Álgebra de Matrices 2: inversibles y elementales.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

1. Objetivos

2. Matrices inversibles
   - definición
   - motivación
   - como calcular la inversa

3. Matrices elementales

En este archivo definiremos las matrices inversibles, explicaremos como calcularlas y su relación con los sistemas de ecuaciones.

También definiremos las matrices elementales.

Estas diapositivas estan basadas en las Secciones 1.4 y 1.5 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

1. Objetivos
2. Matrices inversibles
   - definición
   - motivación
   - como calcular la inversa
3. Matrices elementales

Definición (1.5.1 y 1.5.2)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que
cuadrada

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n$$

Se dice que A^{-1} es la inversa de A

Ejemplo

Id_n es inversible con $(\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$ pues $\mathrm{Id}_n \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n$

Observación

La matriz Id_n es como el 1 de los números reales.
La matriz A^{-1} es como el inverso de un ńumero real.

Definición (1.5.1 y 1.5.2)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n$$

Se dice que A^{-1} es la inversa de A

Ejemplo $(\star)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ pues

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{3}{7} + \frac{1}{7} & 2\frac{1}{7} - \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} - 3\frac{1}{7} & \frac{1}{7} + 3\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Tarea: verificar la multiplicación $A^{-1} \cdot A$

Definición (1.5.1 y 1.5.2)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n$$

Se dice que A^{-1} es la inversa de A

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pues

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

Tarea: verificar la multiplicación $A^{-1} \cdot A$

Definición (1.5.1 y 1.5.2)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n$$

Se dice que A^{-1} es la inversa de A

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tarea verificar las multiplicaciones $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$

Definición (1.5.1 y 1.5.2)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n$$

Se dice que A^{-1} es la inversa de A

No toda matriz en inversible

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es inversible.

En efecto, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ fuera la inversa entonces

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Objetivos
2. Matrices inversibles
   - definición
   - motivación
   - como calcular la inversa
3. Matrices elementales

Observación

La notación $AX = Y$ para sistema de ecuaciones es consistente con la multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

multiplicando

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inverisble e $Y \in \mathbb{R}^n$. Entonces el sistema $AX = Y$ tiene una única solución que es $A^{-1}Y$.

Es decir, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ entonces

la solución es $\begin{cases} x_1 = b_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + b_{1n}\, y_n \\ x_2 = b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2 + \cdots + b_{2n}\, y_n \\ \vdots \\ \\ x_n = b_{n1}\, y_1 + b_{n2}\, y_2 + \cdots +_{nn}\ y_n \end{cases}$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inverisble e $Y \in \mathbb{R}^n$. Entonces el sistema $AX = Y$ tiene una única solución que es $A^{-1}Y$.

O si la escribimos en forma de vector la solución es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + b_{1n}\, y_n \\ b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2 + \cdots + b_{2n}\, y_n \\ \vdots \\ \\ b_{n1}\, y_1 + b_{n2}\, y_2 + \cdots +_{nn}\ y_n \end{pmatrix}$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inveribsle e $Y \in \mathbb{R}^n$. Entonces el sistema $AX = Y$ tiene una única solución que es $A^{-1}Y$.

Ejemplo $(\star)$

La solución del sistema $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tarea: verificar que es solución

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inverisble e $Y \in \mathbb{R}^n$. Entonces el sistema $AX = Y$ tiene una única solución que es $A^{-1}Y$.

Demostración

Reemplazando X por $A^{-1}Y$ vemos que efectivamente es una solución:

$$AX = A(A^{-1}Y) \overset{\text{asoc}}{=} (AA^{-1})Y \overset{\text{inversa}}{=} \mathrm{Id}_n\, Y \overset{\text{neutro}}{=} Y$$

(La unicidad la analizaremos luego)

Observación

Es como la solución de una ecuación lineal $ax = y$ en $\mathbb{R}$.

1. Objetivos
2. Matrices inversibles
   - definición
   - motivación
   - como calcular la inversa
3. Matrices elementales

Preguntas

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
¿ Es A es inversible? ¿ Cuál es su inversa?

Dicho de otro modo, nos preguntamos si existe una matriz $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id}} = A^{-1} \cdot A.$$

Consideremos la primera igualdad y razonemos como podemos responder a las preguntas.

Si escribimos a A^{-1} resaltando sus columnas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

por la forma en que multiplicamos las matrices, debe suceder que AC_1, AC_2, ..., AC_n tienen que ser iguales a las columnas de Id:

$$AC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AC_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad AC_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AC_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad AC_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

cada una de estas igualdades es un sistema de ecuaciones donde C_1, C_2, ... , C_n son las incógnitas.
Entonces podemos usar el Método de Gauss.

El Método de Gauss consiste en aplicarle operaciones elementales por filas a cada una de las matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 1 \\ A & \vdots \\ & 0 \end{array}\right), \quad \ldots, \quad \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A & \vdots \\ & 1 \end{array}\right)$$

hasta transformar a A en una MERF.

Dado que en todas estas matrices esta A y por ende le vamos a aplicar las mismas operaciones a todas podemos unirlas a todas en una sola matriz ampliada más grande

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ A & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

para escribir menos.

Recapitulando,

1. Armamos la matriz ampliada ("grande")

$$(A|\,\mathrm{Id})$$

2. Aplicamos operaciones elementales por filas hasta obtener una matriz de la forma

$$(B|Z)$$

   donde B es MERF y Z es una matriz cuadrada $n \times n$

Con esto la respuesta a nuestras preguntas es dada por lo siguiente.

Teorema

1. Si $B = \mathrm{Id}$, entonces A es inversible y $A^{-1} = Z$.
2. Si $B \neq \mathrm{Id}$, entonces A no es inversible.

Ejemplo

Apliquemos el teorema a nuestro ejemplo $(\star)$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7} \cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 3 \cdot F_2} \left(\begin{array}{c|cc} \overset{\text{Id}}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}} & \begin{matrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \end{matrix} \end{array}\right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ como ya lo sabíamos.

Ejemplo

En cambio la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ no es inverisble. Pues

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{c|cc} \overset{\text{MERF}}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Demostración del Teorema

Sean Z_1, Z_2, ... , Z_n las columnas de Z.
Por el razonamiento que hicimos antes, hemos transformado cada uno de los sistemas de ecuaciones

$$AC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AC_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad AC_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

en sistemas equivalentes

$$BC_1 = Z_1, \quad BC_2 = Z_2, \quad \ldots, \quad BC_n = Z_n$$

Por lo tanto, cada uno de estos sistemas tienen las mismas soluciones.

Demostraciones

Analicemos las soluciones de los sistemas

$$BC_1 = Z_1, \quad BC_2 = Z_2, \quad \ldots, \quad BC_n = Z_n$$

Si $B = \mathrm{Id}$, entonces cada sistema tiene una única solución las cuales son Z_1, Z_2, ..., Z_n.

$$\Longrightarrow AZ_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AZ_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad AZ_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismos

$$AZ = \mathrm{Id}$$

Para terminar de probar que A es inversible y $A^{-1} = Z$, debemos ver que $ZA = \mathrm{Id}$. Esto lo haremos en la próxima sección porque necesitamos las matrices elementales.

Demostración

Probemos ahora el caso $B \neq \mathrm{Id}$. Lógicamente pueden susceder dos cosas:

(1) Algún sistema no tiene solución y por ende A no es inversible.

(2) Todos los sistemas tienen solución. En este caso observemos lo siguiente.

Demostración

Observemos lo siguiente:

- B tiene filas nulas (por ser cuadrada y MERF)
- Las entradas de Z_1, Z_2, ..., Z_n correspondientes a las filas nulas de B son iguales a cero

$$Z = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{Z}} \\ \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{primeras filas de Z} \\ \\ \text{última fila de Z} \end{array}$$

- Z_1, Z_2, ..., Z_n son soluciones de cada uno de los sistemas

$$AZ = \mathrm{Id}$$

Las dos últimas valen por la manera en que caracterizamos los sistemas que tienen solución (recordar pág 27 del archivo Sist. de ec. lineales: Método de Gauss.)

Supongamos que A es inversible.
Por la tercer observación tenemos que

$$AZ = \mathrm{Id} \underset{\text{multpilicando}}{\Longrightarrow} A^{-1}(AZ) = A^{-1} \cdot \mathrm{Id} \underset{\text{asoc y neutro}}{\Longrightarrow} (A^{-1}A)Z = A^{-1}$$

$$\underset{\text{inversa}}{\Longrightarrow} \mathrm{Id} \cdot Z = A^{-1} \underset{\text{neutro}}{\Longrightarrow} Z = A^{-1}$$

Entonces, usando la segunda observación vemos que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Id}} \\ 0 \cdots 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id} = ZA = \begin{pmatrix} \tilde{Z} \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \tilde{Z}A \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual es un absurdo. Entonces A no es inversible si $B \neq \mathrm{Id}$.

1. Objetivos
2. Matrices inversibles
   - definición
   - motivación
   - como calcular la inversa
3. Matrices elementales

Definición 1.4.1

Una matriz $n \times n$ se dice elemental si fue obtenida por medio de una única operación elemental a partir de la matriz identidad Id_n

Como hay tres tipos de operaciones elementales, hay tres tipos de matrices elementales.
A continuación las explicitaremos.

El primer tipo de matriz elemental se obtiene tras multiplicar la fila k de Id_n por un número real $c \neq 0$:

$$\begin{array}{r c} & \\ & \\ \text{fila k} \rightarrow & \\ & \\ & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{cF_k} E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Es una matriz diagonal con todos 1 excepto una c en el lugar k, k. Las entradas de E se pueden definir así

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq k \\ c & \text{si } i = j = k \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El segundo tipo de matriz elemental se obtiene tras sumar a la fila r de Id_n la fila s multpilicada por t:

$$
\begin{array}{r}
\\
\text{fila r} \\
\\
\text{fila s} \\
\\
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & & & 0 \\
\vdots & 1 & & & \vdots \\
0 & & \ddots & & 0 \\
\vdots & & & 1 & \vdots \\
0 & & & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{F_r + tF_s}
E =
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & & \text{entrada r,s} & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & & & 0 \\
\vdots & 1 & & t & \vdots \\
 & & \ddots & & \\
\vdots & & & 1 & \vdots \\
0 & \cdots & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Es la matriz identidad con una t en el lugar r, s.
Las entradas de E se pueden definir así

$$
[E]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ t & \text{si } i = r \text{ y } j = s \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}
$$

Aquí $r < s$. Si $r > s$, la t aparecerá debajo de la diagonal principal.

El tercer tipo de matriz elemental se obtiene tras intercambiar las filas r y s de Id_n:

$$\begin{array}{l} \\ \text{fila r} \\ \\ \text{fila s} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & & 1 & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & 1 & & 0 & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Las entradas de E se pueden definir así

$$[E]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } r \neq i = j \neq s \text{ ó } i = r, j = s \text{ ó } i = s, j = r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Teorema 1.4.1

Sea e una operación elemental por fila y $E = e(\mathrm{Id}_m)$ la matriz elemental que se obtiene tras aplicar e a la matriz Id_m.
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces

$$e(A) = EA,$$

es decir, la matriz que se obtiene tras aplicarle e a A es igual a la multiplicación EA.

Ejemplo ($\star$)

$$E = e_{F_1 \leftrightarrow F_2}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{F_1 \leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Demostración del Teorema 1.4.1

La prueba se divide en 3 casos, uno por cada tipo de operación elemental.

Si e es multiplicar la fila k por un número real $c \neq 0$, entonces ya vimos que $e(\mathrm{Id}_m)$ es una matriz diagonal con todos 1 excepto una c en el lugar k, k.
Por otro lado, en el archivo anterior (pág 23), vimos que multiplicar por una matriz diagonal a izquierda es multiplicar cada fila por el elemento correspondiente de la diagonal.
En este caso, multiplicamos todas las filas por 1 excepto la fila k por c.
Como queríamos.

Demostración del Teorema 1.4.1

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ ca_{k1} & \cdots & ca_{kj} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = e(A)$$

Demostración del Teorema 1.4.1

La prueba para las otras 2 operaciones usa las fórmulas de la multiplicación y de las entradas de las matrices elementales. Hay que manipular las sumas y los subíndices. No vale la pena hacerlo ahora. Si alguien no sabe que hacer durante esta larga cuarentena le recomiendo hacerlo :)

En las notas de Garcia-Tiraboschi esta hecha la prueba para las matrices elementales 2×2.

Ahora podemos terminar de probar:

Teorema

1. Si $B = \mathrm{Id}$, entonces A es inversible y $A^{-1} = Z$.
2. Si $B \neq \mathrm{Id}$, entonces A no es inversible.

Nos faltaba demostrar que $ZA = \mathrm{Id}$ si $B = \mathrm{Id}$
Recordemos como construimos Z

$$(A|\,\mathrm{Id}) \xrightarrow{e_1} (\,e_1(A)|e_1(\mathrm{Id})\,) \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_n} (\mathrm{Id}\,|Z)$$

le aplicamos a la matriz $(A|\,\mathrm{Id})$ varias operaciones elementales por filas hasta transformar a A en Id
Entonces podemos usar el Teorema 1.4.1 para interpretar las operaciones elementales como producto de matrices.

$$(A|\,\mathrm{Id}) \xrightarrow{e_1} (\,e_1(A)|e_1(\mathrm{Id})\,) \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_n} (\mathrm{Id}\,|Z)$$

podemos interpretar como sigue

$$Z = e_n(e_{n-1}(\cdots e_2(e_1(\mathrm{Id})))) \overset{\text{Teo 1.4.1}}{=} e_n(\mathrm{Id}) \cdot e_{n-1}(\cdots e_2(e_1(\mathrm{Id})))$$

$$\overset{\text{Teo 1.4.1}}{=} e_n(\mathrm{Id}) \cdot e_{n-1}(\mathrm{Id}) \cdots e_2(\mathrm{Id}) e_1(\mathrm{Id})\,\mathrm{Id}$$

$$\mathrm{Id} = e_n(e_{n-1}(\cdots e_2(e_1(A)))) \overset{\text{Teo 1.4.1}}{=} e_n(\mathrm{Id}) \cdot e_{n-1}(\cdots e_2(e_1(A)))$$

$$\overset{\text{Teo 1.4.1}}{=} e_n(\mathrm{Id}) \cdot e_{n-1}(\mathrm{Id}) \cdots e_2(\mathrm{Id}) e_1(\mathrm{Id}) A$$

$$= ZA$$

Veamos lo anterior en nuestro ejemplo $(\star)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7} \cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 3 \cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

Las matrices elementales correspondientes a cada una de las operaciones son

$$E_1 = e_{F_1 \leftrightarrow F_2}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = e_{F_2 - 2 \cdot F_1}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = e_{-\frac{1}{7} \cdot F_2}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad E_4 = e_{F_1 - 3 \cdot F_2}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tarea

Verificar que valen las siguientes igualdades

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathrm{Id}$$

$$E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$$