

Práctico 6

ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

Ejercicios resueltos. Las siguientes son posibles resoluciones para los ejercicios del Práctico. No están las soluciones de los ejercicios de Repaso.

- (1) Probar que el conjunto de números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial con las operaciones $x \oplus y = x \cdot y$ y $\lambda \odot x = x^\lambda$.

SOLUCIÓN: Veamos que $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ cumple las 8 propiedades de espacio vectorial.

Dados $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$, por lo que se cumple la conmutatividad ((*) conmutatividad del producto).

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \oplus (y \oplus z) = x(y \oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y)z = (x \oplus y) \oplus z$, de donde se cumple la asociatividad ((*) usamos la asociatividad del producto).

Dado $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$, luego 1 es neutro para \oplus (notar que $1 \in \mathbb{R}_{>0}$).

Dado $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\frac{1}{x} \oplus x = \frac{1}{x} \cdot x = 1$, luego $\frac{1}{x}$ es el opuesto de x (notar que $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_{>0}$).

Dado $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $1 \odot x = x^1 = x$ (notar que aquí 1 es el escalar de \mathbb{R}), luego se cumple el axioma del neutro para la multiplicación.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \odot (b \odot x) = a \odot x^b = (x^b)^a = x^{ab} = (ab) \odot x$, por lo que se cumple la asociatividad del producto por escalar.

Dados $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ y $a \in \mathbb{R}$, $a \odot (x \oplus y) = a \odot (xy) = (xy)^a = x^a \cdot y^a = x^a \oplus y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$, por lo que se cumple la distributiva respecto de suma de vectores.

Dados $x \in \mathbb{R}_{>0}$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $(a + b) \odot x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = x^a \oplus x^b = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$, por lo que se cumple la distributiva respecto de suma de escalares.

Como cumple las 8 propiedades, $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \odot)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

- (2) Si (V, \oplus, \odot) es un \mathbb{K} -espacio vectorial y S es un conjunto cualquiera, sea

$$V^S = \{f : S \rightarrow V : f \text{ es una función}\},$$

el conjunto de todas las funciones de S en V . Definimos en V^S la suma y el producto por escalares de la siguiente manera: Si $f, g \in V^S$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces $f + g : S \rightarrow V$ y $c \cdot f : S \rightarrow V$ están dadas por

$$(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad (c \cdot f)(x) = c \odot f(x), \quad \forall x \in S.$$

Probar que $(V^S, +, \cdot)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

SOLUCIÓN: Veamos que $(V^S, +, \cdot)$ cumple las 8 propiedades de \mathbb{K} -espacio vectorial. Usaremos que dos funciones f y g son iguales si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$.

Conmutatividad de \oplus : $(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x) = g(x) \oplus f(x) = (g + f)(x)$. Como vale para todo $x \in S$, se tiene que $f + g = g + f$ (hemos usado que \oplus en V es conmutativa por ser V un \mathbb{K} -espacio vectorial).

Asociatividad de \oplus : $(f + (g + h))(x) = f(x) \oplus (g + h)(x) = f(x) \oplus (g(x) \oplus h(x)) = (f(x) \oplus g(x)) \oplus h(x) = (f + g)(x) \oplus h(x) = ((f + g) + h)(x)$. Como vale para todo $x \in S$, se tiene que $f + (g + h) = (f + g) + h$ (hemos usado que \oplus en V es asociativa por ser V un \mathbb{K} -espacio vectorial).

Neutro: Sea $\bar{0}$ la función de S en V tal que $\bar{0}(x) = 0_V$ para todo $x \in S$, donde 0_V es el neutro de V . Entonces, dada $f \in V^S$, $(\bar{0} + f)(x) = \bar{0}(x) \oplus f(x) = 0_V \oplus f(x) = f(x)$ para todo $x \in S$, luego $\bar{0} + f = f$.

Opuesto: Dada $f \in V^S$, sea $\overline{-f} : S \rightarrow V$ dada por $\overline{-f}(x) = -f(x)$, el opuesto de $f(x) \in V$ (que existe por ser V un \mathbb{K} -espacio vectorial). Entonces $(\overline{-f} + f)(x) = \overline{-f}(x) \oplus f(x) = -f(x) \oplus f(x) = 0_V = \bar{0}(x)$, luego $\overline{-f} + f = \bar{0}$.

Neutro para \cdot : Dada $f \in V^S$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \odot f(x) = f(x)$ (pues se cumple el axioma del neutro para \odot en V). Como vale para todo $x \in S$, $1 \cdot f = f$.

Asociatividad de \cdot : $(\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x) = \lambda \odot (\mu \cdot f)(x) = \lambda \odot (\mu \odot f(x)) = (\lambda \mu) \odot f(x) = ((\lambda \mu) \cdot f)(x)$. Como vale para todo $x \in S$, se tiene que $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \mu) \cdot f$.

Distributiva(I): $(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \odot (f + g)(x) = \lambda \odot (f(x) \oplus g(x)) = (\lambda \odot f(x)) \oplus (\lambda \odot g(x)) = (\lambda \cdot f)(x) \oplus (\lambda \cdot g)(x) = (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x)$. Como vale para todo $x \in S$, se tiene $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.

Distributiva(II): $((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda + \mu) \odot f(x) = \lambda \odot f(x) \oplus \mu \odot f(x) = (\lambda \cdot f)(x) \oplus (\mu \cdot f)(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x)$ para todo $x \in S$, luego $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$.

Notar que en todas las propiedades, usamos fuertemente que V es \mathbb{K} -espacio vectorial. Como $(V^S, +, \cdot)$ cumple las 8 propiedades de espacio vectorial, es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

- (3) Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

SOLUCIÓN: Si $\lambda v = \mu v$, sumando el opuesto de μv a ambos lados (que existe pues V es \mathbb{K} -espacio vectorial) resulta $\lambda v - \mu v = 0$. Por propiedad distributiva resulta $(\lambda - \mu)v = 0$. Por Proposición 3.1.2 ítem (3), al ser $v \neq 0$ debe ser $\lambda - \mu = 0$, con lo que $\lambda = \mu$.

- (4) Decidir si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 son subespacios vectoriales.

(a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

(b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.

(d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

(e) $B \cup D$.

(f) $B \cap D$.

SOLUCIÓN:

(a) **No.** Los vectores $v = (1, 0, 0)$ y $w = (0, 1, 0)$ pertenecen a A , sin embargo $v + w = (1, 1, 0) \notin A$.

(b) **Sí.** Es no vacío pues $0 \in A$. Ahora sean $v = (x_1, x_2, x_3), w = (y_1, y_2, y_3) \in B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, por hipótesis

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 = y_1 + y_2 + y_3. \quad (*)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} v + \lambda w &= (x_1, x_2, x_3) + \lambda(y_1, y_2, y_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) \\ &= (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3). \end{aligned}$$

Para ver si $v + \lambda w \in B$ debemos sumar todas las componentes:

$$\begin{aligned} (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2) + (x_3 + \lambda y_3) &= x_1 + \lambda y_1 + x_2 + \lambda y_2 + x_3 + \lambda y_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (\lambda y_1 + \lambda y_2 + \lambda y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + \lambda(y_1 + y_2 + y_3) \\ &\stackrel{(*)}{=} 0 + \lambda \cdot 0 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego $v + \lambda w \in B$.

(c) **No.** $(1, 0, 0) \in C$ y $(-1)(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin C$.

(d) **Sí.** Sean $v = (x_1, x_2, 0)$, $w = (y_1, y_2, 0) \in D$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} v + \lambda w &= (x_1, x_2, 0) + \lambda(y_1, y_2, 0) \\ &= (x_1, x_2, 0) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda \cdot 0) \\ &= (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, 0) \in D \text{ (dado que su tercera componente es nula).} \end{aligned}$$

(e) **No.**

$$B \cup D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \vee x_3 = 0\}.$$

$(0, 1, -1) \in B$, por lo tanto $(0, 1, -1) \in B \cup D$. $(1, 1, 0) \in D$, por lo tanto $(1, 1, 0) \in B \cup D$.

Ahora bien, $(0, 1, -1) + (1, 1, 0) = (1, 2, -1) \notin B \cup D$ pues $1 + 2 - 1 \neq 0$ y $-1 \neq 0$.

(f) **Sí.** Por Teorema 3.2.8, como B y D son subespacios, $B \cap D$ es subespacio. También se puede hacer directamente:

$$\begin{aligned} B \cap D &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, 0) : x_1 + x_2 = 0\} \\ &= \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es no vacío pues $0 \in B \cap D$. Además, si $(t, -t, 0), (s, -s, 0) \in B \cap D$, y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (t, -t, 0) + \lambda(s, -s, 0) &= (t, -t, 0) + (\lambda s, -\lambda s, 0) \\ &= (t + \lambda s, -t - \lambda s, 0) \\ &= (t + \lambda s, -(t + \lambda s), 0) \in B \cap D. \end{aligned}$$

(5) (a) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{K}^{n \times n}$ son subespacios vectoriales.

- (i) El conjunto de matrices invertibles.
 - (ii) El conjunto de matrices de traza cero $\{A \in \mathbb{K}^{n \times n} : \text{Tr}(A) = 0\}$. ¿Qué pasa si cambiamos 0 por cualquier otro escalar de \mathbb{K} ?
 - (iii) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.
- (b) Decidir si el subconjunto de polinomios de grado 2, junto con el polinomio nulo, es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$.
- (c) Decidir si $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

SOLUCIÓN:

(5)((a))i **No.** En general la suma de matrices invertibles no es invertible. Un contraejemplo sencillo es sumar a una matriz invertible su opuesto, por ejemplo $\text{Id} - \text{Id} = 0$.

(5)((a))ii **Sí.** Es no vacío pues la traza de la matriz nula es 0, luego pertenece al subespacio. Además, dadas A, B de traza cero y $\lambda \in \mathbb{K}$, por propiedades de la función traza vistas en Práctico 3, $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr} A + \lambda \text{Tr} B = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$. Si cambiamos 0 por otro escalar deja de ser subespacio, porque por ejemplo la matriz nula no pertenecería.

(5)((a))iii **Sí.** El conjunto es

$$W = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) : AB = BA\}.$$

W es no vacío pues la matriz nula está en W ya que $0 \cdot B = 0 = B \cdot 0$. Veamos que si $A_1, A_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces, $A_1 + \lambda A_2 \in W$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}(A_1 + \lambda A_2)B &= A_1B + \lambda A_2B \\ &= BA_1 + \lambda BA_2 \\ &= BA_1 + B(\lambda A_2) \\ &= B(A_1 + \lambda A_2).\end{aligned}$$

Luego, $A_1 + \lambda A_2 \in W$. Por lo tanto, W es un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

(b) No. $x^2 + x$ es un polinomio de grado 2 y $-x^2$ también es un polinomio de grado 2, pero $(x^2 + x) + (-x^2) = x^2 + x - x^2 = x$ es de grado 1, por lo que no pertenece al subconjunto.

(c) Sí. La función constantemente 0 es continua por lo que el subconjunto es no vacío. Además, por propiedades vistas en Análisis Matemático I, suma y producto de funciones continuas es continuo, por lo que si f, g son continuas, $f + \lambda g$ también.

- (6) Sea L una recta en \mathbb{R}^2 . Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 .

SOLUCIÓN: Una condición necesaria y suficiente es que la recta pase por el $(0, 0)$. De Ejercicio 15 Práctico 1 se deduce que si la recta pasa por el $(0, 0)$ es subespacio, y de Ejercicio 14 Práctico 1 se deduce que si la recta no pasa por el $(0, 0)$ entonces no es subespacio.

- (7) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V . Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

SOLUCIÓN:

(\Rightarrow) Lo haremos por el absurdo: supongamos que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio y

$$W_1 \not\subseteq W_2 \wedge W_2 \not\subseteq W_1.$$

Como $W_1 \not\subseteq W_2 \Rightarrow$ existe $w_1 \in W_1, w_1 \notin W_2$.

Como $W_2 \not\subseteq W_1 \Rightarrow$ existe $w_2 \in W_2, w_2 \notin W_1$.

Como $W_1 \cup W_2$ es un subespacio $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.

Si $w = w_1 + w_2 \in W_1 \Rightarrow w_2 = w - w_1 \in W_1$, absurdo.

Análogamente, si $w = w_1 + w_2 \in W_2 \Rightarrow w_1 = w - w_2 \in W_2$, absurdo.

Por lo tanto, se cumple que $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

(\Leftarrow) Si $W_1 \subseteq W_2$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ que es un subespacio.

Análogamente, si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$ que es un subespacio.

- (8) Sean $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$ y $z = (3, 4)$ vectores de \mathbb{R}^2 .

- (a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w de dos maneras distintas, con coeficientes todos no nulos.
(b) Escribir z como combinación lineal de u y v .
(c) Escribir z como combinación lineal de u y w .
(d) Escribir z como combinación lineal de v y w .

SOLUCIÓN:

(a) $z = (3, 4) = (1, 1) + 2(1, 0) + 3(0, 1) = u + 2v + 3w$. De otra manera, $(3, 4) = 5(1, 1) - 2(1, 0) - 1(0, 1) = 5u - 2v + (-1)w$.

(b) $z = (3, 4) = 4(1, 1) + (-1)(1, 0) = 4u + (-1)v$.

$$(c) z = (3, 4) = 3(1, 1) + 1(0, 1) = 3u + w.$$

$$(d) z = (3, 4) = 3(1, 0) + 4(0, 1) = 3v + 4w.$$

(9) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.

(a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del Ejercicio 7 - Práctico 2.

(b) Los conjuntos descritos en el Ejercicio 8 - Práctico 2.

(c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] : p'(1) = 0 \text{ y } p(2) = p(3)\}$

(d) $W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \right\}.$

SOLUCIÓN: Las soluciones se basan en las soluciones encontradas en el práctico 2.

(a) Analicemos las soluciones de los sistemas homogéneos del ejercicio 5, práctico 2.

El primer sistema es

$$\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $x = 0, y = 0, z = 0$, luego el subespacio de soluciones es $\{0\}$ y así 0 es un generador.

El segundo sistema es

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Hemos visto que las soluciones del sistema son

$$\{(4t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(4, 3, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto $(4, 3, 1)$ es un generador.

Finalmente, el tercer sistema es

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Hemos visto que las soluciones del sistema son $\{(u - 2v, u - 2v, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$. Como

$$\begin{aligned} (u - 2v, u - 2v, u, v) &= (u, u, u, 0) + (-2v, -2v, 0, v) \\ &= u(1, 1, 1, 0) + v(-2, -2, 0, 1), \end{aligned}$$

tenemos que $(1, 1, 1, 0), (-2, -2, 0, 1)$ generan el espacio de soluciones de este sistema.

(b) Analicemos cada sistema del ejercicio 8, práctico 2.

(i) El primer sistema es:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases}$$

Se encontró que el conjunto de b_i 's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : -2b_1 + b_2 + 3b_3 = 0\} \\ &= \{(b_1, 2b_1 - 3b_3, b_3) : b_1, b_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(1, 2, 0) + s(0, -3, 1) : t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 2, 0), (0, -3, 1) \rangle.\end{aligned}$$

(ii) El segundo sistema es:

$$\begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases}$$

Hemos visto que el conjunto de b_i 's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\mathcal{B}_2 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_1 - b_2 + 2b_3 = 0, -b_1 - b_2 + 2b_4 = 0\}.$$

Como a \mathcal{B}_2 lo podemos ver como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo, encontremos la MERF asociada:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &= \{(-u + v, u + v, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u(-1, 1, 1, 0) + v(1, 1, 0, 1) : u, v \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle.\end{aligned}$$

(iii) Finalmente, el tercer sistema es:

$$\begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$$

En este caso el conjunto de b_i 's para los cuales el sistema tiene solución es \mathbb{R}^3 , y por lo tanto, lo genera $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \mid p'(1) = 0 \text{ y } p(2) = p(3)\}$.

Primero analizamos la forma que tiene un polinomio en W . Por un lado, como $p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$, entonces $p'(1) = 0 \iff b + 2c + 3d = 0$. Además, $p(2) = p(3) \iff a + 2b + 4c + 8d = a + 3b + 9c + 27d \iff b + 5c + 19d = 0$. Luego $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W \iff b + 2c + 3d = 0$ y $b + 5c + 19d = 0$. Para dar los generadores de W , damos una descripción paramétrica del sistema de ecuaciones (con incógnitas a, b, c, d), para lo cual reducimos a una MERF la matriz correspondiente:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3} F_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$, de donde las soluciones son $b = \frac{23}{3}d$ y $c = -\frac{16}{3}d$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W &\iff p(x) = a\frac{23}{3}dx - \frac{16}{3}dx^2 + dx^3 \\ &\iff p(x) = a(1) + d\left(\frac{23}{3}x - \frac{16}{3}x^2 + x^3\right) \\ &\iff p(x) \in \left\langle 1, \frac{23}{3}x - \frac{16}{3}x^2 + x^3 \right\rangle \end{aligned}$$

Luego generadores de W son el polinomio 1 y el polinomio $\frac{23}{3}x - \frac{16}{3}x^2 + x^3$ (o $23x - 16x^2 + 3x^3$ si se quiere)

Comentario: Siempre es bueno chequear que los generadores cumplan las ecuaciones del subespacio, como para más o menos tener un indicador que estamos haciendo bien las cosas.

(d) Nuevamente para dar generadores de W tenemos que ver condiciones sobre a, b, c, d para que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertenezca a W . Tenemos que

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W &\iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} \\ &\iff c = -b \text{ y } d = a \\ &\iff A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &\iff A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff A \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Luego, generadores para W son $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(10) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

(a) $\langle (1, 0, 3), (0, 1, -2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $\langle x^3 + 2x + 1, -x^2 - x, 2x^3 + 3x^2 - x + 4 \rangle \subseteq \mathbb{R}_4[x]$.

SOLUCIÓN:

(a) Veremos a los vectores como vectores columna.

Sea $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$, entonces $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in W$ si y solo si $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

lo cual es equivalente a que el sistema de ecuaciones (con incógnitas λ_1, λ_2)
$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases}$$
 tiene solución.

Reduciendo la matriz ampliada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 3 & -2 & x_3 \end{array} \right] \xrightarrow[F_3+2F_2]{F_3-3F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - 3x_1 + 2x_2 \end{array} \right]$, vemos que hay solución si y sólo si $x_3 - 3x_1 + 2x_2 = 0$, por lo que la caracterización de W con ecuaciones es $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 - 3x_1 + 2x_2 = 0\}$.

(b) Sea $W = \langle x^3 + 2x + 1, -x^2 - x, 2x^3 + 3x^2 - x + 4 \rangle \subset \mathbb{R}_4[x]$. Tenemos que $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W \iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 + dx^3 &= \lambda_1(x^3 + 2x + 1) + \lambda_2(-x^2 - x) + \lambda_3(2x^3 + 3x^2 - x + 4) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_3)x^3 + (-\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)x + (\lambda_1 + 4\lambda_3) \\ &\iff \text{el sistema (con incógnitas } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{cases} a = \lambda_1 + 4\lambda_3 \\ b = 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ c = -\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ d = \lambda_1 + 2\lambda_3 \end{cases} \text{ tiene solución} \end{aligned}$$

Para hallar las condiciones sobre a, b, c, d para que haya solución, reducimos la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & -1 & 3 & b \\ 0 & -1 & -1 & c \\ 1 & 0 & 4 & d \end{array} \right] \xrightarrow[F_4-F_1]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & -2a+b \\ 0 & -1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 2 & -a+d \end{array} \right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \\ 0 & 0 & 2 & -a+d \end{array} \right]$$

De la última matriz vemos que al seguir reduciendo no habrá más filas nulas, por lo que la condición para que haya solución es que $2a - b + c = 0$. Por lo tanto, la caracterización de W con ecuaciones es

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \mid 2a - b + c = 0\}.$$

(11) (a) Describimos W_2 por ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) \in W_2 &\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / (x, y, z, w) \\ &= \alpha(1, -1, 1, 0) + \beta(2, 1, -2, 0) + \gamma(3, 0, -1, 0) \\ &\iff (x, y, z, w) = (\alpha + 2\beta + 3\gamma, -\alpha + \beta, \alpha - 2\beta - \gamma, 0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = x \\ -\alpha + \beta = y \\ \alpha - 2\beta - \gamma = z \\ 0 = w \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = x \\ 3\beta + 3\gamma = x + y \\ -4\beta - 4\gamma = -x + z \\ 0 = w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = x \\ \beta + \gamma = \frac{x+y}{3} \\ \beta + \gamma = \frac{x-z}{4} \\ 0 = w \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = x \\ \beta + \gamma = \frac{x+y}{3} \\ 0 = \frac{x-z}{4} - \frac{x+y}{3} \\ 0 = w \end{cases} \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene solución si y sólo si

$$\begin{cases} 0 = \frac{x-z}{4} - \frac{x+y}{3} \\ 0 = w \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = -x - 4y - 3z \\ 0 = w \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = x + 4y + 3z \\ 0 = w \end{cases}$$

Luego,

$$(x, y, z, w) \in W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= x + 4y + 3z \\ 0 &= w \end{cases}$$

Por lo tanto, una descripción de W_2 por ecuaciones está dada por

$$W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 4y + 3z = 0, w = 0\}.$$

Teniendo en cuenta esto, resulta que

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) \in W_1 \cap W_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ x + 4y + 3z &= 0 \\ w &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ 3y + 5z &= 0 \\ w &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ y + \frac{5}{3}z &= 0 \\ w &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{11}{3}z &= 0 \\ y + \frac{5}{3}z &= 0 \\ w &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{11}{3}z \\ y &= -\frac{5}{3}z \\ w &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Consecuentemente, una descripción de $W_1 \cap W_2$ mediante ecuaciones es

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = \frac{11}{3}z, y = -\frac{5}{3}z, w = 0\}.$$

Mientras que una descripción de $W_1 \cap W_2$ mediante generadores es

$$W_1 \cap W_2 = \langle (\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 0) \rangle = \langle (11, -5, 3, 0) \rangle.$$

(b) Describamos W_1 mediante generadores.

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) \in W_1 &\Leftrightarrow x + y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = -y + 2z \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, w) = (-y + 2z, y, z, w) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, w) = y(-1, 1, 0, 0) + z(2, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1) \\ &\Rightarrow (x, y, z, w) \in \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Veamos que vale la recíproca de esta última implicación

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &\in \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \\ &\Rightarrow (x, y, z, w) = \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(2, 0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 0, 1) \\ &\Rightarrow (x, y, z, w) = (-\alpha + 2\beta, \alpha, \beta, \gamma) \\ &\Rightarrow y = \alpha, z = \beta, w = \gamma \\ &\Rightarrow (x, y, z, w) = y(-1, 1, 0, 0) + z(2, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(x, y, z, w) \in W_1 \Leftrightarrow (x, y, z, w) \in \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

En consecuencia, una descripción de W_1 mediante generadores es

$$W_1 = \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Ahora pasemos a describir $W_1 + W_2$ mediante generadores.

$$\begin{aligned}
 W_1 + W_2 &= \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \\
 &\quad + \langle (1, -1, 1, 0), (2, 1, -2, 0), (3, 0, -1, 0) \rangle \\
 &= \langle (-1, 1, 0, 0) \rangle + \langle (2, 0, 1, 0) \rangle + \langle (0, 0, 0, 1) \rangle \\
 &\quad + \langle (1, -1, 1, 0) \rangle + \langle (2, 1, -2, 0) \rangle + \langle (3, 0, -1, 0) \rangle \\
 &= \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 0), \\
 &\quad (2, 1, -2, 0), (3, 0, -1, 0) \rangle.
 \end{aligned}$$

Donde las últimas dos igualdades son válidas por la proposición 3.2.12 del apunte. A fin de aplicar el teorema 3.4.5 del apunte, reducimos la siguiente matriz a una MRF.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{F_1+F_4 \\ F_2-2F_4 \\ F_5-2F_4 \\ F_6-3F_4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_6-F_5 \\ \frac{1}{2}F_2 \\ F_4+F_2 \\ F_5-3F_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{F_2+\frac{1}{2}F_1 \\ F_4-\frac{1}{2}F_1 \\ F_5+\frac{5}{2}F_1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Como esta última matriz es *MRF*, resulta por el mencionado teorema 3.4.5 que

$$\{(-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 0)\}$$

es base $W_1 + W_2$. En particular, dicho conjunto lo genera y $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Entonces la descripción de $W_1 + W_2$ está dada por

$$W_1 + W_2 = \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 0) \rangle.$$

Por otra parte, como $\dim(W_1 + W_2) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, tenemos, por el corolario 3.3.11 del apunte, que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. Luego, no hay ecuaciones no tautológicas que describan a $W_1 + W_2$. Pero si uno quisiera, podría dar una descripción de $W_1 + W_2$ mediante ecuaciones tautológicas, como por ejemplo:

$$W_1 + W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = x, y = y, z = z, w = w\}.$$

- (12) (a) En este caso, la forma más fácil de ver si son LI es hallar la MERF de la matriz cuyas filas son los vectores:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{-F_3 \\ F_1 \leftrightarrow F_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}F_2 \\ F_1+F_2 \\ F_3-6F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{\frac{1}{8}F_3 \\ F_2-\frac{1}{2}F_2 \\ F_1+\frac{5}{2}F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego, por el corolario 3.4.4 del apunte, el conjunto $\{(4, 2, -1), (0, 2, 1), (-1, 1, 3)\}$ es base de \mathbb{R}^3 . Luego, $\{(4, 2, -1), (0, 2, 1), (-1, 1, 3)\}$ es LI.

- (b) Recordemos que en general dos vectores son LD si y sólo si cualquiera de los dos es múltiplo del otro (esto se deduce fácilmente de la definición de dependencia lineal). Por tanto, $(1 - i, i)$ y $(2, -1 + i)$ serán linealmente dependientes si y sólo si existe α (real o complejo) tal que $(1 - i, i) = \alpha(2, -1 + i)$.

Supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tal que

$$(1 - i, i) = \alpha(2, -1 + i).$$

Luego,

$$\begin{cases} 1 - i = 2\alpha \\ i = \alpha(-1 + i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1-i}{2} \\ \alpha = \frac{i}{-1+i} = \frac{i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{1-i}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1-i}{2}.$$

Entonces, necesariamente debe ser $\alpha = \frac{1-i}{2}$. En consecuencia, $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ es un conjunto LD si consideramos a \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial y es un conjunto LI si consideramos a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial.

- (c) Planteamos la combinación lineal nula con escalares en \mathbb{R} y vemos si éstos deben ser todos nulos.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (x + 1) + \gamma \cdot (x^2 + x + 1) + \delta \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) &= 0_{\mathbb{R}_4[X]} \\ \Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (\beta + \gamma + \delta) \cdot x + (\gamma + \delta) \cdot x^2 + \delta \cdot x^3 &= 0_{\mathbb{R}_4[X]} \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} &\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0. \end{aligned}$$

Luego, $\{1, x + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x + 1\}$ es un conjunto LI.

- (d) Por identidad trigonométrica, $-1 \cdot 1 + 1 \cdot \text{sen}^2(x) + 1 \cdot \text{cos}^2(x) = 0$. Luego, $\{1, \text{sen}^2(x), \text{cos}^2(x)\}$ es LD.

- (e) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + b\text{sen}(x) + c\text{cos}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular la igualdad vale para $x = 0, \pi/2, \pi$, por lo tanto

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a - c = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce que $a = c$, por la primera $2a = 0 \Rightarrow a = c = 0$, y por la segunda ecuación $b = 0$. En definitiva $a = b = c = 0$. Por lo tanto, $\{1, \text{sen}(x), \text{cos}(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- (13) (a) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. En general, es fácil ver que si v, w son no nulos y uno no es múltiplo del otro, entonces $\{v, w, \lambda v + \mu w\}$, con λ o μ no nulo, cumple con la propiedad.

- (b) Sean $s, t, r \in \mathbb{R}$ tal que

$$s(\alpha + \beta) + t(\alpha + \gamma) + r(\beta + \gamma) = 0.$$

Si probamos que $s = t = r = 0$, entonces habremos probado que $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ son LI. Ahora bien,

$$\begin{aligned} s(\alpha + \beta) + t(\alpha + \gamma) + r(\beta + \gamma) &= 0 \\ \implies \\ (s + t)\alpha + (s + r)\beta + (t + r)\gamma &= 0 \\ \xRightarrow{\alpha, \beta, \gamma \text{ LI}} \\ s + t = s + r = t + r &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $s + t = 0 \Rightarrow s = -t$, además, como $t + r = 0 \Rightarrow r = -t$, se deduce que $s = r = -t$. Pero, la segunda ecuación es $0 = s + r = r + r = 2r$, luego $r = 0$ y por consiguiente $s = t = r = 0$.

- (14) (a) En el ejercicio (9) se calculan, en todos los casos, sistemas de generadores LI de los subespacios, salvo el subespacio $\{0\}$, es decir bases de los subespacios. Por lo tanto, las dimensiones resultan ser: 0, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 2, respectivamente.
- (b) Debemos hacer una matriz donde las filas son los vectores que generan a W , y haciendo operaciones elementales por fila llevarla a una MRF, sin usar permutaciones. Entonces las filas no nulas de la MRF son una base de W . Los vectores son

$$(1, 0, -1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -2, -2, 0),$$

luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_3 \\ F_4 + 2F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, por el teo. 3.4.5 del apunte, $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ es una base de W y $\dim W = 2$.

- (c) Denotemos E_{ij} a la matriz $n \times n$ con 1 en la entrada ij y 0 en las otras entradas (la base canónica de $\mathbb{K}^{n \times n}$).

Sea A matriz triangular superior 2×2 , luego

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} &= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22}. \end{aligned}$$

Así, $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ genera el subespacio de las matrices triangulares superiores y es fácil ver que es LI. Luego dicho conjunto es una base del subespacio de matrices triangulares superiores 2×2 , y su dimensión es 3.

- (d) Como en el inciso anterior, denotemos E_{ij} a la matriz $n \times n$ con 1 en la entrada ij y 0 en las otras entradas.

Primero veamos que el conjunto de las matrices triangulares superiores $n \times n$ es un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Pero esto es verdad puesto que la matriz nula de $\mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior y si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices triangular superior y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $a_{ij} = b_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Luego, $[A + \alpha B]_{ij} = a_{ij} + \alpha b_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Por tanto, $A + \alpha B$ también es triangular superior $n \times n$, y así conjunto de las matrices triangulares superiores $n \times n$ es un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Ahora veamos de hallar una base. Una matriz $A = [a_{ij}]$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Luego,

$$A = [a_{ij}] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} E_{ij}.$$

Luego, una base de la matrices triangulares superiores $n \times n$ es

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

¿Cuál es el cardinal de \mathcal{B} ? Observemos que por cada j , con $1 \leq j \leq n$, hay j elementos de la base: $E_{1j}, E_{2j}, \dots, E_{jj}$. Luego, la base tiene $\sum_{j=1}^n j$ elementos, y esto no es más que la suma aritmética, es decir $\sum_{j=1}^n j = n(n+1)/2$. Por lo tanto, el subespacio de matrices $n \times n$ triangulares superiores tiene dimensión $n(n+1)/2$.

(15) (a) Hacemos la matriz con los tres vectores como filas y encontramos la MERF:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[F_3+4F_2]{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como no hicimos permutaciones de filas, obtuvimos que $\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ es LI, pero $\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (3, 2, 3, 3)\}$ es LD, y por lo tanto, no lo podemos extender a una base de \mathbb{R}^4 .

Observación. Si en vez de requerir extender el conjunto original a una base de \mathbb{R}^4 , nos pidieran obtener alguna base, entonces al conjunto $\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ lo podemos completar con e_3 y e_4 , de tal forma que

$$\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

es una base de \mathbb{R}^4 .

(b) Hacemos la matriz con los dos vectores como fila y encontramos la MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego podemos completar con e_3 y e_4 , de tal forma que

$$\{(1, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

es una base de \mathbb{R}^4 .

(c) Planteamos la combinación lineal nula con coeficientes en \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma & 2\gamma \\ -2\beta + 3\gamma & -\alpha + \beta + 2\gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ -2\beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $\gamma = 0$. Luego, por la tercera ecuación, $\beta = 0$. Entonces, por la primera ecuación, que $\alpha = 0$. Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto LI. En consecuencia, puede extenderse a una base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Afirmamos que si al conjunto anterior le agregamos la matriz E_{12} entonces el conjunto resultante es base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. En efecto, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma & 2\gamma + \delta \\ -2\beta + 3\gamma & -\alpha + \beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ & 2\gamma + \delta = 0 \\ & -2\beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma & = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{F_4 + F_1} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ & 2\gamma + \delta = 0 \\ & -2\beta + 3\gamma = 0 \\ & 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{F_4 + F_3} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ & 2\gamma + \delta = 0 \\ & -2\beta + 3\gamma = 0 \\ & 6\gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la cuarta ecuación obtenemos $\gamma = 0$. Entonces, por la segunda y tercera ecuación, $\beta = \delta = 0$. Luego, por la primera ecuación, que $\alpha = 0$. Por lo tanto, al ser $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, resulta que el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es LI. Lo cual implica por ser $\dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$ y por lo visto en clases teóricas, que S es base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(16)

$$W_0 = \{0\} \subset W_1 = \langle e_1 \rangle \subset W_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \subset W_3 = \mathbb{R}^3.$$

Además, $\dim(W_i) = i$ para cada $i = 0, \dots, 3$.

(17) (a) Sea $S \subseteq \mathcal{B}$ tal que $S \neq \emptyset$. Si $S = \mathcal{B}$, como \mathcal{B} es base, y por tanto LI, se sigue que S es LI. Luego, consideremos $S = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$, con $1 \leq k < n$. Sean $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} v_{i_k} = 0$. Si para $1 \leq i \leq n$ definimos

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ \lambda_{i_k} & i \in \{i_1, \dots, i_k\} \end{cases}$$

entonces

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Como $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es LI, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, en particular $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_k} = 0$.

Hemos probado que

$$\lambda_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k} v_{i_k} = 0 \Rightarrow \lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_k} = 0.$$

Por lo tanto, $S = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ es LI.

(b) Para $k = 0$ tomamos el subespacio $\{0\}$. Si $1 \leq k \leq n$, sea

$$V_k := \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Como $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un subconjunto de \mathcal{B} , entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es LI, por el ítem previo. Por lo tanto, V_k está generado por k vectores LI, lo cual implica que $\dim(V_k) = k$.

(18) Los vectores canónicos e_1, \dots, e_n forman una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{C} -espacio vectorial, pues

$$(z_1, \dots, z_n) = z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n,$$

y claramente e_1, \dots, e_n son LI. Por lo tanto $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$.

Si consideramos \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial, entonces veamos que

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$$

es una base de \mathbb{C}^n , donde definimos $ie_k := (0, \dots, i, \dots, 0)$, i en la componente k , con $1 \leq k \leq n$.

\mathcal{B} es LI: supongamos que existen $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + b_1 ie_1 + \cdots + b_n ie_n = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + b_1 ie_1 + \cdots + b_n ie_n \\ &= (a_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n) + (ib_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, ib_n) \\ &= (a_1 + ib_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n + ib_n) \\ &= (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n). \end{aligned}$$

La igualdad a 0 se cumple si para todo j tenemos $a_j + ib_j = 0$, pero como a_j, b_j son reales, esta última igualdad se cumple si $a_j = b_j = 0$ para todo j . Luego, hemos probado que

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + b_1 ie_1 + \cdots + b_n ie_n = 0 &\Rightarrow \\ a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{B} es LI.

\mathcal{B} genera \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial: sea $z = (c_1 + id_1, c_2 + id_2, \dots, c_n + id_n) \in \mathbb{C}^n$, donde $c_j, d_j \in \mathbb{R}$. entonces

$$z = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n + d_1 ie_1 + \cdots + d_n ie_n.$$

Por lo tanto, \mathcal{B} genera \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial.

Así, \mathcal{B} es una base de \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial, lo que implica que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.

(19) (a) **Falso.** Como por hipótesis, $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 5$, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de \mathbb{K}^8 de dimensión finita, y $\dim(W_1 + W_2) \leq 8$. Luego,

$$8 \geq \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 10 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Por lo tanto,

$$\dim(W_1 \cap W_2) \geq 10 - 8 = 2 > 0.$$

Así, $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$. Es decir la afirmación es falsa.

- (b) **Verdadero.** Por el teorema de la dimensión para subespacios (ver teo. 3.3.13 del apunte) tenemos que

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) \quad (1)$$

$$\dim(S + U) = \dim(S) + \dim(U) - \dim(S \cap U) \quad (2)$$

Luego, si a (1) le restamos (2), obtenemos que

$$\dim(S + T) - \dim(S + U) = \dim(T) - \dim(U) - \dim(S \cap T) + \dim(S \cap U). \quad (3)$$

Por otra parte, por hipótesis, $S \cap T = S \cap U$ y $S + T = S + U$. Luego, $\dim(S \cap T) = \dim(S \cap U)$ y $\dim(S + T) = \dim(S + U)$. Reemplazando esto en (3) resulta que

$$0 = \dim(T) - \dim(U) \Rightarrow \dim(T) = \dim(U).$$

Además, nuevamente por la hipótesis, $T \subset U$. Luego, es fácil ver que T es subespacio de U . Por lo tanto, debido al corolario 3.3.11 del apunte y por ser T subespacio de U tal que $\dim(T) = \dim(U)$, concluimos que $T = U$, y la afirmación resulta verdadera.

- (c) **Verdadero.** Denotemos T_2 el subespacio de matrices 2×2 triangulares superiores. Por el ejercicio (c), $\dim(T_2) = 3$. Luego,

$$\begin{aligned} \dim(W \cap T_2) &= \dim(W) + \dim(T_2) - \dim(W + T_2) = 2 + 3 - \dim(W + T_2) \\ &= 5 - \dim(W + T_2). \end{aligned}$$

Como $W + T_2$ es un subespacio de $\mathbb{K}^{2 \times 2} \Rightarrow \dim(W + T_2) \leq 4$. Por lo tanto

$$\dim(W \cap T_2) = 5 - \dim(W + T_2) \geq 5 - 4 = 1 > 0.$$

En consecuencia, $W \cap T_2 \neq 0$, y existe una matriz 2×2 triangular superior no nula que está en W .

- (d) **Verdadero.** Probaremos que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{K}$, tal que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda w = 0, \quad (*)$$

entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$.

Ahora bien, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda w = 0 \Rightarrow$

$$0 = A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda w) = \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2 + \lambda A w = \lambda A w.$$

como $A w \neq 0$, $\lambda = 0$, luego por (*), $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Como v_1, v_2 son LI, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En definitiva, probamos que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda w = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0.$$

Luego $\{v_1, v_2, w\}$ es LI.

- (20) (a) Sean $W_1 = \langle (1, 0) \rangle$ y $W_2 = \langle (0, 1) \rangle$. Entonces,

(i) W_1 y W_2 son subespacios de \mathbb{R}^2 por ser cada uno el generado de un vector.

(ii) $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$ ya que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in W_1 + W_2.$$

(iii) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ puesto que

$$(x, y) \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow (x, y) = \alpha(1, 0), \quad (x, y) = \beta(0, 1) \Rightarrow y = 0, x = 0.$$

Luego, $W_1 \cap W_2 \subset \{0\}$. Como la otra inclusión se tiene por ser W_1, W_2 subespacios, resulta que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Por lo tanto, como valen (i) – (iii), concluimos que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

- (b) (i) Sean $S = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ y $T = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$ el conjunto de las matrices simétricas de orden n y el conjunto de las matrices antisimétricas de orden n , respectivamente. Entonces,

$$A, B \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (A + \alpha B)^t = A^t + \alpha B^t = A + \alpha B.$$

Donde en la última implicación hemos usado el ejercicio 7b) del TP N°3 y el hecho de ser $A, B \in S$. Luego, $A + \alpha B \in S$ y S resulta subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Análogamente se prueba que T es subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- (ii) De acuerdo al ítem anterior, ya sabemos que S y T son subespacios de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Entonces para probar que $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = S \oplus T$ sólo falta probar que $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = S + T$ y $S \cap T = \{0\}$. Veámoslo.

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) \in S + T. \quad (4)$$

Donde la última relación de pertenencia vale porque

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t &= \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t) \\ \left(\frac{1}{2}(A - A^t)\right)^t &= \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t). \end{aligned}$$

Siendo estas igualdades válidas por el ejercicio 7b) del TP N°3.

Por lo tanto, debido a (4), resulta que $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = S + T$.

Por otro lado,

$$A \in S \cap T \Rightarrow A^t = A, A^t = -A \Rightarrow A = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Luego, $A \in S \cap T \subset \{0\}$. Como la otra inclusión siempre vale por ser S y T subespacios, entonces $A \in S \cap T = \{0\}$, y concluimos que $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = S \oplus T$.

- (21) Sean $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} = 0. \quad (1^*)$$

Como 0 es una constante, su derivada es 0, por lo tanto la derivada de la expresión anterior es 0:

$$c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \lambda_n e^{\lambda_n x} = 0. \quad (2^*)$$

Derivando k veces la ecuación (1*), siendo $0 \leq k \leq n-1$ obtenemos

$$c_1 \lambda_1^k e^{\lambda_1 x} + c_2 \lambda_2^k e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \lambda_n^k e^{\lambda_n x} = 0. \quad (3^*)$$

Evaluando (3*) en $x = 0$ para $0 \leq k \leq n-1$, llegamos al siguiente sistema homogéneo, donde las incógnitas son c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n = 0 \\ \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \dots + \lambda_n^2 c_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 + \lambda_2^{n-1} c_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} c_n = 0 \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Como los λ_i son todos distintos entre sí, por el ejercicio 6c) del TP N°4, se cumple que $\det(A) = \det(A^t) \neq 0$, esto es, A es invertible, y por lo tanto $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Por lo tanto, $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ es un subconjunto LI de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Lo anterior implica que dado cualquier n podemos encontrar un subconjunto LI de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con n elementos. Entonces, debido al teorema 3.3.3 del apunte, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no puede tener dimensión finita. En consecuencia, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es de dimensión infinita.