Álgebra / Álgebra II - 25/06/2020

Práctico 9.

Observación: La matriz de cambio de base de una base ordenada B1 a otra base ordenada B2 no es otra cosa que la matriz de la transformación Identidad con respecto a las bases B1 y B2.

Ejercicio 3. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego, decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.

(d): T : R 4 → R 4 , T(x, y, z, w) = (2x − y, x + 4y, z + 3w, z − w).

Calculamos la matriz de T en la base ordenada canónica de R^4:

Recordemos que esta matriz tiene en la columna j las coordenadas del j-ésimo vector de la base de partida (en este caso e_j) en la base de llegada.

T(e_1) = (2, 1, 0, 0)
T(e_2) = (-1, 4, 0, 0)
T(e_3) = (0, 0, 1, 1)
T(e_4) = (0, 0, 3, -1)

Como la base de llegada es la canónica, las coordenadas son directamente las componentes de los vectores. Es decir:

$$[T]_C = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

Los autovalores de T son los autovalores de $A = [T]_C$ (o de la matriz de T en cualquier otra base ordenada).

Calculamos el polinomio característico:

$$det \begin{matrix} 2-x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1-x \end{matrix} = det \begin{matrix} 2-x & -1 \\ 1 & 4-x \end{matrix} \quad det \begin{matrix} 1-x & 3 \\ 1 & -1-x \end{matrix} =$$

= ((2-x)(4-x) + 1) ((1-x) (-1-x) - 3) = $(x^2 - 6x + 9)\,(x^2 - 4)$

Los autovalores son las raíces de este polinomio:

2, -2, $\frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$ = 3 (con multiplicidad 2)

Es decir que el polinomio característico f_T es:

$$f_T = (x+2)(x-2)(x-3)^2$$

Calculamos los espacios propios correspondientes.

El espacio propio asociado al autovalor λ es el núcleo de la transformación lineal $T - \lambda Id$.

$\lambda = 2$:

$$[T - 2\,Id]_C = \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{matrix}$$

Para calcular el núcleo, resolvemos el sistema homogéneo asociado a esta matriz:
F2 $\leftrightarrow F1$, F1 + 2 F2, (-1)F1, F4 + F3, (-1)F3

1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 -3
0 0 0 0

x = y = 0, z = 3w

El espacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ es

{(x, y, z, w) $\in R^4$: x = y = 0, z = 3w} = {(0, 0, 3w, w) : w $\in R$}

Una base de este espacio propio es {(0, 0, 3, 1)}.

$\lambda = -2$:

$$[T + 2\,Id]_C = \begin{matrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Para calcular el núcleo, resolvemos el sistema homogéneo asociado a esta matriz:
F1 $-4F2$, -1/25 F1, F2 -6F1, F3-3F4, F1<—> F2, F3<—> F4

1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 1
0 0 0 0

x = y = 0, z = -w

El espacio propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ es

{(x, y, z, w) $\in R^4$: x = y = 0, z = -w} = {(0, 0, -w, w) : w $\in R$}

Una base de este espacio propio es {(0, 0, -1, 1)}.

$\lambda = 3$:

$$[T - 3\,Id]_C = \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{matrix}$$

Para calcular el núcleo, resolvemos el sistema homogéneo asociado a esta matriz:
F1+F2, F3 +2F4, F1 $\leftrightarrow F4$, (-⅓) F3, F1 + 3F3, F1 $\leftrightarrow F2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

x = -y, z = w = 0

El espacio propio asociado al autovalor $\lambda = 3$ es

{(x, y, z, w) $\in R^4$: x = -y, z = w = 0} = {(-y, y, 0, 0) : y $\in R$}

Una base de este espacio propio es {(-1, 1, 0, 0)}.

Usamos el siguiente teorema: Sea T: V → V es una transformación lineal (dim V < ∞) y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los distintos autovalores de T con espacios propios asociados $W_1, \ldots, W_r$.

Una condición necesaria y suficiente para que T sea diagonalizable es que

$$dim\ W_1 + ... + dim\ W_r = dim\ V$$

En este ejemplo: tenemos tres autovalores 2, -2, 3.

Siendo W_1, W_2, W_3 los respectivos espacios propios:

$dim\ W_1 = 1 = dim\ W_2,\ dim\ W_3 = 1$

Luego

$dim\ W_1 + dim\ W_2 + dim\ W_3 = 3 \neq dim\ R^4 = 4$

Por lo tanto T **no** es diagonalizable.

Esto significa lo siguiente: ***no*** *existe ninguna base B de R^4 tal que $[T]_B$ sea una matriz diagonal.*

Ejercicio 4. Definir en cada caso una transformación lineal T : R^3 −→ R^3 que satisfaga las condiciones requeridas. ¿Es posible definir más de una transformación lineal?

Para este ejercicio podemos usar que toda transformación lineal está determinada por los valores que toma en una base del espacio de partida.

(a) (1, 0, 0) ∈ Nu(T)

AquÍ un ejemplo trivial sería tomar T = 0, es decir tal que T(x, y, z) = (0, 0, 0), para todo (x, y, z).

Esta no es la única T que cumple esta condición:

Si completamos el conjunto {(1, 0, 0)} a una base ordenada de R^3 (hay infinitas formas de hacer esto), por ejemplo:

C = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}

Entonces (fijada esta base) existe una única tl T: R^3 → R^3 tal que

T(1, 0, 0) = (0, 0, 0) Necesario para que (1, 0, 0) $\in Nu(T)$
T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)
T(0, 0, 1) = (-1, 1, 0)

Esta T satisface la condición en (a).

Más aún lo mismo ocurriría dándole cualquier valor a los vectores T(0, 1, 0) y T(0, 0, 1).

(b) (1, 0, 0) ∈ Im(T).

Haciendo como el ítem anterior, podemos considerar la base canónica C = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} y sabemos que existe una TL T: R^3 → R^3 tal que

T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) Esto asegura que (1, 0, 0) $\in Im(T)$
T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)
T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)

También hubiera servido:

T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)
T(0, 1, 0) = (1, 0, 0)
T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)

o que los demás vectores de la base tomen valores (arbitrarios) eg $\neq (0,\ 0,\ 0)$.

(c) Similar a los anteriores.

(d) $(1, 1, 0) \in Im(T) \cap Nu(T)$ y (0, 1, 1) es autovector con autovalor 2.

T debe cumplir:

$T(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$
$T(0, 1, 1) = 2 (0, 1, 1) = (0, 2, 2)$
$T(x, y, z) = (1, 1, 0)$, para algún (x, y, z).

Completar el conjunto {(1, 1, 0), (0, 1, 1)} -notemos que es efectivamente LI- a una base de R^3:

{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)}

Ahora podemos tomar una TL T que satisfaga (tal T es única, si bien depende de cómo haya completado a una base de R^3):

$T(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$
$T(0, 1, 1) = (0, 2, 2)$
$T(0, 0, 1) = (1, 1, 0)$

Esta T cumple las condiciones en (d): no es única.

Notemos que la condición de que (0, 1, 1) sea autovector con autovalor 2 implica que (0, 1, 1) está en la imagen de T.

(e) Los vectores de la base B3 son autovectores con autovalores 1, 2 y 3 respectivamente.

B3 = {(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)}

Significa:

$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$
$T(1, 1, 0) = 2(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$
$T(1, 1, 1) = 3 (1, 1, 1) = (3, 3, 3)$

Como B3 es una base entonces sabemos que existe una única TL T con estas propiedades.

Para dar una fórmula explícita de T(x, y, z), hacemos lo siguiente:

(x, y, z) = a (1, 0, 0) + b (1, 1, 0) + c (1, 1, 1): buscamos a, b, c

F1-F2, F2-F3

1 0 0 | x-y
0 1 0 | y-z
0 0 1 | z

Luego a = x-y, b = y-z, c = z

(x, y, z) = (x-y) (1, 0, 0) + (y-z) (1, 1, 0) + z (1, 1, 1)

Entonces:

T(x, y, z) = (x-y) T(1, 0, 0) + (y-z) T(1, 1, 0) + z T(1, 1, 1)

= (x-y) (1, 0, 0) + (y-z) (2, 2, 0) + z (3, 3, 3)

= (x+y-2z, 2y+z, 3z)

En todos los casos anteriores se puede usar un argumento similar para dar una fórmula explícita de T(x, y, z). (Ejercicio: hacerlo.)

(5) Ayuda: Notar que, si llamamos T: V → V a la única TL que satisface que

T(v_j) = v_j', $\forall 1 = 1, ..., n.$

Entonces A es la matriz de T con respecto a la base ordenada B:

$$A = [T]_B.$$