# Sistemas de ecuaciones lineales: Matriz, MERF y Operaciones elementales.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

- Introducción
- 2 Matriz
- MERF
- Operaciones elementales por fila

En el archivo "Sistemas de ecuaciones lineales: Introducción y Ejemplos" motivamos la idea general del Método de Gauss a través de ejemplos.

En este archivo presentaremos las nociones de:

Matriz

Introducción

- Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)
- Operaciones elementales por fila

basados en la Sección 1.2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Seguiremos la misma numeración de estas notas para las Definiciones, Teoremas, etc. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

- 1 Introducción
- 2 Matriz
- MERF
- Operaciones elementales por fila

## Definición

Una matriz  $m \times n$  es un arreglo de números reales de m filas y n columnas.

 $\mathbb{R}^{m \times n}$  y  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  denotan el conjunto de matrices  $m \times n$ .

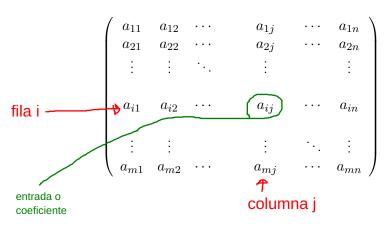
Ejemplo 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Ejemplo 
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo
$$\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Convenciones

La notación  $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$  quiere decir que A es una matriz  $m\times n$  de la siguiente forma



## Conveciones

- Sea  $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$  una matriz. Escribiremos  $[A]_{ij}$  para denotar la entrada  $a_{ij}$  de A.
- Dos matrices del mismo tamaño  $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$  y  $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$  son iguales si cada una de sus entradas lo son:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \, \forall i, j$$

## Notación

Usaremos matrices para representar los sistemas de ecuaciones.

Si 
$$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$$
 e  $Y=(y_j)\in\mathbb{R}^m$  entonces

$$AX = Y$$

representa al sistema de ecuaciones

$$(E) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= y_m \end{cases}$$

## Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$(E) \begin{cases} x_1 & +2x_3 = 1\\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 = 2\\ 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 = 3 \end{cases}$$

es representado de la forma AX = Y donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

#### Observación

- Si una incognita no aparece en una ecuación, el correspondiente coeficiente de la matriz es 0.
- La cantidad de incognita queda determinada por la cantidad de columnas de la matriz A.

Operaciones elementales por fila 0000000

- 1 Introducción
- 2 Matriz
- MERF
- Operaciones elementales por fila

Una Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF) es una matriz de la siguiente forma

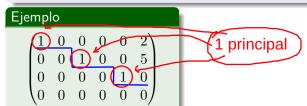
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

# Ejemplos de MERF

## Definición 1.2.6

Una matriz A es MERF si satisface lo siguiente:

- La primera entrada no nula de una fila es 1. Este 1 es llamado 1 prinicipal.
- 2 Cada columna con un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a cero.
- Todas las filas nulas estan al final de la matriz.
- En dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior ("los 1 principales estan de forma escalonada").



### Observación

Los sistemas de ecuaciones más faciles de resolver son los representados por una MERF.

## Ejemplo

La solución del sistema AX = Y con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es 
$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$$
.

En efecto, si escribimos explicitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\begin{cases} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{cases}$$

(notar que este es el sistema al que llegamos Ejemplo 1 del archivo anterior)

## **Ejemplo**

El conjunto de soluciones del sistema AX = Y con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \mathsf{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es

$$\left\{ (-2x_3+1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, si escribimos explicitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \underset{\text{despejando}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{lll} x_1 & = & -2x_3 + 1 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{array}$$

(notar que este es el sistema al que llegamos Ejemplo 3 del archivo anterior)

- 2 Matriz
- MERF
- Operaciones elementales por fila

## Motivación

### Las Operaciones elementales por fila son:

- las maneras en que podemos modificar una matriz de manera tal que los correspondientes sistemas de ecuaciones tengan las mismas soluciones.
- la versión "matricial" de las combinaciones lineales de ecuaciones que hicimos en el archivo anterior para encontrar las soluciones de los sistemas.

#### Observación

Hay tres tipos de operaciones las cuales definiremos a continuación.

### El primer tipo de operación elemental es:

## multiplicar la fila i por un número real $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c^* \digamma \\ i & \vdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c a_{i1} & c a_{i2} & \cdots & c a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c a_{i1} & c a_{i2} & \cdots & c a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## Ejemplo

Multiplicar la primer fila por -2:

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 \\
3 & 4 \\
5 & 6
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{(-2)*}F_{\underline{1}}}
\begin{pmatrix}
-2 & -4 \\
3 & 4 \\
5 & 6
\end{pmatrix}$$

## El segundo tipo de operación elemental es:

### sumar a la fila r un múltiplo de la fila s

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + ta_{s1} & a_{r2} + ta_{s2} & \cdots & a_{rn} + ta_{sn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

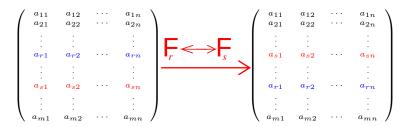
## Ejemplo

Sumar a la segunda fila la primer fila multiplicada por 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\qquad \textbf{F_2} + \textbf{3*F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3+3\cdot 1 & 4+3\cdot 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

### El tercer tipo de operación elemental es:

### intercambiar las fila r y s



## Ejemplo

Intercambiar la segunda y tercer fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{F_2}} \overset{\mathsf{F_3}}{\longleftrightarrow} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

A modo de ejemplo le aplicaremos operaciones elemental por fila a una matriz para transformarla en una MERF:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 1 \\
1 & -3 & 3 & 2 \\
2 & -3 & 5 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathsf{F_2}-\mathsf{F_1}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -3 & 1 & 1 \\
2 & -3 & 5 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathsf{F_3}-\mathsf{2}^*\mathsf{F_1}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -3 & 1 & 1 \\
0 & -3 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathsf{F_3}+\mathsf{3}^*\mathsf{F_2}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

(Estas matrices y operaciones se corresponden con las combinaciones lineales que hicimos de las ecuaciones en el Ejemplo 3 del archivo anterior)

## Convenciones

• Si A es una matriz, e(A) denotará la matriz que obtenemos despues de modificar a A por cierta operación elemental e.

## Ejemplo

Si e es la operación intercambiar la segunda y tercer fila y

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{array}\right) \text{, entonces } e(A) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{array}\right).$$

 Como hicimos en los ejemplos, cuando le apliquemos una operación elemental a una matriz especificaremos arriba de una flecha que operación aplicamos:

$$A \xrightarrow{e} e(A)$$

Así podemos recordar que operación aplicamos. También es oblilgatoria para la corrección de exámenes.

En el próximo archivo presentaremos el Método de Gauss.