**Álgebra II - 14/05/2020**

Práctico 6.

Decidir si es subespacio de $\mathbf{R}^n$:

(d) $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 \leq x_2\}$.

$W \subseteq \mathbf{R}^n$ es un subespacio si y sólo si: $W \neq \varnothing$ y:
para todo $w_1, w_2 \in W$, para todo $t \in \mathbf{R}$ □ $\mathbf{w_1 + t\, w_2 \in W}$.

$w_1 = (0, 0, \dots, 0) \in W$, $w_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \in W$, pero

$w_1 + (-1)\, w_2 = (0, -1, 0, \dots, 0) \notin W$, pues $0 > -1$

Por lo tanto W **no** es un subespacio.

(<u>Otro ejemplo</u>: $w_1 = (1, 2, 0, \dots, 0)$.

Si W fuese subespacio, entonces $t\, w_1 \in W$, para todo escalar $t \in \mathbf{R}$.

Tomando $t = -1$, $t\, w_1 = (-1)\,(1, 2, \dots, 0) = (-1, -2, 0, \dots, 0) \notin W$!!!!!)

(a) $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 = x_n\}$

$(0, 0, \dots, 0) \in W$. Por lo tanto, $W \neq \varnothing$. (También hubiera servido que $(1, 1, \dots, 1) \in W$.)

Sean $w_1, w_2 \in W$, y sea $c \in \mathbf{R}$: $w_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $w_2 = (y_1, \dots, y_n)$.

$x_1 = x_n$, $y_1 = y_n$ □ $x_1 + c\, y_1 = x_n + c\, y_n$

Luego:

$w_1 + c \,.\, w_2 = (x_1 + c\, y_1, \dots, x_n + c\, y_n) \in W$.

Por lo tanto, como esto se cumple **para todos** $w_1, w_2 \in W$, y **para todo** $c \in \mathbf{R}$, entonces W **sí** es un subespacio.

*Observación*: Si W es un subespacio $\Longrightarrow (0, 0, \dots, 0) \in W$.

Por lo tanto si en algún caso, el $(0, 0, \dots, 0)$ no está en el subconjunto W, aunque sea no vacío, W no será un subespacio.

Por ejemplo, en (1)(b), $(0, 0, \dots, 0) \notin W$, pues $0 + 0 + \dots + 0 = 0 \neq 1$.

Esto ya permite concluir que W **no** es un subespacio.

(1) (h): Se puede usar que tanto C como F son subespacios y además la intersección de (una cantidad arbitraria) de subespacios también es subespacio [Resultado del teórico].

Por lo tanto $C \cap F$ es subespacio.

**De otra forma**: C es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$x_1 + \ldots + x_n = 0$

F es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$x_n = 0$

$C \cap F$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$x_1 + \ldots + x_n = 0$
$x_n = 0$

Como el conjunto de soluciones de cualquier sistema homogéneo es un subespacio, entonces $C \cap F$ es un subespacio.

(1) (g) ¿Qué pasa con C U F?

**Atención:** La unión de subespacios no siempre es un subespacio.

*Sugerencia:* pensar qué pasa en los ejemplos con la suma de un vector que está en C más un vector que está en F (quitando la intersección).

(5) Sean V un espacio vectorial, $v \in V$ no nulo, $c, d \in \mathbf{R}$ tal que $c\,v = d\,v$. Probar que $c = d$.

$cv = dv \Leftrightarrow (c - d)\,v = 0.$

Supongamos por el contrario que $c \neq d$, o sea que $c - d \neq 0$.

Como en $\mathbf{R}$ todo elemento no nulo (en este caso $c - d$) tiene un inverso multiplicativo, sea $e = (c-d)^{-1}$.

De modo que

$e\,(c-d) = 1.$

Entonces, por los axiomas de espacio vectorial:

$e\,\mathbf{0} = e\,(\mathbf{(c - d)\,v}) = (e(c-d))\,v = 1\,v = v$

Por otro lado, e **0** = **0.** [Ejercicio: probar esta propiedad.]

Luego 0 = v, contra la hipótesis.

Esto viene de suponer que $c \neq d$. Luego $c = d$.