4. Probar por inducción que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son elementos de F, entonces

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Llamemos $A_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$ a la matriz. Procedemos por inducción en n.

Si $n=1$, se tiene que $\det A_1(a_0) = |t+a_0| = t+a_0$, por lo que se cumple lo que queremos ver.

Para el caso inductivo, asumimos que vale para $n-1$ y queremos ver que vale para n. Desarrollando el determinante por la primera fila, resulta

$$\det A_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = t \det \begin{bmatrix} t & 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & t+a_{n-1} \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \det \begin{bmatrix} -1 & t & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$= t \det A_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) + (-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1}$$

$$\overset{HI}{=} t(t^{n-1} + a_{n-1}t^{n-2} + \cdots + a_2 t + a_1) + a_0$$

$$= t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

lo cuál prueba lo que queríamos demostrar para n, concluyendo así el paso inductivo.