3. Dados escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, definimos la matriz de *Vandermonde* $\mathtt{V}$ en la forma:

$$\mathtt{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Probar (por inducción) que $\det(\mathtt{V}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$.

Denotamos V_n a la matriz de Vandermonde $n \times n$. Haré la demostración de que $\det(V_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ por inducción en $n \geq 2$.

Caso base ($n=2$)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \checkmark$$

Caso inductivo ($n>2$)

Supongamos que la afirmación es válida para una matriz de Vandermonde $(n-1)\times(n-1)$, con $n-1 \geq 2$ y probemos

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \circledast$$

Realizamos las operaciones elementales por fila $F_j - \lambda_1 F_{j-1}$ desde $j=n$ hasta $j=2$, en ese órden. Éstas operaciones no afectan al determinante, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\det(V_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante por la primera columna obtenemos:

$$\det(V_n) = \det \begin{bmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{bmatrix}$$

Ahora bien, la matriz que nos queda para calcular el determinante se puede obtener desde la matriz V_{n-1} multiplicando la columna 1 por $\lambda_2 - \lambda_1$, la columna 2 por $\lambda_3 - \lambda_1, \ldots,$ la columna $n-1$ por $\lambda_n - \lambda_1$, luego

$$\det(V_n) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \lambda_4^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \det(V_{n-1}(\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n))$$

Por hipótesis inductiva:

$$\det(V_n) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$
$$= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Lo cual prueba $\circledast$.