

NOMBRE Y APELLIDO:

CARRERA:

CONDICIÓN (R o L):

**Para aprobar el examen, debe estar correctamente resuelto en un 50%, lo que equivale a 50 puntos.*

Quienes hayan regularizado la materia durante el segundo cuatrimestre de 2017 tendrán un puntaje **extra de acuerdo a la notas de los parciales.*

Los alumnos en **Condición Regular no deben resolver el ítem (b) del Ejercicio 1: el puntaje del mismo se les sumará automáticamente por revestir esta condición.*

Justificar todas las respuestas. No está permitido el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos.

Ejercicio 1. (a) (10 pts.) Describir explícitamente todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Mostrar todos los pasos intermedios realizados para hallar la solución.

(b) (5 pts.) (solo alumnos libres) Indicar cuál es la MERF asociada al sistema anterior.

Ejercicio 2. (10 pts.) Calcular la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. (20 pts.) Dados los siguientes vectores de \mathbb{R}^4

$$v_1 = (1, 1, 0, 0) \quad v_2 = (0, 0, 1, 1) \quad v_3 = (1, 0, 0, 4) \quad v_4 = (0, 0, 0, 2).$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de \mathbb{R}^4 .

(b) Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de \mathcal{B} .

(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a \mathcal{B} .

Ejercicio 4. (25 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la transformación lineal definida

$$T(x, y, z) = (8x + 3y - 4z, 4x + 9y - 2z, 4x + 4y - 2z).$$

(a) Dar una base del núcleo y la imagen de T .

(b) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T en la base canónica $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

- (c) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de T en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.
- (d) Calcular los autovalores de T
- (e) Decidir si T es diagonalizable.

Ejercicio 5. (15 pts.)

- (a) Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal **inyectiva** de espacios vectoriales. Fijamos vectores $v_1, \dots, v_n \in V$ y sean $w_1, \dots, w_n \in W$ de modo tal que $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$.
Probar que si w_1, \dots, w_n es un conjunto linealmente dependiente entonces v_1, \dots, v_n es linealmente dependiente.
- (b) Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales y sea λ una constante. Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases de V y W respectivamente. Probar que

$$[\lambda T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \lambda [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Ejercicio 6. (15 pts.)

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta con una demostración o contraejemplo, según corresponda.

- (a) Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces $\text{Nu}(T) + \text{Im}(T) = V$.
- (b) Si V espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios vectoriales de V , entonces la intersección $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de V .
- (c) Sea A una matriz 2×2 , entonces $\det(3A) = 9 \det(A)$.

| Ejercicio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------|---|---|---|---|---|--------------|
| Puntaje | | | | | | |
| P. Extra | | | | | | Total |
| | | | | | | |