \ldots, v_j \ldots, v_r) = F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r)$

<u>**Dem**</u>:

1) Sea $v \in V, F(v_1, \ldots, 0, \ldots, v_r) = F(v_1, \ldots, 0v, \ldots, v_r) = 0F(v_1, \ldots, v, \ldots, v_r) = 0$
2) $0 = F\big(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r\big) = F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) + F\big(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_r\big) + F\big(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r\big) = F\big(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r\big) + F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r).$
3) $F(v_1, \ldots, v_i + \alpha v_j, \ldots, v_j \ldots, v_r) = F\big(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r\big) + \alpha F\big(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_r\big) = F\big(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r\big).$ ▯

<u>**Definición**</u>: Una función $F: K^{n \times n} \to K$ se dice **multilineal alternada** si lo es pasando a cada matriz $A \in K^{n \times n}$ como una n-upla de vectores columna de K^n

$A = (C_1, \ldots, C_n), C \in K^n \to F(A)\ =\ F(C_1, \ldots, C_n)$

Por ejemplo, $F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = F\left(\binom{a}{c}, \binom{b}{d}\right)$

▶ <u>**Teorema**</u>: Sea $\lambda \in K \Rightarrow$ Existe una única forma multilineal alternada $F: K^{n \times n} \to K$ tal que $F(Id_n) = \lambda$.

Definición: La única forma multilineal alternada $F: K^{n\times n} \to K$ tal que $F(Id_n) = 1$ se denomina **determinante.** La notación es $det(A), A \in K^{n\times n}$.

- En $K^{2\times2}$, $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- En $K^{3\times3}$, $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - idb$

Definición: Dada $A \in K^{n\times n}$, $1 \le i, j \le n$, se denota por $A(i|j)$ a la matriz que se obtiene de quitar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

Propiedad: Sea $A \in K^{n\times n}$, $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\blacksquare det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\, det(A(i|k)) \quad \to \text{ Desarrollo por la i} - \text{ésima fila}$$

$$\blacksquare det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki}\, det(A(k|i)) \quad \to \text{ Desarrollo por la i} - \text{ésima columna}$$

▶ **Proposición**: Sea $A \in K^{n\times n} \Rightarrow det(A^t) = det(A)$

Dem: Por inducción en n. $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Para $n = 1$, no hay que probar nada. Asumimos que vale para n. Sea $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$, notar que $A^t(i|j) = (A(j|i))^t$, con lo cual:

$$det(A^t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k}\ (A^t)_{1k} det\big(A^t(1|k)\big)}_{\text{Desarrollo por la } 1^{er} \text{ fila}} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k}\ (A)_{k1} det\big(A(1|k)\big)^t$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{1+k}\ (A)_{k1} det\big(A(k|1)\big)}_{\text{Desarrollo por la } 1^{er} \text{ columna}} = det(A)$$

Obs: A partir de la proposición anterior, los cálculos que hacíamos por columnas los llevamos a cálculos por filas.

a) Si A tiene 2 filas iguales $\Rightarrow det(A) = 0$
b) Intercambiar 2 filas nos cambia el signo del determinante $\Rightarrow det(E^{ij}) = -1$
c) Multiplicar fila por λ nos altera el determinante en λ $\Rightarrow det(E^{i}_{\lambda}) = \lambda$
d) Si a la fila i le sumo la fila j multiplicada por un escalar, el determinante no cambia $\Rightarrow det\left(E^{(i,j)}_{\lambda}\right) = 1$

▶ **Proposición**: Si $A \in K^{n\times n}$ es triangular superior o inferior: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ (producto de la diagonal).}$$

Dem: Por inducción en n. Para $n = 1$ es trivial. Asumimos n y tomamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix}$

Desarrollando la última fila (notar que $a_{(n+1)k}$=0 excepto para $k = n + 1$)

$$det(A)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{(n+1)+k}a_{(n+1)k}det\big(A(n+1|k)\big)=(-1)^{2n+2}a_{(n+1)(n+1)}det\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=a_{(n+1)(n+1)}\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=\prod_{i=1}^{n+1}a_{ii}\ \square$$

Lema: Sea $F: K^{n\times n}\to K$ forma multilineal alternada tal que $F(Id_n)=\alpha\in K\ \Rightarrow\ F(X)=\ \alpha det(X)$

▶ **Proposición**: Sean A, B ∈ $K^{n\times n}$ ⇒ $det(AB)=det(A)\,det(B)$

Dem: Fijamos $A\in K^{n\times n}$. Definimos $f: K^{n\times n}\to\ f_A(X)=det\ (AX)$. Queremos probar que

$f_A(X)=det(A)det(X)$. Veamos que A es multilineal alternada y que $f_A(Id_A)=det(A)$

a) $f_A(Id_n)=det(AId_n)=det(A)$.
b) $f_A(X_1,\dots,\lambda X_i,\dots,X_n)=\det\big(A(X_1,\dots,\lambda X_i,\dots,X_n)\big)=det(AX_1,\dots,A\lambda X_i,\dots,AX_n)=$ $\lambda det(AX_1,\dots,AX_i,\dots,AX_n)=\lambda f_A(X_1,\dots.,X_i,\dots,X_n)$ ($X_1,\dots,X_n$ columnas de X).
c) $f_A(X_1,\dots,X_i+X_i',\dots,X_n)=det(AX_1,\dots,A(X_i+X_i'),\dots,AX_n)=det(AX_1,\dots,AX_i+AX_i',\dots,AX_n)=$ $det(AX_1,\dots,AX_i,\dots,AX_n)+det(AX_1,\dots,AX_i',\dots,AX_n)=f_A(X_1,\dots,X_i,\dots,X_n)+f_A(X_1,\dots,X_i',\dots,X_n)$.
d) $f_A(X_1,\dots,X_i,\dots,X_i,\dots,X_n)=det(AX_1,\dots,AX_i,\dots,AX_i,\dots,AX_n)=0\ (alternada)\square$

▶ **Teorema**: Sea $A\in K^{n\times n}$ ⇒ A es inversible ⇔ $det(A)\neq 0$

Dem: (⇒)Asumimos que A es inversible. Luego, $\exists B\in K^{n\times n}$ tal que $AB=Id_n$. Entonces $1=det(Id_n)=$ $det(AB)=det(A)det(B)$.

(⇐)Por el contrarrecíproco. Asumimos que A no es inversible. Entonces $A\sim E$, donde E es una MERF con su última fila nula. Por lo visto antes, $A=PE$ donde P es producto de marices elementales. Además, $det(E)=0$ (E tiene una fila nula) ⇒$det(A)=det(PE)=det(P)det(E)=0$, absurdo. $\square$

Corolario: Si A es inversible ⇒ $det(A^{-1})=(det(A))^{-1}$

Obs: Mediante operaciones elementales por fila, $A\sim B$ donde B es triangular superior o inferior. Usando el cálculo de determinantes de matrices elementales y en matrices triangulares, obtenemos un método alternativo para calcular determinantes:

$A\sim A_1\sim\cdots\sim B\Rightarrow B=E_n\cdots E_1A\ \Rightarrow det(B)=det(E_n)\dots det(E_1)det(A)$

Aplicación: Interpolación y matriz de Vandermonde

Dados $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ∈ K distintos, y $\beta_1,\dots,\beta_n$ ∈ K arbitrarios, queremos decidir si existe un polinomio de grado $\leq n-1$) tal que $P(a_i)=\beta_i\ \forall i=1,\dots,n$. Es decir, hallar $a_0,\dots,a_n$ coeficientes de

$P(t)\ =\ a_0+a_1\,t+\cdots+a_{n-1}\,t^{n-1}$ tal que:

$$\begin{cases}\beta_1=\ a_0+a_1\alpha_1+\cdots+a_{n-1}{\alpha_1}^{n-1}\\ \qquad\vdots\\ \beta_n=a_0+a_1\alpha_n+\cdots+a_{n-1}{\alpha_n}^{n-1}\end{cases}\to\begin{pmatrix}1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

La matriz A=$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n\\ {\alpha_1}^2 & \cdots & {\alpha_n}^2\\ {\alpha_1}^{n-1} & \cdots & {\alpha_n}^{n-1}\end{pmatrix}$ se llama matriz de Vandermonde.

<u>Afirmación</u>: Sea A=$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ {\alpha_1}^2 & \cdots & {\alpha_n}^2 \\ {\alpha_1}^{n-1} & \cdots & {\alpha_n}^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = \prod(\alpha_j - \alpha_i), 1 \leq i \leq j \leq n$

UNIDAD VI: Autovectores y autovalores

Definición: Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Decimos que A y B son **semejantes** si $\exists\ C \in K^{n\times n}$ inversible tal que $A = CBC^{-1}$. Se denota A~B

Obs: Sea $f: V \to V$ TL, B_1, B_2 bases de V, entonces:

$$[f]_{B_2} = C_{B_2}^{B_1}[f]_{B_1}C_{B_1}^{B_2} = C_{B_2}^{B_1}[f]_{B_1}\left(C_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \Rightarrow [f]_{B_1} \sim [f]_{B_2}$$

Definición: Sea V un k-ev, $f: V \to V$ una TL, entonces:

i) $\lambda \in K$ se dice un **autovalor** de f si $\exists\ v \in V, v \neq 0$ tal que $f(v) = \lambda v$.
ii) Si λ es un autovalor de f, cada vector $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$ se dice **autovector** de f de autovalor λ. El conjunto de todos los autovectores de autovalor λ se es el **autoespacio** y se denota V_λ (que es subespacio de V)

Definición: Sea $A \in K^{n\times n}$. λ se dice **autovalor** de A si $\exists\ v \in K^n$ tal que $Av = \lambda v$

Dado λ autovalor de A, $v \in K^n$ se dice **autovector** de A de autovalor λ si $Av = \lambda v$

Obs: λ es autovalor de $f \Leftrightarrow \forall B$ base de V, λ es autovalor de $[f]_B = [f]_B^B$

▶ **Teorema**: Sea $f: V \to V$ TL, entonces son equivalentes:

(i) λ es autovalor de f
(ii) Para cada base B de V, λ es autovalor de $[f]_B$
(iii) Para cada base B de V, $det(\lambda Id_n - [f]_B) = 0$

Dem:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $f: V \to V$ TL, B_1, B_2 bases de V, entonces $[f]_{B_2} = C_{B_2}^{B_1}[f]_{B_1}C_{B_1}^{B_2} = C_{B_2}^{B_1}[f]_{B_1}\left(C_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \Rightarrow [f]_{B_1} \sim [f]_{B_2}$. Luego, los autovalores de $[f]_{B_1}$ y $[f]_{B_2}$ están asociados a la misma TL

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea B una base de V. Entonces λ es un autovalor de $[f]_B \Leftrightarrow \exists x \in K^n, x \neq 0$ tal que

$[f]_B x = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \in K^n, x \neq 0\ tal\ que\ 0 = \lambda Id_n - [f]_B x = (\lambda Id_n - [f]_B)x$

$\Leftrightarrow \lambda Id_n - [f]_B\ no\ es\ inversible \Leftrightarrow det(\lambda Id_n - [f]_B) = 0$ ▯

Definición:

a) Sea V un k-ev, $f: V \to V$ una TL. Se dice que f es **diagonalizable** si ∃B base de V tal que $[f]_B$ es diagonal: $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in$ K
b) A ∈ $K^{n\times n}$ es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal.

▶ **Proposición**: $f: V \to V$ es diagonalizable ⇔ ∃B base de V tal que cada elemento de B es un autovector.

Definición: Sea A ∈ $K^{n\times n}$. El polinomio característico P_A de A es el polinomio

$P_A = det(XId_n - A) \in K_{[x]}$.

Obs: λ es autovalor de A ⇔ λ es raíz de P_A.

▶ **Proposición:** Si $A \sim A' \Rightarrow P_A = P_{A'}$.

Dem: Sea C inversible tal que $A = CA'C^{-1}$. Entonces $P_A = det(XId_n - A) = det(XId_n - CA'C^{-1}) = det(XCId_nC^{-1} - CA'C^{-1}) = det(C(XId_n - A')C^{-1}) = det(C)det(XId_n - A')det(C^{-1}) = det(XId_n - A') = P_{A'}$. ▯

Definición: Sea V un k-ev de dimensión finita, $f: V \to V$ una TL. El polinomio característico de f es $P_f = P_{[f]_B}$, donde B es base de V.

Obs:

1) Por lo anterior, P_f no depende de la base elegida: supongamos que T y T_0 son dos matrices asociadas a una TL $f : V \to V$, respecto a bases diferentes. Entonces sabemos que $T\ y\ T_0$ son semejantes, es decir, existe una matriz C inversible tal que $T_0 = CTC^{-1}$. Ahora: $det(\lambda Id_n - T_0) = det(\lambda CId_nC^{-1} - CTC^{-1}) = det(C(\lambda Id_n - T)C^{-1})$
$= det(C)det(\lambda Id_n - T)det(C^{-1}) = det(\lambda Id_n - T)$ ▯
2) λ es un autovalor de f ⇔ λ es raíz de P_f

Caracterización de matrices/transformaciones lineales diagonalizables

Definición: Sean $S_1, \dots, S_k$ subespacios de un k-ev W. Decimos que W es la **suma directa** de $S_1, \dots, S_r$ ($W = S_1 \oplus \dots \oplus S_r$) si $W = S_1 + \dots + S_r := \{s_1 + \dots + s_r : s_i \in S_i\}$ y para cada $w \in W$ existen únicos $s_1 \in S_1, \dots, s_r \in S_r$ tal que $w = s_1 + \dots + s_r$.

▶ **Proposición**: Sea W un k-ev, $S_1, \dots, S_r$ subespacios de W, son equivalentes:

i) $W = S_1 \oplus \dots \oplus S_r$
ii) $W = S_1 + \dots + S_r$ y $\forall\, j = 1, \dots, r$; $S_j \cap (S_1 + \dots + S_{j-1} + S_{j+1} + \dots + S_r) = 0$
iii) Si $B_1, \dots, B_r$ son bases de $S_1, \dots, S_r$ respectivamente $\Rightarrow B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ es una base de W.
iv) Si $W = S_1 + \dots + S_r \Rightarrow dim(W) = dim(S_1) + \dots + dim(S_r)$

Lema: Sea $f: V \to V$ una TL, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de f, $V_i = V_{\lambda i}$ los autoespacios asociados y $W = V_1 + \dots + V_r \Rightarrow W = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

Dem: Como $W = V_1 + \dots + V_r$, sólo basta ver que $V_j \cap \left(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_r\right) = 0$. Por inducción en r: Si $r = 2$, veamos que $V_1 \cap V_2 = 0$. Sea $v \in V_1 \cap V_2$. Como $v \in V_1, f(v) = \lambda_1 v$ y como $v \in V_2, f(v) = \lambda_2 v$. Entonces $0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$ y como $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \Rightarrow v = 0$.

Para el paso inductivo, asumimos que la suma de r autoespacios es directa. Veamos que

$V_j \cap \left(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_r\right) = 0$. Sea $v \in V_j \cap \left(V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_r\right)$.

Por un lado, $f(v) = \lambda_j v$, y por otro lado, $v = v_1 + \dots + v_{r+1}, v_i \in V_i$.

$\therefore f(v) = f(v_1) + f\left(v_{j-1}\right), f\left(v_{j+1}\right) + \dots + f(v_{r+1}) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1}v_{j-1} + \lambda_{j+1}v_{j+1} + \lambda_{r+1}v_{r+1}$

$\Rightarrow f(v) - f(v) = 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1}v_{j-1} + \lambda_{j+1}v_{j+1} + \lambda_{r+1}v_{r+1} - \lambda_j(v_1 + \dots + v_{r+1}) = \left(\lambda_1 - \lambda_j\right)v_1 + \dots + \left(\lambda_{j-1} - \lambda_j\right)v_{j-1} + \left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)v_{j+1} + \dots + \left(\lambda_{r+1} - \lambda_j\right)v_{r+1}$.

Notar que $\left(\lambda_i - \lambda_j\right) \in V_i$ para $i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, r+1\}$

Entonces tenemos por HI que $V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_{r+1} = V_1 \oplus \dots \oplus V_{j-1} \oplus V_{j+1} \oplus \dots \oplus V_{r+1}$

$\Rightarrow \left(\lambda_i - \lambda_j\right)v_i = 0\ \forall i \neq j \Rightarrow v_i = 0\ \forall i \neq j \Rightarrow v = 0$. ▯

▶ **Teorema**: Sea $f: V \to V$ una TL, V un k-ev de dimensión finita. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de f y $V_i = V_{\lambda i}$ los autoespacios asociados. Son equivalentes:

i) f es diagonalizable.

ii) El polinomio característico de f es $P_q = (x-\lambda_1)^{d_1} \dots (x-\lambda_r)^{d_r}$, $d_i = dim\ (V_i)$

iii) $dim(V_1) + \dots + dim(V_r) = dim\ (V)$

iv) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

Dem: $(i) \Rightarrow (ii)$ Asumimos que f es diagonalizable $\Rightarrow \exists B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de autovectores. A menos de reordenar los v_i, podemos asumir que $v_1, \dots, v_{d_1}$ son autovectores de autovalor λ_1,$v_{d_1+1}, \dots, v_{d_1+d_2}$ son autovectores de autovalor λ_2, etc.:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} d_1 \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} d_r \end{matrix} \Rightarrow P_q = det(xId_n - [f]_B) = det \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & x-\lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & x-\lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x-\lambda_r \end{pmatrix}$$

$= (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2} \dots (x-\lambda_r)^{d_r}$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Notemos que $gr(P_q) = dim(V) = n$. Asumimos que $P_q = (x-\lambda_1)^{d_1} \dots (x-\lambda_r)^{d_r} \Rightarrow n = d_1 + \dots + d_r$, que es lo que había que probar.

$(iii) \Rightarrow (iv)$Asumimos que $dim(V_1) + \dots + dim(V_r) = dim(V)$. Sea $W = V_1 + \dots + V_r$. Como los autovalores son distintos, $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Por ser suma directa, $dim(W) = dim(V_1) + \dots + dim(V_r)$

$= dim(V)$ por hipótesis.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Asumimos que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Sea B_i una base de cada V_i. Cada elemento de B_i es un autovector de autovalor λ_i. Por la proposición sobre sumas directas, $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ es base de V que consta de autovectores $\Rightarrow$ es diagonalizable. ▯

Obs: Sea λ una raíz de un polinomio P, entonces $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow x-\lambda | P \Rightarrow P = (x-\lambda)Q, Q \in K_{[x]}$

La **multiplicidad** de λ es el entero $m \geq 1$ tal que $(x-\lambda)^m | P$, pero $(x-\lambda)^{m+1} \nmid P$

Es equivalente a $P = (x-\lambda)^m Q$

Sea λ un autovalor de f tal que λ es una raíz de P_q. Sea m la multiplicidad de λ en $P_q \Rightarrow m \geq dim(V_\lambda)$

Polinomios y teorema de Cayley-Hamilton

Dado un polinomio $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K_{[x]}$ y una matriz $A \in K^{nxn} \Rightarrow$

$P(A) = a_0Id_n + a_1A + \dots + a_nA^n$

Ejemplos:

1) Sea A=$\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{pmatrix} d_1^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m^r \end{pmatrix}$ (Sólo si A es diagonal)

2) Sea $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \Rightarrow$

$$P(A) = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_1d_m \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_1d_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_nd_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{(d_1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{(d_m)} \end{pmatrix}$$

Teorema de Cayley-Hamilton: Sea $A \in K^{nxn} \Rightarrow P_A(A) = 0$

Aplicación: Calcular autovalores, autovectores y autoespacios de una TL.

1) Sea $T: V \to V$. Si tenemos $T(x_1, \dots, x_n)$, buscamos $[T]_C$.
2) Calcular $det(\lambda Id_n - [T]_C)$, que es el polinomio característico. Luego buscar sus raíces calculando $(\lambda Id_n - [T]_C)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Cada raíz λ del polinomio es un autovalor de $[T]_C$.
3) Una vez obtenidos los autovalores λ_i, buscamos los autovectores. Tenemos que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_{\lambda_i} \Leftrightarrow$ $(\lambda_i Id_n - [T]_C)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donde V_{λ_i} es el autoespacio asociado. Para los autovectores, solo basta obtener una base B_i de V_{λ_i}. Cada elemento de la base es un autovector.
4) Si queremos ver si T es diagonalizable, hay que chequear que $dim(V_{\lambda_1}) + \dots + dim(V_{\lambda_n}) = dim(V)$. Luego $B = \{B_1 \cup \dots \cup B_n\}$ es la base en donde T es diagonalizable, ya que cada B_i está formada por autovectores de T.

UNIDAD VII: Espacio Dual y Ortogonalidad

Definición: Sea V un k-ev Dado que K es un k-ev definimos al **espacio dual** como:

$$V^* = Hom(V,K) = \{f: V \to K : f\ es\ una\ transformación\ lineal\}$$

Obs: V* es un k-ev Sean $f, g \in Hom(V,K)$, entonces:

- $(f+g)_{(v)} = f(v) + g(v)\ \forall v \in V$
- $(\lambda f)_{(v)} = \lambda f(v)\ \forall v \in V, \lambda \in K$

$Hom(V,K) \simeq K^{1xn} \Rightarrow dim(V^*) = dim(V)$

▶ **Proposición**: Sea V un k-ev de dimensión n, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Existen únicos elementos $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ tales que $\varphi_j(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ y $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es una base de V^*. A tal B^* se la denomina **base dual de V**. Cada elemento $f \in V^*$ se llama **función lineal de V**.

Dem: Fijemos $j \in \{1, \dots, n\}$. Sea $\varphi_j: V \to K$ una TL definida por $\varphi_j(v_j) \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Como $\dim(V^*) = n$, para ver que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ forman una base de V^*, basta verificar que son LI. Sean $a_1, \dots, a_n \in K$ tales que $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$. Para cada $i \in \{1, .., n\}$, $0 = 0(v_i) = (a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)v_i$
$= a_1\varphi_1(v_i) + \cdots + a_n\varphi_n(v_i) = a_i. \therefore a_i = 0\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\ y\ B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es base de V^*.
Supongamos que $\{\varphi_1', \dots, \varphi_n'\}$ es otra base de V^*. Entonces tenemos que para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

- $\varphi_i'(v_j) = 0 = \varphi_i(v_j)\ si\ i \neq j$
- $\varphi_i'(v_j) = 1 = \varphi_i(v_j)\ si\ i = j$

Es decir, $\varphi_i'\ y\ \varphi_i$ son dos TL que coinciden sobre una base. En consecuencia $\varphi_i' = \varphi_i\ \forall i \in \{1, .., n\}$▯

Lema: Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una base dual, entonces:

a) $(v)_B = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v)), \forall\ v \in V$
b) $(f)_{B^*} = (f_{(v_1)}, \dots, f_{(v_n)}), \forall\ f \in V^*$

Definición: Sean V, W dos k-ev, $T: V \to W$ una TL.

La **transpuesta** de T es la función $T^*: W^* \to V^*$ dada por: $T^*(f)_{(v)} = f(T_{(v)}), f \in W^*, v \in V$.

Espacios vectoriales y producto interno

Definición: Un **producto interno** sobre V k-ev es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle: V_xV \to \mathbb{R}$ que cumple:

a) $\langle v+w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle\ \forall v, w, u \in V$
b) $\langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle\ \forall v, u \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
c) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle\ \forall v, w \in V$
d) $\langle v, v\rangle > 0\ si\ v \neq 0\ \forall\ v \in V$

Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V provisto de un producto interno se dice **espacio euclídeo**.

Obs: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma bilineal simétrica.

Producto interno en $\mathbb{C}$: Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, cuyo producto interno (o forma hermitiana) es $\langle\cdot,\cdot\rangle: V_xV \to \mathbb{C}$ y que cumple a), b), c') $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, d).

Con esta condición, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es sesquilineal:

- $\langle v, u+w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$

- $\langle v, \lambda u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle$

<u>Ejemplos</u>:

1) Producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_{n)}\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
2) Producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$: $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_{n)}\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$
3) Producto interno en $\mathbb{R}^{mxn}$: $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$ donde tr es la suma de la diagonal principal (traza).

<u>Definición</u>: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Para cada $v \in V$ se define la **norma** de v como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Así tenemos una función $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

▶ <u>Proposición</u>:

(i) Para cada $v \in V$, $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}, v \in V$, $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

(iii) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz).

(iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdad triangular).

<u>Dem</u>: Sea $v = (v_1, \dots, v_n) \in V, w = (w_1, \dots, w_n) \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

(i) Tenemos que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle (v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_n)\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = 0 \Leftrightarrow v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 + \cdots + v_n = 0 \Leftrightarrow v_1 = \cdots = v_n = 0$.

(ii) $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2 v_1^2 + \cdots + \alpha^2 v_n^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + \cdots + v_n^2)} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = |\alpha|\|v\|$.

(iii) Si $w = 0$, ya está. Asumamos que $w \neq 0$.

Entonces $0 \leq \langle v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} w\rangle = \langle v, v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\langle w, v\rangle + \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^4}\langle w, w\rangle$

$= \|v\|^2 - 2\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2}$. Es decir, $0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2$

$\therefore |\langle v, w\rangle| \leq (\|v\|\|w\|)^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$

(iv)Obs: $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$

$= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2$

$\therefore \|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \Rightarrow \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

<u>Obs</u>: en (iii), si $v, w \neq 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1$.

El **ángulo** entre v y w es $arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}\right) \in [0, \pi]$

<u>Matriz de producto interno</u>

<u>Definición</u>: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, una base de V. La matriz de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ respecto a B es:
$|\langle\cdot,\cdot\rangle|_B = (\langle v_i, w_j\rangle), con\ 1 \leq i, j \leq n$

<u>Ejemplo</u>: En $\mathbb{R}^2, B = \{e_1, e_2\}, e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \to \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{pmatrix}$

▶ <u>Proposición</u>: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, B una base de V. Entonces $\langle v, w\rangle = (v)_B^t|\langle\cdot,\cdot\rangle|(w)_B$

<u>Dem</u>: Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dados $v, w \in V$, los escribimos en términos de la base:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\ \ w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \Rightarrow (v)_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, (w)_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle v,w\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \langle v_i, v_j\rangle\right) = (a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_1\langle v_1, v_j\rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_n \langle v_n, v_j\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$$

$$= (a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (v)_B^t (|\langle\cdot,\cdot\rangle|)_B (w)_B. \square$$

<u>Ortogonalidad</u>

a) Dos **vectores** se dicen ortogonales (o perpendiculares) si $\langle v,w\rangle = 0$.
b) Un **subconjunto** $S \subseteq V$ es ortogonal si $\langle v,w\rangle = 0 \ \forall\ v,w \in S$.
c) Un **subconjunto** $S \subseteq V$ es **ortonormal** si es ortogonal y además $\|v\| = 1 \ \forall\ v \in S$.

<u>Obs</u>: Si $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ es ortogonal y $v_i \neq 0\ \forall i \Rightarrow S = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ es ortonormal

<u>Obs 2</u>: Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de V $\Rightarrow$

$$|\langle\cdot,\cdot\rangle|_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \text{ es diagonal.}$$

Si B es ortonormal $\Rightarrow |\langle\cdot,\cdot\rangle|_B = Id_n$

▶ <u>**Proposición**</u>: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un subconjunto ortogonal de V tal que $v_i \neq 0\ \forall i = 1,\dots,r \Rightarrow$ S es LI.

<u>Dem</u>: Sean $a_1,\dots,a_r \in \mathbb{R}$ tal que $a_1v_1 + \dots + a_rv_r = 0$. Para cada $j = 1,\dots,r$ se tiene que:

$0 = \langle v_j, 0\rangle = \langle v_j, a_1v_1 + \dots + a_rv_r\rangle = a_1\langle v_j, v_1\rangle + \dots + a_r\langle v_j, v_r\rangle$. Como S es ortogonal, tenemos que $\langle v_j, v_i\rangle = 0 \ si\ i \neq j$, con lo cual $0 = a_j\langle v_j, v_j\rangle = a_j\|v_j\|^2$. Como $v_j \neq 0 \Rightarrow a_j = 0$. Luego $a_1,\dots,a_r = 0$ y S es LI. $\square$

▶ <u>**Proposición**</u>: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonal de V.

Entonces $v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} \ \ \forall v \in V$.

<u>Dem</u>: Dado que B es base de V, para cada $v \in V$ podemos escribir:

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Como B es ortogonal, para cada $j = 1,\dots,n$ tenemos que $\langle v, v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j\rangle$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_i\langle v_i, v_j\rangle = a_j\langle v_j, v_j\rangle = a_j\|v_j\|^2 \Rightarrow \langle v, v_j\rangle = a_j\|v_j\|^2 \Rightarrow a_j = \frac{\langle v, v_j\rangle}{\|v_j\|^2}. \square$$

<u>Corolario</u>: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V.

$a)\ \forall v \in V$: $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j$

$b)\ \forall v, w \in V\colon \langle v, w\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle \langle w, v_j\rangle$

$c)\ \forall v \in V\colon \|v\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle^2}$

<u>Dem</u>:

$a)$ Por la proposición sobre bases ortogonales y coordenadas de un vector, $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j\rangle}{\|v_j\|^2}$.

Como B es ortonormal, tenemos que $\|v_j\| = 1 \Rightarrow \|v_j\|^2 = 1$ y por lo tanto $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j$

$b)$ Usando $a)$: $\langle v, w\rangle = \langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i , \sum_{j=1}^{n} \langle w, v_j\rangle v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \langle w, v_j\rangle \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \langle w, v_i\rangle \langle v_i, v_i\rangle$

$c)$ Si consideramos $v = w$: $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = \langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i , \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \langle v, v_i\rangle \langle v_i, v_i\rangle$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2 \|v_i\|^2 \Rightarrow \frac{\|v\|^2}{\|v_i\|^2} = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2$ $\Rightarrow$ Como B es ortonormal, $\|v_i\|^2 = 1 \Rightarrow \|v\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2$

$\Rightarrow \|v\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2}$ □

▶ **<u>Teorema</u>: Método de ortonormalización Gram-Schmidt**

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, entonces:

a) Existe una base ortogonal $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ tal que $<v_1, \dots, v_k> = <w_1, \dots, w_k>$ $\forall k = 1, \dots, n$. Los $w_j's$ se definen recursivamente como:

$$w_j = v_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v_j, w_k\rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$

b) Existe una base ortonormal $B'' = \{w'_1, \dots, w'_n\}$ con la misma propiedad.

<u>Dem</u>: Ya que $b)$ se sigue de modo directo de $a)$, solo basta probar $a)$. Por inducción: tenemos que probar que si $\{w_1, \dots, w_k\}$ es una base ortogonal entonces $< w_1, \dots, w_k > = < v_1, \dots, v_k >$.

Para $k = 1$, $w_1 = v_1$ cumple la condición. Asumimos que vale para k. Queremos ver que $\langle w_i, w_j\rangle = 0$ para $i, j \in \{1, \dots, k+1\}, i \neq j$. Como por hipótesis inductiva esto vale para $i, j \in \{1, \dots, k\}$ basta probar que $\langle w_{k+1}, w_j\rangle = 0\ \forall j \leq k$.

$$\langle w_{k+1}, w_j\rangle = \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle w_i}{\|w_i\|^2}, w_j\rangle = \langle v_{k+1}, w_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \overbrace{\langle w_i, w_j\rangle}^{=0 \text{ por hipótesis}}$$

$= \langle v_{k+1}, w_j\rangle - \dfrac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}\langle w_j, w_j\rangle = 0.$

Ahora, falta probar $< w_1, \dots, w_{k+1} > = < v_1, \dots, v_{k+1} >$. Asumimos que $< w_1, \dots, w_k > = < v_1, \dots, v_k >$. Notar que $< w_1, \dots, w_{k+1} > =< w_1, \dots, w_k > +< w_{k+1} > y < v_1, \dots, v_{k+1} > = < v_1, \dots, v_k > +< v_{k+1} >$.

Para probar que $< w_1, \dots, w_{k+1} > = < v_1, \dots, v_{k+1} >$, basta ver que $v_{k+1} \in < w_1, \dots, w_{k+1} >$ y que $w_{k+1} \in < v_1, \dots, v_{k+1} >$.

$w_{k+1} \in < v_1, \dots, v_{k+1} >$ se deduce de $w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i$. Análogamente con v_{k+1} ▯

<u>**Complemento ortogonal**</u>

Sea (V,⟨·,·⟩) un espacio euclídeo, S⊆V un subconjunto de V. El **complemento ortogonal** de S es el conjunto $S^{▯} = \{ v \in V : \langle v, s\rangle = 0 \ \forall s \in S\}$

<u>Obs</u>: $S^{▯}$ es un subespacio de V, en efecto $0 \in S^{▯}$ (puedo tomar $v = 0$). Si $v, v' \in S^{▯}, \lambda \in \mathbb{R}, \langle v + \lambda v', s\rangle = \langle v, s\rangle +$ λ$\langle v', s\rangle$

<u>Obs</u>: $S^{▯} =< S >^{▯}$

▶ <u>Proposición</u>: Sea (V,⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dimensión finita, W⊆V un subespacio de $V \Rightarrow V = W \oplus W^{▯}$.

<u>Dem</u>: Sea V ∈ W∩W^⊥. Como $v \in W^{\perp}$, se tiene que $\langle v, w\rangle$=0, $\forall w \in W$

En particular, tomando $m = v$, tenemos $\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow \|v\|^2 = 0$, por lo tanto, $v = 0$.

Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de W ($r = dim(W)$) Podemos completarla a una base $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ de V ($dim(V) = n$). Aplicando Gram-Schmidt a esta base, se obtiene la base ortogonal $\{w_1, \dots, w_n\}$ tal que $\langle v_1, \dots, v_k\rangle = \langle w_1, \dots, w_k\rangle, \forall k = 1, \dots, n$. En particular, para $k = r, w = \langle v_1, \dots, v_r\rangle = \langle w_1, \dots, w_r\rangle \Rightarrow \{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ortogonal de W, y cada $W_j, j > r$, está en $W^{\perp}$. Así, $\{w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es un subconjunto LI de $W^{\perp} \Rightarrow dim(W^{\perp}) \geq n - r$.

Ahora $n \leq dim(W) + dim(W^{\perp}) = dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = n$, por lo tanto,

$dim(W + W^{\perp}) = n \Rightarrow W + W^{\perp} = V$ ▯

▶ <u>Proposición</u>: Sea (V,⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dimensión finita, W⊆V un subespacio de V, ⇒ $(W^{▯})^{▯} = W$

<u>**Dem:**</u> $(W^{▯})^{▯} = \{v \in V : \langle v, x\rangle = 0, \forall x \in W^{▯}\}$ si $w \in W \Rightarrow \langle w, x\rangle$=0, $\forall x \in W^{▯} \Rightarrow w \in (W^{▯})^{▯}$. Luego,

$W \subseteq (W^{▯})^{▯}$. Por otro lado, $dim\ (W^{▯})^{▯} = dim(V) - dim(W^{\perp}) = dim(V) - \big(dim(V) - dim(W)\big) = dim(W) \Rightarrow W = (W^{▯})^{▯}$. ▯

<u>Definición</u>: Dado (V,⟨·,·⟩) un espacio euclídeo, $v \in V$. Definimos $f_v : V \to \mathbb{R}$,

$f_v(w) = \langle w, v\rangle, w \in V$ una TL el (f_v ∈ V*):

- $f_v(w + w') = \langle w + w', v\rangle = \langle w, v\rangle + \langle w', v\rangle = f_v(w) + f_v(w'), \forall v, w' \in V$
- $f_v(\lambda w, v) = \langle \lambda w, v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = \lambda f_v(w), \forall w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

▶ <u>Teorema</u>: Sea (V,⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dimensión finita, la función

$F : V \to V^*$, F(v) $= f_v$ es un isomorfismo. En particular, $\forall f \in V^* \ \exists! \, v \ tal\ que\ f(w) = \langle w, v\rangle \ \forall w \in W$ $(f = f_v)$.

Dem: Veamos que F es una transformación lineal. Tomemos $v, v' \in V, \lambda \in K$:

$F(v+v')(w) = f_{v+v'}(w) = \langle w, v+v' \rangle = \langle w, v \rangle + \langle w + v' \rangle = f_v(w) + f_v'(w) = F(v)(w) + F(v')(w)$

$F(\lambda v)(w) = f_{\lambda v}(w) = \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = \lambda f_v(w) = \lambda F(v)(w)$

Para ver que F es un isomorfismo, basta probar que F es un monomorfismo ya que $dim(V) = dim(V^*)$. Sea $v \in Nu(F)$: es decir, $F(v) = 0$, con lo cual $F(v)(w) = 0, \forall w \in V$. En particular, $0 = F(v)(v) = f_v(v) = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0$ ▯

▶ **Teorema**: Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dimensión finita. Sea $T: V \to V$ una TL.

Existe una única TL $T^*: V \to V$ tal que $\langle T_{(w)}, v \rangle = \langle w, T^*_{(v)} \rangle$ $\forall v, w \in V$. Tal T^* se dice **adjunta** de T.

Dem: Sea $w \in V$ definimos $g_w: V \to K, g_w(v) = \langle T_{(v)}, w \rangle, v \in V$. Veamos que $g_w \in V^*$ (es decir, que es una TL):
$g_w(v+v') = \langle T_{(v+v')}, w \rangle = \langle T_{(v)} + T_{(v')}, w \rangle = \langle T_{(v)}, w \rangle + \langle T_{(v')}, w \rangle = g_w(v) + g_w(v')$
$g_w(\lambda v) = \langle T_{(\lambda v)}, w \rangle = \langle \lambda T_{(v)}, w \rangle = \lambda \langle T_{(v)}, w \rangle = \lambda g_w(v)$
Dado el isomorfismo $F: V \to V^*$: $\exists \widetilde{w} \in V$ tal que $g_w = F(\widetilde{w})$.
Entonces podemos definir una función $T^*: V \to V,\ T^*(w) = F^{-1}(g_w) = \widetilde{w}$ ¿Qué propiedad tiene?
Por el teorema anterior, $F(\widetilde{w})(v) = \langle v, \widetilde{w} \rangle, \forall v \in V$. Es decir, $T^*(w) = \widetilde{w}$ es el único elemento de V tal que:
$\langle v, T^*(w) \rangle, \Rightarrow g_w(v) = \langle T_{(v)}, w \rangle, \forall v \in V$ (★)
Veamos que T* es una transformación lineal: dados $w, w' \in$ V, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T^*(w+w') = \langle v, T^*_{(w+w')} \rangle =$ (★)
$\langle T_{(v)}, w+w' \rangle = \langle T_{(v)}, w \rangle + \langle T_{(v)}, w' \rangle =$ (★) $\langle v, T^*_{(w)} + T^*_{(w')} \rangle, ,\forall v \in V$
Usando nuevamente ★, tenemos que $T^*(w+w') = T^*(w) + T^*(w')$▯

▶ **Proposición:** Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dim finita, $T: V \to V$ una transformación lineal, B una base de V. Entonces, $[T]_B = ([T^*]_B)^t$

Dem: Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $[T]_B = (a_{ij})$, $[T^*]_B = (b_{ji})$. Por definición, queremos probar que $a_{ij} = b_{ji}, \forall i, j = 1, \dots, n$.

Por definición $T(v_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, v_i$, $T^*(v_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\, v_i$.

Como B es una base ortonormal, $a_{ik} = \langle T(v_k), v_i \rangle \Rightarrow a_{ij} = \langle v_j, T^*(v_i) \rangle = \langle v_j, \sum_{l=1}^{n} b_{li}\, v_l \rangle$

$= \sum_{l=1}^{n} b_{li} \langle v_j, v_l \rangle = b_{ji} \langle v_j, v_j \rangle = b_{ji}$▯

Definición: Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dimensión finita. Una TL $T: V \to V$ se dice autoadjunta si $T^* = T$ Es decir, si $\langle T_{(v)}, w \rangle = \langle v, T_{(w)} \rangle, \forall v, w \in V$

▶ **Proposición:** Sea (V, ⟨·,·⟩), un espacio euclídeo de dim finita, $T: V \to V$ una TL son equivalentes:

a) T es autoadjunta
b) $\forall B$ base ortonormal $[T]_B$ es simétrica
c) $\exists B$ base ortonormal tal que $[T]_B$ es simétrica

Dem: La equivalencia de los tres enunciados se deduce de la proposición y la definición de transformación lineal autoadjunta.

Diagonalización de matrices simétricas reales

Obs: Todo polinomio con coeficientes complejos admite raíces complejas, es decir, si $p(x) \in \mathbb{C}_{[x]}$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $p(x) = 0 \iff x - \lambda \mid p(x) \iff \exists q(x) \in \mathbb{C}_{[x]}$ tal que $p(x) = (x-\lambda)q(x)$.
Luego, cada polinomio $p(x) \in \mathbb{C}_{[x]}$ se puede factorizar $f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \dots (x-\lambda n), n = gr(p)$

▶ **Proposición:** Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ una matriz simétrica. Entonces, las raíces de P_A son todas reales → $P_A = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (los $\lambda's$ no son necesariamente distintos).

Idea de la prueba: Podemos pensar a $A \in \mathbb{C}^{nxn}$, $f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f_A(v) = Av$, tomamos el producto interno canónico de $\mathbb{C}^n$, $\langle v, w \rangle = v\overline{w}$ Para este producto, f_A es autoadjunta (porque A es simétrica), $\lambda \in \mathbb{C}$ una raíz de P_A ⇒ X es un autovalor de f_A.
Sea $v \neq 0$, un autovector de autovalor λ, $\lambda\|v\|^2 = \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f_A(v), v\rangle$
Para ver f_A autoadjunta, $\langle v, f_A(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Recordar: $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ se dice diagonalizable si A ~D, D diagonal ⇔ ∃C invertible tal que $A = CDC^{-1}$
Definición: Una matriz O se dice ortogonal si $O \in \mathbb{R}^{nxn}$ es invertible y $O^{-1} = O^t$
Lema: Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo de dim finita, B, B' dos bases ortonormales ⇒ $C_{B'}^{B}$ es ortogonal.
Corolario: Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ una matriz simétrica ($A = A^t$) Entonces existe una matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que OAO^t es diagonal ⇒ A es diagonalizable.
Dem: A partir de A miramos $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $f_A(v) = Av$. Como A es simétrica, f_A es autoadjunta para el producto interno canónico. Por el teorema anterior, ∃B una base ortonormal de autovectores de f_A ⇒ $[f_A]_B = D$ es diagonal.
Ahora, $A = [f_A]_C = C_C^B [f_A]_B C_B^C$ (O es ortogonal por el lema) ⇒ $D = OAO^t$

Distancia entre vectores

Definición: Sea X un conjunto no vacío. Una **distancia** en X es una función $d: X_x X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple:

i) $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x, y \in X$
ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Obs: Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo ⇒ $\|.\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ entonces $d: V_x V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $d(x,y) = \|x - y\|$ es una distancia.

Obs: En $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle\ canónico)$, $d\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) = \|(x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n)\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Proyección ortogonal

Definición: Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo, S⊆V un subconjunto de V. La **proyección ortogonal** sobre S es la TL $P_S: V \to V\ tal\ que\ P_S(t) = t\ \forall t \in S\ y\ P_S(x) = 0\ \forall x \in S^{⊥}$

Obs: Sea $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base ortogonal de V tal que $\{v_1, \dots v_r\}$ es una base ortonormal de S ⇒ $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de $S^{⊥}$

Obs: $P_S + P_{S^{⊥}} = Id_v$. En efecto,

$$P_{S^{⊥}}(v) = \sum_{i=r+1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i \text{ y además } v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle v_i \Rightarrow P_S(v) + P_{S^{⊥}}(v) = v\ \forall v \in V$$

Distancia de un punto a un subespacio

Definición: Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclídeo, $S, S' \subseteq V$ subconjuntos de V

a) La distancia de $v \in$ V a S es $d(v, s) = inf\ \{ d(v, s) : s \in S \}$
b) La distancia entre $S\ y\ S'$ es $d(S, S') = inf\ \{ d(s, s') : s \in S, s' \in S' \}$

▶ **Proposición:** Sea (V, ⟨·,·⟩) un espacio euclideo de dim finita, S⊆V un subespacio. Para cada v∈V, d(v,s) = $\|v - Ps_{(v)}\| = \|Ps^t{}_{(v)}\|$ Más aún, $Ps_{(v)}$ es el único punto de S en la distancia $d(v, s)$ ($Ps_{(v)}$ es el punto de S más cercano a v).

Dem: Sea $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V tal que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de S. Fijemos $v \in V$.

Para cada $s \in S, v - s = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i - \sum_{i=1}^{r} \langle s, v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^{r} \langle v - s, v_i \rangle v_i + \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$

$\Rightarrow \|r - s\|^2 = \langle v - s, v - s \rangle = \sum_{i=1}^{r} |\langle v - s, v_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2 = \|Ps^{\perp}(v)\|^2$

Luego, $d(v, s) = \|v - s\|^2$, $\|Ps^{\perp}(v)\|$ y vale la igualdad $\Leftrightarrow \langle v - s, v_i \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \Leftrightarrow s = Ps(v)$