Transformaciones lineales 2

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

1. Objetivos

2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna

3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

En este archivo introduciremos los isomorfismos y veremos varios resultados que relacionan las dimensiones con propiedades de las transformaciones lineales.

Estas diapositivas estan basadas en el capítulo 3 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Como venimos haciendo hasta aquí sólo trabajaremos sobre $\mathbb{R}$. Así que donde diga "un cuerpo $\mathbb{K}$" leeremos "$\mathbb{R}$".

1. Objetivos

2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna

3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

Los dos teoremas que vamos a ver aquí son muy fuertes, en el sentido que dan mucha información por si solos y que además serán de utilidad para estudiar transformaciones inyectivas, suryectivas y biyectivas.

Las demostraciones son hermosas y elegantes, en el sentido que sólo requieren que razonemos pegando algunas ideas y resultados pero sin embarrarnos en cuentas largas y tediosas.

Las demostraciones no son difíciles, pero requieren concentración y maduración de ideas y conceptos; hacer ejercicios ayuda a asimilarlos.

A esta altura de la materia (o dentro de unos días) podrían preguntarse si son capaces de repetir y comprender estas demostraciones.

El siguiente resultado relaciona las dimensiones del núcleo y la imagen.

Teorema 3.2.2

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita entonces

$$\dim V = \dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

Resultados como este muestran la potencia de estudiar estructuras abstractas que después se pueden aplicar a casos concretos.

A continuación la demostración...

Demostración

Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base del $\mathrm{Nu}(T)$.

Sea $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}$ una base de V obtenida complentando la base de $\mathrm{Nu}(T)$, existe gracias al Teorema 2.3.5.

Si probamos que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ el teorema queda demostrado. Pues, de ser así, deducimos que

$$\begin{aligned}
\dim V &= |\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}| \\
&= |\{v_1, ..., v_k\}| \quad + \quad |\{w_1, ..., w_m\}| \\
&= \dim \mathrm{Nu}(T) \quad + \quad |\{T(w_1), ..., T(w_m)\}| \\
&= \dim \mathrm{Nu}(T) \quad + \quad \dim \mathrm{Im}(T)
\end{aligned}$$

Esto lo probaremos en la siguiente filmina

Demostración

Queremos ver que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ genera $\mathrm{Im}(T)$ y es LI.

- generación:

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(v_1), ..., T(v_k), T(w_1), ..., T(w_m)\rangle$$

$$= \langle T(w_1), ..., T(w_m)\rangle$$

donde la primera igualdad la vimos en la demostración del Lema pág 27 del archivo anterior y la segunda vale porque $v_i \in \mathrm{Nu}(T)$

Demostración

- independencia lineal:

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0$$

debemos ver que

Demostración

- independencia lineal:

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0$$

debemos ver que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$

Demostración

- independencia lineal:

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0$$

debemos ver que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$

Primero usamos que T respeta combinaciones lineales, entonces

$$T(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m) = 0.$$

Por lo tanto $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m \in$

Demostración

- independencia lineal:

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0$$

debemos ver que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$

Primero usamos que T respeta combinaciones lineales, entonces

$$T(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m) = 0.$$

Por lo tanto $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m \in \mathrm{Nu}(T)$. Por lo que existen $\mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$$

porque los v_i's generan el núcleo.

Demostración

- independencia lineal:

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0$$

debemos ver que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$

Primero usamos que T respeta combinaciones lineales, entonces

$$T(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m) = 0.$$

Por lo tanto $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m \in \mathrm{Nu}(T)$. Por lo que existen $\mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$$

porque los v_i's generan el núcleo. Despejando tenemos que

$$-\mu_1 v_1 + \cdots - \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0.$$

Demostración

Dado que $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}$ es LI, la igualdad

$$-\mu_1 v_1 + \cdots - \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0$$

implica que

$$\mu_1 = \cdots = \mu_k = \boxed{\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0}$$

como queriamos ver.

1. Objetivos

2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna

3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

Siguiente lema es importante por si mismo y además lo vamos a necesitar para una aplicación posterior.

Lema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y R la MERF equivalente a A. Entonces la dimensión del conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$ es igual a la cantidad de variables libres de $RX = 0$.

Esto lo pueden haber notado al hacer los ejercicios. Por ejemplo, los Ejercicios (7a) y (7b) del Práctico 7.

A continuación damos una idea de la demostración.

Idea de la demostración: las soluciones son de la forma

$$\begin{pmatrix} \sum_j r_{1j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_j r_{sj}\, x_j \\ \boxed{\begin{matrix} x_t \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}} \end{pmatrix} \text{variables libres}$$

estan parametrizadas por las variables libres y sólo obtenemos la solución trivial si todas las variables son cero.

Ver también la Conclusión de la pág 34 del archivo "Esp. Vect. 3".

Cuando hagan los Ejercicios (7a) y (7b) del Práctico 7 se van a convencer.

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- El rango fila de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A.
- El rango columna de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A.

Teorema 3.2.3

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El rango fila de A es igual al rango columna de A.

Notar que si $n \neq m$, estamos comparando subespacios de distintos espacios vectoriales.

A continuación la demostración...

Demostración

Consideremos la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por la multiplicación por A.

Es decir, $T_A(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$

La demostración conciste en comparar el núcleo y la imagen de T_A con los espacios fila y columna de A.

Demostración

Primero, el espacio columna de A es igual a la imagen de T_A.

Esto es por la forma en que multiplicamos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow T_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Lo vimos en la Conclusión pág 10 del archivo "Esp. Vect. 3" y la última página del archivo anterior.

Entonces

- Rango columna de A es igual a $\dim \mathrm{Im}(T_A)$.

Demostración

Segundo, por el Corolario 2.5.2 las filas no nulas de la MERF equivalente a A forman una base del espacio fila de A.

Por lo tanto, el rango fila de A es igual a la cantidad de 1's principales de la MERF. O dicho de otro modo,

- Rango fila de A es igual a n menos la cantidad de variables libres

dado que n es la cantidad de columnas de A.

Por otro lado, el $\mathrm{Nu}(T_A)$ es igual al conjunto de soluciones de $AX = 0$ (recordar última página del archivo anterior). Entonces

- $\dim \mathrm{Nu}(T_A)$ es igual a la cantidad de variables libres

por el lema anterior.

Demostración

En resumen, hemos deducido la siguiente información:

- Rango columna de A es igual a $\dim \mathrm{Im}(T_A)$
- Rango fila de A es igual a n menos la cantidad de variables libres.
- $\dim \mathrm{Nu}(T_A)$ es igual a la cantidad de variables libres.
- $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Por lo tanto, el Rango columna de A es igual al Rango fila de A por el Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen.

RangoCol(A) = dimImT = n - dimNuT = n - cant libres = n -(n-RangoFila(A))

Teo
anterior

1. Objetivos

2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna

3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

En esta sección estudiaremos transformaciones lineales como las siguientes.

Definición 3.3.1-3.3.2

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Se dice que

- T es un epimorfismo si es suryectiva.
- T es un monomorfismo si es inyectiva.
- T es un isomorfismo si es inyectiva y suryectiva.

Veremos como se relacionan este tipo especial de transformaciones con la dimensión, LI y generadores.

1. Objetivos
2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna
3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

Recordemos que una función es suryectiva (o sobreyectiva) si la imágen es igual al conjunto de llegada.

Proposición 3.3.2

Sea $T : V \longrightarrow W$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. T es un epimorfismo
2. $\mathrm{Im}(T) = W$ (esta es la definición de ser suryectiva)
3. W es generado por la imagen de cualquier conjunto de generadores de V. Es decir,
$$W = \langle T(v_1), ..., T(v_k) \rangle \quad \text{si} \quad V = \langle v_1, ..., v_k \rangle$$

Ver la demostración en las Notas de García-Tiraboschi.

En dimensoión finita podemos decir más.

Observación 3.3.2

Sea $T : V \longrightarrow W$. Si V es de dimensión finita, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. T es un epimorfismo
2. $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$

Esto sigue del hecho de que $\operatorname{Im}(T)$ es un subespacio de W.

1. Objetivos

2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna

3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

Recordemos que una función es inyectiva si

- $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$.

Proposición 3.3.1-3.3.2, Observación 3.3.2

Sea $T : V \longrightarrow W$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. T es un monomorfismo
2. $\mathrm{Nu}(T) = 0$
3. $\dim \mathrm{Nu}(T) = 0$
4. La imagen de un conjunto LI es LI. Es decir, $\{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ es LI si $\{v_1, ..., v_k\}$ es LI

Haremos sólo la demostración de "$\mathrm{Nu}(T) = 0$ implica que T es monomorfismo".
A las otras las pueden ver la demostración en las Notas de García-Tiraboschi.

Queremos demostrar que

- $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$.

usando que $\mathrm{Nu}(T) = 0$.

Despejando de la primera igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) &\Rightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Nu}(T) = 0 \\ &\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \\ &\Rightarrow v_1 = v_2 \end{aligned}$$

Notar que $\mathrm{Nu}(T) = 0$ es lo mismo que decir que

- $T(v) = T(0)$ implica $v = 0$

Entonces para verificar que una transformación lineal es inyectiva es suficiente ver que es inyectiva en el 0.

Esto es para resaltar cuán fuerte es pedir que una función respete la suma.

1. Objetivos

2. Teoremas importantes
   - Teorema de las dimensiones del Núcleo y la Imagen
   - Espacio fila y espacio columna

3. ...morfismos
   - Epiomorfismos
   - Monomorfismos
   - Isomorfismos

Recordar que si una función es biyectiva entonces se puede definir la función inversa.

Teorema 3.3.3

Sea $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Entonces la función inversa $T^{-1} : W \longrightarrow V$ es también un isomorfismo. Es decir, T^{-1} es una transformación lineal biyectiva.

Teorema 3.3.4

Sea $T : V \longrightarrow W$ una trasnformación lineal con $\dim V = \dim W$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. T es un isomorfismo.
2. T es un monomorfismo.
3. T es un epimorfismo.
4. $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es una base de W si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V.

Demostración:
$(2) \Leftrightarrow (3)$ hay que usar el Teorema de la dimensiones del núcleo y de la imagen, recordando que "$\mathrm{Nu}(T) = 0$ $\Leftrightarrow$mono" y "$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$ $\Leftrightarrow$epi" por las proposiciones anteriores.
$(2, 3) \Leftrightarrow (4)$ es por las proposiciones anteriores.
$(2, 3) \Leftrightarrow (1)$ es por definición.

Observación

Los resultados de esta sección son análogos a resultados de conjuntos finitos, en donde usabamos el cardinal en vez de la dimensión.
En particular, si sabemos que dos espacios tienen igual dimensión entonces una transformación lineal entre ellos es inyectiva si y sólo si es suryectiva.

Definición 3.3.2

Dos espacios vectoriales V y W se dicen isomorfos, en símbolos $V \cong W$, si existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$

Corolario 3.3.5

Sean V y W espacios de vectoriales dimensión finita. Entonces

$$\dim V = \dim W \Longleftrightarrow V \cong W$$

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}_{<n}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definda por

$$T(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0) = (a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0).$$

Entonces T es un isomorfismo.

Demostración: claramente esta función respeta las operaciones, o sea es lineal. Además, el núcleo es 0 entonces es inyectiva y, como los espacios son ambos de dimensión n, es un isomorfismo.