Práctico 5

Autovalores y autovectores

Ejercicios resueltos.

(1) *(a)* Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ 0 \le \theta < 2\pi.$$

(b) Calcular los autovalores complejos de las matrices D y E del item anterior y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

Solución: (a) En cada caso debemos encontrar el polinomio característico y las raíces reales del mismo, que serán los autovalores. Luego debemos ver los autoespacios correspondientes.

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \left| x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x+2) \end{aligned}$$

Luego la matriz A tiene autovalores 1 y -2.

Para calcular el autoespacio del autovalor 1 debemos resolver el sistema de ecuaciones $(1\,\mathrm{Id} - A)X = 0$, esto es:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego el conjunto solución es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\} = \{y(3,1) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto $V_1 = \{t(3,1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular el autoespacio del autovalor -2 debemos resolver el sistema de ecuaciones $(-2\,\mathrm{Id} - A)X = 0$, esto es:

$$\begin{bmatrix} -2-1 & 0 \\ -1 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{F_1 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el conjunto solución del sistema es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} = \{y(0,1) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto $V_{-2} = \{t(0,1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \left| x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2. \end{aligned}$$

Luego la matriz B tiene autovalores 1 y 2.

Para calcular el autoespacio del autovalor 1 debemos resolver el sistema de ecuaciones $(\operatorname{Id} - B)X = 0$, esto es:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+F_3]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El conjunto solución es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\} = \{y(0, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto $V_1 = \{t(0, 1, 0) \;:\; t \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular el autoespacio del autovalor 2 debemos resolver el sistema de ecuaciones $(2 \operatorname{Id} - B)X = 0$, esto es:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las sols. son $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \;:\; x, y \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto $V_2 = \{t(1, 0, -1) + s(0, 1, -1) \;:\; t, s \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned} \chi_C(x) &= \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & x-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & x-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)^3 \end{aligned}$$

Luego la matriz C tiene un solo autovalor (de multiplicidad 3): λ. Para calcular el autoespacio asociado a λ debemos resolver el sistema de ecuaciones $(\lambda \operatorname{Id} - C)X = 0$, esto es:

$$\begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones son $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} = \{z(0, 0, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto $V_\lambda = \{t(0, 0, 1) \;:\; t \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned} \chi_D(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & 5 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x+1) + 5 = x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

El polinomio $\chi_D(x) = x^2 - 2x + 2$ tiene como raíces a $\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$, es decir, no tiene raíces reales. Por lo tanto la matriz D no tiene autovalores reales y, por consiguiente, no tiene autovectores reales.

Para hallar el autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$ al autovalor $1 + i$ debemos rewsolver el sistema $((1 + i) \operatorname{Id} - D)X = 0$, así:

$$\begin{bmatrix} (1+i)-3 & 5 \\ -1 & (1+i)+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+i & 5 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix} \xrightarrow[-F_2]{F_1-(-2+i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix}$$

Las soluciones son $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x - (2 + i)y = 0\} = \{y(2 + i, 1) \mid y \in \mathbb{C}\}$. Por lo tanto $V_{1+i} = \{t(2 + i, 1) \;:\; t \in \mathbb{C}\}$.

Comentario: Al hacer $F_1 - (-2 + i)F_2$, no hace falta que hagamos ninguna cuenta mental, nos tiene que quedar si o si una fila nula, porque justamente $1+i$ es autovalor, por lo que $(1 + i) \operatorname{Id} - D$ no es invertible.

Para calcular el autoespacio del autovalor $1-i$ debemos resolver la ecuación $((1-i)\operatorname{Id}-D)X=0$, esto es:

$$\begin{bmatrix}(1-i)-3 & 5\\ -1 & (1-i)+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-i & 5\\ -1 & 2-i\end{bmatrix}\xrightarrow[-F_2]{F_1+(2+i)F_2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -2+i\end{bmatrix}$$

Luego el conjunto solución es $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x+(-2+i)y=0\}=\{y(2-i,1)\mid y\in\mathbb{C}\}$. Por lo tanto $V_{1-i}=\{t(2-i,1)\ :\ t\in\mathbb{C}\}$.

También se puede calcular V_{1-i} de otra manera. Por el ejercicio (4d), como D es real, si $Dv=\lambda v$, entonces conjugando en ambos miembros obtenemos $D\bar v=\bar\lambda\bar v$, por lo que los autovectores de $1-i=\bar{1+i}$ se obtienen conjugando los autovectores de $1+i$, como podemos observar al calcular V_{1-i} y ver que el autovector generador $(2-i,1)$ es el conjugado de $(2+i,1)$.

$$\begin{aligned}\chi_{E_\theta}(x)&=\left|x\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\operatorname{sen}\theta\\0&-\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}x-1&0&0\\0&x-\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&\operatorname{sen}\theta&x-\cos\theta\end{vmatrix}\\
&=(x-1)\begin{vmatrix}x-\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta&x-\cos\theta\end{vmatrix}=(x-1)\left((x-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta\right)\\
&=(x-1)(x^2-2x\cos\theta+1)\end{aligned}$$

El polinomio $\chi_{E_\theta}(x)=(1-x)(x^2-2x\cos\theta+1)$ tiene como raíces a 1 y $\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{-4\operatorname{sen}^2\theta}}{2}=\cos\theta\pm i\operatorname{sen}\theta$.

Si $\theta=0$ o $\theta=\pi$, entonces $\operatorname{sen}\theta=0$ y los autovalores de E_θ son 1 y $\cos\theta$ (reales). En este caso tenemos dos subcasos: 1) $\theta=0$ y aquí $\operatorname{sen}(\theta)=0$ y $\cos(\theta)=1$, 2) $\theta=\pi$ y aquí $\operatorname{sen}(\theta)=0$ y $\cos(\theta)=-1$.

En el caso 1) ($\theta=0$) la matriz E_θ es la identidad y por lo tanto el 1 es el único autovalor (de multiplicidad 3) y $V_1=\mathbb{R}^3$.

En el caso 2) ($\theta=\pi$) la matriz es

$$E_\theta=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

y por lo tanto los dos autovalores, 1 y -1 tienen como autoespacios $V_1=\{t(1,0,0)\ :\ t\in\mathbb{R}\}$ y $V_{-1}=\{t(0,1,0)+s(0,0,1)\ :\ t,s\in\mathbb{R}\}$, respectivamente.

El caso remanente es cuando $\theta\neq 0,\pi$, entonces E_θ tiene un solo autovalor real, el 1 y dos autovalores complejos conjugados. Calculemos el autoespacio asociado (sobre $\mathbb{R}$, como pide el ejercicio) al autovalor 1, debemos resolver el sistema de ecuaciones $(\operatorname{Id}-E_\theta)X=0$, esto es:

$$\begin{bmatrix}1-1&0&0\\0&1-\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&\operatorname{sen}\theta&1-\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1-\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&\operatorname{sen}\theta&1-\cos\theta\end{bmatrix}$$

Notar que $\begin{vmatrix}1-\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta&1-\cos\theta\end{vmatrix}=(1^2-2\cos\theta+1)$, y como 1 no es autovalor de esta matriz en este caso (pues los autovalores son $\cos\theta\pm i\operatorname{sen}\theta$), por el Ejercicio 2 sabemos que es invertible (esta circunstancia fortuita es por la estructura en bloques de la matriz E_θ).

Por lo tanto podemos reducir la matriz del sistema a

$$(**) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego las soluciones son $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} = \{x(1, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto $V_1 = \{t(1, 0, 0) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular el autoespacio con autovalor $\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$ debemos resolver la ecuación $((\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)\operatorname{Id} - E_\theta)X = 0$. Como $\theta \neq 0, \pi$, tenemos que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ y que $\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta \neq 1$, entonces :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \pm i \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta - 1)} F_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \pm i \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} F_3]{F_2 \mp i F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm i \end{bmatrix}$$

Las soluciones son los $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tales que $x = 0$ e $y \pm iz = 0$, es decir $x = 0$ e $y = \mp iz$. Así, $V_{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} = \{t(0, -i, 1) \ : \ t \in \mathbb{C}\}$ y $V_{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta} = \{t(0, i, 1) \ : \ t \in \mathbb{C}\}$.

(2) Probar que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es invertible si y sólo si 0 no es autovalor de A.

Solución: Notar que $\det(0 \operatorname{Id} - A) = (-1)^n \det A$.

Sabemos que los autovalores de A son las raíces del polinomio característico de A, $\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A)$. Entonces, A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$, si y sólo si $\det(0 \operatorname{Id} - A) \neq 0$, si y sólo si 0 no es autovalor de A.

Manera alternativa: Sabemos del práctico 3 que A es invertible si y sólo no existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Notemos que $0 = 0 \cdot v$, por lo tanto A es invertible si y sólo si no existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0 \cdot v$ si y sólo si 0 no es autovalor de A.

(3) Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico. Deducir que tienen los mismos autovalores. Mostrar que no necesariamente tienen los mismos autovectores.

Solución: $\chi_{A^t}(x) = \det(x \operatorname{Id} - A^t) = \det((x \operatorname{Id})^t - A^t) = \det((x \operatorname{Id} - A)^t) = \det(x \operatorname{Id} - A) = \chi_A(x)$, como se quería demostrar.

Hemos usado, la definición del característico, que $x \operatorname{Id}$ es diagonal, que la traspuesta de la resta es la resta de las traspuestas, y que el determinante de la traspuesta es igual a la matriz de la traspuesta.

Como $\chi_A(x) = \chi_{A^t}(x)$, entonces sus raíces (que son los autovalores) deben ser iguales. Por lo tanto los autovalores de A coinciden con los de A^t.

Para ver que no necesariamente tienen los mismos autovectores, tomemos como ejemplo la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ del Ejercicio 1. Vimos que $v = (0, 1)$ era autovector de A. Pero no es autovector de A^t pues $A^t v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ el cual no es múltiplo de v pues su primera coordenada es no nula. Luego A y A^t no tienen los mismos autovectores.

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Probar que si λ es autovalor de A con autovector v entonces λ^k es autovalor de A^k con autovector v. ¿Qué puede decir de los autovalores de una matriz nilpotente?

(b) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$. Sea $p(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$p(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1A + \cdots + a_nA^n.$$

Probar que si λ es autovalor de A con autovector v entonces $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$ con autovector v.

(c) Sea A una matriz invertible. Si λ es autovalor de A de autovector v entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1} con autovector v.

(d) Mostrar que si A es una matriz real y $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A, entonces $\bar{\lambda}$ también es autovalor de A.

Solución:
(a) Sea λ autovalor de A con autovector v, es decir $Av = \lambda v$.
Probemos que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, λ^k es autovalor de A^k de autovector v. Si $k = 0$, vale pues 1 es autovalor de $A^0 = \operatorname{Id}$ y v es autovector (todo $v \in \mathbb{R}^3$ es autovector de Id).
Si $k \in \mathbb{N}$, procedemos por inducción. Si $k = 1$ vale lo que queremos probar. Paso inductivo: asumimos que vale $A^{k-1}v = \lambda^{k-1}v$. Ahora, $A^kv = A(A^{k-1}v) = A(\lambda^{k-1})v = \lambda^{k-1}(Av) = \lambda^kv$, como queríamos probar. Por inducción, vale el enunciado.
Notar que si A es nilpotente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$, por lo que si λ es un autovalor de A resulta que $\lambda^k = 0$, de donde λ sólo puede ser 0. Por otro lado, efectivamente 0 es autovalor pues una matriz nilpotente no puede ser invertible (pues si lo fuera $0 = A^k$ también sería invertible) y esto dice, por Ejercicio 2, que 0 es autovalor de A.

(b) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^m$ un polinomio (m no necesariamente es el n del tamaño de la matriz como está puesto en el enunciado).
Podemos escribir $p(A) = \sum_{i=0}^{m} a_iA^i$. Entonces

$$p(A)v = \left(\sum_{i=0}^{m} a_iA^i\right) v = \sum_{i=0}^{m} a_i(A^iv) = \sum_{i=0}^{m} a_i\lambda^iv = p(\lambda)v,$$

de donde $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$ con autovector v.

(c) Sea A invertible y λ autovalor de A de autovector v. Como A es invertible, por el Ejercicio 2 tenemos que $\lambda \neq 0$. Así, podemos multiplicar a izquierda por $\frac{1}{\lambda}$ y por A^{-1} y obtener $\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$, de donde $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1} con autovector v.

(d) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de A, de autovector v. Entonces, conjugando a ambos lados en la igualdad $Av = \lambda v$ tenemos que $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$, o equivalentemente (usando que en general $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$ (pruebese si se quiere usando la definición de producto de matrices y que $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$)) $\overline{A}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Pero como A es real, se tiene que $\overline{A} = A$, de donde $\overline{\lambda}$ es autovalor de A, de autovector $\overline{v}$. Esto nos dice que los autovectores asociados a $\overline{\lambda}$ son los conjugados de los autovectores asociados a λ, como hemos visto ya en el Ejercicio 1.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.
(a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A)$.
(b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

Solución: Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a)

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(x\operatorname{Id} - A) = \det\begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d\end{bmatrix} \\ &= (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad-bc) \\ &= x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A).\end{aligned}$$

(b) Si A no invertible, entonces $\det(A) = 0$ y por lo tanto, por (a), $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x = x(x - \operatorname{Tr}(A))$. Luego los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

(6) Probar que dos matrices semejantes (ver definición en Práctico 4, Ejercicio 7) tienen el mismo polinomio característico. Deducir que tienen los mismos autovalores.

Si B es semejante a A, $B = PAP^{-1}$ para alguna matriz P invertible. Entonces,

$$\begin{aligned}\chi_B(x) &= \det(x\operatorname{Id} - PAP^{-1}) \\ &= \det(Px\operatorname{Id}P^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P(x\operatorname{Id} - A)P^{-1}) \\ &= \det P \det(x\operatorname{Id} - A)\det(P^{-1}) \\ &= \det P(\det P)^{-1}\det(x\operatorname{Id} - A) \\ &= \det(x\operatorname{Id} - A) = \chi_A(x),\end{aligned}$$

por lo tanto A y B tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos autovalores.

Hemos usado que $Px\operatorname{Id}P^{-1} = PP^{-1}x\operatorname{Id} = x\operatorname{Id}$ (pues $x\operatorname{Id}$ conmuta con cualquier matriz, en particular con P^{-1}), la distributiva, la propiedad de producto de los determinantes y la del determinante de la inevrsa.

(7) ⓐ Dado un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{K}$, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, se define su *matriz compañera* por

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Probar que el polinomio característico de $C(p)$ es p.

Solución: $\chi_{C(p)}(x) = \det(x\operatorname{Id} - C(p)) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1}\end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (Por el Ejercicio (15b) del Práctico 4, ver en las soluciones), que es justamente $p(x)$. Por lo tanto el polinomio característico de la matriz compañera asociada a un polinomio p es exactamente p.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(8) Repetir el Ejercicio 1 con las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

Solución: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)+3 = x^2-3x+5.$

Por Bhaskara, las raíces de este polinomio son $\frac{3\pm\sqrt{9-20}}{2} = \frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$, las cuales son complejas. Por lo tanto A no tiene autovalores reales, y sus autovalores complejos (conjugados) son $\frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$.

Para calcular el autoespacio sobre $\mathbb{C}$ asociado a $\frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$ resolvemos el sistema $((\frac{3\pm i\sqrt{11}}{2})\operatorname{Id}-A)X=0$:

$$\begin{bmatrix} \frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}-2 & -3 \\ 1 & \frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1\pm i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix}.$$

(Le restamos un múltiplo adecuado de la segunda fila a la primera, como la matriz no es invertible, sabemos que nos quedará la primer fila nula). Entonces,

$$V_{\frac{3+i\sqrt{11}}{2}} = \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x + \frac{1+i\sqrt{11}}{2}y = 0\right\} = \left\{y\left(-\frac{1+i\sqrt{11}}{2},1\right) \mid y\in\mathbb{C}\right\},$$

$$V_{\frac{3-i\sqrt{11}}{2}} = \left\{y\left(\frac{-1+i\sqrt{11}}{2},1\right) \mid y\in\mathbb{C}\right\}.$$

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x+9 & -4 & -4 \\ 8 & x-3 & -4 \\ 16 & -8 & x-7 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} x+9 & -4 & -4 \\ -x-1 & x+1 & 0 \\ -2-2x & 0 & x+1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1+C_2 \\ C_1+2C_3}}{=} \begin{vmatrix} x-3 & -4 & -4 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$$
$= (x-3)(x+1)^2.$

Luego los autovalores son 3 y -1.

Cálculo de V_3: debemos resolver $(3\operatorname{Id}-B)X=0$: Tenemos $3\operatorname{Id}-B = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 16 & -8 & -4 \end{bmatrix}$.

Para trabajar más comodamente, dividimos por 4 todas las entradas de la matriz, (no cambia el cálculo pues $(3\operatorname{Id}-B)X=0 \iff \frac{1}{4}(3\operatorname{Id}-B)X=0$). Reducimos entonces $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{F_3-2F_2}{=} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, luego $V_3 = \{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

Cálculo de V_{-1}. Debemos resolver $(-\operatorname{Id}-B)X=0$:

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 8 & -4 & -4 \\ 16 & -8 & -8 \end{bmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}}{=} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{8}F_1}{=} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

luego $V_{-1} = \{y(\frac{1}{2},1,0)+z(\frac{1}{2},0,1) \mid y,z\in\mathbb{R}\}$.

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -4 & 12 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -5 & -3 & x+11 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_1+(x-4)F_2 \\ F_3-5F_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -4+(x-4)(x+1) & 16-x \\ -1 & x+1 & -1 \\ 0 & -8-5x & x+16 \end{vmatrix}$$

$$= (-4+(x-4)(x+1))(x+16) + (8+5x)(16-x)$$

$$= x^3 + 8x^2 + 16x$$

$$= x(x^2 + 8x + 16)$$

$$= x(x+4)^2$$

Luego los autovalores de C son 0 y -4.

Cálculo de V_0: debemos resolver $-CX = 0$.

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \overset{\substack{F_3-F_2 \\ F_3-F_1 \\ -\frac{1}{4}F_1}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{F_2+F_1}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{F_1-\frac{1}{2}F_2 \\ \frac{1}{2}F_2}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $V_0 = \{z(1,2,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Cálculo de V_{-4}:

$$\begin{bmatrix} -8 & -4 & 12 \\ -1 & -3 & -1 \\ -5 & -3 & 7 \end{bmatrix} \overset{\substack{F_1-8F_2 \\ F_3-5F_2 \\ -F_2}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix} \overset{\substack{F_1-\frac{20}{12}F_3 \\ \frac{1}{12}F_3 \\ F_2-3F_3}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde $V_{-4} = \{z(2,-1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$$\chi_D(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2-6x+9)(x^2-4) = (x-3)^2(x+2)(x-2).$$

Luego los autovalores de D son $3, 2$ y -2.

Cálculo de V_{-2}:

$(-2\,\mathrm{Id} - D) = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$. Como $\chi_D(x)$ es producto de los polinomios característicos de las matrices que forman los bloques diagonales y -2 es raíz sólo del característico de la de abajo, sabemos que la matriz de arriba será invertible, por lo que podemos aplicar op. elementales por filas a $(-2\,\mathrm{Id}-D)$ y llegar a $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-3&-1\\0&0&-3&-1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. Luego $V_{-2} = \{w(0,0,-\frac{1}{3},1) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

Cálculo de V_2: análogamente al razonamiento de arriba, sabemos que podemos reducir $2\,\mathrm{Id}-D$ a $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-3&3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. Por lo tanto $V_2 = \{w(0,0,1,1) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

Cálculo de V_3: podemos reducir $3\,\mathrm{Id}-D$ a $\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. Luego $V_3 = \{y(1,1,0,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

(9) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
  (a) Sea A una matriz que satisface $2A + \mathrm{Id} = -A^2$. Entonces A es invertible.
  (b) Existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.
  (c) Sean A y B matrices que tienen la misma traza, el mismo determinante y el mismo polinomio característico. Entonces A y B son semejantes.

Solución:

(a) Verdadero. Supongamos que A no es invertible. Entonces, por Ejercicio 2, 0 es autovalor de A. Por Ejercicio (4d), debe ser que $2\cdot 0 + 1 + 0^2 = 1$ es autovalor de la matriz $2A + \mathrm{Id} + A^2 = 0$, lo cual es absurdo.

(b) Verdadero. Sea $A = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. Si $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, quiere decir que $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, es decir que $\begin{cases} a+b=2\\ c+d=2\end{cases}$.

Por otro lado, si $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1, resulta $\begin{bmatrix}-2a+b\\-2c+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, de donde $\begin{cases} -2a+b=-2\\ -2c+d=1\end{cases}$.

Se nos plantea entonces un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas el cual resolvemos reduciendo la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&0&1&1&2\\-2&1&0&0&-2\\0&0&-2&1&1\end{array}\right] \overset{\substack{F_3+2F_1\\F_4+2F_2}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&0&1&1&2\\0&3&0&0&2\\0&0&0&3&5\end{array}\right] \overset{\substack{\frac{1}{3}F_3\\ \frac{1}{3}F_4\\ F_1-F_3\\ F_2-F_4}}{=} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{4}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&1&\frac{5}{3}\end{array}\right].$$

Por lo tanto $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&2\\1&5\end{bmatrix}$.

(c) Falso. Sean A la matriz nula 2×2 y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Es claro que $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B = \det A = \det B = 0$ y ambos tienen sólo al autovalor 0 (pues son triangulares superiores con diagonal 0) pero no son semejantes. En efecto, si $PAP^{-1} = 0$, entonces $A = P^{-1}0P = 0$, es decir que la única matriz semejante a la matriz nula es ella misma, con lo que A y B no son semejantes.

(10) Usando autovalores, dar otra prueba de que si A es nilpotente entonces $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible (Ejercicio 9b Práctico 3).

Solución: Queremos ver que $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible. Para ello, veamos que 0 no es autovalor (Ejercicio 2). Sabemos que el único autovalor de A al ser nilpotente es el 0, y el único autovalor de Id_n es el 1, entonces el único autovalor de $\operatorname{Id}_n - A$ es el 1. Como 0 no es autovalor, $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible.

(11) ⓐ Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El objetivo de este ejercicio es probar que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

(a) Probar que $\begin{bmatrix} \operatorname{Id}_n & -A \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Id}_n & -A \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{bmatrix}$.

(b) Deducir que $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}$, es decir que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

Solución:

(a) Por la multiplicación en bloques que vimos en el Práctico 4 Ejercicio 17, tenemos que $\begin{bmatrix} \operatorname{Id}_n & -A \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$.

Por otro lado, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Id}_n & -A \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & -AB + BA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto ambas multiplicaciones nos dieron igual.

(b) Notar que $\det \begin{bmatrix} \operatorname{Id}_n & -A \\ 0 & \operatorname{Id}_n \end{bmatrix} = \det(\operatorname{Id}_n)\det(\operatorname{Id}_n) = 1$ (Ejercicio 17b Práctico 4), por lo que la matriz es invertible. Entonces, multiplicando a derecha por la inversa de la matriz en la igualdad de (a), tenemos que $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$ son matrices semejantes (ojo, AB y BA no son semejantes en general, aunque sí cuando alguna de ellas es invertible), por lo que tienen el mismo polinomio característico (por Ejercicio 6).

Luego $\begin{vmatrix} x\operatorname{Id}_n - AB & 0 \\ -B & x\operatorname{Id}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\operatorname{Id}_n & 0 \\ -B & x\operatorname{Id}_n - BA \end{vmatrix}$. Calculando estos determinantes (Ej 17c Pr 4) resulta $\det(x\operatorname{Id}_n - AB)\det(x\operatorname{Id}_n) = \det(x\operatorname{Id}_n)\det(x\operatorname{Id}_n - BA)$.

Si $x \neq 0$, entonces $\det(x\operatorname{Id}_n) \neq 0$, por lo que podemos dividir en ambos lados por este escalar y obtener $\det(x\operatorname{Id}_n - AB) = \det(x\operatorname{Id}_n - BA)$, es decir $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ para todo $x \neq 0$.

Si $x = 0$, entonces $\chi_{AB}(0) = \det(-AB)$ y $\chi_{BA}(0) = \det(-BA)$. Por propiedades del producto de los determinantes y sacando $(-1)^n$ como escalar fuera del determinante, resulta $\chi_{AB}(0) = \chi_{BA}(0)$ también.

Por lo tanto $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$ (o sea que también tienen los mismos autovalores).

(12) ⓐ Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

(a) $(-1)^n \det(A) = a_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$. En particular, $\det A = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$.

(b) $\operatorname{Tr}(A) = -a_{n-1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. En particular, $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

SOLUCIÓN: Ver la ayuda que está dada en el práctico.

(13) @ Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Tr} A = 0, \operatorname{Tr} A^2 = 0, \dots, \operatorname{Tr} A^n = 0$. Probar que el único autovalor de A es el 0.

SOLUCIÓN: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Debe poseer al menos un autovalor, pues por el Teorema Fundamental del Álgebra todo polinomio tiene raíces en $\mathbb{C}$, en particular $\det(x \operatorname{Id} - A)$. Queremos probar que el único autovalor de A es el 0. Supongamos que existen autovalores no nulos. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los r autovalores no nulos de A distintos (notar que $n \leq r$). Entonces $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^r n_i\lambda_i$ donde n_i es la multiplicidad (el grado de $(x-\lambda_i)$ en $\chi_A(x)$) de λ_i como raíz del polinomio característico (por ejemplo, si $A = \operatorname{Id}_n$, entonces el único autovalor es 1, con multiplicidad n).

A su vez, sabemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, los autovalores de A^k son los de A elevados a la k, por lo que $\operatorname{Tr} A^k = \sum_{i=1}^r n_i\lambda_i^k$ (los λ_i^k podrían repetirse, pero eso no modifica la igualdad, sus multiplicidades se sumarían en ese caso).

Por hipótesis, $0 = \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A^2 = \cdots = \operatorname{Tr} A^r$ (pues $\operatorname{Tr} A^k = 0$ para todo $k \leq n$ y r es $\leq n$). Luego tenemos el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de la izquierda es invertible, pues

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = \lambda_1\cdots\lambda_r \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i),$$

y este número es no nulo pues los λ_i son no nulos y distintos porque así los asumimos. Al ser una matriz invertible, la única solución del sistema es $n_1 = \cdots = n_r = 0$, por lo que la multiplicidad como raíces del polinomio característico es 0, luego no hay autovalores distintos del nulo y así el único autovalor de A es el 0.

(*) Hemos usado que el determinante es lineal en cada columna, sacando afuera el factor λ_i que multiplicaba a la columna C_i y luego hemos usado el determinante de la matriz de Vandermonde del Práctico 4 Ejercicio 6.