Determinante 2

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

Este archivo esta dedicado en su gran mayoría a las demostraciones de algunos resultados enunciados en el archivo previo. Con el doble objetivo de familiarizarnos con las técnicas y estrategias comunes que encontraremos en las demostraciones.

Como así también de reafirmar el valor de la demostración rigurosa en la matemática como ciencia (objetivo del programa).

Las últimas dos secciones son de cultura general.

Este archivo se basa en la Sección 1.6 y el Apéndice de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi.

1. Objetivos

2. Demostraciones
   - Demostraciones de los casos particulares
   - Demostraciones referidas a operaciones elementales
   - Demostraciones referidas al producto de matrices
   - Demostraciones referidas a la transpuesta
   - Aplicaciones de la transpuesta

3. Desarrollo por otra columna o fila

4. Ejemplo: Matriz de Vandermonde

Proposición 1.6.1

El determinante de una matriz triangular superior $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es el producto de los elementos de la diagonal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Demostración: Haremos inducción en el tamaño de la matriz.

Si $n = 1$, $A = (a_{11})$ y $\det(A) = a_{11}$ por definición. Y ya esta.

(HI): El determinante de una matriz triangular superior de tamaño $n-1$ es el producto de la diagonal.

Ahora calculamos el determinante de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ siguiendo la definición:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1)$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1) \\
&= a_{11} \det \boxed{A(1|1)} - \boxed{0} \det A(2|1) \cdots + (-1)^{1+n} \boxed{0} \det A(n|1) \\
&= a_{11} \det A(1|1) \qquad \text{es triang sup} \\
&\overset{(HI)}{=} a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\
\boxed{0} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\
\vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\
 & \vdots & & & \\
 & & & \ddots & \vdots \\
\boxed{0} & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

La proposición queda demostrada por el Principio de Inducción

Corolario 1.6.2

$$\det(\mathrm{Id}_n) = 1$$

Demostración: La matriz identidad es diagonal y por lo tanto triangular superior. Entonces podemos aplicar la proposición anterior directamente.

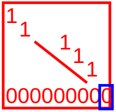
Corolario 1.6.3

Si $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una MERF, entonces

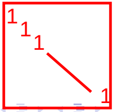
$$\det(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \text{ no tiene filas nulas} \\ 0 & \text{si } R \text{ tiene filas nulas} \end{cases}$$

Demostración: Por la manera en que las definínimos, toda MERF es triangular superior con 1 y/o 0 en la diagonal.

Si tienen alguna fila nula,
entonces tiene algún $\boxed{0}$ en la diagonal y
el determinante es 0
por la proposición anterior.



Si no tiene filas nulas entonces es la Id_n y
por el corolario anterior finalizamos la demostración.



Teorema 1.6.4 (1)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ no nulo.
Si B es la matriz que se obtiene de A multiplicando la fila i por c, entonces $\det(B) = c\det(A)$

Demostración: Haremos inducción en el tamaño de la matriz.

Si $n = 1$, la única posibilidad es que $i = 1$. Entonces $A = (a_{11})$ y $B = (ca_{11})$. Por la definición de determinante tenemos que $\det(B) = ca_{11} = c\det(A)$

(HI): El teorema vale para toda matriz tamaño $n - 1$.

Ahora calculamos el determinante en el caso n siguiendo la definición.

Como es usual, denotamos b_{ij} las entradas de B. Entonces

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= b_{11}\det B(1|1) + \cdots + (-1)^{1+i} b_{i1}\det B(i|1)\cdots \\
&= \boxed{a_{11}}\det \boxed{B(1|1)} + \cdots + (-1)^{1+i}\boxed{ca_{i1}}\det\boxed{B(i|1)}\cdots \\
&\overset{(HI)}{=} a_{11}\boxed{c\det A(1|1)} + \cdots + (-1)^{1+i} ca_{i1}\boxed{\det A(i|1)}\cdots \\
&= c\left(a_{11}\det A(1|1) + \cdots + (-1)^{1+i} a_{i1}\det A(i|1)\cdots\right. \\
&= c\det(A)
\end{aligned}
$$

fila i
por c

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c\,a_{i1} & c\,a_{i2} & \cdots & c\,a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=B=
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\boxed{c\,a_{i1}} & \cancel{c\,a_{i2}} & \cancel{\cdots} & \cancel{c\,a_{in}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Es decir, si $\ell \neq i$, $\boxed{B(\ell|1)}$ se obtiene de $\boxed{A(\ell|1)}$ multiplicando la fila i por c. Como son de tamaño $n-1$ podemos aplicar (HI).

En cambio, $\boxed{B(i|1)} = \boxed{A(i|1)}$ y por lo tanto tienen igual determinante.

Entonces, el Teorema queda demostrado por el Principio de Inducción.

Teorema 1.6.4 (3)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando las filas r y s, entonces $\det(B) = -\det(A)$

La demostración es por inducción como en el caso anterior y en el caso de matrices triangulares.

Para demostrar el caso de sumar filas necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 1.6.4 (2)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$.
Si B es la matriz que se obtiene de A sumando a la fila r la fila s multiplicada por t, entonces $\det(B) = \det(A)$

Corolario 1.6.6

1. Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$
2. Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$

Demostración:

1. Si a A le aplicamos la operación que intercambia sus filas iguales, obtenemos la misma matriz.

$$\overset{\text{Teo 1.6.4 (3)}}{\Longrightarrow} \det(A) = -\det(A) \Longrightarrow \det(A) = 0$$

2. Si a A le aplicamos la operación "multiplicar su fila nula por -1", obtenemos la misma matriz.

$$\overset{\text{Teo 1.6.4 (1)}}{\Longrightarrow} \cancel{\det(A) = -\det(A)} \Longrightarrow \det(A) = 0$$

det(A) = -det(A)

Lema A.1.3

B

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+c_{r1} & \cdots & a_{rn}+c_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A C

Teorema 1.6.4 (2)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$.
Si B es la matriz que se obtiene de A sumando a la fila r la fila s multiplicada por t, entonces $\det(B) = \det(A)$

Demostración: Es un caso particular del lema anterior con

$$C = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{t}a_{s1} & \cdots & \mathrm{t}a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \text{fila s} \\ \\ \text{fila r} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Entonces

$$\det(B) \overset{\text{Lema A.1.3}}{=} \det(A) + \det(C) \overset{\text{Corol 1.6.6 (1)}}{=} \det(A)$$

Corolario

Sea E una matriz elemental.

- Si E corresponde a la operación que multiplica una fila por c, entonces
$$\det E = c$$
- Si E corresponde a la operación que suma filas, entonces
$$\det E = 1$$
- Si E corresponde a la operación que intercambia filas, entonces
$$\det E = -1$$

Demsotración:es una consecuencia directa del Teorema 1.6.4 y el Corolario 1.6.2 dado que las matrices elementales se obtienen a partir de aplicarle una operación elemental a Id

Teorema 1.6.7

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

La demostración de este teorema se basa en las matrices elementales y en el último corolario de la sección anterior.

Observación

El item (1) dice que "el determinante respeta el producto de matrices"

Teorema A.1.5

Sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det(EA) = \det(E)\det(A)$$

En otras palabras, el determinante respeta el producto por una matriz elemental.

Demostración: sigue del Corolario y el Teorema 1.6.4 dado que $EA = e(A)$ donde e es la operación elemental tal que $e(\mathrm{Id}) = E$

Observación

Sea R la MERF que obtenemos tras aplicarle operaciones elementales por filas a A.
Entonces existen matrices elemental E_1, ..., E_k tales que

$$A = E_1 \cdots E_k R$$

Demostración: Sean $\tilde{e}_1$, ..., $\tilde{e}_k$ las operaciones elementales que le aplicamos a A para obtener R y $\tilde{E}_1$, ..., $\tilde{E}_k$ las respectivas matrices elementales.

$$R = \tilde{e}_k(\cdots(\tilde{e}_1(A))) = \tilde{E}_k \cdots \tilde{E}_1 A \Longrightarrow A = \tilde{E}_1^{-1} \cdots \tilde{E}_k^{-1} R$$

Por Teorema 1.5.3, $\tilde{E}_i$ es inversible y su inversa es una matriz elemental. La observación queda demostrada decretando $E_i = \tilde{E}_i^{-1}$.

Teorema 1.6.7

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

Ahora podemos demostrar el Teorema usando las páginas anteriores.

Corolario

El determinante de la inversa de A es igual a el inverso de det(A) Dem: Usar $B=A^{-1}$

Demostración del Teorema 1.6.7

Probemos el segundo item

$$A \text{ es inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Por el Teorema A.1.5 y la Observación

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(R)$$

Entonces

Teo 1.5.4

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(R) \neq 0 \Leftrightarrow R = \mathrm{Id} \Leftrightarrow A \text{ es inversible}$$

Corol 1.6.3

Notar que si A es inversible tenemos que

$$\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_k)$$

Demostración del Teorema 1.6.7

Ahora probamos el primer item. Notar que

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k RB) && \text{(Obs)} \\
&= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(RB) && \text{(Teo A.1.5)} \\
&= \det(E_1 \cdots E_k) \det(RB) && \text{(Teo A.1.5)}
\end{aligned}$$

Entonces dividimos la prueba en dos casos:

- Si A es inversible
- Si A no es inversible

Demostración del Teorema 1.6.7

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k RB) && \text{(Obs)}\\
&= \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det(RB) && \text{(Teo A.1.5)}\\
&= \det(E_1 \cdots E_k)\det(RB) && \text{(Teo A.1.5)}
\end{aligned}
$$

- Si A es inversible, entonces $R = \mathrm{Id}$ por Teo 1.5.4 y sigue que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Demostración del Teorema 1.6.7

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k RB) && \text{(Obs)} \\ &= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(RB) && \text{(Teo A.1.5)} \\ &= \det(E_1 \cdots E_k) \det(RB) && \text{(Teo A.1.5)} \end{aligned}$$

- Si A no es inversible, entonces R tiene una fila nula y por la forma de la multiplicación RB también resulta tener una fila nula. Entonces

$$\det(R) = \det(RB) = 0 \qquad \text{(Corol 1.6.6)}$$

Por lo tanto

$$\det(AB) = 0 = \underbrace{\det(A)}_{\text{A no inv}} \det(B)$$

Definición 1.6.3

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La transpuesta de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ cuyas entradas son definidas por

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$$

intercambiamos j con i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

transponer es reflejar con respecto a la diagonal principal

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notar que la diagonal principal queda fija

Teorema 1.6.10

El determinate de una matriz es igual al determinate de su transpuesta

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Pueden ver la demostración en las notas de García-Triaboschi.

1. Objetivos
2. Demostraciones
   - Demostraciones de los casos particulares
   - Demostraciones referidas a operaciones elementales
   - Demostraciones referidas al producto de matrices
   - Demostraciones referidas a la transpuesta
   - Aplicaciones de la transpuesta
3. Desarrollo por otra columna o fila
4. Ejemplo: Matriz de Vandermonde

Proposición 1.6.11

El determinante de una matriz triangular inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal.

Demsotración: Como veremos en la página siguiente la transpuesta de una una matriz triangular inferior es una matriz triangular superior.

Entonces la proposición es una consecuencia del teorema anterior y la proposición referida al determinate de una triangular superior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observación

La transpuesta transforma filas en columnas y columnas en filas

Gracias a esta observación podemos deducir como cambia el determinante de una matriz al aplicarle "operaciones elementales por columna"

Teorema 1.6.12

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sean $1 \leq r, s \leq n$.

1. Sea $c \in \mathbb{R}$ y B la matriz que se obtiene de A multiplicando la columna r por c, entonces $\det B = c \det A$.
2. Sea $c \in \mathbb{R}$ y B la matriz que se obtiene de A sumando a la columna r la columna s multiplicada por c, entonces $\det B = \det A$.
3. Sea B la matriz que se obtiene de A permutando la columna r con la fila s, entonces $\det B = -\det A$.

Este es un análogo del Teorema 1.6.4 y lo podemos utilizar de igual manera para calcular determinantes

Ejemplo

Si una matriz tiene una columna con muchos ceros, podemos intercambiarla con la primera fila.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{5} & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(A) = -\det(B) = -5 \det B(1|1)$$

Ejemplo

Si una matriz tiene una fila con muchos ceros, entonces intercambio esta con la primer fila, luego transpongo y calculo el determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{5 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} \boxed{5 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to B^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(A) = -\det(B) = -\det(B^t) = -5 \det B^t(1|1)$$

Observación

Esta sección es de cultura general

Cuando definimos el determinante dijimos que estabamos dando el cálculo del determinante por desarrollo por la primera columna

Esta sección es para que sepa que podemos desarrollar el determinante por cualquier fila o columna

Y si le sirve que lo use para calcular

Teorema A.1.10

- Se puede calcular el determinante por la columna j así:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j)$$

- Se puede calcular el determinante por la fila i así:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i|j)$$

(la diferencia entre ambas fórmulas es la variable de la sumatoria)

La demostración de este teorema (que no la haremos) consiste en aplicar de manera adecuada los teoremas que nos dicen como cambia el determinate de una matriz luego de aplicarle operaciones elementales y/o transponerla.

Con este teorema los últimos Ejemplos de la sección pasada pueden resolverse sin intercambiar fila o columnas ni transponer.

Observación

Esta sección es de cultura general

La idea es que sepan que existe una matriz que se llama de Vandermonde, que se relaciona con los polinómios y que tiene un determinante muy particular

Y que sepan que todo esto lo pueden encontrar en la wikipedia y en cualquier libro de álgebra lineal

La Matriz de Vandermonde es una matriz $n \times n$ de la siguiente forma

$$\mathtt{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

donde λ_1, ..., λ_n son escalares.

También se suele llamar matriz de Vandermonde a la transpuesta de esta.

Esta matriz aparece naturalmente al tratar de aproximar funciones mediante polinómios

Problema

Sean λ_1, ..., λ_n, y_1, ..., y_n escalares. Hallar de ser posible un polinómio

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-} + \cdots a_1 x + a_0$$

tal que

$$p(\lambda_1) = y_1, \quad p(\lambda_2) = y_2, \text{ ...}, \quad p(\lambda_n) = y_n$$

Desarrollando los polinómios evaluados en los λ's, el problema se traduce en resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_{n-2}\lambda_1^{n-2} + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1\lambda_2 + \cdots + a_{n-2}\lambda_2^{n-2} + a_{n-1}\lambda_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1\lambda_n + \cdots + a_{n-2}\lambda_n^{n-2} + a_{n-1}\lambda_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

donde los coeficientes a_0, ..., a_{n-1} son las incognitas

Si escribimos este sistema en forma matricial aparece la matriz de Vandermonde transpuesta

$$\mathtt{V}^t \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Notemos que si $\mathtt{V}^t$ es inversible, el sistema tiene solución única dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = (\mathtt{V}^t)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

El Ejercicio 10 del Práctico 4 da una fórmula para el determinante de $\mathtt{V}$ que permite decidir cuando es inversible

Ejercicio 10 del Práctico 4

$$\det(\mathtt{V}) = \Pi_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$$

Entonces $\mathtt{V}$ es inversible si y sólo si todos los λ_i's son distintos

La demostración es por inducción en n. Hay que hacer operaciones elementales por filas (y columnas) para reducir el caso n al caso $n-1$ y aplicar la Hipotesis Inductiva

Primero se aplican una a una las siguientes operaciones:

- La úlitma fila menos λ_1 por la penúltima
- La penúlitma fila menos λ_1 por la antepenúltima
- ... La fila r menos λ_1 por la fila $r-1$ ...
- La segunda fila menos λ_1 por la primera

Así obtenemos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-2} & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Por el tipo de operaciones que aplicamos resulta que

$$\det \mathtt{V} = \det A = \det A(1|1)$$

Notemos que la columna j de $A(1|1)$ es la columna j de una matriz de Vandermonde $\mathtt{V}_{n-1}$ de tamaño $n-1$

$$(\lambda_j - \lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

En otras palabras, $A(1|1)$ se obtine a partir de $\mathtt{V}_{n-1}$ multiplicando la columna j por $(\lambda_j - \lambda_1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\det \mathtt{V} = \det A &= \det A(1|1) \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\cdots(\lambda_2 - \lambda_1)\det \mathtt{V}_{n-1} \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\cdots(\lambda_2 - \lambda_1)\Pi_{2\le i<j\le n}(\lambda_j - \lambda_i) \\
&= \Pi_{1\le i<j\le n}(\lambda_j - \lambda_i)
\end{aligned}$$