Práctico 4

Determinante
Soluciones[1]

(1) *(a)* Sean A, B y C matrices 4×4, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

(i) $\det(PQR)$, donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera:
- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

(ii) $\det(2A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(-B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

(b) Sabiendo que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, calcular $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$.

Solución: (a) i) La operación elemental $\xrightarrow{F_1+2F_2}$ no afecta el determinante, por lo tanto $\det(P) = \det(A) = -1$.

Con la operación elemental $\xrightarrow{3F_3}$ se obtiene una matriz cuyo determinante es 3 veces el determinante de la matriz original, luego $\det(Q) = 3\det(B) = 6$.

Con la operación elemental $\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4}$ se obtiene una matriz cuyo determinante es -1 por el determinante de la matriz original, luego $\det(R) = -\det(C) = -3$.

Luego, por corolario 2.8.10 del apunte, $\det(PQR) = \det(P)\det(Q)\det(R) = (-1) \cdot 6 \cdot (-3) = 18$.

ii) Por corolario 2.8.10 y por teorema 2.8.14 tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(A^2BC^tB^{-1}) &= \det(A^2)\det(B)\det(C^t)\det(B^{-1}) \\
&= \det(A)^2\det(B)\det(C)\frac{1}{\det(B)} \\
&= (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t) &= \det(B^2)\det(C^{-1})\det(A)\det(B^{-1})\det(C^t) \\
&= \det(B)^2\frac{1}{\det(C)}\det(A)\frac{1}{\det(B)}\det(C) \\
&= 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

[1] Estas son algunas soluciones posibles. Podría haber otras maneras de resolver los problemas del práctico.

b) Por el teorema 2.8.6 tenemos que

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = (-2)\cdot 3 \cdot \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{bmatrix}$$
$$\overset{(\blacklozenge)}{=} (-6)\cdot \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{bmatrix} = (-6)\cdot 2\cdot \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$$
$$= (-12)\cdot(-1) = 12.$$

Donde la igualdad con ($\blacklozenge$) vale porque se aplicó la operación elemental $\xrightarrow{F_2 - F_3}$, y la anteúltima igualdad es debido a la hipótesis de este ejercicio.

(2) Calcular el determinante de las siguientes matrices usando operaciones elementales por fila y/o columna u otras propiedades del determinante y determinar cuáles son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Aplicamos operaciones elementales por filas a la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4+3F_1]{F_3-5F_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & -13 & 32 \\ 0 & -5 & 6 & -18 \end{bmatrix}$$

Luego, calculando el determinante por desarrollo de la primera columna y aplicando regla de Sarrus,

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -5 \\ 14 & -13 & 32 \\ -5 & 6 & -18 \end{vmatrix} = (4\cdot(-13)\cdot(-18) + 4\cdot(-5)\cdot 32 + 14\cdot(-5)\cdot 6)$$
$$- ((-5)\cdot(-13)\cdot(-5) + 14\cdot 4\cdot(-18) + 4\cdot 6\cdot 32)$$
$$= (936 - 640 - 420) - (-325 - 1008 + 768)$$
$$= -124 - (-565) = 441.$$

En el caso de la matriz B hacemos sólo una permutación de filas

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$|B| = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4) = -(-24) = 24.$$

Para calcular el determinante de C desarrollamos por la última columna:

$$|C| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |A| = 441.$$

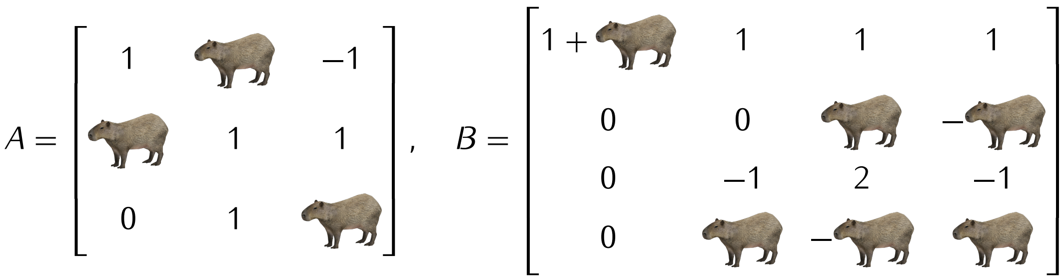
Para calcular el determinante de D desarrollamos por la tercera fila y obtenemos

$$|D| = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \pi & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la fila 3:

$$|D| = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 1 & \pi & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 6 & \frac{1}{3} \\ \pi & 0 \end{vmatrix} = -2\pi.$$

(3) Determinar todos los valores en $\mathbb{R}$ que deben tomar los carpinchos tales que las siguientes matrices sean invertibles.



Solución: Llamemos c al valor que toman los carpinchos. Entonces tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1+c & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c & -c \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & c & -c & c \end{bmatrix}$$

El ejercicio nos pregunta para qué valores de c la matriz A es invertible y para cuáles valores de c la matriz B es invertible. Para descubrirlo será muy útil calcular los determinantes de A y de B, pues sabemos, por la ecuación (2.8.2) del apunte, que una matriz es invertible si y sólo sí su determinante es no nulo. Empecemos, pues hallando el determinante de A.

Calculando el determinante (mediante regla de Sarrus o mediante operaciones elementales) obtenemos $\det(A) = -c^3 - 1$. Por lo tanto, A es invertible cuando $c^3 + 1 \neq 0$. Luego, tenemos que ver qué números reales satisfacen la ecuación $c^3 + 1 = 0$. El -1 es raíz de $c^3 + 1$, pues $(-1)^3 + 1 = 0$. Ahora bien, $c^3 + 1 = (c+1)(c^2 - c + 1)$. Resolviendo la ecuación $c^2 - c + 1$ vemos que no tiene raíces reales. Por lo tanto $c^3 + 1 = 0$ tiene una sola raíz real, -1. Concluyendo así que A es invertible si y solo si $c \neq -1$.

Para calcular el determinante de la matriz B utilizamos desarrollo por la primer columna y el teorema 2.8.6 para obtener que

$$\begin{aligned}
|B| &= (1+c)\cdot\begin{vmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{vmatrix} = (1+c)\cdot c^2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{(\blacklozenge)}{=} (1+c)\cdot c^2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+c)\cdot c^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (1+c)\cdot c^2\cdot 1 = (1+c)\cdot c^2
\end{aligned}$$

Donde la igualdad con $(\blacklozenge)$ vale porque se aplicó la operación elemental $\xrightarrow{F_2+F_3}$.

Por lo tanto, B es invertible si y sólo sí $c \neq -1$ y $c \neq 0$.

(4) Calcular el determinante de las siguientes matrices, reduciendo a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_2 \\ F_2-F_1}]{\substack{F_5-F_4 \\ F_4-F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

Como A' es triangular superior, por la proposición 2.8.3 del apunte, su determinante es el producto de las entradas diagonales, es decir, $\det(A') = 1\cdot(2)^4 = 16$. Luego, por teorema 2.8.6 (1), $\det A = \det A' = 16$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4+F_1 \\ F_5+F_1}]{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = B'$$

Por lo tanto, con un argumento similar al dado para la matriz A, tenemos que $\det B = \det B' = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5! = 120$.

$$C=\begin{bmatrix} x & a & a & a & a\\ a & x & a & a & a\\ a & a & x & a & a\\ a & a & a & x & a\\ a & a & a & a & x\end{bmatrix}\xrightarrow[]{\substack{C_1+C_5\\ C_2+C_5\\ C_3+C_5\\ C_4+C_5}}\begin{bmatrix} x & a & a & a & x+4a\\ a & x & a & a & x+4a\\ a & a & x & a & x+4a\\ a & a & a & x & x+4a\\ a & a & a & a & x+4a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{F_1-F_2\\ F_2-F_3\\ F_3-F_4\\ F_4-F_5}}\begin{bmatrix} x-a & a-x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x-a & a-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-a & a-x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x-a & 0\\ a & a & a & a & x+4a\end{bmatrix}=C'.$$

Luego, por los teoremas 2.8.6 y 2.8.16 del apunte, por el desarrollo por la quinta columna y por proposición 2.8.3, tenemos que

$$\begin{aligned}|C|=|C'|=(x+4a)&\begin{vmatrix} x-a & a-x & 0 & 0\\ 0 & x-a & a-x & 0\\ 0 & 0 & x-a & a-x\\ 0 & 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}\\ &=(x+4a)(x-a)^4.\end{aligned}$$

Observación: El procedimiento para calcular $|C|$ también puede utilizarse para probar el caso general donde el orden de C es n, obteniéndose $|C|=(x+(n-1)a)\cdot(x-a)^{n-1}$.

(5) Calcular el determinante de las siguientes matrices utilizando desarrollo por fila o por columna y determinar cuáles son invertibles.

Solución: Desarrollamos todos los determinantes por la primer columna.

$$\det(A)=4\cdot 3-7\cdot 5=-23.$$

$$\begin{aligned}\det(B)&=-3\cdot\det\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}-1\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 0\end{bmatrix}-1\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\\ &=-3\cdot(-1\cdot 0-2\cdot 4)-1\cdot(2\cdot 0-4\cdot 4)-1\cdot(2\cdot 2-4\cdot(-1))\\ &=24+16-8=32.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(C)&=2\cdot\det\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}-1\cdot\det\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &=106.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como sus determinantes son no nulos, las tres matrices son invertibles.

(6) ⓐ Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ escalares, la matriz de *Vandermonde* asociada es

$$\mathrm{V}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}.$$

La idea de este ejercicio es probar que $\det(\mathrm{V}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n))=\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

(a) Probar los casos $n = 2$ y $n = 3$, es decir probar que

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{y} \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^3 \end{bmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).$$

(b) Probar que $\det(\mathrm{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Dar una condición necesaria y suficiente para que la matriz de Vandermonde sea invertible.

Solución:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda_2\lambda_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} - \lambda_1\lambda_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) - \lambda_1\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \\
&= \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3^2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) \\
&= \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2 \\
&= \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1^2\lambda_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).$$

(b) La estrategia usada en el ítem *(a)* para calcular el determinante de la matriz de Vandermonde no es fácilmente generalizable. Para la demostración general usaremos otra estrategia.

Debemos recordar primero que las operaciones elementales por columna en una matriz afectan el determinante de la matriz de la siguiente manera: sea A matriz cuadrada, E operación elemental por columna y $A \xrightarrow{E} A'$, entonces

- Si E es multiplicar por c la columna i, $\det(A') = c\det(A)$.
- Si E es multiplicar por c la columna j y sumarla a la columna i ($i \neq j$), $\det(A') = \det(A)$.
- Si E es intercambiar la columna i con la columna j ($i \neq j$), $\det(A') = -\det(A)$.

La demostración de estos hechos es sencilla, pues las operaciones elementales por columna son las "transpuestas" de las operaciones elementales por fila y $\det(A^t) = \det(A)$.

Denotemos V_n a la matriz de Vandermonde $n \times n$. Haremos la demostración de que $\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$ por inducción en $n \geq 2$.

Caso base. Si $n = 2$, es el resultado del item *(a)*.

Paso inductivo. Supongamos que la afirmación es válida para una Vandermonde $(n-1)\times(n-1)$, con $n-1\geq 2$, y probemos

$$|V_n| = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i) \tag{*}$$

Realicemos las operaciones elementales por fila: $F_j - \lambda_1 F_{j-1}$ desde $j=n$ hasta $j=2$, en ese orden. Estas operaciones no afectan al determinante, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|V_n\right| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 & \dots & \lambda_n-\lambda_1\\ 0 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3-\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n-\lambda_1)\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando el determinante por la primera columna obtenemos:

$$\left|V_n\right| = \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 & \dots & \lambda_n-\lambda_1\\ \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2^{n-2}(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3-\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n-\lambda_1)\end{vmatrix}$$

Ahora bien la matriz que nos queda para calcular el determinante se puede obtener desde la matriz V_{n-1} multiplicando la columna 1 por $\lambda_2-\lambda_1$, la columna 2 por $\lambda_3-\lambda_1$, ..., la columna $n-1$ por $\lambda_n-\lambda_1$, luego

$$\begin{aligned}
\left|V_n\right| &= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \lambda_n\\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \dots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \lambda_4^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2}\end{vmatrix}\\
&= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1)|\mathrm{V}_{n-1}(\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n)|
\end{aligned}$$

Por (HI):

$$\begin{aligned}
\left|V_n\right| &= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1)\prod_{2\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i) && (1)\\
&= \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i), && (2)
\end{aligned}$$

lo cual prueba (*).

Prueba alternativa: Si $\lambda_i=\lambda_j$ para algún $i\neq j$ entonces $\det(\mathrm{V}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=0$ pues la matriz tendrá dos columnas iguales, y también $\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)=0$ (pues alguno de los términos multiplicando será 0). Entonces en este caso se cumple la igualdad que se quiere demostrar.
Supongamos ahora que $\lambda_i\neq\lambda_j$ si $i\neq j$ (es decir, todos los escalares λ_i son distintos).
Consideremos el siguiente polinomio en la variable x:

$$p(x)=\det(\mathrm{V}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},x))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & x\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & x^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & x^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Notemos que $p(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ pues, si desarrollamos el determinante por la última columna obtendremos

$$p(x)=1\det(\mathrm{V}(1|n))-x\det(\mathrm{V}(2|n))+x^2\det(\mathrm{V}(3|n))+\cdots+x^{n-1}\det(\mathrm{V}(n|n))$$

(en ninguna de las submatrices hay términos con x pues x sólo se encuentra en la última columna).
Ahora bien, $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ son raíces del polinomio $p(x)$, pues si evaluo $p(x)$ en λ_i para $1\le i\le n-1$, entonces la matriz $\mathrm{V}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_i)$ tendrá dos columnas iguales y por lo tanto su determinante será 0.
Entonces podemos escribir $p(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_{n-1})c$, donde c es una constante ya que si fuera de grado mayor obtendríamos que $p(x)$ sería un polinomio de grado mayor a $n-1$ lo cual no puede ser. ¿Cuál es la constante c? Notar que si miramos del lado derecho el coeficiente que acompaña a x^{n-1} (el de mayor grado), ese coeficiente es justamente c.
Por otro lado, el término de grado $n-1$ en $\mathrm{V}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},x)$ según vimos arriba es

$$\det(\mathrm{V}(n|n))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=\det(\mathrm{V}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}))\overset{HI}{=}\textstyle\prod_{1\le i<j\le n-1}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Por lo tanto

$$p(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{n-1})\prod_{1\le i<j\le n-1}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Evaluando en $x=\lambda_n$ se tiene

$$\det(\mathrm{V}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})\prod_{1\le i<j\le n-1}(\lambda_j-\lambda_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

(c) V_n es invertible si y solo si $|V_n|=\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$. Un producto es no nulo si y solo si todos los factores son no nulos. Luego V_n es invertible si y solo si $\lambda_j-\lambda_i\neq 0$ para $i<j$, o equivalentemente, $\lambda_j\neq\lambda_i$ para $i\neq j$.

(7) Sean $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice[2] que A *semejante a* B sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $P\in\mathbb{K}^{n\times n}$ invertible tal que $B=PAP^{-1}$. Probar que:
(a) Si A es semejante a B entonces

$$\det A=\det B,\quad \text{y}\quad \operatorname{Tr}A=\operatorname{Tr}B.$$

(b) ¿Existe una matriz $C\in\mathbb{K}^{2\times 2}$ invertible tal que $C\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}C$?

Solución:
(a) Como A semejante a B, existe una matriz $P\in\mathbb{K}^{n\times n}$ invertible tal que $B=PAP^{-1}$. Luego,

$$\det B=\det(PAP^{-1})=\det P\cdot\det A\cdot\det(P^{-1})=\det P\cdot\det A\cdot\frac{1}{\det P}=\det A.$$

[2]Se puede ver fácil que “ser semejante a” es una relación de equivalencia.

Por otra parte, por asociatividad del producto de matrices y por el ejercicio 8(*iii*) del trabajo práctico 3, resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} B &= \operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr}((PA)P^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(PA)) = \operatorname{Tr}((P^{-1}P)A)\\ &= \operatorname{Tr}(Id \cdot A) = \operatorname{Tr}(A).\end{aligned}$$

(b) No, no existe una matriz $C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ invertible tal que $C\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}C$. En efecto, si existiera tendríamos que $C\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}C^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$. Luego, las matrices $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ serían semejantes y, en consecuencia, por el ítem *(a)* dichas matrices tendrían el mismo determinante, lo cual sería una contradicción ya que $\det A = -2$ y $\det B = 7$.

(8) Sea A una matriz $n \times n$. Probar las siguientes afirmaciones[3]:
(a) Si A es una matriz antisimétrica y n es impar, entonces $\det A = 0$.
(b) Si A es una matriz ortogonal (es decir $A^tA = \mathrm{Id}$) entonces $\det A = \pm 1$.
(c) ⓐ Si A es una matriz unitaria entonces $|\det A| = 1$

Solución:

(a) Primero notemos que $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$. En efecto,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \xrightarrow[-F_n]{\substack{-F_1\\ -F_2\\ \vdots}} \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn}\end{bmatrix} = -A$$

Por lo tanto, aplicando n veces el teorema 2.8.6 tenemos lo que queríamos.
Ahora pasemos a probar el ejercicio. Notemos que tenemos las siguientes igualdades

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

En efecto, la primera igualdad es por la teoría; la segunda por ser A antisimétrica; la tercera por lo probado al principio; y la última porque n es impar.
En conclusión, $\det(A) = -\det(A)$ y por lo tanto $\det(A) = 0$.

(b) Sea A una matriz ortogonal. Entonces,

$$(\det A)^2 = (\det A)(\det A) = (\det A)(\det A^t) = \det(AA^t) = \det(Id) = 1.$$

Donde la primera igualdad vale por definición de cuadrado de un número real, la segunda por el teorema 2.8.14 del apunte, la tercera por el teorema 2.8.9, la cuarta por ser A ortogonal y la quinta por el corolario 2.8.4.
De esta manera, tenemos que $(\det A)^2 = 1$. Luego, $\det A = \pm 1$.

(c) Sea A una matriz unitaria. Entonces,

$$|\det A|^2 = (\det A)(\overline{\det A}) = (\det A)(\det A^*) = \det(AA^*) = \det(Id) = 1.$$

Donde la primera igualdad es válida porque $|z|^2 = z\bar{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, la segunda es por la ayuda para este ejercicio, la tercera por el teorema 2.8.9, la cuarta por ser A unitaria y la quinta por el corolario 2.8.4.
En conclusión, $|\det A|^2 = 1$, lo que equivale a que $|\det A| = 1$.

[3] Ver las definiciones necesarias en Práctico 3, Ejercicios 19 y 20.

(9) Sea $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$, es decir el conjunto de matrices de determinante 1. Probar[4] que

(a) Si $A, B \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $AB \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.
(b) $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.
(c) Si $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.

Solución:

(a) Sean $A, B \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$. Entonces, $\det A = \det B = 1$. Luego, por teorema 2.8.9 del apunte, $\det AB = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$. En consecuencia, por definición de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, $AB \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.

(b) $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ debido al corolario 2.8.4.

(c) Si $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ entonces $\det A = 1$. Entonces, por corolario 2.8.10, $\det(A^{-1}) = 1/\det A = 1$. Por lo tanto, por definición de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

(a) Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
(b) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces A es invertible si y sólo si A^k es invertible para algún $k \in \mathbb{N}, k > 1$.
(c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz invertible con coeficientes enteros. Si A^{-1} tiene coeficientes enteros, entonces $\det A = 1$ o $\det A = -1$.

Solución:

(a) *Falso.* Veamos un contraejemplo. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces A y B son no invertibles y $A + B = \mathrm{Id}_2$. Luego, $\det(A) + \det(B) = 0$ y $\det(A + B) = 1$. Por lo tanto, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

(b) *Verdadero.* Veamos la prueba. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} A \text{ es invertible} &\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \det A \neq 0 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} (\det A)^k \neq 0 \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \det(A^k) \neq 0 \\ &\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} A^k \text{ es invertible.} \end{aligned}$$

Las justificaciones a estas equivalencias son: (1) vale por el teorema 2.8.9 del apunte, (2) es porque en un cuerpo si un producto es cero entonces al menos de los factores tiene que ser cero, (3) es cierto por la ecuación (2.8.5) del apunte y (4) vale por el mencionado teorema 2.8.9.

(c) *Verdadero.* Veamos la prueba. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz invertible con coeficientes enteros tal que A^{-1} también tiene coeficientes enteros. Entonces, por como está definido el desarrollo por una columna, el cálculo del determinante de la matriz A y del determinante de A^{-1} mediante el desarrollo de una columna sólo involucra sumas y productos de números enteros. Luego, como $\mathbb{Z}$ es cerrado para la suma y el producto, tenemos que $\det A \in \mathbb{Z}$ y $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, como por el corolario 2.8.10 $\det A \det(A^{-1}) = 1$, resulta que $\det A$ es un número entero que es divisor de 1 (con la relación "divide" usual en $\mathbb{Z}$). Por lo tanto, necesariamente debe ser $\det A = 1$ o $\det A = -1$.

[4] Este ejercicio prueba que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ es un *grupo* (ver comentario al final del práctico anterior).

(11) Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci definida por recurrencia como sigue:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3.$$

(a) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Probar por inducción que $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

(b) Utilizando (a) y propiedades del determinante probar que, para todo $n \geq 2$, vale la *Identidad de Cassini*:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Solución: (a) **Caso base.** Si $n = 2$, entonces

$$A^n = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Paso inductivo. Supongamos que la afirmación es válida para algún $n-1 \geq 2$ y probemos que

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{*}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} A^n = A^{n-1}A &= \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n-1} & F_n \\ F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siendo la primera igualdad válida por asociatividad del producto de matrices, la segunda por la hipótesis inductiva, la tercera por la definición de A, la cuarta por definición de producto de matrices y la quinta por cómo se construye la sucesión de Fibonacci.

En resumen, hemos probado que vale (*). (2) Sea $n \geq 2$. Entonces, por el ítem *(a)*, $\det(A^n) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$. Pero, debido a la ecuación (2.8.5) del apunte, tenemos que $\det(A^n) = (\det A)^n = (-1)^n$. Por lo tanto, $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(12) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcular:

(a) $\det(AB)$.
(b) $\det(BA)$.
(c) $\det(A^{-1})$.
(d) $\det(A^4)$.
(e) $\det(A+B)$.
(f) $\det(A+tB)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Solución:

Calculamos $\det A$ y $\det B$.

Para calcular $\det A$, primero hacemos $F_2 - 3F_1$ y $F_3 - F_1$ (puesto que estas operaciones no modifican el determinante) y resulta $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Desarrollando por la primera columna, resulta

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -9 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 9 - 8 = 1.$$

Para calcular $\det B$, primero hacemos $F_2 - F_1$ y $F_3 + F_1$ y resulta

$$\det B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 2 = 8.$$

Por lo tanto,

a) $\det AB = \det A \det B = 1 \cdot 8 = 8$.
b) $\det(BA) = \det B \det A = 8 \cdot 1 = 8$.
c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1 = 1$.
d) $\det(A^4) = (\det A)^4 = 1^4 = 1$.

Haremos f) y luego e) sale poniendo $t = 1$.

$$A + tB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -t & 2t \\ t & t & t \\ -t & -t & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 & 3-t & 2t+2 \\ t+3 & t & t+2 \\ 1-t & 1-t & 3t+1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\det(A + tB) = \begin{vmatrix} t+1 & 3-t & 2t+2 \\ t+3 & t & t+2 \\ 1-t & 1-t & 3t+1 \end{vmatrix} &\overset{\substack{C_1-C_2\\ C_3-C_2}}{=} \begin{vmatrix} 2t-2 & 3-t & 3t-1 \\ 3 & t & 2 \\ 0 & 1-t & 4t \end{vmatrix} \\
&\overset{F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2t+1 & 3 & 3t+1 \\ 3 & t & 2 \\ 0 & 1-t & 4t \end{vmatrix} \\
&= (2t+1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1-t & 4t \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3t+1 \\ 1-t & 4t \end{vmatrix} \\
&= (2t+1)(4t^2 - 2 + 2t) - 3(12t - (-3t^2 + 2t + 1)) \\
&= 8t^3 + 8t^2 - 2t - 2 - 9t^2 - 30t + 3 \\
&= 8t^3 - t^2 - 32t + 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

f) $\det(A + tB) = 8t^3 - t^2 - 32t + 1$.
e) $\det(A + B) = 8 - 1 - 32 + 1 = -24$.

(13) Sea $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = 5$, calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

La idea es, partiendo de las matrices B y C, usar propiedades del determinante e ir modificando B y C hasta hacer aparecer A.

Usando que el determinante es lineal en la primera fila y luego en la segunda, resulta

$$\det B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \det A = 5.$$

Por otro lado, como sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el determinante, tenemos que

$$\det C = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det A = 5.$$

(14) Se sabe que los números 3241, 2751, 4753, 8799 son divisibles por 7. Probar que

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

también es divisible por 7.

Solución: Llamemos A a la matriz. Como sumar a una columna un múltiplo de otra no cambia el determinante, tenemos que

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 9 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_4+10C_3 \\ C_4+100C_2 \\ C_4+1000C_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3241 \\ 2 & 7 & 5 & 2751 \\ 4 & 7 & 5 & 4753 \\ 8 & 7 & 9 & 8799 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando este determinante por la última columna nos quedará una expresión de la forma $3241a + 2751b + 4753c + 8799d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ (pues cada uno es el resultado del cálculo del determinante de submatrices 3×3 de una matriz con coeficientes enteros). Por hipótesis, 7 divide a $3241, 2751, 4753$ y 8799 luego $7 \mid 3241a + 2751b + 4753c + 8799d = \det A$, por lo que $\det A$ es divisible por 7.

(15) Probar que

$$(a) \qquad \det \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{bmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

$$(b) \qquad \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Solución: (a) Usamos una idea similar a la que usamos para calcular el determinante de la matriz C del Ejercicio 4. Primero, restamos a cada fila F_i, $1 \le i \le n-1$ la fila n (lo cual no modifica el determinante), quedandonos así

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & 1+x_n \end{vmatrix}.$$

Ahora sumamos a la última columna cada columna C_i, $1 \le i \le n-1$ (lo cual tampoco modifica el determinante), quedandonos así

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & 1+\sum_{i=1}^n x_i \end{vmatrix}.$$

La última matriz es triangular inferior por lo que el determinante es el producto de los elementos de la diagonal, lo que es igual a $1+\sum_{i=1}^n x_i = 1 + x_1 + \cdots + x_n$, como se quería probar.

(b) Llamemos $A_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$ a la matriz. Procedemos por inducción en n. Si $n = 1$, se tiene que $\det A_1(a_0) = \begin{vmatrix}\lambda + a_0\end{vmatrix} = \lambda + a_0$, por lo que se cumple lo que queremos ver.

Para el paso inductivo, asumimos que vale para $n-1$ y queremos ver que vale para n. Desarrollando el determinante por la primera fila, resulta

$$\begin{aligned} \det A_n(a_0, \ldots, a_{n-1}) =& \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \cdots & -1 & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \det A_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) + (-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1} \\ &\overset{HI}{=} \lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1) + a_0 \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \end{aligned}$$

lo cual prueba lo que queríamos demostrar para n, concluyendo así el paso inductivo.

(16) Sea $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dada por

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculando $\det A_n$ por la primera columna, deduzca una relación entre $\det A_n$, $\det A_{n-1}$ y $\det A_{n-2}$.

(b) Pruebe por inducción fuerte que $\det A_n = n + 1$.

Solución:

(a) Desarrollando por la primera columna, resulta

$$\det A_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$

(b) En la parte (a) sacamos una relación recursiva para $\det A_n$, a saber $\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2}$ (notar que esto tiene sentido para $n \geq 3$). Procedemos por inducción fuerte (o completa) para probar que $\det A_n = n+1$.

Caso base: $n = 1$. Notar que $A_1 = (2)$ por lo que $\det A_1 = 2$, y $1+1 = 2$; luego se cumple la igualdad.

Ahora, dado $n \in \mathbb{N}$, nuestra hipótesis inductiva fuerte es que $\det A_k = k+1$ para todo $k < n$. Queremos probar que $\det A_n = n+1$. Para poder aplicar la hipótesis inductiva fuerte en la fórmula recursiva necesitamos al menos que $n \geq 3$, por lo que tenemos que probar $n = 2$ a mano también: $\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, mientras que $2+1 = 3$, por lo que también se cumple la igualdad que queremos demostrar.

Si $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \det A_n &= 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2} \\ &\overset{HIF}{=} 2((n-1)+1) - ((n-2)+1) = 2n - (n-1) = n+1, \end{aligned}$$

como queríamos probar. Por inducción fuerte concluimos que $\det A_n = n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(17) *Matrices en bloque*: Sean A una matriz $r \times r$, B una matriz $r \times s$, C una matriz $s \times r$ y D una matriz $s \times s$. Decimos que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es una *matriz en bloque*.

Para este ejercicio usaremos el siguiente hecho[5], el cual probaremos más adelante

- Si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$, entonces $MN = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$.

(a) Probar usando inducción en el tamaño de la matriz identidad correspondiente que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix} = \det A, \quad \text{y} \quad \det\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix} = \det D.$$

(b) Calcular $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & B \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s \end{bmatrix}$ y deducir que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} = \det A \det D.$$

Notar que, como caso particular, se tiene que

$$\det\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2,$$

[5]Esto quiere decir que si tenemos matrices en bloque podemos multiplicar como si las matrices fueran entradas

(c) Probar que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_n \end{bmatrix} = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_n.$$

(d) Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Primero vamos a probar el lema del enunciado (para que les quede como prueba).

Demostración del lema del enunciado: Hay que separar en 4 casos: 1) $1 \le i, j \le r$, 2) $1 \le i \le r$ y $r+1 \le j \le r+s$, 3) $r+1 \le i \le r+s$ y $1 \le j \le r$, y 4) $r+1 \le i, j \le r+s$.

Si $1 \le i \le r, 1 \le j \le r$,

$$\begin{aligned} [MN]_{ij} &= \sum_{k=1}^{r+s} M_{ik}N_{kj} = \sum_{k=1}^{r} M_{ik}N_{kj} + \sum_{k=r+1}^{s} M_{ik}N_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}E_{kj} + \sum_{k=r+1}^{r+s} B_{ik-r}G_{k-rj} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{r} A_{ik}E_{kj} + \sum_{\ell=1}^{s} B_{i\ell}G_{\ell j} \\ &= [AE]_{ij} + [BG]_{ij} \\ &= [AE + BG]_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso $[MN]_{ij} = [AE + BG]_{ij}$ como se afirmaba en el lema.

(*) En la segunda sumatoria hacemos el cambio de variable $\ell = k - r$.

Los otros 3 casos se prueban de manera análoga ■.

(a) Vamos a usar inducción en s para probar que $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{vmatrix} = \det A$.

Caso base. Si $s = 1$, la matriz es $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_{11} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_{r1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Desarrollando el determinante por la última fila, es claro que queda $\det A$, como se quería probar.

Paso inductivo. Supongamos que vale para $s-1$ y veamos que vale para s. Restando un múltiplo adecuado de F_{r+s} a las primeras r filas para hacer 0s la última columna tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_1 - b_{1s}F_{r+s} \\ \vdots \\ F_r - b_{rs}F_{r+s}}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_{r1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la última fila el determinante, nos queda

$$1\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1\,s-1}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{r\,s-1}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \overset{HI}{=} \det A,$$

como se quería probar.

La prueba de que $\det\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0\\ C & D\end{bmatrix} = \det D$ se hace de manera análoga por inducción en r.

(b) Usando el Lema, $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & B\\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B\\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B\\ \mathbf{0} & D\end{bmatrix}$.

Luego $\det\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & D\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & B\\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_s\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B\\ \mathbf{0} & D\end{bmatrix}$.

Por (a), resulta $\begin{bmatrix} A & B\\ \mathbf{0} & D\end{bmatrix} = \det A\cdot 1\cdot\det D = \det A\det D$, como se quería demostrar.

(c) Procedemos por inducción en n. Si $n = 1$, $\det A_1 = \det A_1$ se cumple trivialmente.

Para el paso inductivo, notemos que la matriz $A = \begin{bmatrix} A_1\mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_n\end{bmatrix}$ es una matriz en bloques $\begin{bmatrix} A' & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_n\end{bmatrix}$ donde $A' = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_{n-1}\end{bmatrix}$.

Por el caso particular de (b), tenemos que $\det A = \det A'\det A_n$. Por hipótesis inductiva, $\det A' = \det A_1\cdots\det A_{n-1}$.

Por lo tanto $\det A = \det A_1\cdots\det A_{n-1}\det A_n$, como queríamos probar. Por inducción, queda probado el ejercicio.

(d) Vamos a calcular el determinante de las dos primeras matrices usando (b) y el determinante de la tercera usando (c).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -4 & -4\\ 0 & 0 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 4 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -8\\ 4 & 0\end{vmatrix} = 4\cdot 32 = 128.$$

Para la segunda, usamos que el determinante de una matriz y su traspuesta es el mismo. De hecho, en general se tiene que

$$\det\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}\\ C & D\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}\\ C & D\end{bmatrix}^t = \det\begin{bmatrix} A^t & C^t\\ \mathbf{0} & D^t\end{bmatrix} \overset{(b)}{=} \det A^t\det D^t = \det A\det D)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 5 & 7\\ 2 & 2 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 7 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 7 & 2\end{vmatrix} = 4\cdot(-4) = -16.$$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 6 = 54.$$

(18) Reduciendo al determinante de una matriz de Vandermonde, calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{bmatrix}$$

Solución: En la primera matriz, como el determinante es lineal en cada columna, podemos sacar los escalares a, b, c afuera (cada escalar multiplica a toda una columna), es decir que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$. Otra manera es usar la ayuda, y notar que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \det \mathrm{V}(0, a, b, c) = abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

Para la segunda matriz desarrollamos por la primera fila, quedando así

$$\begin{vmatrix} b^2 & c^2 & d^2 \\ b^3 & c^3 & d^3 \\ b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & d^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} =$$

$$= bcd \begin{vmatrix} b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^3 \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} - acd \begin{vmatrix} a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + abd \begin{vmatrix} a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & d^3 \end{vmatrix} - abc \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$b^2c^2d^2(c-b)(d-b)(d-c) - a^2c^2d^2(c-a)(d-a)(d-c) +$$
$$+ a^2b^2d^2(b-a)(d-a)(d-b) - a^2b^2c^2(b-a)(c-a)(c-b),$$

donde en el último paso hemos usado que teníamos determinantes de la forma de la primera matriz del ejercicio.

Comentario: En realidad no es muy útil tener un determinante expresado como suma. Es mucho más útil (siempre que se pueda) expresarlo como producto. En este caso hay una manera pero no es para nada obvia. Puede intentar probar que el determinante es $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(abc+abd+acd+bcd)$. De hecho una fórmula similar vale para cuando hay n escalares en vez de 4, y se prueba usando inducción con los métodos con los que se calculó el determinante de la matriz de Vandermonde en el Ejercicio 6.

Para la tercera matriz haremos lo siguiente. Notar que

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
1+a & 1+b & 1+c & 1+d\\
1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2\\
1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3\\
1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4
\end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1+a & 1+b & 1+c & 1+d\\
0 & 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2\\
0 & 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3\\
0 & 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4
\end{vmatrix}\\
&\overset{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1\\F_4-F_1\\F_5-F_1}}{=} \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & a & b & c & d\\
-1 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\
-1 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3\\
-1 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4
\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}
2-1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0-1 & a & b & c & d\\
0-1 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\
0-1 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3\\
0-1 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4
\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}
2 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & a & b & c & d\\
0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\
0 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3\\
0 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4
\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & a & b & c & d\\
1 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\
1 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3\\
1 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4
\end{vmatrix}\\
&= 2abcd \det \mathrm{V}(a,b,c,d) - \det \mathrm{V}(1,a,b,c,d)\\
&= \det \mathrm{V}(a,b,c,d)(2abcd-(a-1)(b-1)(c-1)(d-1))
\end{aligned}
$$

(19) (*Para matar el tiempo*) Calcular el determinante de

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1}\\
1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2}\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1}
\end{bmatrix}
$$

Solución: Como el ejercicio lo indica, es por pura diversión, por lo que dejaremos que usted lo piense.