Práctico 1: Cuerpos y números complejos

1. Sea $(\mathbb{K}, +, .)$ un cuerpo y sea 0 el elemento neutro de $+$. Demostrar que:

   (a) $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{K}$.

   (b) Si $a, b \in \mathbb{K}$ y $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

2. Sea n un número natural, $n \neq 1$. Denotamos por $\mathbb{Z}_n$ al conjunto de clases de números enteros módulo n. Utilizando los resultados de aritmética modular vistos en Álgebra I/Matemática discreta, sabemos que existen operaciones

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \qquad \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n.$$

   Demostrar que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

3. Decidir si la siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) Sean $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo y $a \in \mathbb{K}$. Si existe un natural n tal que $n\,a = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $n\,a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n\text{-veces}}$).
   `Sugerencia:` probar que si $a \neq 0$ entonces $n\,a = 0 \iff n\,1 = 0$.

   (b) Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Si existen $a \in \mathbb{k}$ no nulo y un natural n tales que $n\,a = 0$, entonces $n\,x = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

4. Demostrar que en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ se cumple:

   (a) $\overline{\overline{z}} = z$.

   (b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

   (c) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

   (d) $|\overline{z}| = |z|$.

   (e) $z\overline{z} = |z|^2$.

   (f) $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$, para todo $z \neq 0$.

   (g) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

   (h) $|z| \geq |\mathfrak{Re}(z)|$ y $|z| \geq |\mathfrak{Im}(z)|$.

   (i) $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$.

5. Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

6. Determinar todos los números complejos z tales que $z + \frac{1}{z}$ es un número real.

7. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

   (a) $(-1 + i)(3 - 2i)$

   (b) $i^{131} - i^9 + 1$

   (c) $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{i}}$

   (d) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}$

   (e) $\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{4+2i}{6i}$

   (f) $\dfrac{3i}{1-2i} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$.

   (g) $2e^{\mathrm{i}\pi} - i$

   (h) $i^3 - 2i^{-7} - 1$

   (i) $(-2 + i)(1 + 2i)$.

8. Sean $z = 1 + i$ y $w = \sqrt{2} - i$. Calcular:

   (a) z^{-1}; $1/w$; z/w; w/z.

   (b) $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2017}$.

   (c) $(z(z + w)^2 - iz)/w$.

9. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:

   (a) $a\ \mathrm{Im}(z) = 2$. ¿Es único?

   (b) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?

   (c) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.

   (d) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

10. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$$

   (a) Verificar si $(1, 1)$ es una solución y encontrar una solución para cada sistema.
   (b) Verificar si dadas dos soluciones (a, b) y (c, d) entonces $(a, b) + (c, d)$ es solución.

11. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$. Comparar con el ejercicio anterior.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$$

12. Resolver los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \sqrt{2}y + z = 0 \\ \sqrt{2}x + z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} ix + y = 0 \\ 3x + 2iy = 0. \end{cases}$$

13. Sean a, b, c, d, e escalares en un cuerpo $\mathbb{K}$. Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} ay + bz = c \\ dx + ez = 0, \end{cases}$$

mostrar que si tiene soluciones, estas están en $\mathbb{K}^3$. ¿Vale esto para cualquier sistema? Comparar con el Ejercicio 12.

Ejercicios adicionales

1. (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se da si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2. Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|$$

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.
   (b) $K = i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = it, t \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones usuales de $\mathbb{C}$, es un cuerpo.
   (c) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

4. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

   (a) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-1}, 0 \leq \theta < 2\pi$ (b) $3i(1 + i)^4$ (c) $\dfrac{1+i}{1-i}$

5. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 + |z|z^2(1 - i) = 0$.

6. Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

   (a) $\dfrac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$.

   (b) $z - 2 + \dfrac{1}{z-2}$.

   (c) $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|^2$.

7. Sea $p \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{p} + \frac{1}{\overline{p}} - \frac{1}{|p|^2}$.

8. Mostrar que todas las soluciones de la ecuación $z^4 + (-4+2i)z^2 - 1 = 0$ son $-1+\sqrt{1-i}$, $-1-\sqrt{1-i}$, $1+\sqrt{1-i}$ y $1-\sqrt{1-i}$.