Primer Trabajo Práctico

Ejercicio (6). Calcular los autovalores de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Decidir si alguno de los siguientes vectores es un autovector de la matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Los autovalores de una matriz $n \times n$ A son las raíces de su *polinomio característico* $f = f_A = \det(A - xI)$, donde I es la matriz identidad $n \times n$.

En este caso, calculamos primero el polinomio característico f de la matriz dada (desarrollamos el determinante por la primera columna):

$$\begin{aligned}
f = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 2 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} &= (-x).\det \begin{pmatrix} -x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} - 1.\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = \\
&= (-x)(x^2 - 2) - (-1) \\
&= -x^3 + 2x + 1 \\
&= -(x^3 - 2x - 1) \qquad \text{Observamos que } -1 \text{ es raíz de este polinomio, luego:} \\
&= -(x+1)\,(x^2 - x - 1) \\
&= -(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto los autovalores de la matriz dada son -1, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Para la segunda parte, recordemos que un vector X es autovalor de una matriz A (de autovalor c) si $AX = cX$.

En este caso, calculamos el producto de la matriz dada por los vectores indicados:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector de la matriz dada (de autovalor $c = -1$).

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

De modo que el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **no** es autovector de la matriz dada.

Ejercicio (7). El número 2 es un autovalor de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 50 \end{pmatrix}$. Describir explícitamente el autoespacio asociado al autovalor 2.

Solución.

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 50 \end{pmatrix}$. El autoespacio asociado al autovalor 2 es el conjunto

$$\{X \in \mathbb{R}^{4\times 1} : \; AX = 2X\}.$$

Como $AX = 2X$ si y sólo si $(A-2I)X = 0$, resulta que este autoespacio coincide con el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix}.$$

Luego debemos encontrar el conjunto de soluciones de este sistema homogéneo. Para ello, reducimos por filas a la matriz $A - 2I$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix} \underset{F_4-4F_2}{\overset{F_3-2F_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & -20 & 0 & 60 \end{pmatrix} \overset{(-1/20).F_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_4}{\overset{F_3+4F_4}{\longrightarrow}}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{F_1+3F_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_1\leftrightarrow F_2}{\overset{F_2\leftrightarrow F_4}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

El problema se reduce entonces a calcular el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a la MERF R:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 3t = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la descripción explícita del autoespacio asociado al autovalor $c = 2$ es la siguiente:

$$\{(-2z, 3t, z, t) : \; z, t \in \mathbb{R}\},$$

o bien

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} : \ z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio (8). Sean $A, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con P inversible. Probar que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A entonces también es autovalor de PAP^{-1}.

Solución.

El escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es *autovalor* de A si y sólo si existe un vector **no nulo** $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $AX = \lambda X$.

Como P es inversible y $X \neq 0$, entonces $PX \neq 0$. Sea $X' = PX$. Por las propiedades del producto de matrices, tenemos:

$$(PAP^{-1})X' = (PAP^{-1})(PX) = P(AX) = P(\lambda X) = \lambda PX = \lambda X'.$$

Dado que $X' \neq 0$, esto demuestra que λ es autovalor de PAP^{-1}, como se quería probar.

De otra forma.

El escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es *autovalor* de A si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Luego calculamos:

$$\det(PAP^{-1} - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(A - \lambda I)\det(P)^{-1} = 0.$$

Por lo tanto λ es autovalor de PAP^{-1}.