6. En cada caso decidir si la matriz es invertible y si lo es, calcular su inversa usando la matriz de cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & \sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ayuda para cofactores.

Primero, tenemos que saber que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A^t)$, dónde $Adj(A^t) = cof(A)^t$

Comenzamos con A:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 + 36 + 12 - 0 - (-18) - (-6) = 72$$, entonces A es invertible.

Ahora calculo los cofactores de A y luego formo la matriz de cofactores:

$C_{11} = -3$ $\quad C_{21} = 5$ $\quad C_{31} = 9$,
$C_{12} = 18$ $\quad C_{22} = -6$ $\quad C_{32} = 18$
$C_{13} = 6$ $\quad C_{23} = 14$ $\quad C_{33} = -18$

luego la matriz de cofactores es $cof(A) = \begin{bmatrix} -3 & 18 & 6 \\ 5 & -6 & 14 \\ 9 & 18 & -18 \end{bmatrix}$ y $cof(A)^t = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{bmatrix}$

Finalmente, $$A^{-1} = \frac{1}{72} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{bmatrix} \underset{\text{divido término a término}}{=} \begin{bmatrix} -1/24 & 5/72 & 1/8 \\ 1/4 & -1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 7/36 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Seguimos con B:

$$\det B = \det \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & sen(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix} = \cos^2(t) - sen^2(t) \underset{\text{trigonométrica}}{\overset{\text{Identidad}}{=}} \cos(2t)$$, entonces B es invertible.

Ahora calculo los cofactores de B y luego formo la matriz de cofactores:

$C_{11} = \cos(t)$ $\quad C_{21} = 0$ $\quad C_{31} = -sen(t)$,
$C_{12} = 0$ $\quad C_{22} \overset{*}{=} \cos(2t)$ $\quad C_{32} = 0$
$C_{13} = -sen(t)$ $\quad C_{23} = 0$ $\quad C_{33} = \cos(t)$

luego la matriz de cofactores es $cof(B) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -sen(t) \\ 0 & \cos(2t) & 0 \\ -sen(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix} = cof(A)^t$

$*$ $\cos^2(t) - sen^2(t)$

Finalmente, $$A^{-1} = \frac{1}{\cos(2t)} \cdot \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -sen(t) \\ 0 & \cos(2t) & 0 \\ -sen(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix} \underset{\text{divido término a término}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\cos(t)}{\cos(2t)} & 0 & \frac{-sen(t)}{\cos(2t)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-sen(t)}{\cos(2t)} & 0 & \frac{\cos(t)}{\cos(2t)} \end{bmatrix}$$