Espacios Vectoriales 2

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

Este archivo tratará sobre los generadores de un (sub)espacio vectorial.

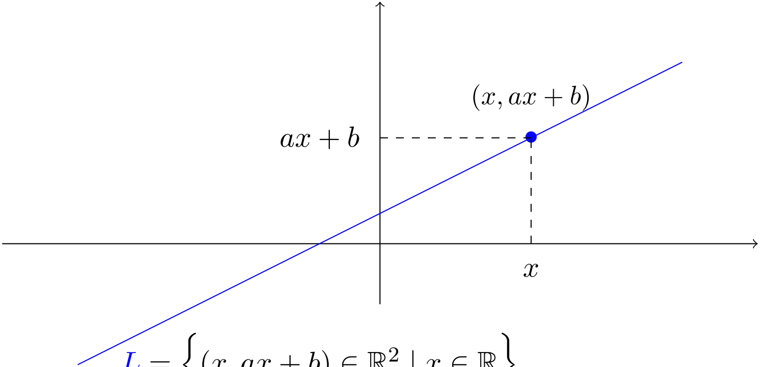
Estas diapositivas estan basadas en el capítulo 2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

Pregunta

¿Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial?

Una recta no vertical en el plano es el gráfico de una función $f(x) = ax + b$



$$\color{blue}{L} = \left\{(x, ax+b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\right\}$$

- $L = \left\{(x, ax+b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ se dice que es la forma explícita[1] o paramétrica[2] de describir a la recta

- $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\right\}$ se dice que es la forma implícita[3] de describir a la recta

---

[1] porque es lo más explícito posible

[2] porque depende del parámetro $x \in \mathbb{R}$

[3] porque definimos al conjunto mediante propiedades que sólo satisfacen los elementos que a él pertencen

Si reescribimos la ecuación de la forma implicíta vemos que L es el conjunto de soluciones de una ecuación con dos incognitas

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax = b \right\}$$

Por otro lado las rectas verticales se corresponden con las ecuaciones $x = b$ con y libre.
Es decir, el conjunto

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b \right\} = \left\{ (b, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

es una recta vertical de $\mathbb{R}^2$.

Conclusión

Cada recta en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de soluciones de una ecuación de la forma $a_1 x + a_2 y = b$ para ciertos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Pregunta

¿Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial?

Podemos cambiarla por

Pregunta

Sea L el conjunto de soluciones de $a_1x + a_2y = b$.
¿Es L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

Respuesta

- Si $b = 0$, entonces L es un subespacio porque es el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo
- Si $b \neq 0$, entonces $(0, 0)$ no es solución pues $a_1 0 + a_2 0 = 0 \neq b$. Luego, por la Observación 2.2.1, L no puede ser un subespacio.

Conclusión

Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial si y sólo si pasa por $(0,0)$

Esto es otra manera de decir lo anterior. En efecto, si pasa por $(0,0)$, entonces $b=0$ porque $a_1 0 + a_2 0 = 0 = b$. Si no pasa por $(0,0)$, entonces $a_1 0 + a_2 0 = 0 \neq b$.

Observación 2.2.1

Sea W un subespacio vectorial de V. Entonces $0 \in W$.

Consecuencia

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V tal que $0 \notin W$. Entonces W no es subespacio.

Atención

Puede suceder que un subconjunto W de un espacio vectorial V contenga al 0 y que NO sea subespacio.

Hemos visto que podemos presentar a todas las rectas de $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones con dos incognitas.

A continuación veremos una manera "vectorial" de presentarlas.

Usando las operaciones de $\mathbb{R}^2$ (como espacio vectorial) podemos reescribir la forma explícita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L &= \left\{(x, ax+b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x(1,a) + (0,b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

En el caso de las rectas verticales

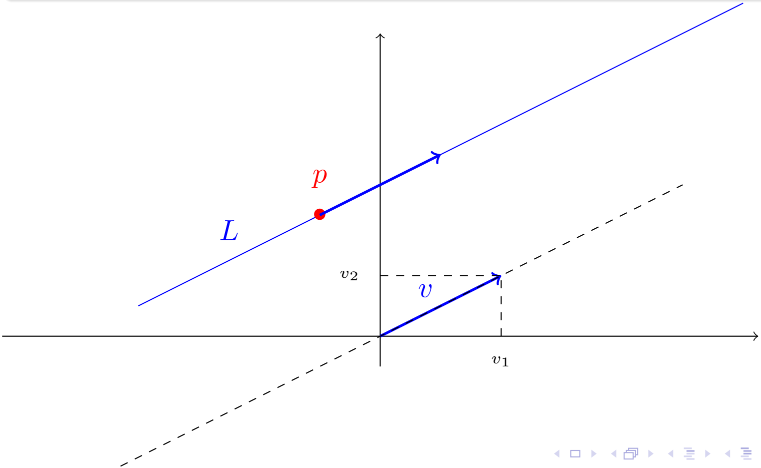
$$\begin{aligned} R &= \left\{(b, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y(0,1) + (b,0) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Ambas familias de rectas quedan contempladas en la siguiente definición.

Definición

Sea $v, p \in \mathbb{R}^2$ con $v \neq 0$. La recta L que pasa por p con dirección v es

$$L = \{\lambda \cdot v + p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$



Definición 2.1.2

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Ejemplo

Todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ pues

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = xe_1 + ye_2$$

Definición 2.1.2

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Ejemplo

Todo polinomio de grado uno es combinación lineal de los polinomios x e 1 pues

$$a_1 x + a_0 = a_1 x + a_0 1$$

Definición 2.1.2

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Observación

Es posible que distintas combinaciones lineales sean iguales al mismos vector.
Por ejemplo, el vector $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar con distintas combinaciones lineales de los vectores e_1, e_2 y $(1,3)$

$$(1,1) = e_1 + e_2 = -2e_2 + (1,3)$$

Definición 2.1.2

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Observación

La expresión

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

se llama combinación lineal (valga la rebundancia :)

Definición 2.1.2

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Observación

Si $v_1, ..., v_n$ pertenence a un subespacio de W de V, entonces todas sus combinaciones lineales pertenecen a W

Haremos la demostración para practicar la definición de subespacio.

Observación

Si $v_1, ..., v_n$ pertenence a un subespacio de W de V, entonces todas sus combinaciones lineales pertenecen a W

Procederemos por inducción en n.

Si $n = 1$, entonces $\lambda_1 v_1 \in W$ dado que un subespacio es cerrado por multiplicación por escalares.

(HI): $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} \in W$ para cualesquiera escalares $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$

Tomemos ahora escalares $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Luego

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}) + \lambda_n v_n \in W$$

porque el primer sumando esta en W por (HI) y entonces podemos aplicar la definición de subespacio a toda la expresión.

Definición 2.1.2

Sean V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n$ vectores en V.
Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

Observación

Cada v_i es combinación lineal puesto que

$$v_i = 0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n$$

Teorema 2.2.2

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces el conjunto

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas las combinaciones lineales de los $v_1, ..., v_k$ es un subespacio vectorial

Demostración: debemos ver que W satisface las condiciones de la definición de subespacio.

Por la última observación $v_1 \in W$ y por lo tanto $W \neq \emptyset$.

Teorema 2.2.2

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces el conjunto

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas las combinaciones lineales de los $v_1, ..., v_k$ es un subespacio vectorial

Demostración: Tomemos ahora $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ y probemos que $w_1 + \lambda w_2 \in W$.
Sean $\lambda_1, ..., \lambda_k, \mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ w_2 &= \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k \\ \Rightarrow w_1 + \lambda w_2 &= (\lambda_1 + \lambda\mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda\mu_k) v_k \in W \end{aligned}$$

Para obtener la combinación lineal de la derecha debemos multiplicar, distribuir, sumar y sacar factor común y todo eso lo podemos hacer gracias a los axiomas de espacios vectoriales

Definición 2.2.2

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Llamaremos al subespacio vectorial

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

el subespacio generado por $v_1, ..., v_k$.
El conjunto $S = \{v_1, ..., v_k\}$ se llama conjunto de generadores.

Notación

El subespacio de la definición se suele denotar

$$W = \langle S \rangle = \langle v_1, ..., v_k \rangle$$

Observación

Puede pasar que $W = V$ y en ese caso S genera todo el espacio vectorial V. Por ejemplo: $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$

Ejemplo

Sea $v \in \mathbb{R}^2$ no nulo. Entonces el subespacio generado por v es la recta que pasa por $(0,0)$ con dirección v

$$\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo

El subespacio vectorial de V generado por el vector cero es el cero

$$\langle 0 \rangle = \{\lambda \cdot 0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$$

Observación

El subconjunto $\{0\}$ es subespacio de cualquier espacio vectorial V

Teorema 2.2.4

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_k \in V$. Entonces $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ es igual a la intersección de todos los subespacios vectorial que contienen a $\{v_1, ..., v_k\}$

Demostración:
Sea U la intersección de todos los subespacios que contienen a $\{v_1, ..., v_k\}$.

Queremos demostrar que $U = \langle v_1, ..., v_k \rangle$. Lo haremos probando la "doble inclusión".

Primero, $U \subseteq \langle v_1, ..., v_k \rangle$ vale puesto que $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ es un subespacio que contiene a $\{v_1, ..., v_k\}$.

Por otro lado, $\{v_1, ..., v_k\} \subset U$ porque U es la intersección de todos los subespacios que contienen a $\{v_1, ..., v_k\}$. Entonces

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in U$$

para todos $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ dado que U es subespacio por Teorema 2.2.3. Por lo tanto $\langle v_1, ..., v_k \rangle \subseteq U$.

Es bueno tener presente lo siguiente.

Propiedades

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y V el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

- V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$
- V es un espacio vectorial
- Existen $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ que generan a V, es decir

$$V = \langle v_1, ..., v_k \rangle$$

(esta es una de las preguntas que se hacía nuestro amigo )

El primer item ya lo vimos en el archivo anterior. El segundo item es el Teorema 2.2.1 del archivo anterior. Y el tercero lo probaremos más adelante. Pero casi que ya lo saben y lo ejemplificaremos con un ejemplo (valga la rebundancia)

Ejemplo

Sea A la matriz del Ejercicio 1 del Primer Trabajo Práctico y V el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Entonces

$$V = \left\{(-2s, 3t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Entonces, un vector $v \in \mathbb{R}^4$ pertenece a V si y sólo si existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = (-2s, 3t, s, t) = s(-2, 0, 1, 0) + t(0, 3, 0, 1)$$

Es decir, $v \in V$ si y sólo si $v = \langle(-2, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1)\rangle$.
Por lo tanto,

$$V = \langle(-2, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1)\rangle$$

Pregunta

¿Se podrá generar V con un sólo vector?
(esta es otra de las preguntas de )

Conclusión

La descripición explícita del conjunto de soluciones nos da un conjunto de generadores de las soluciones.

También podemos llamarla "descripción paramétrica" puesto que depende de ciertos parámetros.

En el ejemplo anterior los parámetros son s y t

$$V = \left\{(-2s, 3t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}$$


That's all Folks!