PRÁCTICO 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Aprender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo ⓐ tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
  a) $2v + 3w - 5u$,
  b) $5(v + w)$,
  c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
  a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,
  b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

(4) Probar que
  a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
  b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

(5) Encontrar
  a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
  b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
  c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2,3)$, (b) (t,t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

(7) Calcular $\langle v,w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v=(2,2), w=(1,0)$, (b) $v=(-5,3,1), w=(2,-4,-7)$.

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v,e_1\rangle e_1 + \langle v,e_2\rangle e_2 + \langle v,e_3\rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v,w,u\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle\lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v,u\rangle + \lambda_2\langle w,u\rangle.$$

b) Si $\langle v,w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle\lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v,v\rangle + \lambda_2^2\langle w,w\rangle.$$

(10) Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v,w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

(11) ⓐ Sean $v,w\in\mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v,w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Ayudas

(11) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.