Solución del Ejercicio 1 del TP1

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix}$.

   a) Describir explícitamente el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

   b) Describir implícitamente el conjunto de vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que el sistema $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Solución. Comencemos por resolver el ítem (a). Para resolver el sistema homogéneo $AX = 0$ basta con aplicar operaciones elementales a la matriz A (o en su defecto a la matriz ampliada $(A \mid 0)$) hasta obtener una matriz triangular superior o una MERF.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 4 & -16 & 8 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & -20 & 0 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = \frac{1}{5}F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = -3F_3 + 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = -3F_4 + 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

De la matriz $\hat{A}$ se deduce que, si llamamos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, entonces

$$\begin{cases} y = 3t \\ x = -2z \end{cases}$$

Por lo tanto el Conjunto Solución del sistema homogéneo $AX = 0$ es

$$\mathscr{C}s = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; y = 3t, x = -2z\right\}$$

o equivalentemente,

$$\mathscr{C}s = \left\{(-2z, 3t, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; z, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Observación. Es posible aplicar otras operaciones elementales. Independientemente de la elección y orden de las operaciones elementales aplicadas, el conjunto solución al que se debe llegar es el mismo.

Continuemos ahora por resolver el ítem (b). Para ello vamos a considerar la matriz ampliada $(A \mid B)$, en donde B hace referencia al vector columna $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$. En este ítem hay que tener en claro de lo que se pide; aquí estamos interesados en describir para cuales vectores B, el sistema no homogéneo $AX = B$ admite solución[1]. Aplicando operaciones elementales sobre $(A \mid B)$, se sigue que:

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 2 & -2 & 4 & 6 & b_3 \\ 4 & -16 & 8 & 48 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 & b_3 \\ 4 & -16 & 8 & 48 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & b_3 - 2b_2 \\ 4 & -16 & 8 & 48 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & b_3 - 2b_2 \\ 4 & -16 & 8 & 48 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & -20 & 0 & 60 & b_4 - 4b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = \frac{1}{5}F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & \frac{1}{5}b_4 - \frac{4}{5}b_2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 = -3F_3 + 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3 + 6b_2 + 4b_1 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & \frac{1}{5}b_4 - \frac{4}{5}b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = -3F_4 + 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & b_2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3b_3 + 6b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}b_4 - \frac{4}{5}b_2 + 4b_1 \end{pmatrix} = (\hat{A} \mid \hat{B})$$

De la matriz $(\hat{A} \mid \hat{B})$, puesto que nos interesa que $\hat{A}X = \hat{B}$ tenga solución, observando las dos ultimas columnas precisamos pedir que

$$\begin{cases} -3b_3 + 6b_2 + 4b_1 = 0 \\ \frac{1}{5}b_4 - \frac{4}{5}b_2 + 4b_1 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores B, tales que el sistema $AX = B$ admite solución es

$$\mathfrak{B} = \left\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : \; -3b_3 + 6b_2 + 4b_1 = 0, \; \frac{1}{5}b_4 - \frac{4}{5}b_2 + 4b_1 = 0\right\}$$

Observación. El conjunto $\mathfrak{B}$ descripto anteriormente NO ES EL CONJUNTO SOLUCIÓN DE $AX = B$.

[1]No estamos interesado en cual es la solucion del sistema $AX = B$, sino mas bien en saber para cuales valores de B, uno puede garantizar que el sistema tiene solucion. Se entiende la diferencia?