# Práctico 4

## Determinantes

**Objetivos.**

- Aprender a calcular el determinante de una matriz $n \times n$ mediante operaciones elementales de filas y/o columnas.
- Aplicar las propiedades del determinante para calcular el determinante de un producto de matrices y para decidir si una matriz cuadrada es o no inversible.

**Ejercicios.**

(1) Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes matrices sean inversibles.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

(3) Sean $A$, $B$ y $C$ matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

(a) $\det(A^2 B C^t B^{-1})$.

(b) $\det(B^2 C^{-1} A B^{-1} C^t)$.

(4) Sean $A$ y $B$ matrices $n \times n$. Probar que:

(a) $\det(AB) = \det(BA)$.

(b) Si $B$ es inversible, entonces $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

(c) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

(5) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

(a) Sean $A$ y $B$ matrices $n \times n$. Entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Existen una matriz $3 \times 2$, $A$, y una matriz $2 \times 3$, $B$, tales que $\det(AB) \neq 0$.

(6) Sabiendo que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, calcular $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$.

**Más ejercicios.** Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(7) Una matriz $A$ $n \times n$ se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.

(a) Probar que si $n$ es impar y $A$ es antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

(b) Para cada $n$ par, encontrar una matriz $A$ antisimétrica $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$[1].

(8) En cada caso decidir si la matriz es inversible y si lo es, calcular la inversa usando la matriz de cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & \sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

(9) Usar la Regla de Cramer[2] para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-6y-z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-2y=7 \\ 3y-2z=6 \\ 3z-2x=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2ix-z=4 \\ x-2y+2z=7+i \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

**Ejercicios un poco más difíciles.** Si ya hizo los primeros ejercicios ya sabe lo que tiene que saber. Los siguientes ejercicios le pueden servir si esta muy aburridx con la cuarentena.

(10) Dados escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, definimos la matriz de *Vandermonde*:

$$\mathtt{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Probar (por inducción) que $\det(\mathtt{V}) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$.

(11) Dados escalares $a_0, \dots, a_{n-1}$ probar por inducción que

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

(12) Probar que si $k_1, \dots, k_n$ son elementos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ k_1 & 1+k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ k_1 & k_2 & 1+k_3 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & 1+k_n \end{pmatrix} = 1 + k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

[1] Sugerencia: Si $n = 2m$, encontrar una matriz $A_0$ para el caso $2 \times 2$ y luego considerar la matriz $2m \times 2m$ formada por $m$ bloques diagonales iguales a $A_0$.

[2] Ver en el ápendice de las notas de Garcia-Tiraboschi que es la Regla de Cramer