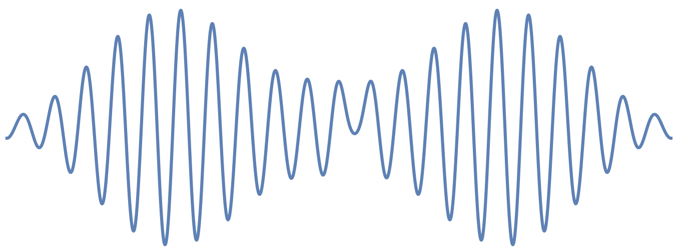
Álgebra I

Out[∘]=



Cuerpos

Un cuerpo es un conjunto F con 2 operaciones:

- $+: \mathrm{FxF} \to F$(suma)
- $\cdot: \mathrm{FxF} \to F$(multiplicacion)

Tales que:

1. La suma es asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall x, y, z \in F$
2. Existe un elemento $0 \in F$(neutro para la suma) tal que $x+0 = x = 0+X$, $\forall x \in F$
3. Para todo $x \in F$ existe $-x \in F$ (el opuesto) $x+(-x) = 0 = -x+x$
4. La suma es conmutativa
5. La multiplicación es asociativa: $(x.y).z = x.(y.z)$
6. Existe $1 \in F$, $1 \neq 0$ (neutro para la multiplicación) tal que $1.x = x = x.1$, $\forall x \in F$
7. Para todo $x \in F$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in F$ (inverso) tal que $x.x^{-1} = 1 = x^{-1}.x$
8. La multiplicación es conmutativa: $x.y = y.x$
9. La multiplicación es distribuible con respecto a la suma. $(x+y).z = x.z+y.z$

Ejemplos

- $\mathbb{R}$,+,* es un cuerpo
- $\mathbb{C}$,+,* es un cuerpo.

  En efecto,

  1. La suma y la multiplicación son asociativas y conmutativas (recordar

$(a+\mathrm{ib}).(c+\mathrm{id}) = (\mathrm{ac}-\mathrm{bd}) + (\mathrm{ad}+\mathrm{bc})\,i)$

2. $0 = 0 + i.0 \to$ es un neutro para la suma
3. $-(a+\mathrm{ib}) = -a - \mathrm{bi} \to$ es opuesto
4. $1 = 1 + 0\,i \to$ es un neutro para la multiplicación
5. La multiplicación es distribuible con respecto a la suma

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ no son cuerpos. En cambio $\mathbb{Q}$ es un cuerpo.

  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tal que

  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{\mathrm{bd}} \in \mathbb{Q}$

  $\frac{a}{c} \times \frac{c}{d} = \frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{bd}} \in \mathbb{Q}$

  Si $\frac{a}{b} \neq 0$(osea a≠0) y $b,\ d \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

SubCuerpos

Un subcuerpo de un cuerpo F es un subconjunto F' que es a su vez un cuerpo respecto de las operaciones + y × de F. Es decir, se verifican las siguientes condiciones:

1. $0,\ 1 \in F'$

2. $x,\ y \in F \Rightarrow x + y,\ x * y \in F'$

3. $x \in F' \Rightarrow -x \in F'$

4. $x \in F',\ x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in F'$

Ejemplos

- $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2},\ a,\ b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$

  En efecto:

  (a) $0 = 0 + 0\sqrt{2}$

  $1 = 1 + 0\sqrt{2}$

  (b) Tenemos $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$ tal que $x,\ y \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] (a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Q})$. Entonces :

  $x + y = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$

  $x.y = \left(a + b\sqrt{2}\right).\left(c + d\sqrt{2}\right) = a.c + a.d\sqrt{2} + b.c\sqrt{2} + 2\,\mathrm{bd} = (\mathrm{ac} + 2\,\mathrm{db}) + (\mathrm{ad} + \mathrm{bc})\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$

  (c) Si $x = a + b\sqrt{2} \Rightarrow -x = -a - b\sqrt{2} = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$

  (d) Cuando $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow b\sqrt{2} = -a$. Supongamos que $b \neq 0$ entonces $\exists\, b^{-1}$ y en $\sqrt{2} = -\mathrm{ab}^{-1} \in \mathbb{Q}$, absurdo. Luego, $b = 0$ y por lo tanto $a = -b\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = 0$

  Tenemos $x = a + b\sqrt{2}\ != 0$ (es decir, $a\, != 0 \vee b\, != 0$)

  $0 \neq \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2\,b^2 \to 1 = \frac{\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(a-b\sqrt{2}\right)}{a^2-2\,b^2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{a^2-2\,b^2} - \frac{b}{a^2-2\,b^2}\sqrt{2}\right)$

  $\Rightarrow x^{-1} = \frac{a}{a^2-2\,b^2} - \frac{b}{a^2-2\,b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$

Propiedades

Sea F un cuerpo:

1. El 0 es único. Si $0' \in F$ tal que $x + 0' = x = 0' + x \Rightarrow 0 = 0'$
2. El opuesto de la de $x \in F$ es único. Si $\exists y \in F$ tal que $x + y = 0 = y + x \Rightarrow y = -x$
3. EL 1 es único . Si $1' \in F$ tal que $1'.x = x = x.1' \; \forall x \in F \Rightarrow 1' = 1$
4. El inverso de $x \in F,\ x \neq 0$ es único. Si $y \in F$ tal que $x.y = 1 = y.x \Rightarrow y = x^{-1}$
5. Dados $x,\ y \in F$ se tiene que $x.y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

<u>**Demostracion**</u>:

i) Sea 0’ como en el enunciado $0 = 0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0'$

ii) Sea $y \in F$ como en el enunciado $\Rightarrow$

$= y$

{propiedad del 0}

$= y + 0$

$\{0 = x + (-x)\}$

$= y + (x + (-x))$

{Asociatividad}

$= (y + x) + (-x)$

{Como y es un opuesto de x}

$= 0 + (-x)$

{Neutro de la suma}

$= -x$

iii) Ejercicio

iv) Ejercicio

v)

$(\Longleftarrow)$ Observamos que $0.\,y = 0,\ \forall y \in F$(la constante me dice que $y.0 = 0,\ \forall y \in F$)

$0.\,y = (0 + 0).y = 0.\,y + 0.\,y$ ahora calculamos:

$= 0$

$= 0.\,y + (-(0.\,y))$

$= (0.\,y + 0.\,y) + (-(0.\,y))$

$= 0.\,y + (0.\,y + (-(0.\,y)))$

$= 0.\,y + 0$

$= 0.\,y$

$(\Longrightarrow)$Sean x,y∈F tales que x.y-0 Si x=0, ya esta. Asumamos que x≠0:

existe $x^{-1} \in F$ y por lo anterior $0 = .\, x^{-1}.0 = x^{-1}.(x.y) = (x^{-1}.x).y = 1.\,y = y$

Espacios Vectoriales

Sea K un cuerpo, V un conjunto no vacío,
$+ : V \times V \longrightarrow V$
$\cdot : K \times V \longrightarrow V$
Se dice Øque (V,+,·) es un K-espacio vectorial si

1. La suma satisface las siguientes condiciones
   - **1.1.** + es asociativo: $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall\, u, v, w \in V$
   - **1.2.** Existe $0 \in V$(el neutro) tal que $0 + v = v = v + 0$, $\forall\, v \in V$
   - **1.3.** Para cada $v \in V$, $\exists\, -v \in V$ (el opuesto) tal que $v + (-v) = 0 = (-v) + v$
   - **1.4.** + es conmutativo $v + w = w + v$, $\forall\, v, w \in V$
2. La multiplicación por escalares:
   - **2.1.** $1.\, v = v$, $\forall\, v \in V$
   - **2.2.** $a.(b.v) = (a.b).v$, $\forall\, a, b \in K$, $v \in V$
   - **2.3.** $a.(v + w) = a.v + a.w$, $\forall\, a \in K \wedge v, w \in V$
   - **2.4.** $(a + b).v = a.v + b.v$, $\forall\, a, b \in K$, $v \in V$

Los elementos de V se llaman <u>vectores</u> y los elementos de K se llama <u>escalares</u>
<u>Observación:</u> El 0 es único. Pero cada $v \in V$, $-v$ es también único

Ejemplos

1. $V = K$ es un K-espacio vectorial $(\cdot : K \times V \longrightarrow V)$
2. $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x \in K\}$ es un K-espacio vectorial con la siguientes operaciones:
   $+ : K^n \times K^n \longrightarrow K^n$, $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
   $\cdot : K \times K^n \longrightarrow K^n$, $\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$
3. Sea $Z \neq \emptyset$ conjunto cualquiera, $K^Z = \{f : Z \longrightarrow K \text{ funcion}\}$ es un espacio vectorial donde
   $+ : K^Z \times K^Z \longrightarrow K^Z$, $(f + g)(z) := f(z) + g(z)$, $\forall\, f, g \in K^Z$, $z \in Z$
   $\cdot : K \times K^Z \longrightarrow K^Z$, $(\lambda.f)(z) = \lambda.f(z)$, $\forall\, \lambda \in K$, $f \in K^Z$, $z \in Z$
   Propiedades:
   $$\text{es lo mismo } \forall\, z \in Z \begin{cases} ((f + g) + h)(z) = (f + g)(z) + h(z) = (f(z) + g(z)) + h(z) \\ (f + (g + h))(z) = f(z) + (g + h)(z) = f(z) + (g(z) + h(z)) \end{cases}$$
   Vamos a definir $0_f : Z \longrightarrow K$, $0_f(z) = 0 \Longrightarrow 0_f + f = f + 0_f = f$
   Ademas definimos para $f \in K^Z$, $-f : Z \longrightarrow K$, $(-f)(z) = -f(z)$ Vemos que es el opuesto:
   $(f + (-f))(z) = f(z) + (-f)(z) = f(z) + (-f(z)) = 0 = 0_f(z)$, $\forall\, z \in Z$
   Luego $f + (-f) = 0_f$ y de modo análogo $-f + f = 0$
   Probemos algunas de las propiedades del producto por escalares:
   $$\text{es lo mismo} \forall\, z \in Z \begin{cases} (a.(b.f))(z) = a(b.f)(z) = a(b.f(z)) \\ ((a.b).f)(z) = (a.b).f(z) \end{cases}$$
4. $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

Mas en general, si un K' es subcuerpo de K, entonces K es un K'-espacio vectorial

5. $K(X)$ es conjunto de polinomios que varia la x, es un K espacio vectorial

Propiedades

Sea V un K-espacio vectorial, $v \in V$, $c \in K$

1. $c.v = 0 \Longleftrightarrow c = 0 \vee v = 0$

   $(\Longleftarrow) 0.\ v = (0+0).v = 0.\ v + 0.\ v$ Luego:

   $0 = (0.\ v + (-0.\ v) = (0.\ v + 0.\ v) + (-0.\ v) = 0\ v + (0.\ v + (-0.\ v)) = 0.\ v + 0 = 0.\ v$

   De modo análogo, c.0=0

   $(\Longrightarrow)$Sean $v \in V$, $c \in K$ tales que $c.v = 0$. Si $c = 0$, ta esta. Asumiendo que $c \neq 0$:

   $\exists\, c^{-1} \in K$ y por lo que ya probamos

   $0 = c^{-1}.0 = c^{-1}.(c.v) = \left(c^{-1}.c\right).v = 1.\ v = v$

2. $(-1).v = -v$

   $v + (-1).v = 1.\ v + (-1).v = (1 + (-1)).v = 0.\ v = 0$

SubEspacios

Sea V en K espacio vectorial. Un subconjunto $W \subseteq V$ no vacío se dice un sub-espacio de V si la suma y el producto por escalares de W es un espacio vectorial:
Es decir:

0.1. $0 \in W$

0.2. $v, w \in W \Longrightarrow v + w \in W$

0.3. $\lambda \in K, w \in W \Longrightarrow \lambda.w \in W$

Teorema

Un subconjunto W de V no vacío es un sub-espacio $\Leftrightarrow \forall\, v, w \in W, \lambda \in K$ se tiene que $v + \lambda, w \in W$

Demostración

$(\Longrightarrow)$ Sea W in sub-espacio. Tomemos $v, w \in W$, $\lambda \in K$: por (c), $\lambda.w \in W$, y por (b), $v + \lambda.w \in W$

$(\Longleftarrow)$ Sea W un subconjunto no vacío tal que el teorema vale. Podemos tomar $u \in W$:

$u + (-1).u = u + (-u) = 0, \ \in W$

Dados $v, w \in W$, aplicamos el teorema con $\lambda = 1$:

$v + 1.\ w = v + w, \ \in W$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, a coeficientes en un cuerpo K es un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + a_{1,3}\,x_3 + \ldots + a_{1,n}\,x_n = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + a_{2,3}\,x_3 + \ldots + a_{2,n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + a_{n,3}\,x_3 + \ldots + a_{n,n}\,x_n = b_n \end{cases} \Big\} a_{i,j},\ b_i \in K$$

Cada n-upla $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in K$ que satisfaga todas las ecuaciones se dice solución

Si $b_i = b_2 = \ldots = b_n = 0$, el sistema se dice homogéneo

Observación: El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es un espacio de K^n

Demostración: $m = 1$: $w = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in K^n$ es un sub-espacio $W \neq 0$ ya que $(0,\ \ldots,\ 0) \in W$

Sean $v = (x_1,\ \ldots,\ x_1)$, $w = (x'_1,\ \ldots,\ x'_n) \in W$ para cada $\lambda \in K$,

$v + \lambda \mathrm{W} = (x_1 + \lambda\, x'_1,\ \ldots,\ x_n + \lambda \mathrm{x}'_1) \in W$ ya que

$a_1(x_1 + \lambda \mathrm{x}'_1) + \ldots + a_n(x_n + \lambda \mathrm{x}'_n) = (a_1\,x_1 + \ldots + a_n\,x_n) + \lambda(a_1\,x'_1 + \ldots + a_n\,x'_n)$

Equivalencia

Dos sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas se dicen equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones

Operaciones que nos dan sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

- Intercambiar el orden de las ecuaciones

  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 - 3\,x_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 - 3\,x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

- Reemplaza una ecuación por ella misma multiplicada por un escalar $\neq 0$
- Reemplazar la I-ésima ecuación por ella misma mas la j-ésima ecuación multiplicada por un escalar

  $a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,n}\,x_n = b_i \longrightarrow (a_{\mathrm{i}1} + \mathrm{c}a_{\mathrm{j}1})\,x_1 + \ldots + (a_{i,n} + a_{j,n})\,x_n = b_i + \mathrm{c}b_j$

- Quitar o agregar una ecuación trivial $(0 = 0)$

Matrices

Una matriz $m * n$ sobre un cuerpo K es una función $A : \langle (i,\ j)\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \rangle \longrightarrow K$. Se representa mediante un arreglo rectangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Cada elemento $a_{i,j}$ se dice la entrada $(i,\ j)$. El conjunto de todas las matrices se denota $M_{m*n}(K)$

Equivalencia

Dos matrices A y B son equivalentes por fila si B se obtiene de A luego de un numero finito de operaciones elementales por fila

<u>Observación</u>

- $A \sim B$ entonce los sistemas homogéneos asociados A y B son equivalentes
- <u>"Equivalente por fila"</u>: es una relación de equivalencia
  - $A \sim A$ (reflectiva)
  - $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ (simétrica)
  - $A \sim B$ y $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (transitiva)

Sistema Homogéneo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Este sistema se representa como $A \cdot X = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sistema no Homogéneo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Este sistema se representa con una matriz ampliada

$$(A \quad | \quad b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & | & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales por fila

- Intercambiar dos filas
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo
- cambiar la fila i por ella misma mas la fila j multiplicada por un escalar

Matrices escalonadas reducida por filas

Una matriz se dice escalonada reducida por filas si

1. El primer elemento no nulo de cada fila no nula sea = 1
2. cada columna que tiene un 1 como en (1.)
3. La filas nulas estén todas al final
4. Si las filas 1, …, V son los no nulas, con el 1 en las posiciones $k_1, \ldots, k_r \Rightarrow k_1 < k_2 < \ldots < k_r$

Método de eliminación Gaussiana (caso homogéneo)

Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,n}\,x_n = 0 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,n}\,x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \ldots + a_{m,n}\,x_n = 0 \end{cases}$$

Sea A la matriz des sistema. Por lo visto, entre una matriz B escalonada reducida por filas, $A \sim B$

Luego, B tiene las primeras v filas no nulas y casa una de ella tiene un 1 en la entrada $b_{j,s_j} = 1$

$$\begin{cases} x_{s_1} + \sum_{i \neq s_1,\ldots,s_j} b_{1\,i}\,x_i = 0 \longrightarrow x_{s_1} = -\sum_{i \neq s_1,\ldots,s_j} b_{1,i}\,x_i \\ x_{s_2} + \sum_{i \neq s_1,\ldots,s_j} b_{1\,i}\,x_i = 0 \longrightarrow x_{s_1} = -\sum_{i \neq s_1,\ldots,s_j} b_{2\,i}\,x_i \\ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow x_{s_r} = -\sum_{i \neq s_1,\ldots,s_j} b_{\mathrm{ri}}\,x_i \end{cases}$$

Caso No Homogéneo

Tomo la matriz ampliada

Operaciones con matrices

Suma y multiplicación por escalares de matrices

$+ : K^{m*n} \times K^{m*n} \to K^{m*n}$, $(A+B)_{\mathrm{ij}} = A_{\mathrm{ij}} + B_{\mathrm{ij}}$; $A,\ B \in K^{m*n}$

$\cdot : K \times K^{m*n} \to K^{m*n}$, $(\lambda \cdot a)_{\mathrm{ij}} = \lambda \cdot A_{\mathrm{ij}}$; $\lambda \in K$, $A \in K^{m*n}$

Producto de matrices

Sea $A \in K^{m*n}$, $B \in K^{n*p}$ El producto de A con B es la matriz $C \in K^{m*p}$ dado por

$$c_{\mathrm{ij}} = \sum_{k=1}^{n} a_{\mathrm{ik}}\,b_{\mathrm{kj}};\ \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p \end{array}$$

Propiedades

- Asociatividad: $A \in K^{m*n}$, $B \in K^{n*p}$, $C \in K^{p*r} \Rightarrow (A.B).C = A.(B.C)$

  Demostración:

  Para cada $1 \le i \le m$; $1 \le j \le r$

  $$[(\mathrm{AB})\,C]_{\mathrm{ij}} = \sum_{k=1}^{p} (\mathrm{AB})_{\mathrm{ik}}\,C_{\mathrm{kj}} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} A_{\mathrm{ij}}\,B_{\mathrm{lk}}\right) C_{\mathrm{kj}}$$

  $$[A(\mathrm{BC})]_{\mathrm{ij}} = \sum_{l=1}^{n} A_{\mathrm{il}}(\mathrm{BC})_{\mathrm{lj}} = \sum_{l=1}^{n} A_{\mathrm{il}}\left(\sum_{k=1}^{p} B_{\mathrm{lk}}\,C_{\mathrm{kj}}\right)$$

Notemos que $[(AB)\,C]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} A_{il}\, B_{lk}\, C_{kj} = [A(BC)]_{ij}$ para todo par $1 \le i \le m$; $1 \le j \le r$

- <u>Identidad:</u> $A \in K^{m*n}$, $\mathrm{Id}_m.A = A = A.\mathrm{Id}_n$

  <u>Demostración:</u>

  Para cada $1 \le i \le m$ y cada $q \le j \le n$:

  $$(\mathrm{Id}_m\, A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (\mathrm{Id}_m)_{ik}\, A_{kj} = 0\,A_{1\,j} + \ldots + 1_i\, A_{ij} + 0.\,A_{(i+1)\,j} + \ldots = A_{ij}$$

  <u>Ejemplo:</u>

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.1 & 1.\,(-1) + 0.3 & 1.2 + 0.7 \\ 0.1 + 1.0 & 0.\,(-1) + 1.3 & 0.2 + 1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- <u>Distributividad:</u> $\begin{array}{l} A,\, A' \in K^{m*n};\ (A + A')\, B = AB + A'\, B \\ B,\, B' \in K^{n*p};\ A(B + B') = AB + AB' \end{array}$

  <u>Demostración:</u>

  Para cada $1 \le i \le m$; $1 \le j \le p$, se tiene:

  $$[(A + A')\, B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A + A')_{ik}\, B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik} + A'_{ik})\, B_{kj}$$
  $$[(A + A')\, B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj} + A'_{ik}\, B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A'_{ik}\, B_{kj} = (AB + A'\, B)_{ij}$$

  Entonces:

  $$(A + A')\, B = AB + A'\, B$$

- <u>Conmutación con escalares:</u> $A \in K^{m*n}$, $B \in K^{n*p}$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda.(A.B) = A.(\lambda.B)$

  <u>Demostración:</u>

  Para cada $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p$:

  $$[\lambda(AB)_{ij}] = \lambda(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda.A_{ik}\, B_{kj}$$
  $$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda.A_{ik})\, B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda.A)_{ik}\, B_{kj} = [(\lambda.A)\, B]_{ij}$$

<u>Observación:</u>

1) El producto de matrices no es conmutativo, incluso entre matrices cuadradas
2) Existen matrices $A \in K^{2*2}$ tales que $A \neq 0$, $B \neq 0$ pero $A.B = 0$

<u>Observación:</u> $(K^{n*m}, +, \cdot)$ es un anillo con unidad

<u>Motivación:</u> En K, $ax = b$, $a \neq 0$, tiene solución única $x = a^{-1}\, b$

$$\begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + \ldots + a_{1\,n}\, x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + \ldots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matrices Elementales y operaciones por fila

Una matriz $E \in K^{n*n}$ se dice elemental si se obtiene de realizar una operación elemental por fila a la matriz de identidad.

Tipos

1. Intercambiar la fila r y s: $\left(e^{(r,s)}\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \neq r,\ s \\ 1 & i = v,\ j = s \vee i = s,\ j = r \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \Bigg\} \longrightarrow e^{(r,s)} = \mathrm{Id}_n - E^{r,r} - E^{s,s} + E^{s,r} + E^{r,s}$

2. Multiplicar la fila r pot un escalar $(c \in K,\ c \neq 0)$: $\left(e_c^{(r)}\right) = \begin{cases} 1 & i = j \neq r \\ 0 & i = j = r \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Bigg\} \longrightarrow e_c^{(r)} = \mathrm{Id}_n - E^{rr} + c \cdot E^{r,r}$

3. Sumar a la fila s, la fila r multiplicada por un escalar:

$$\left(e_c^{(s,r)}\right) = \begin{cases} 1 & i = j \\ c & i = j,\ j = r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \Bigg\} \longrightarrow e_c^{(s,r)} = \mathrm{Id}_n + c \cdot E^{s,r}$$

Teorema

Sea E una operación elemental por filas, $E : L^{m*n} \longrightarrow K^{m*n}$

Sea e la correspondiente matriz elemental, o sea $e = E(\mathrm{Id}_m)$

Demostración:

Usaremos el siguiente resultado:

$$\textbf{Af}: E^{\mathrm{rs}} A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{\mathrm{s1}} & \dots & a_{\mathrm{sn}} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; 1 \leq r,\ s \leq \mathrm{rn}$$

Demostramos la Af:

$$(E^{\mathrm{rs}})_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} 1 & i = r,\ j = s \\ 0 & 1 \neq r \vee j \neq s \end{cases}$$

Si $i \neq r,\ 1 \leq j \leq n$

$$(E^{\mathrm{rs}} A)_{\mathrm{rj}} = \textstyle\sum_{k=1}^{m} (E^{\mathrm{rs}})_{\mathrm{rk}} A_{\mathrm{kj}} = A_{\mathrm{sj}}$$

Ahora, probamos el teorema para cada una de las operaciones elementales por fila:

a) <u>Intercambiar las filas r y s</u>

$e^{(r,s)} A = (\mathrm{Id}_m - E^{\mathrm{rr}} - E^{\mathrm{ss}} + E^{\mathrm{rs}} + E^{\mathrm{sr}})\, A$

$= \mathrm{Id}_m A - E^{\mathrm{rr}} A - E^{\mathrm{ss}} A + E^{\mathrm{rs}} A + E^{\mathrm{sr}} A$

$= \{\mathrm{Af}\}$

$$= A - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \text{Fila } r \text{ de } A & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \text{Fila } s \text{ de } A & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \text{Fila } s \text{ de } A & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \text{Fila } r \text{ de } A & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b) <u>Multiplicar la fila r por un escalar($c \neq 0$)</u>

$e_c^{(r)} A = (\mathrm{Id}_m - E^{\mathrm{rr}} + \mathrm{eE}^{\mathrm{rr}})\, A$

$= \mathrm{Id}_m A - E^{\mathrm{rr}} A + c(E^{\mathrm{rr}} A)$

$$= A \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ A_{\mathrm{r1}} & \dots & A_{\mathrm{rn}} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ c.A_{\mathrm{r1}} & \dots & c.A_{\mathrm{rn}} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$= E(A)$

c) <u>Sumarle a la fila s la fila r multiplicada por un escalar</u>

$$
\begin{aligned}
e_c^{(s,r)}\, A &= (\mathrm{Id}_m + c.E^{sr})\, A \\
&= A + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ c.A_{r1} & \dots & c.A_{rn} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= E(A)
\end{aligned}
$$

Corolario:

$A \sim B$ (equivalentes por fila) $\Leftrightarrow b = \mathrm{PA}$, donde P es producto de matrices elementales

Matrices Inversibles

Una matriz $A \in K^{n*n}$ es inversible si existe $B \in k^{n*n}$ tal que $A.B = \mathrm{Id}_n = B.A$ tal matriz B se denotaría A^{-1}

Proposición:

a) Id_n es inversible: $(\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$

b) Si A es inversible, entonces A^{-1} también lo es: $(A^{-1})^{-1} = A$

c) Si A, B son inversibles, entonces AB también lo es: $(\mathrm{AB})^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$

Corolario: El producto de matrices invesibles es inversible: $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_1^{-1} \cdot \ldots \cdot A_k^{-1}$

Demostraciones:

a) y b) son inmediata a partir de la definición de matriz inversa

Pero c) calculamos:

$$(A.B)\,(B^{-1}\, A^{-1}) = A(\mathrm{BB}^{-1})\, A^{-1} = A.\mathrm{Id}_n\, A^{-1} = A.A^{-1} = \mathrm{Id}_n$$

Teorema

Toda matriz elemental es inversible.

Demostración

Sea e una matriz elemental se e' la matriz elemental que corresponde a la operación elemental por filas inverso de la operación correspondiente a e. Por el teorema anterior , para cada matriz $A \in K^{n*n}$,

$e.A = E(A)$(Hacerle a A la reacciona elemental por filas de e)

$e'\, A = E'\,(A)$(Hacerle a A' la operación elemental por filas de e')

calculamos

$$e.e' = e(e'\, \mathrm{Id}_n) = E(e'\, \mathrm{Id}_n) = E(E'\,(\mathrm{id}_n)) = \mathrm{Id}_n$$

y de modo análogo $e'\, e = \mathrm{Id}_n$

Teorema

Sea $A \in K^{n*n}$ son equivalentes:

i) A es inversible

ii) A es equivalente por filas a Id_n

iii) A es un producto de matrices elementales

Álgebra lineal

Dependencia Lineal

V es un K-espacio vectorial, dados $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ subconjunto, una combinación lineal del conjunto es una suma de la forma:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_{1,} \ldots, \lambda_2 \in K$

Un conjunto

$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$

se dice linealmente dependiente si existe una combinación lineal que da cero de manera no obvia, o sea, $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ no todos nulos, tales que

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$

Observación:

Si 0 esta en el conjunto, automáticamente es linearmente dependiente

Independencia lineal

Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ se dice linealmente independiente si no es linealmente dependiente

Bases

V es un k-e.v., una base B es una subconjunto de V que satisface

1. B genera a V, $\langle B \rangle = V$
2. B es linealmente independiente.

Base canónica

$\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq k^n$ es la base canónica. Funciona para todo los casos

Teorema

$\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq K^n$ es base $\Leftrightarrow$ la matriz $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} v_n \\ \downarrow \end{pmatrix}$ es inversible

Demostración:

$\Rightarrow$) si es base, generan, o sea para todo $(w_1, \ldots, w_n) \in K^n$ el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix}$$

tiene soluciona $\Rightarrow$ A es inversible.

$\Leftarrow$) 1) generan, Ya que tienen soluciona siempre

2) son linealmente independientes

Teorema

V un K-ev ,$\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ generadores y $\{w_1, \ldots w_m\} \subseteq V$ l.i. entonces $n \geq m$.

Demostración:

Como $\{v_1, \ldots, v_2\}$ genera V, dado w_i se escribe como combinación linear

$$w_1 = a_{1,1}\, v_1 + a_{2,1}\, v_2 + \ldots + a_{n,1}\, v_n;\ a_{1,1}, \ldots, a_{n,1} \in K$$

$$w_2 = a_{1,2}\, v_1 + a_{2,2}\, v_2 + \ldots + a_{n,2}\, v_n;\ a_{1,2}, \ldots, a_{n,2} \in K$$

$$\ldots$$

$$w_m = a_{1,m}\, v_2 + a_{2,m}\, v_m + \ldots + a_{n,m}\, v_n;\ a_{1,m}, \ldots, a_{n,m} \in K$$

$A \in M_{n*m}(K)$ si $n < m$, el sistema

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene alguna solución no trivial, $(b_1, \ldots, b_m)$ solución. Como $(b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ y los $\{w_1, \ldots, w_m\}$ son l.i.

$$\begin{aligned} 0 \neq w &= b_1\, w_1 + b_2\, w_2 + \ldots + b_m\, w_m \\ &= b_1(a_{1,1}\, v_1 + a_{2,1}\, v_2 + \ldots + a_{n,1}\, v_n) + \\ &\quad b_2(a_{1,2}\, v_1 + a_{2,2}\, v_2 + \ldots + a_{n,2}\, v_n) + \ldots + b_m(a_{1,m}\, v_1 + a_{2,m}\, v_2 + \ldots + a_{n,m}\, v_n) \\ &= v_1(b_1\, a_{1,1} + b_2\, a_{1,2} + \ldots + b_m\, a_{1,m}) + v_2(b_1\, a_{2,1} + b_2\, a_{2,2} + \ldots + b_m\, a_{2,m}) + \\ &\qquad \ldots + v_n(b_1\, a_{n,1} + b_2\, a_{n,2} + \ldots + b_m\, a_{n,m}) = (0, \ldots, 0) \text{ Absurdo} \end{aligned}$$

$\therefore$:Luego $n \geq m$

Corolario

Si B es un K-ev y B_1, B_2 son bases finitas de V entonces tienen la misma cantidad de elementos

Demostración:

$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Como B es base generan, como B_2 es base, son l.i. $\Rightarrow n \geq m$

$B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Como B_2 es base generan, como B_1 es base, son lo

Dimensión de un espacio vectorial

si V es un K-ev con finitos generadores, definimos su dimensión como el numero de vectores que tiene cualquier base dim (v)

Proposición

Si V es un K-ev y $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$

Demostración:

$B = \{v_1, \ldots, v_n\} \longrightarrow$ son $l.i.$ $\begin{matrix} \text{si} & \{v_1, \ldots, v_n\} \\ \text{no} & \text{por vale existe} \end{matrix}$

$v_i =$ combinacion lineal o no

Proposición

$W \subseteq V$ sub-espacio de V, $S \subseteq W$ un conjunto l.i.
Si W es de dimensión finita$\Longrightarrow$S es finito y se puede extender una base si $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$, existen $v_{r+1}, \ldots, v_n \in W$ tales que

$\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de W

Proposición

Sea V un espacio de dimensión finita, S un conjunto de generadores de V. Entonces $\exists\, G \subseteq S$ que es base de V

Suma de sub-espacios

Sean U, W sub-espacios de V. La suma de U y W es el conjunto $U + W = \langle u + w : u \in U, w \in W\rangle$

Proposición

i) $U + W$ es un sub-espacio de V
ii) $U + W$ es el menor sub-espacio (con la inclusión) que contiene a U y W.
iii) Si $\langle u_i \rangle$ $i \in I$ y $\langle w_j \rangle$ $j \in J$ generadores de U y W respectivamente, entonces $\langle u_i \rangle \cup \langle w_j \rangle$ es un conjunto de generadores de U+W

Demostración:
i) Como U y W son sub-espacios, $0 \in U$, $0 \in W \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in U + W$
Así, $U + W \neq \varnothing$. Sean v, $v' \in U + W$, $\lambda \in K$, queremos ver que $v + \lambda v' \in U + W$.
Como v, $v' \in U + W$, existen u, $u' \in U$, w, $w' \in W$ tales que $v = u + w$, $v' = u' + w'$

$v + \lambda v' = (u + w) + \lambda(u' + w') = (u + \lambda u') + (w + \lambda w')$

$(u + \lambda u') \in U$ porque U es sub-espacio

$(w + \lambda w') \in W$ porque W es sub-espacio

Luego $v + \lambda v' \in U + W$
Así, $U + W$ es sub-espacio

ii) Para cada $u \in U : u = u + 0 \in U + W$ ya que $0 \in W$
Luego, $U \subseteq U + W$. De modo análogo, $W \subseteq U + W$
Sea Y un sub-espacio de V que contiene a U y W. Queremos ver que $U + W \subseteq Y$
Sea $v \in U + W$: por definición, $\exists\, u \in U,\ w \in W \mid v = u + w$. Como $U \subseteq Y$, $W \subseteq Y$, Se tiene que u, $w \in Y$: como es sub-espacio, $v = u + w \in Y$.
Luego, $U + W \subseteq Y$
1
iii) Ejercicio

Teorema

Sean $U,\ W \subseteq V$ sub-espacios de dimensión finita
Entonces, $U+W$ es de dimensión finita y

$$\star\ \dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$$

Demostración:
Como U y W tienen dim finita, $\exists\, S_u\ y\ S_w$ son conjuntos finitos de generadores de U y W, respectivamente. Por la parte (iii),
$S=S_u\cup S_w$ genera a $U+W$. Como S es finito(unión de conjuntos finitos) se tiene que $U+W$ es de dimensión finita.
Si $U=0$, entonces $U+W=W,\ U\cap W=0 \Rightarrow$ vale $\star$. Lo mismo si $W=0$.
Asumimos que $U,\ W\neq 0$. Sea $\{v_1,\ \ldots v_r\}$ una base de $U\cap W$. $\dim(U\cap W)=r$
Como $\{v_1,\ \ldots,\ v_r\}\subseteq U$ es l.i., existen $u_{r+1},\ \ldots,\ u_m\in U$ tales que $\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ u_{r+1},\ \ldots,\ u_m\}$ es una base de U: $\dim(U)=m$.
Análogamente, $\{v_1,\ \ldots v_r\}\subseteq W$ y es l.i., luego existen $w_{r+1},\ \ldots,\ w_n\in W$ tales que $\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ w_{r+1},\ \ldots,\ w_n\}$ es una base de W: $n=\dim(W)$
Afirmación: $B=\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ u_{r+1},\ \ldots,\ u_m,\ w_{r+1},\ \ldots,\ w_n\}$ es una base de $U+W$
Veamos que B genera a $U+W$. Sea $v\in U+W:\ v=u+w$, con $u\in U,\ w\in W$.
Como $\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ u_{r+1},\ \ldots,\ u_m\}$ es base de U: $u=\sum_{i=1}^{r} a_i\, v_i+\sum_{i=r+1}^{m} a_i\, u_i$
Como $\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ w_{r+1},\ \ldots,\ w_n\}$ es base de W: $W=\sum_{i=1}^{r} b_i\, v_i+\sum_{i=r+1}^{n} b_{\mathrm{iw}_i}$
Entonces:

$$v=\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\, v_i+\sum_{i=r+1}^{m} a_i\, u_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{r} b_i\, v_i+\sum_{i=r+1}^{m} b_i\, w_i\right)=\sum_{i=1}^{r}(a_i+b_i)\, v_i+\sum_{i=r+1}^{m} a_i\, u_i+\sum_{i=r+1}^{m} b_i\, w_i;\in\langle B\rangle$$

Luego, $U+W=\langle b\rangle$
Veamos que B es l.i. Sean $a_i,\ b_j,\ c_k\in K$ tales que

$$0=\sum_{i=1}^{r} a_i\, v_i+\sum_{j=r+1}^{m} b_j\, u_j+\sum_{k=r+1}^{n} c_k\, w_k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i\, v_i+\sum_{j=r+1}^{m} b_j\, u_j=\sum_{k=r+1}^{n} -c_k\, w_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=r+1}^{n} -c_k\, w_k\in\ U\cap W$$

Como $\{v_1,\ \ldots,\ v_r\}$ es una base de $U\cap W$, $\exists\, d_i\in K:\sum_{k=r+1}^{n} -c_k\, w_k=\sum_{i=1}^{r} d_i\, v_i$

$\longrightarrow 0=\sum_{i=1}^{r} d_i\, v_i+\sum_{k=r+1}^{n} c_k\, w_k$. Como $\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ w_{r+1},\ \ldots,\ w_n\}$ es l.i.

$\Longrightarrow d_i=\ldots=d_r-0=c_{r+1}=\ldots=c_n$ reemplazando: $\sum_{i=1}^{r} a_i\, v_i+\sum_{j=r+1}^{m} b_j\, u_j=0$

Como $\{v_1,\ \ldots,\ v_r,\ u_{r+1},\ \ldots,\ u_m\}$ es l.i $\Longrightarrow a_1=\ldots=a_r=0=b_{r+1}=\ldots=b_m=0$
Ahora: $\dim(U+W)=\ |B|\ =r+(m-r)+(n-r)=m+n-r$

Como pasar de conjunto de generadores a soluciones de un sistema homogéneo

Trabajemos con U: $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)\in U \Leftrightarrow \exists\, x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ tales que
$(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$

$$=x_1(1,\ 1,\ 0,\ 1)+x_2(2,\ 3,\ 1,\ 1)$$

$$=(x_1,\ 2x_2,\ x_1+3x_2,\ x_2,\ x_1+x_2)\Leftrightarrow \exists\, x_1,\ x_2\ \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2=b_1\\ x_1+3x_2=b_2\\ x_2=b_3\\ x_1+x_2=b_4\end{array}\right\}\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1\\ 1 & 3 & b_2\\ 0 & 1 & b_3\\ 1 & 1 & b_4\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & b_1 \\ 1 & 3 & | & b_2 \\ 0 & 1 & | & b_3 \\ 1 & 1 & | & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 - f_1]{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & b_1 \\ 0 & 3 & | & b_2 - \mathrm{b1} \\ 0 & 1 & | & b_3 \\ 0 & 1 & | & b_4 - b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 + f_2]{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & b_1 \\ 0 & 1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & | & b_3 - b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & | & b_2 + b_4 - 2b_1 \end{pmatrix}$$

$$(b_{1,} b_2, b_3, b_4) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} b_3 - b_2 + b_1 = 0 \\ b_2 + b_4 - 2b_1 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Hallar un sistema de generadores de $U \cap W \in \mathbb{R}^3$ donde

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$

$W = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$

Expresamos W como soluciones de un sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & | & b_1 \\ 1 & 7 & | & b_2 \\ 0 & 3 & | & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & | & b_1 \\ 0 & 2 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 3 & | & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & | & b_1 \\ 0 & 2 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & | & b_3 - b_2 + b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1 - 5f_3]{f_2 - 2f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -4b_1 + 5b_2 - 5b_3 \\ 0 & 0 & | & 3b_2 - 3b_1 - 2b_3 \\ 0 & 1 & | & b_3 - b_2 + b_1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$W = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3b_2 - 3b_1 - 2b_3 = 0\}$

De -

$U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0,\ 3y - 3x - 2z = 0\}$

Vamos a obtener generadores del espacio de soluciones de este sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1/3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + \frac{2}{3} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Luego, $U \cap W = \left\{ \left(\frac{1}{3} z, z, z \right) z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\left(\frac{1}{3}, 1, 1 \right) z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(\frac{1}{3}, 1, 1 \right) \right\rangle$

Suma directa

Sean U, W dos sub-espacios de V. Decimos que C es la suma directa de U y W si $V = U + W$, $U \cap W = 0$.

Se denota

$V = U \oplus W$

Proposición: Si $V = U \oplus W$, entonces cada $v \in V$ se escribe como $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$ de modo único

Demostración: Del hecho que $V = U + W$ se sabe que cada $v \in V$ se escribe como $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$, veamos la unicidad.

Fijemos $v \in V$, y dos escrituras

$u + w = u' + w';\ u, u' \in U,\ w, w' \in W \Rightarrow u - u' = w' - w$

Como ambos lados de la igualdad corresponden a los dos conjuntos el resultado debe existir en $U \cap W$ pero este es igual a $\{0\}$

Luego, $u = u'$ y $w = w'$

Transformaciones lineales

Sean V, W dos $\mathbb{K}$-ev . Una transformación lineal de V en W es una función $f: V \longrightarrow W$ tal que

a) $f(v+v') = f(v) + f(v')$; $v, v' \in V$

b) $f\left(\lambda \underset{V}{\cdot} v\right) = \lambda \underset{W}{\cdot} f(v)$; $\forall c \in V$, $\lambda \in K$ (son operaciones de distintos sub-espacios)

Observación: Si $f: V \longrightarrow W$ es una transformacional lineal, entonces $f(0_v) = 0_w$ y $f(-v) = -f(v)$, $\forall v \in V$

Demostración:

$f(0_v) = f(0_v + 0_v) = f(0_v) + f(0_v) \Longrightarrow 0_w = f(0_v)$

O

$f(0_v) = (0 \cdot 0_v) = 0 \cdot f(0_v) = 0_w$

Vemos que vale la propiedad del opuesto

$f(-v) = f((-1)\cdot v) = (-1).f(v) = -f(v)$

Proposición:

Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformación lineal

a) Si U es un sub-espacio de V $\Rightarrow f(U)$ es un subespacio de W

b) Si Z es un sub-espacio de W $\Rightarrow f^{-1}(Z)$ es un subespacio de V

Demostración:

a) Como $U \neq \emptyset \Rightarrow f(U) \neq \emptyset$. Sean $w, w' \in f(U): \exists\, u, u' \in U$ tales que $w = f(u)$, $w' = f(u')$ Entonces para cada $\lambda \in K$

$w + \lambda \cdot w' = f(u) + \lambda \cdot f(u') = f(u) + f(\lambda \cdot u') = f(u + \lambda \cdot u')$

Como U es un sub-espacio, $u + \lambda u' \in U$ Luego $w + \lambda \cdot w' = f(y + \lambda \cdot u') \in f(U)$

por el teorema que caracterizaba sub-espacios, $f(U)$ es un subespacio de W

b) Como $f(0_v) = 0_w \in Z$, se tiene que $0_v \in f^{-1}(Z)$.

Sean $v, v' \in f^{-1}(Z)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Por definición, $f(v)$, $f(v') \in Z$ como X es un sub-espacio,

$f(v) + \lambda \cdot f(v') \in Z$

Como f es un a transformación Lineal,

$f(v) + \lambda \cdot f(v') = f(v + \lambda \cdot v') \Rightarrow v + \lambda \cdot v' \in f^{-1}(Z)$.

Luego, por el mismo teorema, $f^{-1}(Z)$ es un sub-espacio de V

Vector de coordenadas

Proposición: Sea v un k-ev de dimensión finita, $n = \dim(v)$.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Para cada $x \in V$, existen únicos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ taels que

$x = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$

Definición: El vector $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ se dice el vector de coordenadas de x en la base B

Se lo denota:

$(x)_B$

Demostración:

Sea $x \in V$. Como B genera a V, se deduce que existen tales $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ que refieren

$x = \sum_{i=1}^{n} a_1 v_1$

Supongamos que existen $b_1, \ldots b_n \in \mathbb{K}$ tales que

$x = \sum_{i=1}^{n} b_i\, v_i$

$0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i - b_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\, v_i$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i., se tiene $a_i - b_i = 0; \forall\, i = 1, \ldots, n \Rightarrow a_i = b_i; \forall\, i = 1, \ldots, n$

Observación:

$$\left.\begin{array}{r} (v + v')_B = (v)_B + (v')_B \\ (\lambda \cdot v)_B = \lambda \cdot (v)_B \end{array}\right\} \forall\, v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{K}$$

Es decir, $(\cdot)_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es una transformación lineal

Demostración:

Fijamos $v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{K}$. LLamemos, $(a_1, \ldots, a_n) = (v)_B$, $(b_1, \ldots, b_n) = (v')_B$

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i,\ v' = \sum_{i=1}^{n} b_i\, v_i$

$v + v' = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\, v_i$

$v + v' = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\, v_i$

$\therefore (v + v')_B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (v)_B + (v')_B$

Ahora, $\lambda \cdot v = \lambda \cdot (\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot (a_i\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_i) \cdot v_i)$

$\therefore (\lambda \cdot v)_B = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots, \lambda \cdot a_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n) = \lambda \cdot (v)_B$

Teorema

V, W dos k-ev, $\dim(V) = n < \infty$. Sean $b = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de B y $w_1, \ldots, w_n \in W$ arbitrarios. Entonces existe una única transformación lineal

$f : V \longrightarrow W$ tal que $f(v_i) = w_i$

Demostración: Para la unicidad, veamos que para cada $v \in V$, $f(v)$ tiene un único valor posible.

Como B es una base de B, podemos escribir $a \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i$(de modo único)

Si existe f, $f(v) = f(\sum_{i=0}^{n} a_i\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i$

Para la existencia, definimos la función $f : V \longrightarrow W$, $f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i$, donde $(a_1, \ldots, a_n) = (v)_B$

Para cada $i \in \{1, \ldots \mathrm{n}\}$, $v_i = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \ldots + 1\, v_i + 0\, v_{i+1} + \ldots \Longrightarrow (v_i)_B =$

$$(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0) \longrightarrow f(v_i) = 0\, w_1 + 0\, w_2 + \ldots + 1\, w_i + 0\, w_{i+1} + \ldots = w_i$$

Veamos que f es una transformación lineal.

Fijemos $v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

Escribimos $(v)_B = (a_1, \ldots, a_n)$, $(v')_B = (b_1, \ldots \mathrm{b}_n) \longrightarrow (\lambda \mathrm{v})_B = (\lambda \cdot a_1, \ldots, \lambda \cdot a_n)$

$(v + v')_B = (a_i + b_i, \ldots, a_n + b_n)$

$f(v + v') = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)\, w_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\, w_i = f(v) + f(v')$

$f(\lambda \cdot v) = \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i\, w_i = \lambda(\sum_{i=0}^{n} a_i\, w_i) = \lambda \cdot f(v)$

Luego, f es una transformación lineal tal que $f(v_i) = w_i, \forall\, i = 1, \ldots, n$

Aplicación:

Decidir si existe transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$f(1, 1, 0) = (4, 3, 5)$, $f(0, 1, 2) = (2, 3, 1)$

Notemos que $\{(1,1,0),(0,1,2)\}$ es l.i.

Podemos extenderlo a una base

$B=\{1,1,0),(0,1,2),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

Usando el Teorema; $\exists f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$f(1,1,0)=(4,3,5)$

$f(0,1,2)=(2,3,1)$

$f(0,1,0)=(1,3,2)$

Entonces $f(x,y,z)=?$

$$(x,y,z)=a(1,1,0)+b(0,1,2)+c(0,1,0)=(a,a+b+c,2b)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a=x\\ b=\frac{z}{2}\\ c=y-x-\frac{z}{2}\end{array}\right.$$

$(x,y,z)=x(1,1,0)+\frac{z}{2}(0,1,2)+\left(y-x-\frac{z}{2}\right)\cdot(0,1,0)$

$f(x,y,z)=x\cdot f(1,1,0)+\frac{z}{2}\cdot f(0,1,2)+\left(y-x-\frac{z}{2}\right)f(0,1,0)$

$f(x,y,z)=\left(4x+\frac{z}{2}2+\left(y-x-\frac{z}{2}\right)1,\ 3x+3\frac{z}{2}+3\left(y-x-\frac{z}{2}\right),\ 5x+\frac{z}{2}+2\left(y-x-\frac{z}{2}\right)\right)$

$\left(3x+\frac{z}{2}+y,\ 3y,\ 3x+2y-\frac{z}{2}\right)$

Núcleo e imagen de la transformaciones lineales

Sean V, W dos $\mathbb{K}$-ev, $f:V\longrightarrow W$ una transformación lineal.

El núcleo de f es el conjunto $\begin{array}{c}\text{Nu}\\ \text{Ker}\end{array}(f)=\{v\in V;\ f(v)=0\}=f^{-1}(0)$

Observaciones: $\text{Nu}(f)$ es un sub-espacio de V. También, $\mathbb{I}\text{m}(f)$ es un subespacio de W

Nombres

$f:V\longrightarrow W$ una transformación lineal

a) f se dice un monomorfismo si es inyectiva

b) f se dice un epimorfismo si es suryectiva

c) f se dice un isomorfismo si es biyectiva

Proposición: $f:V\longrightarrow W$ transformación lineal.

Entonces f es un monomorfismo $\Leftrightarrow \text{Nu}(f)=0$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ asumimos que f es inyectiva.

Recordar que $f(0)=0$. Si $v\in\text{Nu}(f)$ entonces $f(v)=0$ y como f es inyectiva, v=0.

Luego $\text{Nu}(f)=0$

$(\Leftarrow)$ Asumimos que $\text{Nu}(f)=0$.

Sean $v,v'\in V$ tales que $f(v)=f(v')$. Luego

$0=f(v)-f(v')=f(v-v')\Rightarrow v-v'\in\text{Nu}(f)=0$

Luego $v=v'$. Así f es inyectiva

Proposición: Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de V, entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$

Demostración: Tenemos que probar $\mathrm{Im}(f) = \langle\langle f(v_1), \ldots, f(v_n)\rangle\rangle$

$\subseteq$) Si $w \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists\, v \in V$ tal que $f(v) = w$. Como $\langle v_1, \ldots v_n\rangle$ generan a V, $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : w = f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \in \langle\langle f(v_1), \ldots, f(v_n)\rangle\rangle$

$\supseteq$) Ejercicio

Composición e inversa de transformaciones lineales

Sean V, W, Z $\mathbb{K}$-ev, $f: V \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales.
Entonces $g \circ f: V \longrightarrow Z$ es una transformación lineal

Demostración: Tomemos $v, v' \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$= g \circ f(v + v')$$
$$= g(f(v + v'))$$
$$= g(f(v) + f(v'))$$
$$= g(f(v)) + g(f(v'))$$
$$= g \circ f(v) + g \circ f(v')$$

Luego la multiplicación por escalares

$$= g \circ f(\lambda \cdot v)$$
$$= g(f(\lambda \cdot v))$$
$$= g(\lambda \cdot f(v))$$
$$= \lambda \cdot g(f(v))$$
$$= \lambda \cdot g \circ f(v)$$

Proposición: Sea V, W $\mathbb{K}$-ev, $f: V \longrightarrow W$ isomorfismo
Entonces $f^{-1}: W \longrightarrow V$ es in isomorfismo
Demostración: Ya sabemos que f^{-1} es biyectiva. Veamos que es transformación lineal.
Tomemos $w, w' \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Como es f es biyectiva, $\exists!\, v, v' \in V : f(v) = w,\ f(v') = w'$
Osea, $f^{-1}(w) = v,\ f^{-1}(w') = v'$. Ahora

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v') \Rightarrow f^{-1}(w + w') = v + v' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$$

Por otro lado si pienso en cuanto es

$$\lambda \cdot w = \lambda \cdot f(v) = f(\lambda \cdot v) \Rightarrow f^{-1}(\lambda \cdot w) = \lambda . v = \lambda . f^{-1}(w)$$

Espacios vectoriales de dim finita

Teorema(de la dimensión para transformaciones lineales)

Sean V, W $\mathbb{K}$-ev, V de dimensión finita, $f: V \longrightarrow W$ una transformación lineal.
Entonces, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Demostración: Sean $n = \dim(V)$, $m = \dim(\mathrm{Nu}(f))$: $0 \leq m \leq n$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de Nu (f) en particular, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i., con local, $\exists\, v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V

Af.: $\{f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$

Demostración de Af.:

Por la proposición de la clase pasada, $\{f(v_1\}, \ldots, f(v_m), f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de Im (f).

Como $f(v_1) = \ldots = f(v_m) = 0$, ya que $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Nu}(f)$, se tiene que $\{f(v_{m+1}, \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$.

Falta ver que este conjunto es l.i..

Sean $a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$0 = a_{m+1}\, f(v_{m+1}) + \ldots + a_n\, f(v_n) \Rightarrow f(a_{m+1}\, v_{m+1} + \ldots + a_n\, v_n) = 0$$

Es decir:

$$v := a_{m+1}\, v_{m+1} + \ldots + a_n\, v_n \in \mathrm{Nu}(f).$$

Como $\{v_{1,} \ldots, v_m\}$ es una base de Nu (f), existen $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = b_1\, v_1 + \ldots + b_m\, v_m$$

Ahora

$$\begin{aligned} &= 0 \\ &= v - v \\ &= (b_1\, v_1 + \ldots + b_m\, v_m) - (a_{m+1}\, v_{m+1} + \ldots + a_n\, v_n) \\ &= b_1\, v_1 + \ldots + b_m\, v_m + (-a_{m+1})\, v_{m+1} + \ldots + (-a_n)\, v_n \end{aligned}$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $V \Rightarrow b_m = a_{m+1} = \ldots = a_n = 0$

Luego, $\{f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es l.i.

Ahora, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - m = \dim(v) - \dim(\mathrm{Nu}(f))$

Corolario: Sean V, W dos $\mathbb{K}$-ev de dim n, $f : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Son equivalentes

a) f es isomorfismo

b) f es monomorfismo

c) f es epimorfismo

Demostración:

a) $\Rightarrow$ ***b)*** si f es biyectiva, en particular es inyectiva

b) $\Rightarrow$ ***c)*** Asumimos que f es inyectiva: $\mathrm{Nu}(f) = 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$, por el teorema recién probado.

Pero entonces Im (f) es un sub-espacio de W, que tiene dimensión

$n = \dim(W) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = W$ Luego, f es suryectiva

c) $\Rightarrow$ ***a)*** Asumimos que f es suryectiva, nos falta ver que f es inyectiva.

De la suryectividad, $\mathrm{Im}(f) = W \Rightarrow \dim(\mathrm{Nu}(f)) = \dim(v) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - n = 0$.

Luego, $\mathrm{Nu}(f) = 0$, y por la Proposición de la clase anterior, f es inyectiva.

Observación: El corolario no vale si tomamos la hipótesis de dim finita.

Por ejemplo: $f : K[x] \longrightarrow K[x]$, $f(P) = P'$ no es un monomorfismo: $f(1) = 0$

Sin embargo, f es epimorfo. $P = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x^n$, $f\left(a_0\, x + \frac{a_1\, x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}\right)$

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-ev de dim n, $\{v_1, \ldots, v_n\} = B$ es una base de V
Entonces, $f : V \longrightarrow K^n$, $f(v) = (v)_B$ es un isomorfismo
Demostración: Vemos la clase pasada que f es una transformación lineal.
Como $\dim(V) = n = \dim(K^n)$, el corolario anterior dice que basta probar que es inyectivo para concluir que es un isomorfismo
Sea $v \in \mathrm{Nu}(f)$: $f(v) = (0, \ldots, 0) \longrightarrow v = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0\, v_n = 0$
Luego, $\mathrm{Nu}(f) = 0$. Por la Proposición de la clase pasada, f es un monomorfismo

Matrices y transformaciones lineales

Sean V, W dos $\mathbb{K}$-ev de dimensión finita,

$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$

bases de V y W respectivamente.
Sea $f : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.
Para cada $j = 1, \ldots, n$, $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, w_i$. La matriz de f con respecto a las bases B_1 *y* b_2 es
$[f]_{B_1\, B_2} = (a_j) \in k^{m*n}$

Observación: En general, si $A \in K^{m*n}$ y consideramos la transformación lineal $f_A : K^n \longrightarrow K^m$, $f_A(x) = A \cdot x$, entonces la matriz de f_A con respecto a las bases canónicas B_1 y B_2 de K^n y K^m, respectivamente, es A:

$[f_A]_{B_1\, B_2} = A$

Proposición: Sean V, W dos $\mathbb{K}$-ev de dimensión finita. B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente. Entonces para cada $x \in V$, $(f(x))_{B_2} = [f]_{B_1\, B_2} \cdot (x)_{B_1}$
Demostración: Sean

$B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$

Fijémonos $x \in V$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j \Longrightarrow (x)_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Llamamos $[f]_{B_1\, B_2} = (a_{i,j}) \longrightarrow f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, w_i$

$= f(x)$

$= f(\sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} x_j\, f(v_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, w_i)$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j\, a_{i,j}\, w_i$

$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{i,j}\, w_i$

$= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j)\, w_i$

$$\Longrightarrow (f(x))_{B_2} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1\,j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\, x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,i} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [f]_{B_1\,B_2}\,(x)_{B_1}$$

Matriz de la composición y matriz de la inversa

Proposición: Sean V, W, U tres $\mathbb{K}$-ev, de dimensión finita B_1, B_2, B_3 bases de V, W, U, respectivamente, $f : V \longrightarrow W$, $g : W \to U$ dos transformaciones lineales. Entonces

$$\underset{K^{r*n}}{\underset{\uparrow}{[f\circ g]_{B_1\,B_2}}} = \underset{K^{r*m}}{\underset{\uparrow}{[g]_{B_2\,B_3}}} \cdot \underset{K^{m*n}}{\underset{\uparrow}{[f]_{B_1\,B_2}}}$$

Demostración: Sean

$B_1 = \{v_1,\ \dots,\ v_n\}$

$B_2 = \{w_1,\ \dots,\ w_m\}$

$B_3 = \{u_1,\ \dots,\ u_r\}$

Llamemos

$A = [f]_{B_1\,B_2} \in K^{m*n}$

$B = [g]_{B_2\,B_3} \in K^{r*m}$

$C = [g\circ f]_{B_1\,B_3} \in K^{r*n}$

Por definición,

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, w_i$

$g(w_i) = \sum_{k=1}^{r} b_{k,i}\, u_k$

$(g\circ f)\,(v_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{k,j}\, u_k$

$= (g\circ f)\,(v_j)$

$= g(f(v_j))$

$= g(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, w_i)$

$= \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}(\sum_{k=1}^{r} b_{k,i}\, u_k)$

$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} a_{i,j}\, b_{k,i}\, u_k$

$= \sum_{k=1}^{r} (\sum_{i=1}^{m} b_{k,i}\, a_{i,j})\, u_k$

Como la expresión de $(g\circ f)\,(v_j)$ en la base B_3 es único, se tiene que

$c_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} b_{k,i}\, a_{i,j} = (B\cdot A)_{k,j} \Longrightarrow C = B\cdot A$

Corolario: Sean V, W dos $\mathbb{K}$-ev de dimensión finita, y $f : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Sean B_1, B_2 bases de V, W respectivamente.

Entonces

$[f^{-1}]_{B_2\,B_1} = \left([f]_{B_1\,B_2}\right)^{-1}$

Demostración: Sean $B_1 = \{v_1,\ \dots,\ v_n\}$, $B_2 = \{w_1,\ \dots,\ w_n\}$. Notar que

$[\mathrm{Id}_V]_{B_1\,B_1} = \mathrm{Id}_n$

$[\mathrm{Id}_W]_{B_1\,B_2} = \mathrm{Id}_n$

Como f es un isomorfismo:

$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_W$

$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V$

Usando la proposición anterior:

$[f]_{B_1 B_2} \cdot [f^{-1}]_{B_2 B_1} = [f \circ f^{-1}]_{B_2 B_2} = [\mathrm{Id}_w]_{B_2 B_2} = \mathrm{Id}_n$

$[f^{-1}]_{B_2 B_1} \cdot [f]_{B_1 B_2} = [f^{-1} \circ f]_{B_1 B_1} = [\mathrm{Id}_V]_{B_1 B_1} = \mathrm{Id}_n$