

**Determinante.**

Martes 22 de octubre

**Ejercicio 1.** Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 2.** Dados escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , definimos la matriz de *Vandermonde*:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Probar (por inducción) que  $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ . Luego

- (a) Dado  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  consideramos la sucesión  $\exp(\lambda): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\exp(\lambda)_n = \lambda^{n-1}$ . Probar que el subconjunto  $S_1 = \{\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2), \dots, \exp(\lambda_n)\}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es LI si y sólo si  $\lambda_j \neq \lambda_i$  para todo  $j \neq i$ . Notar que esto prueba que en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  hay un subconjunto LI que tiene la misma cantidad de elementos que  $\mathbb{R}$ . En concreto:  $\{\exp(\lambda): \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ .
- (b) En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  consideramos el subconjunto  $S_2 = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ . Probar que  $S_2$  es LI si y sólo si  $\lambda_j \neq \lambda_i$  para todo  $j \neq i$ .

**Ejercicio 3.** Probar por inducción que si  $a_0, \dots, a_{n-1}$  son elementos de  $K$ , entonces

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0.$$

**Ejercicio 4.** Determinar para qué valores de  $c \in \mathbb{R}$  las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** Sean  $A, B$  y  $C$  matrices  $n \times n$ , tales que  $\det A = -1$ ,  $\det B = 2$  y  $\det C = 3$ . Calcular  $\det(A^2 B C^T B^{-1})$  y  $\det(B^2 C^{-1} A B^{-1} C^T)$ .**Ejercicio 6.** Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 7.** Probar que si  $k_1, \dots, k_n$  son elementos de  $K$ , entonces

$$\det \begin{pmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ k_1 & 1+k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ k_1 & k_2 & 1+k_3 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & 1+k_n \end{pmatrix} = 1 + k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

**Ejercicio 8.** Una matriz  $A$  compleja  $n \times n$  se dice *antisimétrica* si  $A^t = -A$ .

1. Probar que si  $n$  es impar y  $A$  es antisimétrica, entonces  $\det(A) = 0$ .
2. Para cada  $n$  par encontrar una matriz  $A$  antisimétrica  $n \times n$  tal que  $\det(A) \neq 0$ .

★ **Ejercicio 9.** El **Ejercicio 2 (a)** muestra que  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  es monstruoso. En este ejercicio mostramos que es mas monstruoso aún. Consideramos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  el siguiente subespacio:

$$\mathbb{R}^{\oplus\infty} = \{a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq N\}.$$

- (a) Para cada  $k \in \mathbb{N}$  consideramos  $e^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dado por  $e^k_n = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k, \\ 0, & \text{si } n \neq k. \end{cases}$

Probar que  $\{e^k: k \in \mathbb{N}\}$  es una base (podría decirse canónica) de  $\mathbb{R}^{\oplus\infty}$ .

- (b) Sea  $\mathbb{M}$  el subespacio de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  generado por el subconjunto linealmente independiente  $S_1$  del **Ejercicio 2 (a)**. Probar que  $\mathbb{M} \cap \mathbb{R}^{\oplus\infty} = \{0\}$ . Por lo tanto  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  contiene una suma directa de subespacios  $\mathbb{M} \oplus \mathbb{R}^{\oplus\infty}$ , donde el primero tiene una base con  $|\mathbb{R}|$ -elementos y el segundo una base con  $|\mathbb{N}|$ -elementos.