Práctico 3

Álgebra de matrices
Soluciones[1]

(1) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC. Calcular ABC.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Recordar que para poder multiplicar dos matrices necesitamos que la cantidad de columnas de la primera sea igual a la cantidad de filas de la segunda.

En este caso, la primera matriz es 2×3, la segunda matriz es 3×1 y la tercera matriz es 1×4. Por lo tanto, para que sea posible realizar el producto ABC, la única forma es que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para calcular ABC podemos, gracias a la propiedad asociativa de producto de matrices, calcular primero AB y después multiplicar a derecha por C.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \quad ABC = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcular:
(a) $-2A + 3B$
(b) C^2 y C^3. ¿Se anima a conjeturar una fórmula para C^n, $n \in \mathbb{N}$ y probarla por inducción?
(c) AB
(d) BA

¿Qué conclusión puede sacar de (c) y (d)?

Solución:
a) $-2A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ y $3B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -6 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix}$, $\Longrightarrow -2A + 3B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ -8 & 4 & -5 \\ 1 & 13 & 17 \end{bmatrix}$

b) $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[1]Estas son algunas soluciones posibles. Podría haber otras maneras de resolver los problemas del práctico.

Esto sugiere que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $C^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Probemoslo por inducción:

Para $n = 1$ se cumple que $C^1 = C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ por definición.

Asumamos que $C^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y probemos que $C^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$C^{n+1} = C^n \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, lo cual prueba el paso inductivo. Por inducción queda probado lo que queríamos demostrar.

c) $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 9 & -18 & -2 \end{bmatrix}$

La conclusión importante (importantísima!) que sacamos de c) y d) es que la multiplicación de matrices NO es conmutativa en general.

(3) (a) ⓐ Dar ejemplos de matrices $A, B, C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ para mostrar que las siguientes afirmaciones son falsas:

(i) $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.
(ii) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$.
(iii) $AB = AC$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$.
(iv) $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
(v) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = \mathrm{I}_2$.
(vi) $(AB)^2 = A^2B^2$.

(b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ para que

(i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(ii) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

Solución: Para cada inciso, tenemos una proposición del tipo $p \to q$ y nos piden mostrar que son todas proposiciones falsas, por lo que debemos mostrar un ejemplo de una matriz que cumpla el antecedente pero no el consecuente. Como sugiere la ayuda, podemos probar con matrices lo "más simple posibles", es decir con muchos 0s y algunos unos (o -1s).

a)

i) Cualquiera de las siguientes opciones es un ejemplo de una matriz 2×2 A no nula tal que $A^2 = 0$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}$ $a \neq 0$, $\begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix}$ $a \neq 0$.

ii) Los ejemplos de i) sirven, pues si $A \neq 0$ y $A^2 = 0$ tenemos que $A \cdot A = 0$ pero $A \neq 0$ y $A \neq 0$.

Otro ejemplo es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iii) Para conseguir un ejemplo de matrices $B \neq C$ tales que $AB = AC$ para $A \neq 0$, notar que $AB = AC \iff AB - AC = 0 \iff A(B-C) = 0$. Podemos tomar entonces como A alguna matriz de (i), $C = 0$ y $B = A$. Entonces se cumple $AB = AC$ pues $AB = A^2 = 0$ y $AC = A \cdot 0 = 0$, pero $C \neq B$ pues $B = A \neq 0 = C$.

iv) Un ejemplo es tomar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Se tiene que $AB = 0$ pero $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

v) Ejemplos de matrices $A \neq 0$ y $A \neq \mathrm{I}_2$ tales que $A^2 = A$ son $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

vi) Un ejemplo es $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tenemos que $A^2 = -\mathrm{I}_2$ y $B^2 = B$, por lo que $A^2B^2 = -B$ y $(AB)^2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = 0$, y así $A^2B^2 \neq (AB)^2$.

b)

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 &\iff (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\
&\iff A(A+B) + B(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\
&\iff A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\
&\iff AB + BA = 2AB \\
&\iff BA = 2AB - AB \\
&\iff BA = AB
\end{aligned}$$

Luego la condición necesaria y suficiente para que valga el "cuadrado de binomio" para A y B es que $\boxed{AB = BA}$ (es decir, las matrices conmutan).

$$\begin{aligned}
A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) &\iff A^2 - B^2 = A(A-B) + B(A-B) \\
&\iff A^2 - B^2 = A^2 - AB + BA - B^2 \\
&\iff 0 = -AB + BA \\
&\iff AB = BA
\end{aligned}$$

Luego la condición necesaria y suficiente para que valga la "diferencia de cuadrados" para A y B es que $\boxed{AB = BA}$.

(4) Probar que si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ entonces $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

Solución: Vamos a usar que dos matrices son iguales si y sólo si todas sus entradas son iguales. Lo que haremos será calcular la entrada (i, j) de $(A+B)C$ y la de $AC+BC$ y ver que son iguales.

$$[(A+B)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A+B]_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} + B_{ik})C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik}C_{kj} + B_{ik}C_{kj}).$$

$$[AC+BC]_{ij} = [AC]_{ij} + [BC]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} + \sum_{k=1}^{n} B_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik}C_{kj} + B_{ik}C_{kj}).$$

Luego $[(A+B)C]_{ij} = [AC+BC]_{ij}$ para todo (i, j) y así $(A+B)C = AC+BC$.

Comentario: También vale la distributividad $A(B+C) = AB+AC$ y la prueba es totalmente análoga a lo que hicimos en este ejercicio.

(5) Sean

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

es decir, $C_1, ..., C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^n v_j C_j$.

Solución: Notar que Av y $\sum_{j=1}^n v_j C_j$ son vectores columna, es decir de tamaño $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Para que se de la igualdad, debemos ver que $(Av)_{i1} = (\sum_{j=1}^n v_j C_j)_{i1}$ para todo $1 \leq i \leq m$.

$$(Av)_{i1} = \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n v_j A_{ij} = \sum_{j=1}^n v_j (C_j)_{i1} = (\sum_{j=1}^n v_j C_j)_{i1}$$

Luego $(Av)_{i1} = (\sum_{j=1}^n v_j C_j)_{i1}$ para todo $1 \leq i \leq m$ por lo que $Av = \sum_{j=1}^n v_j C_j$.

(6) Una matriz A se dice *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Probar que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.

Solución: Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrices triangulares superiores. Queremos probar que AB es triangular superior, para lo cual tenemos que ver que $[AB]_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Sea $i > j$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} B_{kj}}_{①} + \underbrace{\sum_{k=i}^{n} A_{ik} B_{kj}}_{②}.$$

Para $k < i$, como A es triangular superior, $A_{ik} = 0$. Luego ① $= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot B_{kj} = 0$.

Para $k \geq i$, recordar que estamos bajo la hipótesis $i > j$, luego $k > j$. Entonces, como B es triangular superior, se tiene que $B_{kj} = 0$. Luego ② $= \sum_{k=i}^n A_{ik} \cdot 0 = 0$.

Por lo tanto $[AB]_{ij} =$ ① $+$ ② $= 0 + 0 = 0$, como queríamos demostrar.

(7) Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, la *traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{K}^{n\times m}$ definida por

$$[A^t]_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

(a) Dar las matrices traspuestas del ejercicio 1 y de la matriz A del ejercicio 2.
(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces
  (i) $(A + cB)^t = A^t + cB^t$.
  (ii) $(A^t)^t = A$.
  (iii) $(BC)^t = C^t B^t$.
(c) Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice *simétrica* si $A^t = A$ y se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.
  (i) Dar un ejemplo de una matriz no diagonal que sea simétrica y un ejemplo de una matriz que sea antisimétrica.
  (ii) Mostrar que si A es antisimétrica, entonces $a_{ii} = 0$ para todo i.

Solución: (a)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\1 & -2 & 1\\1 & -2 & -1\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & -2 & -2\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Comentario: Según vemos de la definición, para dar la traspuesta simplemente ponemos como columnas las filas de A. Notar que si A es $m \times n$ entonces A^t es $n \times m$.

b) Probaremos cada inciso usando que dos matrices son iguales si y sólo si todas sus entradas son iguales.

i)

$$(A + cB)^t_{ij} = (A + cB)_{ji} = A_{ji} + cB_{ji}.$$

$$(A^t + cB^t)_{ij} = (A^t)_{ij} + c(B^t)_{ij} = A_{ji} + cB_{ji}.$$

Vemos que $(A + cB)^t_{ij} = (A^t + cB^t)_{ij}$ para todo i, j. Luego $(A + cB)^t = A^t + cB^t$

Comentario: Esto dice que la traspuesta "se lleva bien" con la suma y el producto por escalar.

ii) $[(A^t)^t]_[ij] = (A^t)_{ji} = A_{ij} = [A]_{ij}$. Como son iguales para todo i, j se tiene que $(A^t)^t = A$.

iii)

$$(BC)^t_{ij} = (BC)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}C_{ki}.$$

$$(C^tB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(C^t)_{ik}(B^t)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} C_{ki}B_{jk} = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}C_{ki}.$$

Vemos que $(BC)^t_{ij} = (C^tB^t)_{ij}$ para todo i, j. Luego $(BC)^t = C^tB^t$.

c) i) Damos un ejemplo en 2×2 (por comodidad, es fácil dar uno en $n\times n$). Cualquier matriz de la forma $A = \begin{bmatrix}a & b\\b & a\end{bmatrix}$ es simétrica, pues es fácil ver que $A^t = A$. Para que no sea diagonal basta que $b \neq 0$, por ejemplo $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$.

Cualquier matriz de la forma $A = \begin{bmatrix}0 & a\\-a & 0\end{bmatrix}$ es antisimétrica, pues es fácil ver que $A^t = -A$.

ii) Si A es antisimétrica, entonces $A^t = -A$. Esto quiere decir que $[A^t]_{ii} = [-A]_{ii}$ para todo i. Por definición, $[A^t]_{ii} = A_{ii}$ y $[-A]_{ii} = -A_{ii}$. Luego debe ser $A_{ii} = -A_{ii}$, de donde $2A_{ii} = 0 \Rightarrow A_{ii} = 0$, como queríamos demostrar.

(8) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Calcular la traza de las matrices del Ejercicio (2).

(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

(i) $\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr} A + c \operatorname{Tr} B$

(ii) $\operatorname{Tr}(A^t) = \operatorname{Tr}(A)$.

(iii) $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Solución:

a) Calculamos la traza usando la definición:

$$\operatorname{Tr}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix} = 1-2-1=-2,$$

$$\operatorname{Tr}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix} = 1+5=6,$$

$$\operatorname{Tr}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = 1+1=2.$$

b) Probaremos los items usando la definición de traza, partiendo de un lado y viendo a lo que queremos llegar.

i)

$$\operatorname{Tr}(A+cB)=\sum_{i=1}^{n}(A+cB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(A_{ii}+cB_{ii})=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}+c\sum_{i=1}^{n}B_{ii}=\operatorname{Tr}A+c\operatorname{Tr}B.$$

ii) $\operatorname{Tr}(A^t)=\sum_{i=1}^{n}(A^t)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\operatorname{Tr}A.$

iii)

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ik}B_{ki}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}B_{ki}A_{ik}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk}=\operatorname{Tr}BA\end{aligned}$$

(9) (a) Sea $k\in\mathbb{N}$. Probar por inducción en k que si A es una matriz $n\times n$ entonces

$$(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A+A^2+\cdots+A^k)=\mathrm{I}_n-A^{k+1}.$$

(b) Una matriz $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k=0$ para algún $k\in\mathbb{N}$. Probar que si A es nilpotente, entonces I_n-A es invertible.

Solución: (a) Procedemos por inducción. Si $k=1$ se tiene que $(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A)=\mathrm{I}_n-A^2$ (pues conmutan) lo cual prueba el caso base.

Asumimos vale para k. Queremos ver que vale para $k+1$. Ahora,

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A+A^2+\cdots+A^{k+1})&=(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A+\cdots+A^k)+(\mathrm{I}_n-A)A^{k+1}\\ &=\mathrm{I}_n-A^{k+1}+(\mathrm{I}_n-A)A^{k+1}\\ &=\mathrm{I}_n-A^{k+1}+A^{k+1}-A^{k+2}\\ &=\mathrm{I}_n-A^{k+2}.\end{aligned}$$

con lo cual vale la afirmación para $k+1$ y así queda probado el paso inductivo.

(b) Supongamos que A es nilpotente. Sea $k\in\mathbb{N}$ tal que $A^k=0$. Entonces, usando la fórmula de (a) tenemos que $(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A+\cdots+A^{k-1})=\mathrm{I}_n-A^k=\mathrm{I}_n$. Esto quiere decir que $\mathrm{I}_n+A+\cdots+A^{k-1}$ es una inversa a derecha de I_n-A. Por corolario 2.7.10 sabemos que resulta la inversa y así I_n-A es invertible.

(10) Para cada una de las siguientes matrices, decidir si son invertibles. Para aquellas que sean invertibles, hallar la matriz inversa y matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Por Teorema 2.7.6, A será invertible si y sólo si A es equivalente por filas a Id_n.

Teniendo esto en cuenta, haremos operaciones para ver si una MERF de A es Id_n o no.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-3F_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_2.$

Por lo tanto A es invertible. Para hallar la inversa, debemos resolver los sistemas $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Las soluciones X_1 y X_2 de estos sistemas nos darán las columnas de la matriz inversa.

Aplicamos las operaciones que hicimos a A a los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, o equivalentemente a Id_2:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-3F_2} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$

Por lo tanto la inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Las matrices elementales correspondientes son $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (recordar que resultan de aplicar cada operación que le hicimos a A, a la matriz Id_2).

Comentario: Para chequear que hicimos todo bien, deberíamos multiplicar E_2E_1 y eso nos tiene que dar la inversa (cuidado el orden!).

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como en el proceso de reducción a una MERF nos topamos con una fila nula, la matriz B no es equivalente por filas a Id_n, por lo que no es invertible.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4-F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+4F_4 \\ F_3-3F_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nuevamente como nos topamos con una fila nula, la matriz C no es equivalente por filas a Id_n, por lo que no es invertible.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_3 \\ F_2-F_3 \\ \frac{1}{3}F_3 \\ F_1-F_2 \\ \frac{1}{2}F_2}} \mathrm{Id}_3.$$

Como D es equivalente por filas a Id_n, entonces es invertible. Como antes, para hallar la inversa aplicamos las operaciones a los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{\substack{F_1-F_3\\F_2-F_3\\\frac{1}{3}F_3\\F_1-F_2}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{\substack{F_1-F_3\\F_2-F_3\\\frac{1}{3}F_3\\F_1-F_2}} \begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}F_3]{\substack{F_1-F_3\\F_2-F_3}} \begin{bmatrix}-1\\-1\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{F_1-F_2} \begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $D^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

Las matrices elementales son

$$E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \; E_5 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Comentario: Por supuesto, si dos personas hacen operaciones distintas van a obtener distintas matrices elementales, pero el producto de todas ellas debe coincidir.

(11) Probar las siguientes afirmaciones:
  (a) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
  (b) Sea A una matriz triangular superior tal que todos los elementos de su diagonal son no nulos[2]. Probar que A es invertible y que A^{-1} es triangular superior.

Solución:

(a) Si A es invertible, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = \mathrm{Id}$. Aplicamos traspuesta a ambos lados. Usando que $\mathrm{Id}^t = \mathrm{Id}$ (pues es diagonal) y $(AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$ obtenemos $(A^{-1})^t A^t = \mathrm{Id}$. Esto quiere decir que $(A^{-1})^t$ es inversa a izquierda de A^t. Por Corolario 2.7.10 resulta la inversa de A^t. Esto quiere decir que A^t es invertible y que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(b) Sea $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{bmatrix}$ una matriz triangular superior con $a_{ii} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Veamos que una MERF de A es I_n, con lo cual A será equivalente por filas a I_n y por lo tanto invertible. Procederemos por inducción.

Si $n = 1$, $A = (a)$, $a \neq 0$. Dividiendo por a llegamos a I_1 lo cual dice que vale el caso base.

Asumamos como hipótesis inductiva que la afirmación vale para $n-1$ y veamos que vale para n.

Denotemos las filas de A por $F_1, \ldots, F_n$.

Como $a_{nn} \neq 0$, hacemos la operación $\frac{1}{a_{nn}}F_n$. Luego, para todo $1 \leq i \leq n-1$ hacemos $F_i - a_{in}F_n$ con lo cual la última columna de A resulta el vector columna de todos 0s y un uno al final. Notar que en las otras columnas no hicimos nada porque todas las

[2] Veremos en la sección que sigue que esta condición además de ser suficiente para que A sea invertible, es necesaria.

otras entradas de F_n son 0. La matriz A queda de la forma $A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, donde A' es $(n-1) \times (n-1)$.

Notar que A' es triangular superior, y sus elementos diagonales son no nulos (pues son los mismos de A salvo por a_{nn}). Podemos entonces aplicar la hipótesis inductiva sobre A' y obtener que una MERF es $\mathrm{I}_{n-1 n-1}$. Si realizamos estas operaciones a la última columna, no la modificamos porque es una columna de ceros (salvo por el último, que no es modificado pues hicimos operaciones en las filas $F_1, \ldots, F_{n-1}$). Esto muestra que una MERF de A es I_n, por lo que A es invertible, lo que concluye el paso inductivo. Por inducción, queda probada la afirmación.

Para ver que A^{-1} es triangular superior, notemos que las operaciones elementales que hicimos para reducir A a I_n corresponden a matrices elementales que son triangulares superiores. Luego podemos escribir (Teorema 2.7.6) $E_k \cdots E_1 A = \mathrm{Id}$, de donde multiplicando a derecha por A^{-1} obtenemos $E_k \cdots E_1 = A^{-1}$. Por Ejercicio 6, el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior (esto se generaliza a n por inducción de manera inmediata), por lo que A^{-1} es triangular superior.

(12) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique dando un contraejemplo o una demostración según corresponda.
 (a) Si A y B son matrices invertibles, entonces $A + B$ es una matriz invertible.
 (b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $\operatorname{Tr} A^2 = 0$ entonces $A = 0$.
 (c) Existen matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $AB - BA = \mathrm{I}_n$.

Solución: (a) FALSO. Basta con tomar una matriz invertible cualquiera y tomar su opuesto. Más específicamente, sea por ejemplo $A = \mathrm{I}_2$ y $B = -\mathrm{I}_2$. Es claro que ambas son invertibles, pero $A + B = 0$ y 0 no es invertible.

(b) VERDADERO.
$\operatorname{Tr} A^2 = \sum_{i=1}(A \cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n A_{ik}A_{ki})$. Como A es diagonal, $a_{ik} = a_{ki} = 0$ cuando $k \neq i$ por lo que $\operatorname{Tr} A^2 = \sum_{i=1}^n A_{ii}A_{ii} = \sum_{i=1}^n A_{ii}^2$. Por hipótesis $0 = \operatorname{Tr} A^2$, de donde $\sum_{i=1}^n A_{ii}^2 = 0$. Como $A_{ii} \in \mathbb{R}$, la única forma en que esto ocurra es que $A_{ii} = 0$ para todo $1 \le i \le n$. Al ser diagonal con todos sus elementos diagonales nulos, debe ser $A = 0$.

(c) FALSO. Asumamos que existen A, B tales que $AB - BA = \mathrm{I}_n$. Aplicamos traza a ambos lados y nos queda $\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr} \mathrm{I}_n$. Pero, notemos que por Ejercicio 8 $\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr} AB - \operatorname{Tr} BA = \operatorname{Tr} AB - \operatorname{Tr} AB = 0$, mientras que $\operatorname{Tr} \mathrm{I}_n = n$, con lo cual llegamos a $n = 0$, absurdo que proviene de suponer la existencia de tales matrices A, B.

comentario: Este argumento funciona porque trabajamos con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. De hecho, en estos casos se prueba más generalmente que $C = AB - BA$ si y sólo si $\operatorname{Tr} C = 0$.

(13) (a) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también[3] es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.
 (b) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema para todo $t \in \mathbb{K}$.

[3]Esto dice que el espacio de soluciones de un sistema homogéneo es cerrado para la suma y la multiplicación por escalar

(c) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(d) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

Solución:

(a) Si v y w son soluciones de $AX = 0$ quiere decir que $Av = Aw = 0$. Por propiedad distributiva del producto de matrices y como multiplicar por un escalar conmuta con multiplicar una matriz, resulta $A(v + tw) = Av + A(tw) = Av + t(Aw) = 0 + t \cdot 0 = 0$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

(b) Sea v tal que $Av = Y$ y w tal que $Aw = 0$. Entonces $A(v + tw) = Av + t(Aw) = Y + t \cdot 0 = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$, por lo que $v + tw$ es solución de $AX = Y$.

(c) Supongamos que w es una solución no trivial de $AX = 0$, es decir que $w \neq 0$ y $Aw = 0$. Si el sistema $AX = Y$ no tiene solución, es verdadera la afirmación. Si el sistema $AX = Y$ tiene solución, llamemosla v, por (b) tenemos que $v + w$ es una solución de $AX = Y$. Notar que $v \neq v + w$ pues $w \neq 0$, luego hay al menos dos soluciones distintas.

(d) Sea X solución de $BX = Y$. Multiplicando por A a izquierda en ambos lados de la igualdad obtenemos que X es solución de $ABX = AY$. Recíprocamente, si X es solución de $ABX = AY$, multiplicando por A^{-1} (existe pues A es invertible) en ambos lados de la igualdad obtenemos que X es solución de $BX = Y$. Por lo tanto tambos sistemas tienen las mismas soluciones.

(14) Sea A una matriz $n \times n$. Demostrar que:

(a) Si A es invertible y $AB = 0$ para alguna matriz $n \times n$, B, entonces $B = 0$.

(b) ⓐ Si A no es invertible, entonces existe una matriz $n \times n$, B, tal que $AB = 0$, pero $B \neq 0$.

Solución: (a) Supongamos que $AB = 0$. Como A es invertible existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = \mathrm{I}$. Multiplicando a izquierda en ambos lados por A^{-1} en la ecuación $AB = 0$ obtenemos $B = A^{-1} \cdot 0 = 0$, de donde $B = 0$.

Solución: Si A no es invertible, el sistema $AX = 0$ tiene al menos una solución no trivial, digamos v. Sea B la matriz cuya primera columna es v y el resto todo 0, es decir $B = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$. Como $Av = A \cdot 0 = 0$, se tiene que $AB = 0$ y $B \neq 0$ (pues $v \neq 0$), como se pide.

(15) ⓐ Sean A y B matrices $m \times n$ y $n \times r$ respectivamente. Probar que

(a) Si $r > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no nulas. ¿Qué podemos decir respecto de la invertibilidad de AB en este caso si $m = r$?

(b) Si $m > n$, entonces existe un Y, $m \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

(c) Dar un ejemplo de matrices A y B (no cuadradas) tales que AB no sea invertible pero BA lo sea[4].

[4] Si las matrices son cuadradas esto no puede suceder.

Solución:

(a) Si $r > n$, entonces el sistema $BX = 0$ tendrá al menos una solución no trivial, digamos v (pues la cantidad de incógnitas es mayor a la cantidad de ecuaciones, recordar Práctico 2 Ejercicio 11 caso $m < n$). Luego $ABv = A(Bv) = A \cdot 0 = 0$, por lo que v es una solución no trivial de $ABX = 0$.

Si $m = r$, AB es una matriz cuadrada y como el sistema $ABX = 0$ posee una solución no trivial, AB no es invertible. (recordar Teorema 2.7.6)

(b) Asumamos que $m > n$. Sea R_A una MERF de A. Como hay más ecuaciones que incógnitas R_A debe tener al menos una fila nula, digamos la fila i. Luego la fila i de R_AB también es nula y así existe Z de tamaño $m \times 1$ tal que $R_ABX = Z$ no tiene solución (recordar Práctico 2 Ejercicio 11 caso $m > n$). Por Corolario 2.7.7 $A = PR_A$ donde P es invertible. Por Ejercicio (13d), las soluciones de $R_ABX = Z$ son las mismas que las de $PR_ABX = PZ$, es decir $ABX = PZ$. Llamemos $Y = PZ$, el cual es tamaño de $m \times 1$. Para este Y, el sistema $ABX = Y$ no tiene solución.

(c) Si queremos que AB no sea invertible, basta con tomar (por inciso (a)) matrices $m \times n$ y $n \times m$ con $n < m$. Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$. Entonces $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, la cual no es invertible pues la segunda fila es la primera fila multiplicada por 2, y $BA = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$ la cual es invertible.

Ejercicios Adicionales.

(16) Una matriz D se dice *diagonal* si $d_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Sean A, B matrices diagonales. Probar que

(a) AB es diagonal.

(b) $AB = BA$.

Solución:

(a) Sean A, B matrices $n \times n$ diagonales. Para ver que AB es diagonal, tenemos que ver que $[AB]_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Sean $i \neq j$. Entonces $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$. Si $k \neq i$, entonces $A_{ik} = 0$ pues A es diagonal, y si $k \neq j$ entonces $B_{kj} = 0$ pues B es diagonal. Como $i \neq j$, en cada uno de los n sumandos, o $A_{ik} = 0$ o $B_{kj} = 0$ (puesto que no puede ser al mismo tiempo $k = i$ y $k = j$), por lo que cada sumando es nulo y así $[AB]_{ij} = 0$.

(b) Por (a), sabemos que AB y BA son diagonales. Por lo tanto, $AB = BA$ si y sólo si sus elementos diagonales son iguales. Vamos a calcular $[AB]_{ii}$ y $[BA]_{ii}$ para $1 \leq i \leq n$ y veremos que son iguales

$[AB]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} = A_{ii}B_{ii}$ (pues A y B son diagonales, el único término en la suma que sobrevive es cuando $k = i$).

$[BA]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}A_{ki} = B_{ii}A_{ii}$.

Como $A_{ii}B_{ii} = B_{ii}A_{ii}$ (simplemente porque la multiplicación de números reales es conmutativa) tenemos que $[AB]_{ii} = [BA]_{ii}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $AB = BA$.

(17) Decimos que $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

(a) Probar que la traspuesta de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular superior (inferior).

(b) Deducir de (a) y de los hechos probados para matrices triangulares superiores que:

(i) el producto de dos matrices triangulares inferiores es triangular inferior.

(ii) una matriz triangular inferior con todos sus elementos de la diagonal no nulos es invertible y su inversa es triangular inferior.

Solución:
(a) Sea $i > j$. Se tiene que $[A^t]_{ij} = A_{ji} = 0$, pues A es triangular inferior. Esto dice que A^t es triangular superior.
De manera análoga, si A es triangular superior, $A_{ij} = 0$ para $i > j$, por lo que $[A^t]_{ij} = 0$ para $i < j$, luego A^t es triangular inferior.

(b)
(i) Sean A, B triangulares inferiores. Entonces A^t y B^t son triangulares superiores, luego B^tA^t es triangular superior (por Ejercicio 6). Por lo tanto $(B^tA^t)^t$ es triangular inferior, pero $(B^tA^t)^t = (A^t)^t(B^t)^t = AB$, con lo que AB es triangular inferior.

(ii) Sea A triangular inferior con sus elementos de la diagonal no nulos. Entonces A^t es triangular superior con los mismos elementos de la diagonal que A, que son no nulos. Por Ejercicio 11b A^t es invertible y $(A^t)^{-1}$ es triangular superior. Por Ejercicio 11a, $(A^t)^t = A$ es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, por lo que $A^{-1} = ((A^{-1})^t)^t$ es triangular inferior.

(18) Decidir si la siguiente matriz es invertible. En caso afirmativo hallar la matriz inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Solución: Para ver si la matriz es invertible, reducimos a una MERF y vemos si llegamos a Id_3 (en cuyo caso es invertible) o no.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-\frac{1}{3}F_1]{F_2-\frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-\frac{1}{2}F_2]{\substack{180F_3 \\ F_2-\frac{1}{12}F_3 \\ F_1-\frac{1}{3}F_3 \\ 12F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_3.$$

Como A es equivalente por filas a Id_3, es invertible. Para hallar la inversa, aplicamos las operaciones que aplicamos a A a la Id_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-\frac{1}{3}F_1]{F_2-\frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[180F_3]{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-\frac{1}{3}F_3]{F_2-\frac{1}{12}F_3} \begin{bmatrix} -9 & 60 & -60 \\ -3 & 16 & -15 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1-\frac{1}{2}F_2]{12F_2} \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Comentario: La matriz A de este ejercicio se llama matriz *de Hilbert* (definida en general para $n \times n$, por $[A]_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$) y se puede probar en general que A^{-1} tiene coeficientes enteros.

(19) Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, la *traspuesta conjugada* de A es la matriz $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ definida por

$$[A^*]_{ij} = \overline{A_{ji}}, \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m,$$

donde $\overline{A_{ji}}$ significa el conjugado del número complejo A_{ji}.

(a) Dar A^* para las matrices $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces
  - (i) $(A + cB)^* = A^* + \overline{c}B^*$.
  - (ii) $(A^*)^* = A$.
  - (iii) $(BC)^* = C^*B^*$.
  - (iv) Si A es cuadrada, entonces $\operatorname{Tr} A^* = \overline{\operatorname{Tr} A}$.

(c) Probar que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, entonces A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(d) Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice *hermitiana* si $A^* = A$ y *antihermitiana* si $A^* = -A$.
  - (i) Dar un ejemplo de una matriz (anti)simétrica no (anti)hermitiana y un ejemplo de una matriz (anti)hermitiana no (anti)simétrica.
  - (ii) Probar que si A es hermitiana entonces $a_{jj} \in \mathbb{R}$ para todo j y que si A es antihermitiana entonces a_{jj} es imaginario puro para todo j.

Solución: Para dar la traspuesta conjugada, tenemos que trasponer la matriz y luego conjugar en cada entrada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix} \implies A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -i \\ i & 2 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix} \implies B^* = \begin{bmatrix} -i & 1 & 1 \\ -1+i & -2 & -2i \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vamos a probar los primeros 3 items viendo que todas las entradas de las matrices de cada lado coinciden.

Sean $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

i)

$$[(A + cB)^*]_{ij} = \overline{[A + cB]_{ji}} = \overline{A_{ji} + cB_{ji}} = \overline{A_{ji}} + \overline{c}\overline{B_{ji}}.$$

$$[A^* + \overline{c}B^*]_{ij} = [A^*]_{ij} + \overline{c}[B^*]_{ij} = \overline{A_{ji}} + \overline{c}\overline{B_{ji}}.$$

Vemos que $[(A + cB)^*]_{ij} = [A^* + \overline{c}B^*]_{ij}$ para todo i, j luego $(A + cB)^* = A^* + \overline{c}B^*$.

ii)

$$[(A^*)^*]_{ij} = \overline{[A^*]_{ji}} = \overline{\overline{A_{ij}}} = [A]_{ij},$$

por lo que $(A^*)^* = A$.

iii)

$$[(BC)^*]_{ij} = \overline{[BC]_{ji}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} B_{jk}C_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{B_{jk}}\,\overline{C_{ki}}.$$

$$[C^*B^*]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [C^*]_{ik}[B^*]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \overline{C_{ki}}\,\overline{B_{jk}}.$$

Como la multiplicación en $\mathbb{C}$ es conmutativa, vemos que $[(BC)^*]_{ij} = [C^*B^*]_{ij}$ para todo i, j luego $(BC)^* = C^*B^*$.

iv) Si A es $n \times n$, $\operatorname{Tr} A^* = \sum_{i=1}^{n} [A^*]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{ii}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}} = \overline{\operatorname{Tr} A}$.

c) Como A es invertible, existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$. Aplicando traspuesta conjugada a ambos lados, resulta $A^*(A^{-1})^* = (\mathrm{I}_n)^* = \mathrm{I}_n$. Luego A^* tiene inversa a derecha y por Corolario 2.7.10 tiene inversa, la cual vemos de la igualdad que está dada por $(A^{-1})^*$, es decir $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

d) Para ver si ciertas matrices son (anti)simétricas y/o (anti)hermitianas conviene observar cómo deben ser las entradas a partir de la definición:

$$\begin{aligned} A = A^t &\iff A_{ij} = [A^t]_{ij} \quad \forall i,j \\ &\iff A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i,j \\ &\iff A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i \neq j \\ &\iff A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i > j \end{aligned}$$

Esto es porque la condición $A_{ii} = A_{ii}$ se cumple siempre, y $A_{ij} = A_{ji}$ para $i > j$ es equivalente a $A_{ji} = A_{ij}$ para $j > i$, lo cual es equivalente a $A_{ij} = A_{ji}$ para $j > i$.

En resumen, una matriz es simétrica si y sólo si todo elemento a_{ij} debajo de la diagonal es igual a su simétrico a_{ji}.

Análogamente tenemos las siguientes observaciones

$$\begin{aligned} -A = A^t &\iff [-A]_{ij} = [A^t]_{ij} \quad \forall i,j \\ &\iff -A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i,j \\ &\iff A_{ij} = -A_{ji} \quad \forall i > j \text{ y } a_{ii} = 0 \ \forall i. \end{aligned}$$

Por lo tanto A es antisimétrica si y sólo si sus elementos diagonales son 0 y todo elemento a_{ij} debajo de la diagonal es igual a menos su simétrico $-a_{ji}$.

$$\begin{aligned} A = A^* &\iff [A]_{ij} = [A^*]_{ij} \quad \forall i,j \\ &\iff A_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad \forall i,j \\ &\iff A_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad \forall i > j \text{ y } a_{ii} \in \mathbb{R} \ \forall i. \end{aligned}$$

Lo último es porque si $z \in \mathbb{C}$, $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto A es hermitiana si y sólo si sus elementos diagonales son reales y todo elemento a_{ij} debajo de la diagonal es igual a su simétrico conjugado $\overline{a_{ji}}$.

$$\begin{aligned} -A = A^* &\iff [-A]_{ij} = [A^*]_{ij} \quad \forall i,j \\ &\iff -A_{ij} = \overline{A_{ji}} \quad \forall i > j \text{ y } A_{ii} \in i\mathbb{R} \ \forall i. \end{aligned}$$

Lo último es porque si $z \in \mathbb{C}$, $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$ (es decir, z es imaginario puro).

Por lo tanto A es antihermitiana si y sólo si sus elementos diagonales son imaginarios puros y todo elemento a_{ij} debajo de la diagonal es igual a menos su simétrico conjugado $-\overline{a_{ji}}$.

i) Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, vamos a dar ejemplos 2×2 (por supuesto no son únicos):

Matriz simétrica no hermitiana: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz hermitiana no simétrica: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz antisimétrica no antihermitiana $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$.

Matriz antihermitiana no antisimétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

Comentario: Los conceptos de hermitiana y antihermitiana tienen sentido en $\mathbb{C}$, en $\mathbb{R}$ es lo mismo ser hermitiana que simétrica y ser antihermitiana que antisimétrica.

(ii) En realidad este ejercicio ya lo resolvimos en una parte de las observaciones del (i). Por completitud ponemos la resolución específica del ejercicio:

A hermitiana implica $A^* = A$ por lo que $[A^*]_{ii} = A_{ii}$ para todo i, luego $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$ lo que implica $a_{ii} \in \mathbb{R}$ (Práctico 0 Ejercicio 3).

A antihermitiana implica $A^* = A$ por lo que $[A^*]_{ii} = -A_{ii}$ para todo i, luego $\overline{a_{ii}} = -a_{ii}$. Ahora, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ cumple $\overline{z} = -z$ quiere decir que $a - ib = -a - ib$ de donde $a = 0$, por lo que z es imaginario puro. En conclusión a_{ii} es imaginario puro.

(20) (a) Decimos que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *ortogonal* si $A^tA = \mathrm{I}_n$. Probar que si A y B son ortogonales, entonces AB es ortogonal, A es invertible, y A^{-1} es ortogonal.
(b) Decimos que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *unitaria* si $A^*A = \mathrm{I}_n$. Probar que si A y B son unitarias, entonces AB es unitaria, A es invertible, y A^{-1} es unitaria.
(c) Dar un ejemplo de una matriz ortogonal que no sea unitaria y un ejemplo de una unitaria que no sea ortogonal.

Solución:

(a) Calculamos $(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^t\,\mathrm{I}\,B = \mathrm{I}\,B^tB = \mathrm{I}\cdot\mathrm{I} = \mathrm{I}$, por lo que AB es ortogonal.

Por definición (y Corolario 2.7.10) la inversa de A es A^t por lo que A es invertible. Además $(A^{-1})^tA^{-1} = (A^t)^tA^t = AA^t = \mathrm{I}$ luego A^{-1} es ortogonal.

(b) Análogo a (a), calculamos $(AB)^*AB = B^*(A^*A)B = \mathrm{I}\,B^*B = \mathrm{I}$, por lo que AB es unitaria.

Por definición (y Corolario 2.7.10) la inversa de A es A^* por lo que A es invertible. Además $(A^{-1})^*A^{-1} = (A^*)^*A^* = AA^* = \mathrm{I}$, luego A^{-1} es unitaria.

(c) Más adelante veremos una manera fácil de producir matrices ortogonales y unitarias. Por lo pronto podemos ingeniarnoslas en 2×2.

Se puede comprobar con la definición que $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ es un ejemplo de matriz unitaria que no es ortogonal.

Guiandonos por la ayuda, se puede comprobar con la definición que $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -i \\ i & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ es un ejemplo de matriz unitaria que no es ortogonal.

(21) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique dando un contraejemplo o una demostración según corresponda.
(a) Sean A y B matrices cuadradas tales que $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra. Entonces A ó B es diagonal.
(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^tA = 0$. Entonces $A = 0$.
(c) Dadas A, B, C matrices se tiene que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$.
(d) Sean A nilpotente y B invertible. Entonces $B - A$ es una matriz invertible.

Solución:

(a) FALSO. Basta buscar una matriz invertible y su inversa. Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Conmutan por ser una inversa de la otra, y no son una un múltiplo de la otra. Sin embargo, ninguna es diagonal.

(b) VERDADERO. Tenemos que $[A^t A]_{ii} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Es decir que para todo $1 \leq i \leq n$ se cumple $0 = \sum_{k=1}^{n} [A^t]_{ik} [A]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}^2$. Como la matriz es real, debe ser $A_{1i} = \cdots = A_{ni} = 0$, para todo i, luego $A = 0$.

Comentarios: Esto generaliza el Ejercicio (12b) y claramente es falso si la matriz tiene coeficientes complejos.

(c) FALSO. Probando un poco con algunas matrices A, B tales que $AB \neq BA$ es fácil encontrar un contraejemplo. Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces $\operatorname{Tr} ABC = \operatorname{Tr} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ pero $\operatorname{Tr} BAC = \operatorname{Tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

(d) FALSO. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es nilpotente pues $A^2 = 0$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible (pues intercambiando las filas se obtiene la identidad) pero $B - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ no es invertible.

Comentario: Si uno mira el Ejercicio (9b), este enunciado parecería ser su generalización, pero como vemos es falso. Le falta una hipótesis esencial la cual es que $AB = BA$. En este caso el enunciado resulta verdadero y se prueba usando (9b).

(22) Sean[5] $E^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $E^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ conmuta con E^{11} y E^{12} entonces debe ser $A = c\,\mathrm{I}_2$, para algún $c \in \mathbb{K}$.

(b) Probar que $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ conmuta con toda matriz 2×2 si y sólo si $A = c\,\mathrm{I}_2$ con $c \in \mathbb{K}$.

Solución:

(a) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Si $AE^{11} = E^{11}A$ entonces $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es decir que $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, con lo cual concluimos que $b = c = 0$.

Ahora, $AE^{12} = E^{12}A$ implica $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, es decir que $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ de donde $a = d$.

En resumen $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\,\mathrm{I}_2$, para algún $a \in \mathbb{K}$.

(b) $\Rightarrow$) Si A conmuta con toda matriz 2×2, en particular conmuta con E^{11} y E^{12}. Por (a) esto implica $A = c\,\mathrm{I}_2$ para algún $c \in \mathbb{K}$.

$\Leftarrow$) Si $A = c\,\mathrm{I}_2$, sea B una matriz 2×2. Entonces $AB = c\,\mathrm{I}_2\,B = cB\,\mathrm{I}_2 = Bc\,\mathrm{I}_2 = BA$ (hemos usado que I_2 es neutro para la multiplicación y el producto por escalar conmuta con multiplicar con una matriz), por lo que A conmuta con toda matriz B.

[5] Se pueden usar estas matrices E^{ij} en general para probar que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ conmuta con toda matriz de $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si y sólo si $A = c\,\mathrm{I}_n$, para algún $c \in \mathbb{K}$.

(23) (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar por inducción en k que si A y B son matrices $n \times n$ tales que $AB = BA$ entonces

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j\, B^{k-j}.$$

(b) Probar que si A y B son matrices nilpotentes tales que que $AB = BA$, entonces $A+B$ es nilpotente. ¿Es cierta la afirmación si quitamos la hipótesis $AB = BA$?

Solución: Procedemos por inducción. Para $k = 1$ se tiene que el lado izquierdo es $A+B$ y el lado derecho es $\sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} A^j B^{1-j} = \binom{1}{0} A^0 B^{1-0} + \binom{1}{1} A^1 B^{1-1} = A+B$, por lo que vale el caso base.

Asumamos que vale para k y veamos que vale para $k+1$.

$$(A+B)^{k+1} = (A+B)^k(A+B) = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}\right)(A+B) = (*).$$

Ahora, como A y B conmutan entonces $AB^n = B^n A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (se prueba fácilmente por inducción). Por consiguiente $A^j B^{k-j} A = A^j A B^{k-j} = A^{j+1} B^{k-j}$.

Luego, aplicando distributiva en (*) obtenemos

$$\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}\right)(A+B) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{j+1} B^{k-j} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j+1}.$$

En la primera sumatoria cambiamos el índice, poniendo $m = j+1$ y en la segunda simplemente $m = j$ quedandonos

$$\sum_{m=1}^{k+1} \binom{k}{m-1} A^m B^{k-m+1} + \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} A^m B^{k-m+1}.$$

Separamos ahora el término $k+1$ en la primera y el término 0 en la segunda para sumar sobre el mismo rango de enteros. Nos queda

$$\binom{k}{k} A^{k+1} B^0 + \binom{k}{0} A^0 B^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} A^m B^{k-m+1}.$$

Usando la fórmula de Pascal: $\binom{k+1}{m} = \binom{k}{m} + \binom{k}{m-1}$ y que $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$ y $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ resulta

$$\binom{k+1}{k+1} A^{k+1} B^0 + \binom{k+1}{0} A^0 B^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \binom{k+1}{m} A^m B^{k-m+1} = \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} A^m B^{k-m+1},$$

probando el paso inductivo.

Comentario: La esencia de la prueba es la vista en Algebra I/Matemática Discreta I, lo único extra fue que tuvimos que usar que las matrices conmutan para poder aplicar la distributiva.

(b) Como A y B son nilpotentes, existen $k, \ell \in \mathbb{N}$ tales que $A^k = 0$ y $B^\ell = 0$. Notar que $A^m = 0$ para todo $m \geq k$ y $B^n = 0$ para todo $n \geq \ell$. Veamos que $(A+B)^{k+\ell} = 0$, usando (a).

$$(A+B)^{k+\ell} = \sum_{j=0}^{k+\ell} \binom{k+\ell}{j} A^j B^{k+\ell-j}.$$

Analicemos cada término y veamos que es 0. Si $j \geq k$ entonces $A^j = 0$ y si $j < k$ entonces $j+\ell < k+\ell$, de donde $\ell < k+\ell-j$ por lo que $B^{k+\ell-j} = 0$. En cualquier caso, el sumando j-ésimo es 0, por lo que $(A+B)^{k+\ell} = 0$ y así $A+B$ es nilpotente.

Si quitamos la hipótesis $AB = BA$ no es cierto que $A+B$ es nilpotente. Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ son nilpotentes pues $A^2 = B^2 = 0$ pero $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ cumple que $(A+B)$ es invertible, por lo que no puede ser nilpotente (pues si C es invertible y $C^k = 0$, como el producto de matrices invertibles es invertible se llegaría a que la matriz 0 es invertible, absurdo).

(24) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que la matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definida por

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$$

satisface $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$ (una matriz con estas propiedades se llama *nilpotente de grado n*).

Solución: Probemos por inducción que si $[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$ entonces

$$[A^k]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{si } j \neq i+k \end{cases}.$$

Para $k = 1$ se cumple, pues así está definida A. Asumamos vale para k y veamos para $k+1$.

Veamos la entrada $(i, i+k+1)$:

$$[A^{k+1}]_{i,i+k+1} = \sum_{m=1}^{n} [A^k]_{im}[A]_{m,i+k+1}.$$

Por hipótesis inductiva $[A^k]_{im} = 0$ salvo cuando $m = i+k$ que da 1, y en este caso también $[A]_{i+k,i+k+1} = 1$. Luego $[A^{k+1}]_{i,i+k+1} = 1$.

Veamos ahora cuando $j \neq i+k+1$:

$$[A^{k+1}]_{ij} = \sum_{m=1}^{n} [A^k]_{im}[A]_{mj}.$$

Por definición de A, el único término que sobrevive en la suma es cuando $m = j-1$, pero en este caso $[A^k]_{i,j-1} = 0$ pues $j-1 \neq i+k$ (ya que $j \neq i+k+1$). Por lo tanto $[A^{k+1}]_{ij} = 0$ para $j \neq i+k+1$. Queda probado así el paso inductivo.

Notemos entonces que si n es el tamaño de la matriz, $[A^{n-1}]_{nn} = 1$ pues $n = (n-1)+1$, luego $A^{n-1} \neq 0$. Sin embargo, $[A^n]_{ij} = 0$ para todo i, j pues no puede ser $j = i+n$ ya que $1 \leq i, j \leq n$. Así, $A^n = 0$.

Comentario: Intuitivamente la matriz A es $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y cada vez que la multiplicamos por sí misma corremos los unos un lugar a la derecha (después de la primera columna como que desaparecen). Una matriz tal que los elementos de su diagonal y debajo de ella son todos nulos se llama *estrictamente triangular superior*.