Introducción a los algoritmos - 1er cuatrimestre 2019

Axiomas y Teoremas del Cálculo de Predicados

Notación

N1 *Rango True de ∀:*

$$\langle \forall x :: t.x \rangle \equiv \langle \forall x : \mathit{True} : t.x \rangle$$

N2 *Anidado de ∀:*

$$\langle \forall x, y : r.x.y : t.x.y \rangle \equiv \langle \forall x :: \langle \forall y : r.x.y : t.x.y \rangle \rangle$$

N3 *Rango True de ∃:*

$$\langle \exists x :: t.x \rangle \equiv \langle \exists x : \mathit{True} : t.x \rangle$$

N4 *Anidado de ∃:*

$$\langle \exists x, y : r.x.y : t.x.y \rangle \equiv \langle \exists x :: \langle \exists y : r.x.y : t.x.y \rangle \rangle$$

Axiomas

A1 *Intercambio entre rango y término de ∀:*

$$\langle \forall x : r.x : t.x \rangle \equiv \langle \forall x :: r.x \Rightarrow t.x \rangle$$

A2 *Regla de término de ∀:*

$$\langle \forall x :: t.x \rangle \wedge \langle \forall x :: s.x \rangle \equiv \langle \forall x :: t.x \wedge s.x \rangle$$

A3 *Distributividad de ∨ con ∀:*

$$Z \vee \langle \forall x :: t.x \rangle \equiv \langle \forall x :: Z \vee t.x \rangle$$

si x no ocurre libre en Z

A4 *Rango unitario de ∀:*

$$\langle \forall x : x = A : t.x \rangle \equiv t.A$$

donde A representa una constante del universo

A5 *Definición de ∃:*

$$\langle \exists x : r.x : t.x \rangle \equiv \neg \langle \forall x : r.x : \neg t.x \rangle$$

A6 *Intercambio de cuantificadores del ∀:*

$$\langle \forall x :: \langle \forall y :: t.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \forall y :: \langle \forall x :: t.x.y \rangle \rangle$$

Teoremas Básicos del ∀

T1 *Partición de rango de ∀:*

$$\langle \forall x : r.x \vee s.x : t.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x : t.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : t.x \rangle$$

T2 *Instanciación:*

$$\langle \forall x :: t.x \rangle \Rightarrow t.A$$

$$\langle \forall x :: t.x \rangle \equiv \langle \forall x :: t.x \rangle \wedge t.A$$

donde A representa una constante del universo

T3 *Cambio de variable de ∀:*

$$\langle \forall x : r.x : t.x \rangle \equiv \langle \forall y : r.y : t.y \rangle$$

si x no ocurre libre en $t.y$ ni y en $t.x$

T4 *Regla del término constante de ∀:*

$$\langle \forall x \ : : \ C \rangle \equiv C$$

si x no ocurre libre en C

T5 *Rango Vacío de ∀:*

$$\langle \forall x : \mathit{False} : t.x \rangle \equiv \mathit{True}$$

Teoremas Básicos del ∃

T6 *Intercambio entre rango y término de ∃:*

$$\langle \exists x \ : \ r.x \ : \ t.x \rangle \equiv \langle \exists x \ : : \ r.x \wedge t.x \rangle$$

T7 *Regla del término de ∃:*

$$\langle \exists x :: t.x \rangle \vee \langle \exists x :: s.x \rangle \equiv \langle \exists x :: t.x \vee s.x \rangle$$

T8 *Distributividad de ∧ con ∃:*

$$Z \wedge \langle \exists x :: t.x \rangle \equiv \langle \exists x :: Z \wedge t.x \rangle$$

si x no ocurre libre en Z

T9 *Rango unitario de ∃:*

$$\langle \exists x : x = X : t.x \rangle \equiv t.X$$

donde A representa una constante del universo

T10 *Partición de rango de ∃:*

$$\langle \exists x : r.x \vee s.x : t.x \rangle \equiv \langle \exists x : r.x : t.x \rangle \vee \langle \exists x : s.x : t.x \rangle$$

T11 *Testigo:*

$$t.A \Rightarrow \langle \exists x :: t.x \rangle$$

$$\langle \exists x :: t.x \rangle \equiv t.A \vee \langle \exists x :: t.x \rangle$$

donde A representa una constante del universo

T12 *Cambio de variable de ∃:*

$$\langle \exists x : r.x : t.x \rangle \equiv \langle \exists y : r.y : t.y \rangle$$

si x no ocurre libre en $t.y$ ni y en $t.x$

T13 *Regla del término constante de ∃:*

$$\langle \exists x \ : : \ C \rangle \equiv C$$

si x no ocurre libre en C

T14 *Rango Vacío de ∃:*

$$\langle \exists x : \mathit{False} : t.x \rangle \equiv \mathit{False}$$

T15 *Intercambio de cuantificadores del ∃:*

$$\langle \exists x :: \langle \exists y :: t.x.y \rangle \rangle \equiv \langle \exists y :: \langle \exists x :: t.x.y \rangle \rangle$$