Práctico 1

Números complejos

(1) Sea $(\mathbb{K}, +, .)$ un cuerpo y sea 0 el elemento neutro de $+$. Demostrar que:
  (a) $a.0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{K}$.
  (b) Si $a, b \in \mathbb{K}$ y $a.b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

(2) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

(a) $(-1 + i)(3 - 2i)$ (b) $i^{131} - i^9 + 1$ (c) $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

(3) Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

(4) Determinar todos los números complejos z tales que $z + \frac{1}{z}$ es un número real.

(5) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:
  (a) $a \,\mathrm{Im}(z) = 2$. ¿Es único?
  (b) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?
  (c) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.
  (d) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

(6) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$.

$$(\star)\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$$

Verificar si se cumple que dadas dos soluciones (a, b) y (c, d) entonces $(a + c, b + d)$ es solución.

(7) Resolver los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} ix + y = 0 \\ 3x + 2iy = 0. \end{cases}$$

(8) Sea (a, b) un par de números reales. Considere el sistema

$$\begin{cases} x - y = a \\ 2x - 2y = b. \end{cases}$$

  (a) Dar un ejemplo de par (a, b) no nulo para el cual el sistema tiene solución y calcular sus soluciones.
  (b) Dar ejemplos de pares (a, b) no nulos para los cuales el sistema no tenga solución.
  (c) Caracterizar el conjunto de pares (a, b) para los cuales el sistema tiene solución.
  (d) Verificar que si (x_0, y_0) es una solución del sitema $(\star)$ y (x_1, y_1) es una solución del sistema del inciso (a), entonces $(x_0 + y_0, x_1 + y_1)$ es también solución del sistema del inciso (a).

Más ejercicios. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(1) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

(b) $K = i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \; z = it, \, t \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones usuales de $\mathbb{C}$, es un cuerpo.

(c) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

(2) Sean $z = 1 + i$ y $w = \sqrt{2} - i$. Calcular:

(a) z^{-1}; $1/w$; z/w; w/z. (b) $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2017}$. (c) $(z(z + w)^2 - iz)/w$.

(3) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

(a) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-1}, \; 0 \leq \theta < 2\pi$, (b) $3i(1 + i)^4$, (c) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

(4) Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 + |z|z^2(1 - i) = 0$.

(5) Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

(a) $\dfrac{(z + i)(z - i)}{z^2 + 1}$. (b) $z - 2 + \dfrac{1}{z - 2}$. (c) $\left|\dfrac{1}{z - i}\right|^2$.

(6) Sea $p \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{p} + \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{|p|^2}$.

(7) Mostrar que las soluciones de la ecuación $z^4 + (-4 + 2i)z^2 - 1 = 0$ son exactamente $-1 + \sqrt{1 - i}$, $-1 - \sqrt{1 - i}$, $1 + \sqrt{1 - i}$ y $1 - \sqrt{1 - i}$.

(8) (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

(9) Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$