

Sistemas de ecuaciones lineales: Método de Gauss.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

- 1 **Introducción**
- 2 El Método de Gauss
- 3 Qué operaciones hacer...
- 4 Mismas soluciones
- 5 Una, ninguna, infinitas

En este archivo presentamos el Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

También respondemos las siguientes preguntas:

- Qué operaciones hacer para transformar un sistema cualquiera en otro asociado una MERF? Siempre es posible hacer esto?
- Por qué estos sistemas tienen las mismas soluciones?
- Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? Una o infinitas?

Como antes, seguiremos la Sección 1.2 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín García y Alejandro Tiraboschi. Usaremos la misma numeración de estas notas para las Definiciones, Teoremas, etc. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

- 1 Introducción
- 2 El Método de Gauss
- 3 Qué operaciones hacer...
- 4 Mismas soluciones
- 5 Una, ninguna, infinitas

El **Método de Gauss** para resolver el sistema de ecuaciones

$$AX = Y$$

consiste en transformar este sistema usando operaciones elementales por fila en otro sistema

$$BX = Z$$

que tenga las mismas soluciones y que B sea una MERF.

Como dijimos en el archivo anterior este sistema será más fácil de resolver porque B es MERF.

A continuación explicaremos en 3 pasos el **Método de Gauss** para resolver el sistema de ecuaciones

$$AX = Y.$$

Ejemplificaremos los pasos con el sistema

$$(E) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tarea

- 1 Verificar que (E) es el sistema del Ejemplo 3 del primer archivo.
- 2 Anotar el sistema (E) en una hoja y sigan los siguientes pasos en la misma para ir comprendiendo.

Primer paso: Matriz ampliada

Definición 1.2.7

A' se llama
matriz ampliada.

- Armar la matriz

$$A' = (A|Y),$$

es decir, le agregamos a A una columna igual a Y .

Ejemplo

La matriz ampliada del sistema (E) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

Notación

Usaremos una línea vertical para separar en A' la matriz A de la columna Y .

Segundo paso: reducir la matriz ampliada

- Usar operaciones elementales por filas para transformar la matriz ampliada A' en una matriz B' de la forma

$$B' = (B|Z)$$

donde B es una MERF y Z es una columna.

Ejemplo

$$\begin{aligned} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_3 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = B' \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

B **Z**

Tercer paso: despejar y describir el conjunto de soluciones

- Escribir explícitamente el sistema $BX = Z$.
- Despejar en cada ecuación la incógnita correspondiente al 1 principal.
- Describir el conjunto de soluciones. Hay tres opciones: tener sólo una solución; infinitas, parametrizadas por las incógnitas que no corresponden a 1's principales; no tener solución.

Ejemplo

$$BX = Z \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}x_3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

Entonces el conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ es

$$\left\{ (-2x_3 + 1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por ej., si $x_3 = 1$, entonces $(-1, 0, 1)$ es una solución del sistema.

Es posible que se hagan algunas de las siguientes preguntas:

- Qué operaciones hacer para transformar A' en B' ? Siempre es posible encontrar B' ?
- Por qué las soluciones de $BX = Z$ son también las soluciones del sistemas $AX = Y$?
- Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? Una o infinitas?
- Hasta cuándo durará el coronavirus?

Responderemos estas preguntas luego de hacer otro ejemplo de cómo funciona el Método de Gauss.

Ejemplo

Problema

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$(E) \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Respuesta

El conjunto de soluciones es

$$\text{Sol}(E) = \left\{ \left(\frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostración

Hacer los siguientes pasos en sus hojas para encontrar las soluciones del sistema.

- Armar la matriz ampliada del sistema (E).
- Intercambiar la fila 1 y la fila 3.
- Cambiar la fila 4 por $F_4 - 5F_1$.
- Cambiar la fila 5 por $F_5 - F_1$.
- Intercambiar la fila 2 y la fila 3.
- Cambiar la fila 4 por $F_4 - 2F_2$.
- Cambiar la fila 5 por $F_5 - F_2$.
- Cambiar la fila 1 por $F_1 - F_2$.
- Multiplicar la fila 3 por $\frac{1}{2}$.
- Cambiar la fila 2 por $F_2 + F_3$.
- Cambiar la fila 1 por $F_1 - F_3$.
- Despejar x_1 , x_2 y x_3 .
- Escribir el conjunto de soluciones.

- 1 Introducción
- 2 El Método de Gauss
- 3 Qué operaciones hacer...
- 4 Mismas soluciones
- 5 Una, ninguna, infinitas

¿Cómo hacemos para transformar a A' en B' usando operaciones elementales por fila?

La Observación 1.2.2 nos da un algoritmo para reducir una matriz a una MRF (una MERF salvo que los 1 principales pueden no estar escalonados y filas nulas en cualquier lugar).

A continuación reescribimos este algoritmo para MERF.

En la práctica no es necesario seguir al pie de la letra el algoritmo. Lo damos para que tengan una idea de como comenzar. Luego de hacer ejercicios se irán dando cuenta de como hacer menos cuentas. Al final daremos algunos tips que les pueden ser de utilidad.

Siempre es posible encontrar B' ?

Sí, gracias al Teorema 1.2.3.

- 1 Buscamos la primer fila no nula. Digamos que es la fila F_s .
- 2 Sea a el primer elemento no nulo de dicha fila. Convertimos este elemento en un 1 principal multiplicando la fila por $\frac{1}{a}$.

$$\begin{array}{c} F_s \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & a & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a} F_s} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \frac{b}{a} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

- 3 Anulamos todos los elementos por encima y por debajo del 1 principal. Por ejemplo, si en la fila F_r esta el número $t \neq 0$, entonces le sumamos a esta fila $-tF_s$.

$$\begin{array}{c} F_s \\ F_r \end{array} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 1 & \frac{b}{a} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & t & u & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{F_r - tF_s} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 1 & \frac{b}{a} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 0 & u - t\frac{b}{a} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

- ④ Buscamos la siguiente fila no nula por debajo de F_s . Repetimos el paso 2 y 3 con esta fila.
- ⑤ De esta manera iremos bajando en las filas hasta que lleguemos a la última fila.
- ⑥ Finalmente, intercambiando las filas, ponemos los 1 principal de forma escalonada y las filas nulas al final.

Tips

- Pueden empezar por intercambiar filas de acuerdo a su conveniencia.
- En vez de multiplicar por una fracción para hacer un 1 principal, pueden intercambiar filas por una que ya tenga un 1 en la columna.
- Para hacer menos cuentas pueden anular sólo los elementos por debajo de los 1 principales. Una vez que llegaron al final comenzar a anular todos los elementos por encima de los 1 principales (así tienen que hacer menos cuentas).

- 1 Introducción
- 2 El Método de Gauss
- 3 Qué operaciones hacer...
- 4 Mismas soluciones**
- 5 Una, ninguna, infinitas

Por qué las soluciones del sistema $BX = Z$ son también las soluciones del sistema $AX = Y$?

La justificación a esto es el Teorema 1.2.2 para sistemas homogéneos (cuando $Y = 0$) y el Teorema 1.2.9 en el caso general.

Las demostraciones de estos teoremas consisten en escribir de forma precisa las siguientes afirmaciones.

- **Teorema 1.1.2:** Sistemas equivalentes tienen las mismas soluciones. Estos son sistemas cuyas ecuaciones se escriben como combinaciones lineales unas de otras. Como las ecuaciones son lineales, si hacemos combinaciones lineales entre ellas siguen manteniéndose las igualdades. Por eso tienen iguales soluciones.
- Las operaciones elementales por filas son la traducción al lenguaje de matrices de las combinaciones lineales de ecuaciones.
- Teorema 1.2.1: Las operaciones elementales son inversibles. Es decir, si la matriz B' se obtiene de A' por operaciones elementales, entonces podemos volver de B' a A' usando operaciones elementales.
- Los dos item anteriores nos dicen que los sistemas correspondientes a A' y B' son equivalentes. Entonces podemos aplicar el **Teorema 1.1.2** para concluir que tienen las mismas soluciones.

- 1 Introducción
- 2 El Método de Gauss
- 3 Qué operaciones hacer...
- 4 Mismas soluciones
- 5 Una, ninguna, infinitas**

Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? Una o infinitas?

Las respuestas a estas preguntas dependen de la forma de B y Z .

Asumamos que $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $Z \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \boxed{1} & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \boxed{1} & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \boxed{1} & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

\uparrow k_1 \uparrow k_2 \uparrow k_r

El sistema $BX = Z$ tiene la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_{k_1} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j & = & z_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{k_r} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j & = & z_r \\ & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_m \end{array} \right.$$

Teorema

El sistema $BX = Z$ tiene solución si y sólo si

$$z_{r+1} = z_{r+2} = \dots = z_m = 0.$$

La demostración del Teorema consiste en observar bien el sistema.

Para convencerse de lo que sigue conviene que también lo escriban ustedes en sus hojas.


Teorema

El sistema $BX = Z$ tiene solución si y sólo si

$$z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0.$$

Demostración

\Rightarrow) Si el sistema tiene solución entonces $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$,
pues si alguno de estos z 's fuera no nulo tendríamos un **absurdo**.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k_1} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j & = & z_r \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & z_i \neq 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array} \right.$$


Teorema

El sistema $BX = Z$ tiene solución si y sólo si

$$z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0.$$

Demostración

\Leftarrow) Si $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$, entonces $x_{k_1} = z_1, x_{k_2} = z_2, \dots, x_{k_r} = z_r$ y todos los otros $x_j = 0$ es una solución al sistema.

En efecto, reemplazando en el sistema vemos que las igualdades son satisfechas:

$$\left\{ \begin{array}{llll} z_1 & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} 0 & = & z_1 \\ z_2 & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} 0 & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots & & \\ z_r & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} 0 & = & z_r \\ & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_m \end{array} \right.$$

En la demostración de \Leftarrow) encontramos una solución haciendo cero todas las incógnitas que no se corresponden con 1 principales.

Pero le podríamos haber dado cualquier otro valor y así encontrar otras soluciones, siempre y cuando hubiera incógnitas que no se corresponden con 1 principales.

Esto que estamos diciendo se puede enunciar como teoremas.

Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y la cantidad de 1 principales es igual a la cantidad de incógnitas. Entonces el sistema $BX = Z$ tiene una única solución, la cual es $X = Z$.

Demostración

En este caso, el sistema $BX = Z$ tiene la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & z_1 \\ x_2 & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & z_n \\ 0 & = & z_{n+1} \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & = & z_m \end{array} \right.$$

y la solución queda determinada explícitamente.

Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y hay más incógnitas que 1 principales. Entonces el sistema $BX = Z$ tiene infinitas soluciones parametrizadas por los valores que toman las incógnitas que no se corresponden con los 1 principales.

Explicitamente, las soluciones son de la forma

The diagram illustrates the structure of the solution equations. On the left, a red oval labeled "variables principales" points to the variables x_{k_1} , x_{k_2} , and x_{k_r} in the equations. On the right, a red oval labeled "variables libres" points to the variables x_j in the same equations. The equations are:

$$\begin{aligned}x_{k_1} &= z_1 - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j \\x_{k_2} &= z_2 - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j \\&\vdots \\x_{k_r} &= z_r - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j\end{aligned}$$

y los x_j con $j \neq k_1, \dots, k_r$ pueden tomar cualquier valor real.

Demostración

Reemplacen en sus hojas y chequen que se satisfacen las ecuaciones del sistema.

Conclusión

Para saber si el sistema $AX = Y$ tiene o no solución, una o infinitas, lo transformamos a uno de la forma $BX = Z$ con B MERF usando operaciones elementales por filas y aplicamos los teoremas anteriores.

Caso particular

Un sistema $AX = Y$ se dice **homogéneo** si $Y = 0$.

Estos sistemas siempre tienen solución pues $X = 0$ es una solución.