Matriz de una transformación lineal

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

En este archivo introduciremos la matriz de una transformación lineal, sus autovalores y autovectores y explicaremos como calcular estas cosas

Estas diapositivas estan basadas en la sección 3.5 y 3.6 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Para finalizar, diremos algo acerca de la construcción de transformaciones lineales

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

Aquí veremos como podemos utilizar las coordenadas para calcular cualquier transformación lineal como la multiplicación por una matriz

Recordemos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de V.

El vector de coordenadas de $v \in V$ es

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

representa las únicos escalares $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

Observaciones

- Un vector de coordenadas determina un único vector.
- Si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ las coordenadas son las coordenadas usuales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{si } v &= (1,2,3) \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow v &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ \Rightarrow [v]_{\mathcal{C}} &= (1,2,3) = v \end{aligned}$$

Definición 3.5.1

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$, respectivamente.

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

La mariz de T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(v_2)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(v_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

es decir, las columnas son los vectores de coordenadas de $T(v_i) \in W$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$

Notar que $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $n = \dim V$ y $m = \dim W$.

Ejemplo

Ya conociamos esta definición para bases caónicas de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 6b del 2do TP

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 1)$, $T(e_2) = (1, 2)$ y $T(e_3) = (1, 3)$.
Dar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

$$[T(e_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [T(e_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [T(e_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(por abuso de notación, denotamos $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

Ejemplo

La matriz de cambio de coordenadas

Si consideramos la transformación lineal la identidad,

$$\mathrm{Id} : V \longrightarrow V,$$

y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1', ..., v_n'\}$ son bases ordenadas de V, entonces la matriz de Id

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [v_1]_{\mathcal{B}'} & [v_2]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [v_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

es exactamente la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$

Observación

Si en el espacio de llegada tomamos la base canónica entonces la matriz es fácil de calcular.

La matriz de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^m$ es

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

porque las coordenadas con respecto a la base canónica son las coordenadas usuales.

Observación

En particular, la matriz de cambio de coordenadas de una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ es fácil de calcular.

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

es decir, las columnas son los vectores de $\mathcal{B}$.

Mientras que la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ es su inversa

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}$$

por el Corolario de la página 30 del archivo anterior.

Proposición 3.5.1

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$, respectivamente. Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}$$

para todo $v \in V$.

En palabras, el vector de coordenadas de $T(v)$ en la base $\mathcal{B}'$ es igual a multiplicar la matriz de T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ por el vector de coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$.

Como las coordenadas determinan los vectores esto completamente determina el valor de la transformación en cada vector.

Con sólo conocer cuanto vale la transformación en una base conocemos cuanto vale en todo el espacio.

La demostración la pueden ver en el libro de Garcia-Tiraboschi.

La demostración sigue los mismos pasos del siguiente ejemplo pero escribiendo todo en general, con letras y subíndices en lugar de números concretos.

Ejemplo

Esto es lo que sucede con la matriz en la base canónica.

Ejercicio 6 del 2do TP

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,1)$, $T(e_2) = (1,2)$ y $T(e_3) = (1,3)$.
Entonces

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+3z)$$

$$
\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T(xe_1+ye_2+ze_3) \\
&= xT(e_1)+yT(e_2)+zT(e_3) \\
&= x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Teorema 3.5.3

Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita con bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$, respectivamente.

Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales.

Entonces la matriz de la tranfomación lineal

$$UT : V \longrightarrow Z,$$

es decir la composición de T con U, satisface

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

(multiplicación de matrices)

Notación

Una transformación lineal que va de un espacio en si mismo, es decir $T : V \longrightarrow V$, se llama operador lineal.

Si $\mathcal{B}$ es una base de V, $[T]_{\mathcal{B}}$ denota la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$, o sea la base de salida y llegada es la misma, entonces usamos un sólo subíndice.

Corolario 3.5.4

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathcal{B}$ y $U, T : V \longrightarrow V$ dos transformaciones lineales. Entonces

1. $[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$
2. T es un isomorfismo si y sólo si $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz inversible. En tal caso
$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

En todo espacio vectorial tenemos muchas bases.

El siguiente teorema nos dice como se relacionan las matrices de una transformación lineal respecto de distintas bases.

Teorema 3.5.5

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases ordenadas de V y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$$

donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Veamos una idea de la demostración...

Idea de la demostración

En palabras, para calcular la matriz de T de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}'$ procedemos como sigue

1. cambiamos coordenadas de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$
2. aplicamos T de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}$
3. cambiamos coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$

Usando el Teorema 3.5.3 podemos escribir esto de la siguiente manera

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \circ [T]_{\mathcal{B}} \circ [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Sabemos que $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ y su inversa es el cambio de coordenadas al revés. Es decir, $P^{-1} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Con igual argumento podemos deducir otras igualdades que son útiles para armar todas las matrices a partir de matrices asociadas a bases canónicas, que como ya dijimos en esta base es fácil calcularlas.

Observación

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^n$.

Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$$

En palabras, "para ir de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ con T, primero vamos de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$, despues de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ con T y finalmente vamos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$".

Las matrices $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ son fáciles de calcular, ponemos los vectores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ como columnas. Similarmente, la matriz de T en la base canónica también es fácil de calcular.

Observación

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathbb{R}^n$.
Entonces la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$$

En palabras, "para ir de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, primero vamos de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$ y despues vamos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$".

Las matrices $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ son fáciles de calcular, ponemos los vectores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ como columnas.

1. Objetivos
2. Matriz de una transformación
   - Definición
   - Propiedades
3. Diagonalización
   - Definición
   - Propiedades
   - Diagonalizable
4. Construcción de transformaciones lineales

Antes mencionamos que con sólo conocer cuanto vale la transformación en una base conocemos cuanto vale en todo el espacio.

En particular, si la transformación en una base conciste sólo en multiplicar por un escalar será muy fácil de calcular.

En ese caso la matriz de la transformación en dicha base será diagonal.

Este tipo de tranfomaciones estudiaremos en esta sección.

Ya hemos visto algo de esto cuando vimos autovalores y autovectores de una matriz.

1. Objetivos

2. Matriz de una transformación
   - Definición
   - Propiedades

3. Diagonalización
   - Definición
   - Propiedades
   - Diagonalizable

4. Construcción de transformaciones lineales

Definición 3.6.1

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Un autovalor de T es un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ con

$$T(v) = \lambda v$$

En tal caso, se dice que v es un autovector (asociado a λ).

El autoespacio asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{\text{autovectores asociados a } \lambda\} \cup \{0\}$$

Lema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal y $\mathcal{B}$ una base de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ son autovalor y autovector de T
- $v \in \mathrm{Nu}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $[v]_{\mathcal{B}}$ son autovalor y autovector de $[T]_{\mathcal{B}}$

Demostración:

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(v) - \lambda v = (T - \lambda\,\mathrm{Id})v = 0$$

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [T(v)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$$

Consecuencia

- Para calcular los autovalores y autovectores de una transformación T, elegimos una base $\mathcal{B}$ y calculamos los autovalores y autovectores de $[T]_{\mathcal{B}}$.
- No importa que base elijamos porque $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$ y en el Ejercicio 8 del 1er TP vimos que estas matrices tienen iguales autovalores.

Teorema 3.6.1

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal. Entonces V_λ es un subespacio vectorial.

La demostración es como en el caso de matrices.

Notar que podemos definir V_λ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, λ es autovalor si y sólo si $V_\lambda \neq 0$

Teorema 3.6.2

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal.

Sean v_1, ..., v_m autovectores de T con autovalores λ_1, ..., λ_m, respectivamente.

Si todos los autovalores son distintos, entonces los vectores v_1, ..., v_m son LI

La demostración es por inducción.

Si $m = 1$, entonces vale porque los autovectores son no nulos por definición y en tal caso el conjunto $\{v_1\}$ es LI.

Para $m + 1$ procedemos como sigue.

Sean $c_1, ..., c_{m+1}$ escalares tales que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m + c_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Si aplicamos T y multiplicamos por λ_{m+1} esta igualdad obtenemos

$$\begin{array}{cl} T & \rightsquigarrow c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_m \lambda_m v_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \\ \lambda_{m+1} \cdot & \rightsquigarrow c_1 \lambda_{m+1} v_1 + \cdots + c_m \lambda_{m+1} v_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \end{array}$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) v_1 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) v_m = 0$$

Por (HI), $c_i(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Dado que los autovalores son distintos, $c_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $c_{m+1} = 0$ y los vectores son LI.

Definición 3.6.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que T es diagonalizable si V tiene una base formada por autovectores.

Lema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal diagonalizable. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de autovectores de T con autovalores asociados λ_1, ..., λ_n. Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En efecto, las columnas de $[T]_{\mathcal{B}}$ son los vectores de coordenada

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [\lambda_i v_i]_{\mathcal{B}} = \lambda_i [v_i]_{\mathcal{B}}$$

y $[v_i]_{\mathcal{B}}$ tiene todas entradas 0 excepto un 1 en el lugar i (ver Observación página 14 del archivo anterior)

Se preguntarán cómo saber si una transformación lineal es diagonalizable.

La primera respuesta es: calcular todos los autovalores y autovectores.

A continuación veremos algunos criterios a tener en cuenta.

Corolario 3.6.3

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con n autovalores distintos entonces T es diagonalizable.

En efecto, cada autovalor tiene al menos un autovector.

Elijamos un autovector v_1, ..., v_n para cada autovalor.

Por el Teorema 3.6.2 estos vectores son LI.

Dado que son tantos como la dimensión de V forman una base.

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con autovalores λ_1, ..., λ_m. Si

$$\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_m}$$

La demostración es similar a la anterior.

Primero elegimos una base para cada autoespacio.

Despues vemos que la unión de estas bases es un conjunto LI gracias al Teorema 3.6.2.

Finalmente la unión es una base de V por l forman una base del espacio total.

Definición 3.6.2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El polinomio característico de T es el polinomio caractristico de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es una base de V. Es decir,

$$\chi_T(x) = \det([T]_{\mathcal{B}} - x \, \mathrm{Id})$$

Notar que no importa que base usemos para calcular el polinomio característico dado que $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$.

Proposición 3.6.4

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal. Entonces λ es autovalor de T si y sólo si λ es raíz del polinomio caractrerístico.

Corolario

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal. Supongamos que

$$\chi_T(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_m)^{d_m}$$

Entonces

1. $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq d_i$ para todo i.
2. T es diagonalizable si y sólo si $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ para todo i.

El punto de partida de esta sección es la siguiente simple observación.

Observación

Sea $T : V \longrightarrow W$ una tranfomación lineal. Si conocemos cuanto vale $T(v_i)$ para todos los vectores de una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V, entonces podemos calcular $T(v)$ para todo $v \in V$.

Pues al ser $\mathcal{B}$ una base, si $v \in V$ entonces $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y por lo tanto

$$T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)$$

Más aún, una transformación queda determinada por cuanto vale en una base.

Teorema 3.1.1

Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$.

Sea W un espacio vectorial y $\{w_1, ..., w_n\}$ vectores de W.

Entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo i.

Notar que los w_i's pueden ser cualesquiera vectores y se pueden repetir.

Este teorema nos permite construir transformaciones lineales con propiedades específicas (ver los ejercicios del Práctico 9)

Observación

Lo que nos dice el teorema es que para definir una transformación lineal es suficiente que definamos cuanto vale en una base.

Si bien estamos acostumbrados a definir funciones usando fórmulas en el caso de las transformaciones lineales no es necesario.

Si quisieramos dar una fórmula podemos usar las coordenadas en la base.

Y si estamos en $\mathbb{R}^n$ podemos usar las coordenadas usuales usando la matriz de la transformación y el teorema que nos dice como se relacionan las matrices en distintas bases.


Y RECUERDEN: UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL QUEDA DEFINIDA POR LOS VALORES EN UNA BASE
¡HASTA LA PRÓXIMA, AMIGXS!
pintzap.com