8. Una matriz A compleja $n \times n$ se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.

(a) Probar que si n es impar y A es antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

(b) Para cada n par, encontrar una matriz A antisimétrica $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

a) Primero notemos que $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$. En efecto,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_1 \\ \vdots \\ -F_n}]{} \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix} = -A$$

Por lo tanto, aplicando n veces el teorema (*) 2.8.6 tenemos lo que queríamos.
Ahora pasemos a probar el ejercicio. Notemos que tenemos las siguientes igualdades

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

En efecto, la primera igualdad es por la teoría; la segunda por ser A antisimétrica; la tercera por lo probado al principio; y la última porque n es impar.

En conclusión, $\det(A) = -\det(A)$ y por lo tanto $\det(A) = 0$.

(*) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, $1 \leq r \leq n$, $c \in \mathbb{K}$ y B la matriz que se obtiene de A multiplicando la fila r por c, entonces $\det(B) = c\det(A)$.

b) La forma general para una matriz M_n ($n \in \mathbb{N}$, n par) antisimétrica tal que $\det(A) \neq 0$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_{21} & \cdots & & -\lambda_{n1} \\ \lambda_{21} & 0 & -\lambda_{32} & \cdots & -\lambda_{n2} \\ \vdots & \lambda_{32} & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda_{n(n-1)} \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{n(n-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

Notar que para que sea antisimétrica se debe dar que en la posición λ_{ij} con $i,j \leq n$, $i=j$, debe haber un 0. (en la diagonal); tambien se debe dar que λ_{ij} con $i \neq j$ sea $\neq 0$. (hay excepciones, pero con esa condición no falla)