Práctico 3

Álgebra de matrices

Objetivos.

- Aprender a operar con matrices (sumar, multiplicar, cálcular inversas).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices.
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones.

Ejercicios. Algunos ejercicios tienen ayuda, las que hemos puesto al final del archivo para que los puedan pensar un poco antes de leerlas.

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcular los productos AB, BA, AC, CA, BC, CB, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA.

(b) Verificar que en los productos de 3 matrices da lo mismo asociar de una u otra forma.

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Repetir el ejercicio (1) con aquellos productos que tengan sentido.

(3) Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

(a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

(b) $AB \neq BA$.

(c) $A^2 = -\operatorname{Id}_2$.

(d) $A^2 = A \neq \operatorname{Id}_2$

(ver ayuda al final)

(4) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de Id_2. (ver ayuda al final)

(5) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. (ver ayuda al final)

(6) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

(ver ayuda al final)

(7) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Calcular la traza de las matrices A, B y C del ejercicio (1) y las obtenidas en (1a).

(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

(ver ayuda al final)

(8) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son inversibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(9) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I$.

(10) ¿ Es cierto que si A y B son matrices inversibles entonces $A+B$ es una matriz inversible? Justificar su respuesta.

(11) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{R}$.

(12) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(13) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(14) Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

(a) Si v es solución de $BX = Z$ y Z es solución de $AX = Y$, entonces v es solución de $(AB)X = Y$.

(b) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

(c) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Más ejercicios. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(15) Sea A matriz 2×2 tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

(a) Probar que $A^2 = 0$.

(b) ¿Es cierta la recíproca?

(16) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(17) Sea $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $AD = (d_{jj} a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(18) Probar que si A es una matriz cuadrada y diagonal tal que $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, entonces $A = 0$.

(19) Probar que si A y B son matrices $n \times n$ *que conmutan entre sí*, entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que:

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

(20) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si A y B son matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra, entonces A o B es diagonal.

(b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que AB es una matriz inversible.

(c) Existen una matriz 2×3, A, y una matriz 3×2, B, tales que AB es una matriz inversible.

(21) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La *matriz traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

(a) Dar las matrices traspuestas de las matrices A, B y C de los ejercicios (1) y (2).

(b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A + cB)^t = A^t + cB^t, \qquad\qquad (BC)^t = C^t B^t.$$

(c) Probar que si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible, entonces D^t también lo es y $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

(22) Probar las siguientes afirmaciones

(a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales, entonces $AB = BA$.

(b) Si $A = c\,\mathrm{Id}_n$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejercicios un poco más difíciles. Si ya hizo los primeros ejercicios ya sabe lo que tiene que saber. Los siguientes ejercicios le pueden servir si esta muy aburridx con la cuarentena.

(23) Para cada $n \in \mathbb{N}$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

(24) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $A - \mathrm{Id}$ es inversible. (ver ayuda al final)

(25) Una matriz A se dice *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz B se dice *antisimétrica* si $B^t = -B$. Probar que toda matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

Ayudas. (3) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(4) Elegir matrices B apropiadas con muchos ceros y un 1.

(5) La prueba es similar a la demostración es similar a la demostración de la asociatividad del producto en la página 19 del archivo “Álgebras de matrices 1” del teórico.

(6) El objetivo del ejercicio es completar los puntos suspensivos en la siguiente frase:

“$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si A y B satisfacen ..... ”

Desarrollen el cuadrado de la suma $A+B$ usando que el producto de matrices es distributivo y vean que les “sobra” para obtener la fórmula del binomio.

Misma idea para el item (b).

(7b) Usar la notación de subíndices como en el ejercicio (5).

(24) Pensar en la fórmula de $\sum_{i=0}^{n} a^i$ vista en Álgebra I.