Álgebra de Matrices 1: multiplicación y suma.

Álgebra II - 2020 - 1er cuatrimestre

Los objetivos de esta unidad son:

- Aprender a operar con matrices (sumar, multiplicar, cálcular inversas).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices.
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones.

En este primer archivo definiremos la suma y multiplicación de matrices, y la multiplicación por un escalar. Al final, daremos un glosario de matrices.
Estas diapositivas estan basadas en las Secciones 1.3 de las *Notas de Álgebra II* de Agustín Garcia y Alejandro Tiraboschi. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Definición

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrices del mismos orden.
La suma $A + B$ es la matriz que resulta de sumar "coordenada a coordena" las matrices A y B. En símbolos,

$$A + B \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{con} \quad [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}.$$

entrada ij

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$ entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{pmatrix}$$

En este caso: $[A + B]_{12} = [A]_{12} + [B]_{12} = 2 + 20 = 22$

Podemos visualizar la suma de matrices así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades

La suma de matrices satsiface las mismas propiedades que la suma de números reales.

Proposición

Si A, B, C son matrices $m \times n$, entonces

- $A + B = B + A$ (conmutativa)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativa)
- $A + 0 = A$ (elemento neutro)
- $A + (-A) = 0$ (opuesto)

donde $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

Demostración

Resumidamente, estas propiedades valen porque valen en $\mathbb{R}$ y estamos sumando coordenada a coordenada números reales. Veamos a continuación la demostración explicitamente.

Empecemos por ver que las matrices $A+B$ y $B+A$ son iguales. O sea, que cada una de sus coordenadas son iguales. Esto es cierto por lo siguiente:

$$[A+B]_{ij} \underset{\text{definición}}{=} [A]_{ij}+[B]_{ij} \underset{\text{conmutatividad de R}}{=} [B]_{ij}+[A]_{ij} \underset{\text{definición}}{=} [B+A]_{ij}$$

Demostración

Comprovemos ahora la asociatividad.
Queremos ver que las matrices $A + (B + C)$ y $(A + B) + C$ son iguales. O sea, que cada una de sus coordenadas son iguales. Esto es cierto por lo siguiente:

$$[A + (B + C)]_{ij} \overset{\text{definición}}{=} [A]_{ij} + [B + C]_{ij} \overset{\text{definición}}{=} [A]_{ij} + \Big([B]_{ij} + [C]_{ij}\Big)$$

$$\underset{\substack{\text{asociatividad}\\ \text{de R}}}{=} \Big([A]_{ij} + [B]_{ij}\Big) + [C]_{ij} \underset{\text{definición}}{=} [A + B]_{ij} + [C]_{ij} \underset{\text{definición}}{=} [(A + B) + C]_{ij}$$

Demostración

Ahora verificamos la propiedad del neutro

$$A + 0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \cdots & a_{1n}+0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+0 & \cdots & a_{mn}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Por último verificamos la propiedad del opuesto

$$\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & \cdots & a_{1n} - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - a_{m1} & \cdots & a_{mn} - a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Definición

=

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
El producto $A \cdot B$ es una matriz de orden $m \times p$ cuyas entradas son definidas por la siguiente fórmula

$$A\cdot B \in \mathbb{R}^{m \times p} \Longrightarrow \quad [A\cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\cdot [B]_{kj}.$$

Podemos visualizar la multiplicación así:

entrada ij

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

fila i

columna j

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

En este caso:

$$\begin{aligned} [A \cdot B]_{12} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{1k} \cdot [B]_{k2} \\ &= [A]_{11} \cdot [B]_{12} + [A]_{12} \cdot [B]_{22} + [A]_{13} \cdot [B]_{32} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Observación 1.3.1

En el caso particular que A sea un vector fila y B un vector columna obtenemos un número real:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

La multiplicación de matrices satisface algunas de las propiedades que satisface la multiplicación de números reales.

Otras no.

Y pueden pasar cosas raras, distintas a las que estamos acostumbradxs cuando multiplicamos números reales.

Las propiedades similares son:

Proposición

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ entonces

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (asociativa)
- $A \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_m \cdot A = A$ (elemento neutro)

donde $\mathrm{Id}_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$

gracias a la asociatividad podemos escribir

A^n

para expresar el producto de n veces A

Proposición

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
(distributiva)

Demostración

Vamos a demostrar la primera proposición. La segunda es un ejercicio del práctico. Ambas se demuestran de la misma manera que la proposición referida a la suma.

Para probar ver la asociatividad tenemos que verificar que todas las entradas de $A \cdot (B \cdot C)$ y $(A \cdot B) \cdot C$ son iguales.

definición   definición

$$[A \cdot (B \cdot C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B \cdot C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot \left(\sum_{l=1}^{p} [B]_{kl} \cdot [C]_{lj} \right)$$

distributividad en R   conmutatividad de la suma en R

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} [A]_{ik} \cdot [B]_{kl} \cdot [C]_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B]_{kl} \cdot [C]_{lj} =$$

intercambiamos las sumatorias

$$= \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [B]_{kl} \right) \cdot [C]_{lj} = \sum_{l=1}^{n} [A \cdot B]_{il} \cdot [C]_{lj} = [(A \cdot B) \cdot C]_{ij}$$

distributividad en R   definición   definición

Demostración

Veamos ahora la propiedad del elemento neutro. Notemos que las entradas de la matriz Id_k son determinadas de la siguiente manera

$$[\mathrm{Id}_k]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

ver más sobre Id en el glosario

porque son todas ceros salvo en la diagonal (donde el número de fila y columna coinciden). Entonces

$$[A \cdot \mathrm{Id}_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} \cdot [\mathrm{Id}_n]_{kj} = [A]_{ij} \cdot 1 = [A]_{ij}$$

$$[\mathrm{Id}_m \cdot A]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [\mathrm{Id}_n]_{ik} \cdot [A]_{kj} = 1 \cdot [A]_{ij} = [A]_{ij}$$

Cosas raras

Veamos ahora algunas propiedades que no valen cuando multiplicamos matrices. Es decir, daremos contraejemplos.

No es conmutativa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

tarea: verifcar que estos productos son distintos

Multiplicar por algo no nulo puede dar cero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elevar al cuadrado u otra potencia puede dar cero

Buscar ejemplos es un ejerciciod del práctico.

Casos particulares

Multiplicar por la matriz nula

$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$ para toda matriz A.

$$[0 \cdot A]_{ij} = \sum_k [0]_{ik} \cdot [A]_{kj} = \sum_k 0 \cdot [A]_{kj} = 0$$

$$[A \cdot 0]_{ij} = \sum_k [A]_{ik} \cdot [0]_{kj} = \sum_k [A]_{ik} \cdot 0 = 0$$

Casos particulares

Multiplicar por una diagonal por la izquierda (Observación 1.3.1)

Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entonces

$$[DA]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} [D]_{ik} \cdot [A]_{kj} = [D]_{ii}[A]_{ij} = d_i a_{ij}$$

y por lo tanto $DA = (d_i a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\Rightarrow DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \cdots & d_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

ver más sobre matrices diagonales en el glosario

Casos particulares

Tarea

Verificar la igualdad anterior para $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En palabras, multiplicar a izquierda por una diagonal es multiplicar cada fila por el elemento correspondiente de la diagonal. Algo similar pasa cuando multiplicamos a derecha como lo verificaran en la práctica.

Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$. La matriz cA es la matriz que se obtiene multiplicando todas las entradas de A por c. En símbolos,

$$cA \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{con} \quad [cA]_{ij} = c[A]_{ij}$$

En la Sección 1.3.4 pueden ver algunas propiedades de esta operación

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $c = 10$ entonces

$$10A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

En este caso: $[cA]_{12} = 10[A]_{12} = 20.$

caso particular
-A=(-1)A

Observación

Hemos visto que las operaciones de suma, multiplicación y multiplicación por escalar en el conjunto de matrices de orden $n \times n$ satisfacen ciertas propiedades.

En matemática, los conjuntos con este tipo de operaciones se los llama álgebras.

Es por eso que esta sección se llama Álgebra de Matrices.

Matriz cuadrada

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice cuadrada de orden n porque tiene igual cantidad de filas que de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son a_{ii} con $1 \leq i \leq n$

Matriz diagonal

Una matriz cuadrada D de orden n se dice diagonal si todas las entradas fuera de la diagonal son nulas.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Las entradas de D se pueden describir como sigue

$$[D]_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Matriz identidad

La matriz diagonal de orden n con todos unos en la diagonal se llama matriz identidad de orden n y se denota Id_n.

$$\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Las entradas de Id_n se pueden describir como sigue

$$[\mathrm{Id}_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A veces escribiremos simplemente Id, omitiendo el subíndice n.

Matriz nula

La matriz nula de orden $m \times n$ es la matriz cuyas entradas son todas ceros. Se la denota 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Las entradas de 0 se pueden describir como sigue

$$[0]_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Matriz triangular superior

Una matriz cuadrada cuyas entradas por debajo de la diagonal principal son cero se llama matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En fórmula, A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada cuyas entradas por encima de la diagonal principal son cero se llama matriz triangular inferior.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En fórmula, A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Vector columna

Un vector columna es una matriz formada por una sóla columna.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

El conjunto de vectores columna es denotado $\mathbb{R}^m$ en vez de $\mathbb{R}^{m\times 1}$.

Usamos un sólo subíndice para identificar las coordenadas de un vector columna.

Vector fila

Un vector fila es una matriz formada por una sóla fila.

$$v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

El conjunto de vectores fila es denotado $\mathbb{R}^n$ en vez de $\mathbb{R}^{1\times n}$.

Usamos un sólo subíndice para identificar las coordenadas de un vector fila.

Si es necesario usamos comas para separar las coordenadas.