Práctico 7

Transformaciones lineales

Ejercicios resueltos.

(1) *a)* Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a los vectores $v_1 = (1,1,1)^t$, $v_2 = (0,1,0)^t$, $v_3 = (0,0,1)^t$.

$$\begin{aligned}
w_1 =& v_1 = (1,1,1)^t \\
w_2 =& v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,1,0)^t - \frac{\langle (0,1,0)^t, (1,1,1)^t\rangle}{\langle (1,1,1)^t, (1,1,1)^t\rangle}(1,1,1)^t \\
=& (0,1,0)^t - \frac{1}{3}(1,1,1)^t = (\tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3})^t \\
w_3 =& v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 \\
=& (0,0,1)^t - \frac{\langle (0,0,1)^t, (1,1,1)^t\rangle}{\langle (1,1,1)^t, (1,1,1)^t\rangle}(1,1,1)^t \\
&- \frac{\langle (0,0,1)^t, (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})^t\rangle}{\langle (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})^t, (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})^t\rangle}(\tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3})^t \\
=& (0,0,1)^t - \frac{1}{3}(1,1,1)^t - \tfrac{-1/3}{2/3}(\tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3})^t \\
=& (0,0,1)^t - \frac{1}{3}(1,1,1)^t + \tfrac{1}{2}(\tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3})^t = (\tfrac{-1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})^t
\end{aligned}$$

Luego, $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ obtenida de aplicar el proceso de Gram-Schmidt a los vectores v_1, v_2, v_3.
Seguidamente ortonormalizamos la base anterior. Esto quiere decir que construimos la base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$, siendo $u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ para $i = 1, 2, 3$. Que sea base ortonormal es debido a la proposición 5.1.12 del apunte.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})^t \\
u_2 &= \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}(\tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-1}{3})^t = (\tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}})^t \\
u_3 &= \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{1}{1/\sqrt{2}}(\tfrac{-1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})^t = (\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})^t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^t, (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})^t, (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^t\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtenida de ortonormalizar la base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$.
Comentario: Si uno empieza a hacer el proceso con w_3 las cuentas se simplifican un montón.

b) Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ la base ortonormal del ítem a). Por el proceso de Gram-Schmidt sabemos que

$$
\begin{aligned}
w_1 = v_1 &\Rightarrow v_1 = ||w_1||u_1 \\
w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 &\Rightarrow v_2 = \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + w_2 \\
&\Rightarrow v_2 = \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||} u_1 + ||w_2||u_2 \\
w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 &\Rightarrow v_3 = \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 + w_3 \\
&\Rightarrow v_3 = \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||} u_1 + \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||} u_2 + ||w_3||u_3.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que lo anterior puede expresarse matricialmente como

$$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)R$$

siendo

$$R = \begin{bmatrix} ||w_1|| & \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||} & \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||} \\ 0 & ||w_2|| & \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||} \\ 0 & 0 & ||w_3|| \end{bmatrix}$$

En efecto, usando el ejercicio 5 del TP N°3 es fácil probar que en general la columna i-ésima de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es Ae_i, siendo e_i el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Luego,

$$
\begin{aligned}
(v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3)R &\Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3)e_i = ((w_1, w_2, w_3)R)\, e_i \;\text{ para todo } i = 1, \dots, 3 \\
&\Leftrightarrow v_i = (w_1, w_2, w_3)(Re_i) \;\text{ para todo } i = 1, \dots, 3 \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} v_1 &=& (w_1, w_2, w_3)(1, 0, 0)^t \\ v_2 &=& (w_1, w_2, w_3)(\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}, 1, 0)^t \\ v_3 &=& (w_1, w_2, w_3)(\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}, \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}, 1)^t \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccccc} v_1 &=& w_1 & & & & \\ v_2 &=& \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 &+& w_2 & & \\ v_3 &=& \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 &+& \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 &+& w_3 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccccc} v_1 &=& ||w_1||u_1 & & & & \\ v_2 &=& \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||} u_1 &+& ||w_2||u_2 & & \\ v_3 &=& \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||} u_1 &+& \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||} u_2 &+& ||w_3||u_3 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Justifiquemos estas equivalencias. La primera es válida porque no es más que decir que dos matrices son iguales si y sólo sí todas sus columnas son iguales. La segunda vale por propiedad asociativa del producto de matrices. La tercera equivalencia es verdadera porque se ha calculado Re_i (o sea, la columna i-ésima de R) de acuerdo a la definición de la matriz R. La cuarta es cierta debido al ejercicio 5 del TP N°3. Finalmente, la quinta equivalencia es válida por ser $u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ para $i = 1, \dots, n$ y por definición de norma de un vector.

Por lo tanto, hemos logrado encontrar una matriz triangular superior R tal que $(v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3)R$.

Por otra parte, usando las cuentas del ítem a) podemos decir explícitamente quién es R:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(2) Sea $\{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Sea $Q = (w_1 \dots w_n)$, con w_i vectores columna, para $i = 1, \dots, n$. Entonces, la entrada (i, j) de Q es el elemnto i-ésimo del vector w_j. Escrito en símbolos,

$$Q_{i,j} = (w_j)_i \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta esto, resulta que la entrada (i, j) de la matriz $Q^t Q$ es

$$(Q^t Q)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (Q^t)_{i,k} Q_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} Q_{k,i} Q_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (w_i)_k (w_j)_k = \langle w_i, w_j \rangle.$$

Pero $\{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonal. Luego, $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij} ||w_i||^2$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker, es decir, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$(Q^t Q)_{i,j} = \delta_{ij} ||w_i||^2 = \begin{cases} ||w_i||^2 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En consecuencia, $Q^T Q = D$, con $D = \text{diag}(||w_1||^2, ||w_2||^2, \dots, ||w_n||^2)$.

(3) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible. Sea, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, v_j la columna j-ésima de A. Como A es invertible, entonces por el teorema 3.4.6 del apunte y por ser dim($\mathbb{R}^n$) = n, $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Luego, aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a dicha base para obtener $\{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Entonces, llamamos, para cada $j = 1 \dots, n$, $u_j = \frac{w_i}{||w_i||}$ y resulta que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Sea $Q = (u_1 \dots u_n)$, con u_i vectores columna, para $j = 1, \dots, n$. Entonces, por el ejercicio 2, $Q^T Q = D$, con $D = \text{diag}(||u_1||^2, ||u_2||^2, \dots, ||u_n||^2)$. Pero $||u_j||^2 = 1$ para cada $j = 1 \dots, n$, ya que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es base ortonormal. Por lo tanto, $D = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = Id_n$ y, en consecuencia, $Q^T Q = Id_n$.

Por otra parte, definimos $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de la siguiente manera

$$R_{i,j} = \begin{cases} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{||w_i||} & \text{si } i < j, \\ ||w_i|| & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Entonces R es una matriz triangular superior.

Ahora afirmamos que $A = QR$. En efecto,

$$\begin{aligned}
A = QR &\Leftrightarrow Ae_j = (QR)e_j \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow v_j = Q(Re_j) \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow v_j = Q \begin{pmatrix} R_{1,j} \\ \vdots \\ R_{j,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow v_j = \sum_{i=1}^{j} R_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{||w_i||} u_i + ||w_j|| u_j \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i + w_j \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \text{ para todo } j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Donde las justificaciones a las equivalencias son: la primera vale porque no es más que decir que dos matrices son iguales si y sólo sí todas sus columnas son iguales, la segunda es por la asociatividad del producto de matrices, la tercera es porque al ser R matriz triangular superior sus columnas tienen esa forma, la cuarta es verdadera por el ejercicio 5 del TP N°3 y por las definiciones de Q y R. La quinta equivalencia es válida por ser $u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ para $i = 1, \dots, n$ y por definición de norma de un vector, y la sexta vale por consistencia de la igualdad con respecto a la suma de vectores. [1]

De este modo hemos probado que demostrar que $A = QR$ es equivalente a probar que

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

Pero esto último vale porque $\{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ obtenida de aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Por lo tanto, $A = QR$ y la prueba concluye.

(4) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

c) $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2$, $T(x, y, z) = (x + z, y - z)$.

d) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y) = xy$.

e) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$.

f) La traza $\mathrm{Tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.

g) El determinante $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.

h) $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

Solución:

[1] Esto significa que en todo espacio vectorial V se cumple que $u = v \Rightarrow u + w = v + w$, para todo $u, v, w \in V$.

?? **Sí.** T es lineal, pues por un lado se tiene que $T((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = T(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') = (x+\lambda x'+z+z\lambda z', y+\lambda y'-z-\lambda z')$, y por otro lado se tiene que $T(x,y,z)+\lambda T(x',y',z') = (x+z, y-z)+\lambda(x'+z', y'-z') = (x+z+\lambda x'+\lambda z', y-z+\lambda y'-\lambda z')$. Como en ambos casos hemos llegado a lo mismo, se tiene que $T((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = T(x,y,z)+\lambda T(x',y',z')$.

Otra manera es darse cuenta que $T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, y en general $T(v) = Av$ siempre es lineal, pues $A(v+\lambda w) = Av+\lambda Aw$. Esto sucede pues cada coordenada de llegada es combinación lineal de los x, y, z (Observación 4.1.2 del Apunte).

?? **No** pues $T(2(1,1)) = T(2,2) = 4 = 4T(1,1) \neq 2T(1,1)$.

?? **No**, T no es una transformación lineal pues $T((0,0)) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$

?? **Sí**, pues $\operatorname{Tr}(A+\lambda B) = \operatorname{Tr} A + \lambda \operatorname{Tr} B$ (visto en Práctico 3).

?? **No,** (para $n>1$, para $n=1$ vale pues el determinante es la transformación identidad) pues $\det(\mathrm{Id}_n+\mathrm{Id}_n) = 2^n \,\mathrm{Id} \neq 2 = \det(\mathrm{Id}_n)+\det(\mathrm{Id}_n)$.

?? **Sí.** Sean $r(x)$ y $s(x)$ en $\mathbb{K}[x]$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
$T(r(x)+\lambda s(x)) = q(x)(r(x)+\lambda s(x)) = q(x)r(x)+\lambda q(x)s(x) = T(r(x))+\lambda T(s(x))$.

(5) Sea $T: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$.

a) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

b) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

Solución:

?? **No.** Sea $a \in \mathbb{R}$ no nulo, $T(i\,a) = \overline{i\,a} = \overline{i}\,\overline{a} = -i\,a \neq i\,a = iT(a)$.

?? **Sí.** Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Notar que $\overline{\lambda} = \lambda$, luego

$$\begin{aligned} T(z+\lambda w) &= \overline{z+\lambda w} = \overline{z} + \overline{\lambda w} \\ &= \overline{z} + \overline{\lambda}\,\overline{w} \\ &= \overline{z} + \lambda \overline{w} \\ &= T(z) + \lambda T(w) \end{aligned}$$

(6) Sea $T: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,2,3)$, $T(e_2) = (-1,0,5)$ y $T(e_3) = (-2,3,1)$.

a) Calcular $T(2,3,8)$ y $T(0,1,-1)$.

b) Calcular $T(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$. Es decir, dar una fórmula para T como la de los Ejercicios **?? ??** y **??**.

c) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x,y,z) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. En esta parte del ejercicio, y en todos los ejercicios similares, escribiremos/pensaremos a los vectores de $\mathbb{K}^3$ como matrices columna.

Solución:

Para hacer los dos primeros incisos debemos tener en cuenta que si $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ es una base, entonces dado cualquier vector v tenemos que $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ y los a_i son únicos. Luego $T(v) = \sum_i a_i T(v_i)$.

?? Escribamos $(2,3,8)$ como combinación lineal de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$(2,3,8) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 8(0,0,1) = 2e_1 + 3e_2 + 8e_3.$$

Luego:

$$\begin{aligned} T(2,3,8) &= 2T(e_1) + 3T(e_2) + 8T(e_3) \\ &= 2(1,2,3) + 3(-1,0,5) + 8(-2,3,1) \\ &= (2,4,6) + (-3,0,15) + (-16,24,8) \\ &= (-17,28,29). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} T(0,1,-1) &= 0T(e_1) + T(e_2) - T(e_3) \\ &= (-1,0,5) - (-2,3,1) \\ &= (1,-3,4). \end{aligned}$$

?? Este inciso es sólo generalizar lo hecho arriba (también uno podría hacer directamente este inciso y luego hacer el caso particular de (a)).Como

$$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) \\ &= x(1,2,3) + y(-1,0,5) + z(-2,3,1) \\ &= (x,2x,3x) + (-y,0,5y) + (-2z,3z,z) \\ &= (x-y-2z, 2x+3z, 3x+5y+z). \end{aligned}$$

?? Una forma de hallar la matriz A es considerar a los vectores $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ como matrices columna, y usar que $T(x,y,z) = xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3)$, junto con el Ejercicio 8 del Práctico 3. En efecto,

$$\begin{aligned} xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) &= x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\0\\5\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-2\\3\\1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusión (esto vale en general para $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$):

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

(7) Sea $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ la transformación lineal definida por: si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$T(A) = (a-c+2d)x^3 + (b+2c-d)x^2 + (-a+2b+5c-4d)x + (2a-b-4c+5d)$.

a) Decir cuáles de las siguientes matrices están en el núcleo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Decir cuáles de los siguientes polinomios están en la imagen:

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \qquad q(x) = x^3, \qquad r(x) = (x-1)^2.$$

Solución:

??

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) &= 0x^3 + x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x - 1, \\ T\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0, \\ T\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= -2x^3 + x^2 + 4x - 5. \end{aligned}$$

Luego, de las tres matrices solo la segunda pertenece al núcleo.

?? Calculemos primero $\operatorname{Im} T$. Debemos encontrar los polinomios $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ que satisfagan $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = T(A)$ para algún $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, es decir buscamos condiciones sobre (b_3, b_2, b_1, b_0) tales que $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = (a - c + 2d)x^3 + (b + 2c - d)x^2 + (-a + 2b + 5c - 4d)x + (2a - b - 4c + 5d)$ para algunos (a, b, c, d).

Es decir buscamos los b_i tal que para algunos a, b, c, d se cumple

$$\begin{cases} a - c + 2d & = b_3 \\ b + 2c - d & = b_2 \\ -a + 2b + 5c - 4d & = b_1 \\ 2a - b - 4c + 5d & = b_0. \end{cases}$$

Plantemos la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y resolvemos:

$$\left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -1 & 2 & b_3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_2 \\ -1 & 2 & 5 & -4 & b_1 \\ 2 & -1 & -4 & 5 & b_0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{F_3 + F_1} \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -1 & 2 & b_3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & b_1 + b_3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & b_0 - 2b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4 + F_2]{F_3 - 2F_2} \left[\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -1 & 2 & b_3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 + b_2 - 2b_3 \end{array}\right].$$

Luego,

$$b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \operatorname{Im} T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_1 - 2b_2 + b_3 & = 0 \\ b_0 + b_2 - 2b_3 & = 0 \end{cases} \tag{*}$$

Debemos comprobar si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ satisfacen las ecuaciones (*).

- $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$: en este caso $b_i = 1$ para todo i, luego $b_1 - 2b_2 + b_3 = 1 - 2 + 1 = 0$ y $b_0 + b_2 - 2b_3 = 1 + 1 - 2 = 0$. Por lo tanto, $p(x) \in \operatorname{Im} T$.
- $q(x) = x^3$: en este caso $b_3 = 1$ y los otros $b_i = 0$. Luego $b_1 - 2b_2 + b_3 = 1 \neq 0$. Por lo tanto, $q(x) \notin \operatorname{Im} T$.

- $r(x) = (x-1)^2$: en este caso $r(x) = x^2 - 2x + 1$, por lo tanto $b_3 = 0$, $b_2 = 1$, $b_1 = -2$, $b_0 = 1$. Luego, $b_1 - 2b_2 + b_3 = -2 - 2 + 0 = -4 \neq 0$. Por lo tanto, $r(x) \notin \operatorname{Im} T$.

Comentario: No era necesario calcular $\operatorname{Im} T$ en este ejercicio (pero viene bien saber hacerlo en general), podíamos haber puesto en vez de (b_3, b_2, b_1, b_0) los coeficientes de los polinomios p, q y r y verificabamos si el sistema tenía solución o no, en cuyo caso los polinomios estaban o no en la imagen respectivamente.

(8) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$.

a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 1, 1)$, $(-5, 1, 1)$.

b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 7)$.

c) Dar un conjunto de generadores del núcleo, y describir mediante ecuaciones (implícitamente) a la imagen.

d) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Solución:

En general, para este tipo de ejercicios conviene plantear el sistema de ecuaciones que se obtiene de la igualdad

$$T(x, y, z) = (b_1, b_2, b_3),$$

es decir

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= b_1 \\ y - z &= b_2 \\ x + 5y &= b_3 \end{cases}. \qquad (*)$$

Resolver este sistema de ecuaciones nos dará respuesta a los items ??, ?? y ??. Planteemos la matriz ampliada del sistema y resolvamos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 1 & 5 & 0 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 3 & -3 & -b_1 + b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3-3F_2]{F_1-2F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 - 3b_2 + b_3 \end{array}\right].$$

Luego el sistema original (*) es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + 5z &= b_1 - 2b_2 \\ y - z &= b_2 \\ 0 &= -b_1 - 3b_2 + b_3 \end{cases}. \qquad (**)$$

?? Podemos hacerlo comprobando directamente cuanto valen $T(1, 1, 1)$ y $T(-5, 1, 1)$:

$$T(1, 1, 1) = (1 + 2 + 3, 1 - 1, 1 + 5) = (6, 0, 6) \neq (0, 0, 0),$$
$$T(-5, 1, 1) = (-5 + 2 + 3, 1 - 1, -5 + 5) = (0, 0, 0).$$

Luego, $(1, 1, 1) \notin \operatorname{Nu} T$ y $(-5, 1, 1) \in \operatorname{Nu} T$.

También podríamos haberlo hecho utilizando el sistema (**), pues si hacemos $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, tenemos que $(x, y, z) \in \operatorname{Nu} T \Leftrightarrow x, y, z$ cumple (*) $\Leftrightarrow x, y, z$ cumple (**). Es decir $(x, y, z) \in \operatorname{Nu} T \Leftrightarrow x + 5z = 0$ e $y - z = 0$. Claramente, $(1, 1, 1)$ no cumple con las ecuaciones y $(-5, 1, 1)$ sí cumple.

?? Por (**) un vector (b_1, b_2, b_3) está en la $\operatorname{Im} T \Leftrightarrow -b_1 - 3b_2 + b_3 = 0$.

En el caso de $(0,1,0)$, tenemos que $-0-3+0=-3\neq 0$, por lo tanto $(0,1,0)\notin \operatorname{Im} T$.
En el caso $(0,1,7)$, tenemos que $-0-3+7=4\neq 0$, por lo tanto $(0,1,7)\notin \operatorname{Im} T$.

?? Como ya dijimos, si hacemos $b_1=b_2=b_3=0$, tenemos que $(x,y,z)\in \operatorname{Nu} T$ $\Leftrightarrow$ x,y,z cumple (*) $\Leftrightarrow$ x,y,z cumple (**). Es decir $(x,y,z)\in \operatorname{Nu} T \Leftrightarrow x+5z=0$ e $y-z=0 \Leftrightarrow x=-5z,\ y=z$. Luego

$$\operatorname{Nu} T=\{(-5z,z,z) : z\in \mathbb{K}\}=\langle(-5,1,1)\rangle.$$

Es decir, $(-5,1,1)$ es generador de $\operatorname{Nu} T$.

Por otro lado, por (**), obtenemos que

$$\operatorname{Im} T=\{(b_1,b_2,b_3)\in \mathbb{K}^3 : -b_1-3b_2+b_3=0\}.$$

?? Como $T(1,0,0)=(1,0,1)$, $T(0,1,0)=(2,1,5)$, T(0,0,1) = (3,-1,0), entonces

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\1&5&0\end{bmatrix}.$$

(9) Sea $T:\mathbb{K}^4\to\mathbb{K}^5$ dada por $T(v)=Av$, donde A es la siguiente matriz

$$A=\begin{bmatrix}0&2&0&1\\1&3&0&1\\-1&-1&0&0\\3&0&3&0\\2&1&1&0\end{bmatrix}.$$

a) Dar un conjunto de generadores de $\operatorname{Nu}(T)$, y describir implícitamente a $\operatorname{Im}(T)$.

b) Exhibir una base y calcular la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo:

$$(1,2,3,4),\ (1,-1,-1,2),\ (1,0,2,1).$$

d) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen:

$$(2,3,-1,0,1),\ (1,1,0,3,1),\ (1,0,2,1,0).$$

Solución:

?? Debemos plantear el sistema de ecuaciones $T(x,y,z,w)=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ y resolverlo. Lo haremos haciendo operaciones elementales de filas en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & b_2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & b_3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & b_4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & b_5 \end{array}\right] \overset{\substack{F_2+F_3 \\ F_4+3F3 \\ F_5+2F_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|l} 0 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & b_2+b_3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 3b_3+b_4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2b_3+b_5 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_4-3F_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|l} 0 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3+b_4-3b_5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2b_3+b_5 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{F_1+2F_5 \\ F_3-F_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 2 & 1 & b_1+4b_3+2b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -b_3-b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3+b_4-3b_5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2b_3+b_5 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{F_1/2 \\ (-1)F_3 \\ (-1)F_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b_1+2b_3+b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b_3+b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3+b_4-3b_5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2b_3-b_5 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{F_3-F_1 \\ F_5+F_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b_1+2b_3+b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}b_1-b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3+b_4-3b_5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b_1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{F_1\leftrightarrow F_3 \\ F_2\leftrightarrow F_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}b_1-b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}b_1+2b_3+b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3+b_4-3b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1+b_2+b_3 \end{array}\right].$$

De lo anterior se desprende que

$$T(x,y,z,w)=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-\frac{1}{2}w & =-\frac{1}{2}b_1-b_3 \\ y+\frac{1}{2}w & =\frac{1}{2}b_1 \\ z+\frac{1}{2}w & =\frac{1}{2}b_1+2b_3+b_5 \\ 0 & =-3b_3+b_4-3b_5 \\ 0 & =-b_1+b_2+b_3 \end{cases} \tag{1}$$

Luego,

$$(x,y,z,w)\in \mathrm{Nu}(T) \;\Leftrightarrow\; T(x,y,z,w)=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-\frac{1}{2}w & =0 \\ y+\frac{1}{2}w & =0 \\ z+\frac{1}{2}w & =0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x & =\frac{1}{2}w \\ y & =-\frac{1}{2}w \\ z & =-\frac{1}{2}w \end{cases}$$

De donde,

$$\mathrm{Nu}(T)=\left\{t\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right) : t\in\mathbb{K}\right\}=\langle(1,-1,-1,2)\rangle.$$

Por otro lado, de (??) se deduce que

$$\operatorname{Im}(T) = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{K}^5 : b_1 - b_2 - b_3 = 0,\ 3b_3 - b_4 + 3b_5 = 0\} \qquad (2)$$

?? Por el inciso anterior $\{(1, -1, -1, 2)\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(T)$ y, por consiguiente $\dim(\operatorname{Nu}(T)) = 1$.

Por otro lado, por (??):

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \operatorname{Im}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_1 & = b_2 + b_3 \\ b_4 & = 3b_3 + 3b_5. \end{cases}.$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T) &= \{(b_2 + b_3, b_2, b_3, 3b_3 + 3b_5, b_5) : b_2, b_3, b_5 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(r + s, r, s, 3s + 3t, t) : r, s, t \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(r, r, 0, 0, 0) + (s, 0, s, 3s, 0) + (0, 0, 0, 3t, t) : r, s, t \in \mathbb{K}\} \\ &= \langle (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 3, 1)\rangle. \end{aligned}$$

Por consiguiente $\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 3, 1)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(T)$, y $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$.

?? Por el inciso anterior $v \in \operatorname{Nu}(T)$ si y solo si es múltiplo de $(1, -1, -1, 2)$. Claramente $(1, 2, 3, 4)$ y $(1, 0, 2, 1)$ no son múltiplos de $(1, -1, -1, 2)$ y por lo tanto no pertenecen al núcleo de T. Finalmente, el vector que queda por analizar es $(1, -1, -1, 2)$ que sí pertenece al núcleo de T.

?? Aquí debemos usar el criterio de la ecuación (??): es decir

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow -b_1 + b_2 + b_3 = 0,\ -3b_3 + b_4 - 3b_5 = 0.$$

Apliquemos este criterio a los vectores $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, y $(1, 0, 2, 1, 0)$.

$$[-2 + 3 + (-1) = 0 \ \wedge\ (-3)(-1) + 0 - 3 = 0] \ \Rightarrow (2, 3, -1, 0, 1) \in \operatorname{Im}(T)$$
$$[-1 + 1 + 0 = 0 \ \wedge\ (-3)0 + 3 - 3 = 0] \ \Rightarrow (1, 1, 0, 3, 1) \in \operatorname{Im}(T)$$
$$[-1 + 0 + 2 = 1 \neq 0 \ \wedge\ (-3)2 + 1 - (-3)0 = -5 \neq 0] \ \Rightarrow (1, 0, 2, 1, 0) \notin \operatorname{Im}(T).$$

(10) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial no nulo y $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una transformación lineal. Probar que $T = 0$ ó T es un epimorfismo.

Solución:

Si T no es la transformación nula, la imagen de T tiene dimensión ≥ 1. Como $\dim(\mathbb{K}) = 1$, entonces $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$, de donde $\operatorname{Im} T = \mathbb{K}$, luego T es epimorfismo.

(11) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

a) Probar que T es un epimorfismo.

b) Dar la dimensión del núcleo de T.

c) Encontrar una matriz A tal que $T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A?

Solución:

?? Como T es no nula ($T(1, 0, 0) = 1$), la imagen de T tiene dimensión ≥ 1. Como $\dim(\mathbb{K}) = 1$, entonces $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$, luego T es un epimorfismo (Observación 4.3.2 del Apunte).

También se puede hacer directamente: sea $t \in \mathbb{K}$, entonces $T(t,0,0) = t$, luego T es sobreyectiva y por lo tanto epimorfismo.

?? Por el teorema de la dimensión:

$$\dim(\operatorname{Nu} T) = 3 - \dim(\operatorname{Im} T) = 3 - 1 = 2.$$

?? Como $T(1,0,0) = 1$, $T(0,1,0) = 2$, $T(0,0,1) = 3$, se cumple que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Siempre A debe ser 1×3 pues al multiplicar por el vector columna 3×1 debe quedar una constante, que en el lenguaje de las matrices es una matriz 1×1.

(12) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios anteriores son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos. Para las que sean isomorfismos, hallar la inversa.

Solución:

?? ?? $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2$, $T(x,y,z) = (x+z, y-z)$. En este caso $\operatorname{Nu}(T) = \{(x,y,z) : x+z = 0 = y-z\} = \{t(-1,1,1) : t \in \mathbb{K}\}$. Luego, $\dim(\operatorname{Nu}(T)) = 1$ y, por lo tanto, T no es monomorfismo. Por el teorema de la dimensión, $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3 - \dim(\operatorname{Nu}(T)) = 3 - 1 = 2$. Como el codominio tiene dimensión 2, T es epimorfismo.

?? ?? Como la Traza es no nula, por el ejercicio ?? se sigue que Tr es un epimorfismo. Por otro lado, por el teorema de la dimensión $\dim(\operatorname{Nu}(T)) = n^2 - \dim(\operatorname{Im}(T)) = n^2 - 1$. Este valor solo puede ser cero cuando $n = 1$ (en ese caso Tr es la identidad). Es decir, Tr es monomorfismo si y solo si $n = 1$.

?? ?? $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

Caso 1. Si $q(x) = 0$, entonces $T = 0$ y no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

Caso 2. Si $q(x) \neq 0$, como el producto de polinomios no nulos es no nulo, en ese caso T es monomorfismo.

De otro lado, $\operatorname{Im}(T)$ es el conjunto de polinomios que son múltiplos de $q(x)$, más algebraicamente $\operatorname{Im}(T) = q(x)\mathbb{K}[x]$. Si $q(x)$ es una constante c no nula, entonces T es sobreyectiva ($p(x) = T\left(\frac{1}{c}p(x)\right)$). Si $q(x)$ no es constante, entonces T no es sobreyectiva: por ejemplo, no existe $p(x)$ tal que $1 = T(p(x)) = q(x)p(x)$. En resumen, T es epimorfismo (y como es monomorfismo por lo tanto resulta isomorfismo) si y solo si $q(x) := c \neq 0$, en este caso la inversa de T es $T^{-1} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ dada por $T^{-1}(p(x)) = \frac{1}{c}p(x)$.

?? ?? $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$. En este caso T es un isomorfismo, pues T tiene inversa, que es la misma T: $(T \circ T)(z) = T(T(z)) = T(\overline{z}) = \overline{\overline{z}} = z$.

?? Vimos en este ejercicio que $T(x,y,z) = (x - y - 2z, 2x + 3z, 3x + 5y + z)$. Veamos que T es un isomorfismo. Alcanzará con ver, por Teorema 4.3.8 dado que la dimensión del espacio de salida es igual a la dimensión del espacio de llegada y ambas son finitas, que T es inyectiva, es decir que $\operatorname{Nu}(T) = 0$. Planteamos, el sistema de ecuaciones correspondiente a $T(x,y,z) = (0,0,0)$:

$$\begin{cases} x - y - 2z &= 0, \\ 2x + 3z &= 0, \\ 3x + 5y + z &= 0. \end{cases}$$

Haciendo operaciones elementales por fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}.$$

Como esta última matriz tiene determinante no nulo $(1 \cdot 2 \cdot (-21))$ es invertible, por lo tanto el sistema tiene solución única, que es la trivial $(0, 0, 0)$.

Es decir, $\mathrm{Nu}(T) = 0 \Rightarrow T$ es monomorfismo $\Rightarrow T$ es un isomorfismo.

Para hallar la inversa, recordemos que la matriz de T respecto de la base canónica A, cumple $T(v) = Av$. Como T es isomorfismo, A debe ser invertible (claramente también vale la vuelta), luego es fácil de ver que $T^{-1}(v) = A^{-1}v$. Como en este caso

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix},$$

tenemos que $T^{-1}(x, y, z) = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (\frac{1}{14}(5x+3y+z), \frac{1}{6}(-x-y+z), \frac{1}{21}(-5x+4y-z))$

?? En el ejercicio vimos que el núcleo es no trivial, luego T no es monomorfismo. Como el espacio de salida y el de llegada tienen la misma dimensión y T no es monomorfismo, tampoco es epimorfismo.

?? Este es otro caso donde T es una transformación lineal entre espacios de la misma dimensión y el núcleo es no trivial (ver el tercer inciso de la solución de ??). Por lo tanto, T no es monomorfismo, ni epimorfismo.

?? En este caso, $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ y por lo tanto no puede ser epimorfismo. En la solución del ejercicio vimos que $\mathrm{Nu}(T) \neq 0$, luego, tampoco es monomorfismo.

?? $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Vimos que T es un epimorfismo, y que $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 2$, por lo tanto no es monomorfismo.

(13) Encontrar un isomorfismo entre
a) $\mathbb{R}^{mn}$ y el conjunto de matrices $m \times n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$.
b) $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.
c) $\mathbb{R}$ y $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ definido como en ejercicio 1 del Práctico 6.

Solución:

(a) Vamos a dar un isomorfismo $T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$. Dada una matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, sea $T(A) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$ (intuitivamente, ponemos las filas de la matriz una al lado de la otra).

T es lineal:

$$\begin{aligned} T(A+\lambda B) &= (a_{11}+\lambda b_{11}, a_{12}+\lambda b_{12}, \ldots, a_{1n}+\lambda b_{1n}, \ldots, a_{m1}+\lambda b_{m1}, \ldots, a_{mn}+\lambda b_{mn}) \\ &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}) + \lambda(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}, \ldots, b_{m1}, \ldots, b_{mn}) \\ &= T(A) + \lambda T(B) \end{aligned}$$

Sabemos que una base de $\mathbb{R}^{m\times n}$ es $\{E^{ij}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, luego $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$. Como $\dim \mathbb{R}^{mn} = mn$ entonces, por Proposición 4.3.8 basta ver que T es inyectiva. Para eso, veamos que $\operatorname{Nu} T = \{0\}$. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $T(A) = 0$, es decir que cada coordenada es 0, luego $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{mn} = 0$ por lo que $A = 0$ con lo cual $\operatorname{Nu} T = \{0\}$.

(b) Vamos a dar un isomorfismo $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$. Sea $T(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n) = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$.

T es lineal: sean $z = (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n)$, $w = (c_1 + id_1, \ldots, c_n + id_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(z+\lambda w) &= T((a_1 + ib_1) + \lambda(c_1 + id_1), \ldots, (a_n + ib_n) + \lambda(c_n + id_n)) \\ &= T(a_1 + \lambda c_1 + i(b_1 + \lambda d_1), \ldots, a_n + \lambda c_n + i(b_n + \lambda d_n)) \\ &= (a_1 + \lambda c_1, b_1 + \lambda d_1, \ldots, a_n + \lambda c_n, b_n + \lambda d_n) \\ &= (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) + \lambda(c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n) \\ &= T(z) + \lambda T(w) \end{aligned}$$

.

T es isomorfismo: como $\dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ (o sea la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es 2n, recordar Ejercicio 18 Práctico 6), por Proposición 4.3.8 basta ver que T es inyectiva. Esto es claro pues $T(z) = 0$ implica $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = (0, 0, \ldots, 0, 0)$, de donde $a_1 = \cdots = a_n = 0$ y $b_1 = \cdots = b_n = 0$ por lo que $z = 0$.

c) Siguiendo la idea de la ayuda, para definir una transformación lineal entre $\mathbb{R}$ y $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ necesitamos una transformación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que $T(x + y) = T(x) \oplus T(y)$, es decir $T(x + y) = T(x)T(y)$ (lleva sumas en productos). Una función que hace esto es la función exponencial de análisis matemático.

Sea entonces $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ dada por $T(x) = e^x$.

T es lineal: $T(x + \lambda y) = e^{x+\lambda y} = e^x \cdot e^{\lambda y} = e^x \cdot (e^y)^\lambda = T(x) \oplus \lambda \odot (T(y))$.

T es biyectiva pues existe $T^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ dada por $T^{-1}(x) = \ln x$.

Por lo tanto T es un isomorfismo.

(14) Shelby y Melina[2] están estudiando sobre la existencia de transformaciones lineales. Llegan a la conclusión de que no existe ninguna transformación lineal tal que

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\dim \operatorname{Im} T = 2$ y $\dim \operatorname{Nu} T = 2$.

b) T inyectiva, con $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (2, 1, 5)$ y $T(e_3) = (7, 2, 10)$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ y $T(-3, 2) = (1, 1)$.

Explicar en cada caso porqué Shelby y Melina tienen razón.

Solución:

(a) Tienen razón porque de existir T como en el enunciado, por Teorema 4.2.8 tendríamos $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Nu} T = 2 + 2$, lo cual es absurdo.

(b) Tienen razón porque por Proposición 4.3.3, una transformación inyectiva lleva un conjunto LI en un conjunto LI. Sin embargo, $\{e_1, e_2, e_3\}$ es LI (pues es base) y $\{(1, 0, 0), (2, 1, 5), (7, 2, 10)\}$ no lo es pues $3(1, 0, 0) + 2(2, 1, 5) - 1(7, 2, 10) = (0, 0, 0)$ (si uno no se da cuenta, chequear que son LD con los métodos del Práctico 6). Por lo tanto no puede existir tal T.

(c) Tienen razón pues de existir una T lineal como en el enunciado, dado que $(-3, 2) = (1, -1) - (2, -1)$ debería cumplirse que $T(-3, 2) = T(1, -1) - T(2, -1)$ (pues las transf. lineales preservan combinaciones lineales). Sin embargo, $T(-3, 2) \neq$

[2]Dos estudiantes del turno mañana.

$T(1,-1) - T(2,-1)$ pues $T(-3,2) = (1,1)$ y $T(1,-1) - T(2,-1) = (1,0) - (0,1) = (1,-1)$. Luego no puede existir tal T.

(15) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Sea $T : \mathbb{K}^6 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ un epimorfismo y W un subespacio de $\mathbb{K}^6$ con $\dim W = 3$. Entonces existe $0 \neq w \in W$ tal que $T(w) = 0$.

b) Sean $T, U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{array}{lll} T(1,0,1) = (1,2,1) & , & T(2,1,0) = (2,1,0), T(-1,0,0) = (1,2,1) \\ U(1,1,1) = (1,1,0) & , & U(3,2,1) = (0,0,1), U(2,2,-1) = (3,-1,2). \end{array}$$

Entonces $T = U$.

c) Si $\dim V$ es impar, entonces no existe ninguna transformación lineal $T : V \to V$ tal que $\operatorname{Nu} T = \operatorname{Im} T$.

d) Sean V y W espacios vectoriales con $\dim V = n = \dim W$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal tal que existe una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es una base, entonces T es un isomorfismo.

Solución:

(a) Verdadero. Como $T : \mathbb{K}^6 \to \mathbb{K}^2$ es un epimorfismo, por Teorema 4.2.8 resulta $\dim \operatorname{Nu} T = 4$. Ahora, analicemos el subespacio $\operatorname{Nu} T \cap W$. Si fuera $\operatorname{Nu} T \cap W = \{0\}$, dado que $\dim W = 3$, por un resultado teórico tendríamos que $\dim \operatorname{Nu} T + W = \dim \operatorname{Nu} T + \dim W - \dim \operatorname{Nu} T \cap W$, es decir que $\dim \operatorname{Nu} T + W = 4 + 3 - 0 = 7$, lo cual es imposible pues $\operatorname{Nu} T + W$ es un subespacio de $\mathbb{K}^6$ (y por lo tanto tiene dimensión ≤ 6). Esto dice que $\operatorname{Nu} T \cap W \neq \{0\}$, por lo que existe $w \neq 0 \in \operatorname{Nu} T \cap W$, es decir existe un $w \neq 0$ en W tal que $T(w) = 0$.

(b) Falso. Exhibamos un vector v tal que $T(v) \neq U(v)$.

Sea $v = (1,1,1)$. Para saber cuanto vale $T(v)$, tenemos que escribir a v como combinación lineal de los vectores $(1,0,1), (2,1,0)$ y $(-1,0,0)$ (notar que son una base pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{\substack{F_1 - F_2 \\ F_1 - F_3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$).

Para hallar la combinación lineal ampliamos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y resolvemos. La solución es $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ por lo que $v = (1,0,1) + (2,1,0) + 2(-1,0,0)$. Entonces $T(v) = T(1,0,1) + T(2,1,0) + 2T(-1,0,0) = (1,2,1) + (2,1,0) - 2(1,2,1) = (1,-1,-1)$. Por otro lado $U(v) = (1,1,0)$. Como $T(v) \neq U(v)$, entonces $T \neq U$.

Comentario: Pueden intentar pensar este ejercicio usando matrices de transformaciones lineales.

(c) Verdadero. De existir T, por Teorema 4.2.8, como V es de dimensión finita tendríamos $\dim V = \dim NuT + \dim imT = \dim NuT + \dim \operatorname{Nu} T = 2 \dim \operatorname{Nu} T$. Sin embargo, como la dimensión de un subespacio es un entero no negativo, esto diría que $\dim V$ es par, lo cual es absurdo pues contradice la hipótesis.

(d) Verdadero. Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base tal que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es base. Por 4.3.8, para ver que T es isomorfismo basta ver que T es epimorfismo.

Dado $w \in W$, se tiene que $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$ para algunos $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Como T es lineal, se cuple $w = T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)$, de donde T es epimorfismo.

(16) Sean V, W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sea W^V el espacio vectorial de todas las funciones de V en W. Denotamos $\operatorname{Hom}(V, W) := \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$.

a) Probar que $\operatorname{Hom}(V, W)$ es un subespacio de W^V.

b) Sean T, U transformaciones lineales de V en V. Probar que $T \circ U$ es una transformación lineal, donde $\circ$ denota la composición usual de funciones.

Solución: Ver Sección 4.4 del apunte. El item (a) es Teorema 4.4.1 y el item (b) es Teorema 4.4.3.