Álgebra de Matrices 3

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

En este archivo destacaremos algunos resultados sobre matrices inversibles que se pueden encontrar en el Capítulo 1 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Además, a modo de conclusión de esta unidad, haremos un repaso de lo que hemos hecho hasta aquí destacando el paralelismo entre el lenguaje de sistemas de ecuaciones y el de álgebras de matrices.

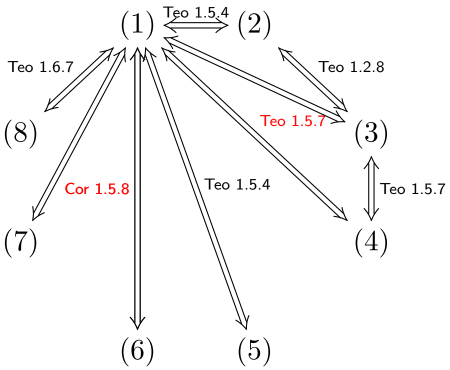
Y al final, un Bonus track sobre sistemas de ecuaciones.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. A es inversible
2. A es equivalente por fila a Id
3. el sistema $AX = 0$ tiene solución única (la trivial)
4. el sistema $AX = Y$ tiene solución única para todo $Y \in \mathbb{R}^n$ (la solución es $A^{-1}Y$)
5. A es el producto de matrices elementales
6. existe $B \in \mathbb{R}^n$ tal que $BA = \mathrm{Id}$
7. existe $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $AC = \mathrm{Id}$
8. $\det(A) \neq 0$

En el Teorema anterior hemos pegado varios Teoremas.



Proposición 1.5.1 (2)

La inversa es única.

Demostración: Supongamos que una matriz inversible A tiene dos inversas B y C. Entonces

$$\begin{aligned} B &= B\,\mathrm{Id} && \text{(neutro)} \\ &= B(AC) && \text{(hipotesis)} \\ &= (BA)C && \text{(asoc)} \\ &= \mathrm{Id}\,C && \text{(hipotesis)} \\ &= C && \text{(neutro)} \end{aligned}$$

Teorema 1.5.2

Sean A y B matrices inversibles. Entonces:

1. A^{-1} es inversible y la inversa es A
2. AB es inversible y la inversa es $B^{-1}A^{-1}$

Demostración: notemos que $A^{-1}A = \mathrm{Id}$ y

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B && (\text{asoc})\\ &= B^{-1}(\mathrm{Id})B && (\text{hipotesis})\\ &= B^{-1}B && (\text{neutro})\\ &= \mathrm{Id} && (\text{hipotesis})\end{aligned}$$

Entonces, por la unicidad de la inversa y el Teorema de las equivalencias ($(1) \Leftrightarrow (6)$), deducimos que $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Esta unidad, y la materia en general, gira alrededor del siguiente problema

Problema $(\star)$

Calcular el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

Observación

La notación $AX = Y$ para sistema de ecuaciones es consistente con la multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ y_m \end{pmatrix}$$

multiplicando

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & y_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & y_m \end{array} \right.$$

Entonces podemos reenunciar nuestro problema

Problema $(\star)$

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^m$. Calcular el conjunto de soluciones de

$$AX = Y$$

Observación

En el lenguaje matricial, para saber si $v \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema $AX = Y$ debemos verificar que vale la igualdad $Av = Y$.

otras maneras
de decir lo mismo

$$v \in \mathbb{R}^n \text{ es solución de } AX = Y \iff Av = Y$$

$$\mathrm{Sol}(\star) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = Y\}$$

Esta observación es útil para encontrar propiedades como que el conjunto de soluciones es invariantes por la suma y la multiplicación por escalares.

Proposición

Sean v y w soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Entonces $v + tw$ también es solución del sistema $AX = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(esto es el Ejercicio 11 de la Práctica 3)

En la próxima filmina resolveremos el Ejercicio 11 de la Práctica 3.

Ejercicio 11 de la Práctica 3

Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.
Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
A(v+tw) &= Av + A(tw) && \text{(dist)} \\
&= 0 + (At)w && (v \text{ es sol} + \text{asoc}) \\
&= (tA)w && \text{(conm prod por escalar)} \\
&= t(Aw) && \text{(asoc)} \\
&= t0 && (w \text{ es sol}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Observación

Con el lenguaje matricial cobra más sentido la matriz ampliada en el Método de Gauss

Sea e una operación elemental y $E = e(\mathrm{id})$ la correspondiente matriz elemental

$$
\begin{array}{ccc}
(A|Y) & \xrightarrow{e} & \big(\, e(A) \,|\, e(Y) \,\big) \\
 & & \| \quad \text{Teo } 1.4.1 \quad \| \\
AX = Y & \xrightarrow{E\cdot} & (EA)X = EY
\end{array}
$$

Observación

Con el lenguaje matricial también se ve más claro por qué tienen las mismas soluciones.

Por el Teorema 1.5.3 las matrices elementales son inversibles. Sea E una matriz elemental y E^{-1} su inversa.

$$
\begin{tikzcd}
AX = Y \arrow[rr, bend left, "E\cdot"] & & EAX = EY \arrow[ll, bend left, "E^{-1}\cdot"]
\end{tikzcd}
$$

(podemos ir y volver de un sistema a otro)

Volvamos a nuestro problema inicial

Problema ($\star$)

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^m$. Calcular el conjunto de soluciones de

$$AX = Y$$

Para resolver ($\star$) puede ser de utilidad resolver lo siguiente

Problema ($\spadesuit$)

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Calcular el conjunto de los $Y \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $AX = Y$ tiene solución

(este es el Ejercicio 2 de la Tarea y el Ejercicio 7 de la Práctica 2)

Veamos un ejemplo del Problema (♠)

Ejercicio 2 de la Tarea

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Dar una descripción implícita del conjunto de vectores $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales el sistema $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Respuesta

El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ para los cuales el sistema tiene solución es

$$\left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \right\}$$

Demostración:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{varias operaciones elementales}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

Entonces el sistema tiene solución si y sólo si

$$-\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$$

(por el Teorema pag 27 del archivo "Sistema de ecuaciones 3: Método de Gauss")

El conjunto de vectores para los cuales un sistema tiene solución también es invariante por la suma y la multiplicación por escalares

Proposición

Si los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución entonces el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{R}$

Demostración:
Sea v una solución de $AX = Y$ y w una solución de $AX = Z$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(v+tw) &= Av + A(tw) = Y + (At)w \\ &= Y + (tA)w = Y + t(Aw) \\ &= Y + tZ \end{aligned}$$

Tarea

Indicar por qué valen cada una de las igualdades

Observación

El conjunto de vectores para los cuales un sistema tiene solución es igual al conjunto de soluciones de un sistema homogéneo

- El sistema homogéneo es la forma implícita en que describimos dichos conjuntos
- Es una consecuencia del Teorema pag 27 del archivo "Sistema de ecuaciones 3: Método de Gauss"
- Las ecuaciones son dadas por las filas nulas en la demostración de dicho teorema

Ejemplo (Ejercicio 2 de la Tarea)

El conjunto

$$\left\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \boxed{-\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0}\right\}$$

es lo mismo que el conjunto de soluciones del sistema

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

multiplicando

Conlusión 1

De lo que hemos visto se desprende que el álgebra de matrices, es decir las matrices junto con sus operaciones, es la estructura adecuada para estudiar sistemáticamente los sistemas de ecuaciones.

Conclusión 2

Las respuestas a nuestros problemas $(\star)$ y $(\spadesuit)$, es decir

- el conjunto de soluciones de $AX = 0$
- el conjunto de los Y para los cuales el sistema $AX = Y$ tiene solución

son invariante por la suma y la multiplicación por escalares

Estos tipos de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ se llaman subespacios vectoriales y son el tema de estudio de la próxima unidad (despues de ver determinante).

lo que sigue más la página 17
ayuda a resolver el ejercicio 14
del práctico 3

Pregunta

¿Podemos afirmar algo acerca de las soluciones del sistema $AX = Y$ a partir del tamaño de A?

Esta pregunta vendría a ser una continuación de la sección donde analizamos la cantidad de soluciones en el archivo sobre el Método de Gauss.

Como hicimos allí consideraremos un sistema equivalente

$$BX = Z$$

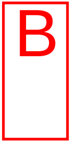
con B una MERF, el cual tiene las mismas soluciones.

Analizemos primero el caso no cuadrado. Es decir, B es una MERF de orden $m \times n$ con $n \neq m$

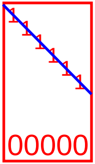
Obviamente la cantidad de 1's principales es menor que la cantidad de filas $(= m)$ y la cantidad de columnas $(= n)$

Entonces puede pasar una de las siguientes:

- la cantidad de 1's principales $\leq n < m$



- la cantidad de 1's principales $\leq m < n$



los 1's princ
estan por
encima de
la diag princ

Si sucede que

- la cantidad de 1's principales $\leq n < m$

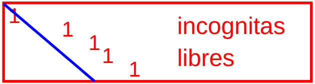
si o si B tiene filas nulas. Luego, si Z tiene su última coordenada no nula, el sistema $BX = Z$ no tiene solución por el Teorema pag 27 del archivo "Sistema de ecuaciones 3: Método de Gauss".

Deducimos entonces lo siguiente

Observación

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $n < m$, entonces existe algún $Y \in \mathbb{R}^m$ para el cual $AX = Y$ no tiene solución

los 1's princ
estan por
encima de
la diag princ



Si sucede que

- la cantidad de 1's principales $\leq m < n$

estamos en la situación del Teorema pag 30 del archivo "Sistema de ecuaciones 3: Método de Gauss". Entonces

Observación

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m < n$ y si el sistema $AX = Y$ tiene solución, entonces tiene infinitas soluciones

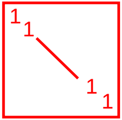
Pues la cantidad de columnas $(= n)$ es la cantidad de incognitas del sistema

Analizemos ahora el caso cuadrado. Es decir, B es una MERF de orden $n \times n$.

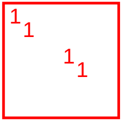
Obviamente la cantidad de 1's principales es menor que la cantidad de filas y la cantidad de columnas (ambas $= n$)

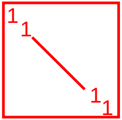
Entonces puede pasar una de las siguientes:

- la cantidad de 1's principales $= n$



- la cantidad de 1's principales $< n$





Si sucede que

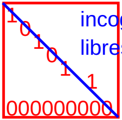
- la cantidad de 1's principales $= n$

entonces $B = \mathrm{Id}$ y $BX = X = Z$. Es decir, tiene una única solución.
Esto ya lo vimos pero de otro modo en el Teorema del principio.
Lo vimos así

Observación

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es equivalente por filas a Id, el sistema $AX = Y$ tiene una única solución la cual es $A^{-1}Y$

los 1's princ
estan por
encima de
la diag princ



incognitas
libres

Si sucede que

- la cantidad de 1's principales $< n$

si o si B tiene filas nulas y hay más incognitas que 1's principales. Entonces, pueden pasar las dos cosas que pasan en el caso no cuadrado

Observación

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y no es equivalente por filas a Id, entonces

- existe algún $Y \in \mathbb{R}^n$ para el cual el sistema $AX = Y$ no tiene solución
- si el sistema $AX = Y$ tiene solución, entonces tiene infinitas soluciones.