

Sistemas de ecuaciones lineales: Introducción y Ejemplos.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

1 Objetivos

2 Ejemplo 1

3 Ejemplo 2

4 Ejemplo 3

5 Conclusiones

Objetivo

Aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineales sobre \mathbb{R} usando el Método de Gauss.

Con este fin,

- Primero motivaremos la idea general del Método a través de ejemplos.
- Luego, introduciremos las nociones de:
 - Matriz
 - Operaciones elementales por filas
 - Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)
- Finalmente, presentaremos explícitamente el Método de Gauss.

Estas diapositivas están basadas en las Secciones 1.1 y 1.2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín García y Alejandro Tiraboschi. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Problema 1

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Es decir, queremos encontrar los números reales x , y y z que satisfagan las ecuaciones anteriores.

Respuesta

La única solución es $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

Demostración

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ x & -3y & +3z & = & 2 \\ 2x & -y & +5z & = & 3 \end{cases}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rclcl} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ + & (-1) \cdot & (x & +2z) & = & (-1) \cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & -y & +5z & = & 3 \end{cases}$$

Cambiamos la
2da ecuación

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} 2x & -y & +5z & = & 3 \\ + & (-2) \cdot & (x & +2z & = & 1) \\ \hline & & -y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \end{cases} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{cases} x & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{cases}$$

Cambiamos la
3er ecuación

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Entonces también vale que:

Cambiamos la 3er ecuación

$$\begin{array}{rcl} & -3y & +z & = & 1 \\ + & (-3) \cdot & (-y & +z) & = & (-3) \cdot 1 \\ \hline & -2z & & = & -2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 1 \\ & \cancel{-2z} & = & \cancel{-2} \end{cases} \xrightarrow{*(-1/2)} \begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 1 \\ & z & = & 1 \end{cases}$$

Dado (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ (-2) \cdot (x + 2z) & = & (-2) \cdot 1 \\ \hline x & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -y + z & = & 1 \\ (-1) \cdot (-y + z) & = & (-1) \cdot 1 \\ \hline -y & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

Cambiamos
1er y 2da
ecuación

$$\begin{cases} x = -1 \\ -y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{equivalentemente}]{*(-1)} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

En resumen, supusimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +3z & = 1 \end{cases}$$

y probamos que

$$x = -1 \quad y = 0, \quad z = 1.$$

Además, si reemplazamos x , y y z por estos valores

$$\begin{cases} (-1) & & +2 \cdot (1) & = 1 \\ (-1) & -3 \cdot 0 & +3 \cdot (1) & = 2 \\ 2 \cdot (-1) & -0 & +3 \cdot (1) & = 1 \end{cases}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

Podría suceder que el sistema no tenga solución como en el siguiente caso.

Problema 2

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & & +2z & = & 1 \\ x & -3y & +3z & = & 2 \\ 2x & -3y & +5z & = & 4 \end{cases}$$

Respuesta

El sistema no tiene solución.

Demostración

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ x & -3y & +3z & = & 2 \\ 2x & -3y & +5z & = & 4 \end{cases}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ + & (-1) \cdot & (x & +2z) & = & (-1) \cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & -3y & +5z & = & 4 \end{cases}$$

Cambiamos
2da ecuac

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & -3y & +5z & = & 4 \end{cases}$$

Entonces también vale que:


$$\begin{array}{rclcl} 2x & -3y & +5z & = & 4 \\ + & & & & \\ (-2) \cdot (x & +2z & = & 1) & = & (-2) \cdot 1 \\ \hline & -3y & +z & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

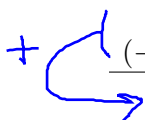
$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 2 \end{cases}$$

Cambiamos
3er ecuac

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ -3y & +z & = & 1 \\ -3y & +z & = & 2 \end{cases}$$


Entonces también vale que:


$$\begin{array}{rclcl} -3y & +z & = & 2 & \\ + & (-1) \cdot (-3y + z) & = & (-1) \cdot 1 & \\ \hline & 0 & = & 1 & \end{array}$$

Esta igualdad es un absurdo, el cual provino de suponer que nuestro sistema tenía solución.

1 Objetivos

2 Ejemplo 1

3 Ejemplo 2

4 Ejemplo 3

5 Conclusiones

Un sistema también puede tener infinitas soluciones.

Problema 3

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Respuesta

El conjunto de soluciones del sistema es

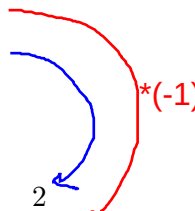
$$\left\{ \left(-2z + 1, \frac{z-1}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es decir, todas las soluciones son de la forma

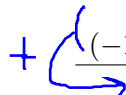
$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3} \text{ donde } z \in \mathbb{R}.$$

Demostración

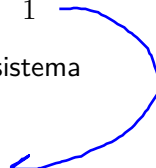
Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ x & -3y & +3z & = & 2 \\ 2x & -3y & +5z & = & 3 \end{cases}$$


Entonces también vale que:

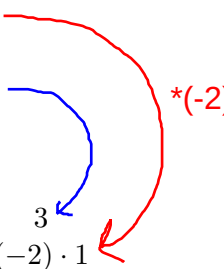
$$\begin{array}{rcl} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ + & (-1) \cdot & (x & +2z) & = & (-1) \cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$


Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

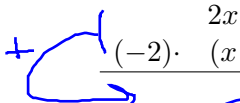
$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & -3y & +5z & = & 3 \end{cases}$$


Cambiamos
2da ecuac

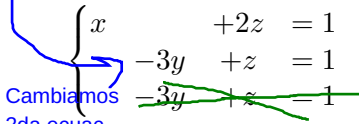
Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & -3y & +5z & = & 3 \end{cases}$$


Entonces también vale que:


$$\begin{array}{rrcrcl} 2x & -3y & +5z & = & 3 \\ + & (-2) \cdot (x & & +2z) & = & (-2) \cdot 1 \\ \hline & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema


$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ -3y & +z & = & 1 \\ -3y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Cambiamos 2da ecuac

equivalentemente

2da y 3er ecuac son la misma

$$\begin{cases} x & +2z & = & 1 \\ -3y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = 1 \\ -3y & +z & = 1 \end{cases}$$

podemos despejar x e y en función de z . Esto es,

$$x = -2z + 1$$

$$y = \frac{z - 1}{3}$$

y no tenemos ninguna condición sobre z .

En resumen, supucimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{cases} x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{cases}$$

y probamos que

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3}.$$

Además, si reemplazamos x , y y z por estos valores

$$\begin{cases} (-2z + 1) & +2z & = 1 \\ (-2z + 1) & -3 \cdot \left(\frac{z-1}{3}\right) & +3z & = 2 \\ 2 \cdot (-2z + 1) & -3 \cdot \left(\frac{z-1}{3}\right) & +5z & = 3 \end{cases}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

(desarrollen estas expresiones en una hoja para chequear que efectivamente valen las igualdades).

Conclusiones

- Un sistema de ecuaciones puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.
- Hemos cambiado nuestro sistema inicial haciendo combinaciones lineales de las ecuaciones.
- El nuevo sistema es más sencillo en el sentido que:
 - Cada ecuación tiene menos incógnitas.
 - Las soluciones quedan descritas explícitamente.
- Las soluciones del nuevo sistema son las soluciones de nuestro sistema original.
- En el proceso de cambiar de sistema sólo hemos operado con los coeficientes. Para escribir menos podemos obviar x , y , z , y escribir sólo los coeficientes de una forma ordenada y sistemática.

Es a partir de la última conclusión que surgen los conceptos de:

- Matriz
- Operaciones elementales por filas
- Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)

Analizaremos esto en otro archivo.