Sistemas de ecuaciones lineales: Introducción y Ejemplos.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

1. Objetivos
2. Ejemplo 1
3. Ejemplo 2
4. Ejemplo 3
5. Conclusiones

Objetivo

Aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$ usando el Método de Gauss.

Con este fin,

- Primero motivaremos la idea general del Método a través de ejemplos.
- Luego, introduciremos las nociones de:
  - Matriz
  - Operaciones elementales por filas
  - Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)
- Finalmente, presentaremos explícitamente el Método de Gauss.

Estas diapositivas estan basadas en las Secciones 1.1 y 1.2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

1 Objetivos

2 Ejemplo 1

3 Ejemplo 2

4 Ejemplo 3

5 Conclusiones

Problema 1

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecucaciones:

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Es decir, queremos encontrar los números reales x, y y z que satisfagan las ecuaciones anteriores.

Respuesta

La única solución es $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

Demostración

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{cases}$$

*(-1)

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcr} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ + \quad (-1)\cdot & (x & & +2z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Cambiamos la
2da ecuación

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{cases}$$

*(-2)

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcr} & 2x & -y & +5z & = & 3 \\ + \; (-2)\cdot & (x & & +2z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & -y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \end{cases} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{cases}$$

Cambiamos la
3er ecuación

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{cases}$$

*(-3)

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrcr} & -3y & +z & = & 1 \\ + \quad (-3)\cdot & (-y & +z) & = & (-3)\cdot 1 \\ \hline & & -2z & = & -2 \end{array}$$

Cambiamos la
3er ecuación

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & & \cancel{-2z} & = \cancel{-2} \end{cases} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & & z & = 1 \end{cases}$$

*(-1/2)

Dado (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x \quad +2z = 1 \\ -y \quad +z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Entonces también vale que: *(-2) *(-1)

$$\begin{array}{rrrr} & x & +2z & = & 1 \\ (-2)\cdot & (& z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & x & = & -1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rrrr} & -y & +z & = & 1 \\ (-1)\cdot & (& z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -y & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

Cambiamos 1er y 2da ecuación

$$\begin{cases} x \quad = -1 \\ -y \quad = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow[*(-1)]{\text{equivalentemente}} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

En resumen, supusimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +3z & = 1 \end{cases}$$

y probamos que

$$x = -1 \quad y = 0, \quad z = 1.$$

Además, si reemplazamos x, y y z por estos valores

$$\begin{cases} (-1) & & +2\cdot(1) & = 1 \\ (-1) & -3\cdot 0 & +3\cdot(1) & = 2 \\ 2\cdot(-1) & -0 & +3\cdot(1) & = 1 \end{cases}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

1. Objetivos
2. Ejemplo 1
3. Ejemplo 2
4. Ejemplo 3
5. Conclusiones

Podría suceder que el sistema no tenga solución como en el siguiente caso.

Problema 2

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecucaciones:

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{cases}$$

Respuesta

El sistema no tiene solución.

Demostración

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{array}\right.$$

*(-1)

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcr} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ + \; (-1)\cdot & (x & & +2z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{array}\right.$$

Cambiamos
2da ecuac

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad +2z = 1 \\ \quad -3y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

*(-2)

Entonces también vale que:

+

$$\begin{array}{rrrrcr} & 2x & -3y & +5z & = & 4 \\ (-2)\cdot & (x & & +2z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad +2z = 1 \\ \quad -3y + z = 1 \\ \quad -3y + z = 2 \end{cases}$$

Cambiamos
3er ecuac

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 2 \end{cases}$$

*(-1)

Entonces también vale que:

+

$$\begin{array}{rrrrcr} & & -3y & +z & = & 2 \\ (-1)\cdot & (& -3y & +z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

Esta igualdad es un absurdo, el cual provino de suponer que nuestro sistema tenía solución.

1 Objetivos

2 Ejemplo 1

3 Ejemplo 2

4 Ejemplo 3

5 Conclusiones

Un sistema también puede tener infinitas soluciones.

Problema 3

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecucaciones:

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Respuesta

El conjunto de soluciones del sistema es

$$\left\{(-2z+1, \frac{z-1}{3}, z) \mid z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Es decir, todas las soluciones son de la forma

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3} \text{ donde } z \in \mathbb{R}.$$

Demostración

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{cases}$$

*(-1)

Entonces también vale que:

$$+\quad \begin{array}{rrrrcr} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ (-1)\cdot & (x & & +2z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{cases}$$

Cambiamos
2da ecuac

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x \qquad\qquad +2z = 1 \\ \qquad -3y \ +z = 1 \\ 2x \ -3y \ +5z = 3 \end{cases}$$

*(-2)

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcr} & 2x & -3y & +5z & = & 3 \\ (-2)\cdot & (x & & +2z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

+

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{cases} x \qquad\qquad +2z = 1 \\ \qquad -3y \ +z = 1 \\ \qquad \cancel{-3y \ +z = 1} \end{cases} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{cases} x \qquad\qquad +2z = 1 \\ \qquad -3y \ +z = 1 \end{cases}$$

Cambiamos
2da ecuac

2da y 3er ecuac
son la misma

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{cases}$$

podemos despejar x e y en función de z. Esto es,

$$x = -2z + 1$$
$$y = \frac{z-1}{3}$$

y no tenemos ninguna condición sobre z.

En resumen, supucimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{cases}$$

y probamos que

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3}.$$

Además, si reemplazamos x, y y z por estos valores

$$\begin{cases} (-2z+1) & & +2z & = 1 \\ (-2z+1) & -3 \cdot (\frac{z-1}{3}) & +3z & = 2 \\ 2 \cdot (-2z+1) & -3 \cdot (\frac{z-1}{3}) & +5z & = 3 \end{cases}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.
(desarrollen estas expresiones en una hoja para chequear que efectivamente valen las igualdades).

1 Objetivos

2 Ejemplo 1

3 Ejemplo 2

4 Ejemplo 3

5 Conclusiones

Conclusiones

- Un sistema de ecuaciones puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.
- Hemos cambiado nuestro sistema inicial haciendo combinaciones lineales de las ecucaciones.
- El nuevo sistema es más sencillo en el sentido que:
  - Cada ecuación tiene menos incognitas.
  - Las soluciones quedan descriptas explicitamente.
- Las soluciones del nuevo sistema son las soluciones de nuestro sistema original.
- En el proceso de cambiar de sistema sólo hemos operado con los coeficientes. Para escribir menos podemos obviar x, y, z, y escribir sólo los coeficientes de una forma ordenada y sistemática.

Es a partir de la última conclusión que surgen los conceptos de:

- Matriz
- Operaciones elementales por filas
- Matriz Escalón Reducida por Fila (MERF)

Analizaremos esto en otro archivo.