22. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Probar que si A y B son matrices $n \times n$ entonces $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Tenemos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$, entonces:

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} b_{ii} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conmutatividad}}}{=} \sum_{i=1}^{n} b_{ii} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{Tr}(BA)$$

Visto de otra manera:

$$\mathrm{Tr}(AB) = a_{11} b_{11} + \cdots + a_{nn} b_{nn} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conmutatividad}}}{=} b_{11} a_{11} + \cdots + b_{nn} a_{nn} = \mathrm{Tr}(BA)$$