

Práctico 9

COORDENADAS Y MATRICES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Objetivos.

- Aprender a calcular coordenadas y la matriz de cambio de base.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación lineal.
- Saber decidir si una transformación lineal es diagonalizable.
- Aprender a construir transformaciones lineales que satisfagan las propiedades solicitadas.

Ejercicios.

- Sean \mathcal{C}_n , $n = 2, 3$, las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 respectivamente. Sean $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0), (1, 1)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , respectivamente.
 - Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n}$ de \mathcal{C}_n a \mathcal{B}_n , $n = 2, 3$.
 - Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n}$ de \mathcal{B}_n a \mathcal{C}_n , $n = 2, 3$.
 - ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n}$ y $P_{\mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n}$?
 - Determinar los vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 que tienen coordenadas $(1, 4)$ y $(1, 1, 1)$ en las bases \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 , respectivamente.
 - Determinar las coordenadas de $(2, 3)$ y $(1, 2, 3)$ en las bases \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 , respectivamente.
- Sean $\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n$ como en el ejercicio anterior y consideremos las transformaciones lineales
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
 - $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.
 - Dar las matrices de las transformaciones respecto de las bases \mathcal{B}_n y \mathcal{C}_n .
 - Dar las matrices de las transformaciones respecto de las bases \mathcal{C}_n y \mathcal{B}_n .
 - Dar las matrices de las transformaciones respecto de las bases \mathcal{B}_n y \mathcal{B}_n .
 - Calcular $[TS]_{\mathcal{B}_3}$ y verificar que es igual al producto $[T]_{\mathcal{C}_2 \mathcal{B}_3} [S]_{\mathcal{B}_3 \mathcal{C}_2}$.
- Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego, decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, -x - y + z, x + 2y + z)$.
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (4x + y + 5z, 4x - y + 3z, -12x + y - 11z)$.
 - $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.
- Definir en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones requeridas. ¿Es posible definir más de una transformación lineal?
 - $(1, 0, 0) \in \text{Nu}(T)$
 - $(1, 0, 0) \in \text{Im}(T)$
 - $(1, 1, 0) \in \text{Im}(T)$ y $(0, 1, 1), (1, 2, 1) \in \text{Nu}(T)$
 - $(1, 1, 0) \in \text{Im}(T) \cap \text{Nu}(T)$ y $(0, 1, 1)$ es autovector con autovalor 2.
 - Los vectores de la base \mathcal{B}_3 son autovectores con autovalores 1, 2 y 3 respectivamente.
 - La imagen de T es el subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$
 - El núcleo de T está generado por los vectores $(1, 1, 0), (1, 0, 0)$ y $(2, 1, 0)$.
- Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ donde

$$v'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que \mathcal{B}' es una base de V si y sólo si A es inversible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base \mathcal{B}' a la base \mathcal{B} y viceversa.