Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación

Práctico 1 - 2019 - Integración

1) Dar las primitivas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^3 - 5x$
b) $g(x) = \mathrm{e}^{0,3x}$
c) $g(x) = \operatorname{sen} 2x$
d) $g(x) = 2x\cos(x^2)$
e) $g(x) = x^{3/2}$
f) $g(x) = \sqrt{x+2}$

2) Encuentra la primitiva de $f(x) = x + \cos x$ que pasa por el punto $(0, 4)$.

3) Encuentra la primitivas $F(x)$ de $f(x) = \frac{3}{x}$ tal que $F(1) = 5$.

4) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (33 - 2x)^{\frac{4}{3}}$
b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = \ln(7 - x)$
e) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$
f) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$
g) $f(x) = \ln(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$
h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

5) Calcular las siguientes integrales usando las primitivas (usa el ejercicio anterior):

a) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$
b) $\displaystyle\int 2^x\,dx$
c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{33-2x}\,dx$
d) $\displaystyle\int \frac{dx}{7-x}$
e) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$
f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,dx$
g) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$
h) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

6) Sin realizar el cálculo de la integral justifica las siguientes igualdades y desigualdades:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx = 0$
b) $\displaystyle\int_{-5}^{5} x^4\,dx = 2\int_0^5 x^4\,dx$
c) $\displaystyle\int_0^4 (x-2)^3\,dx = 0$
d) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{5-x}\,dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$
e) $\displaystyle\pi/6 \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \leq \pi/3$
f) $\displaystyle\int_{-99}^{99} (ax^3 + bx^2 + cx)\,dx = 2\int_0^{99} bx^2\,dx$

7) Calcular la derivada de las siguientes funciones donde sea posible:

a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{1+\cos^2 t}\,dt$
b) $\displaystyle f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$
c) $\displaystyle f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \frac{t+1}{\sqrt{1+2^t}}\,dt$

8) Calcular las siguientes integrales usando el Teorema fundamental del cálculo:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$
b) $\displaystyle\int_1^2 2^x\,dx$
c) $\displaystyle\int_3^5 \sqrt[3]{33-2x}\,dx$
d) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$
e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$
f) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$
g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$
h) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

9) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x\, e^x\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-2x)\, e^{-2x}\ dx$

c) $\displaystyle\int x^2 \cos x\ dx$

d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\ dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

e) $\displaystyle\int_3^9 x\ \ln(x-1)\ dx$

f) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\ dx$

g) $\displaystyle\int_0^2 x\ \ln(x^2+4)\ dx$

h) $\displaystyle\int e^{-x}\ \operatorname{sen} 2x\ dx$

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4 x\ dx$

10) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} \sqrt{x}\ dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\ \ln(x+1)\ dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ \ln x}\ dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\ dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 x^3\ e^{x^2}\ dx$

g) $\displaystyle\int e^x\,(1-\ e^x)^{-1}\ dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\ dx$

11) Traza la región limitada por las curvas dadas y calcula su área:

a) $y = 4x^2, \quad y = x^2+3$

b) $y = \cos x,\ y = \operatorname{sen} x,\ x = 0,\ x = \pi/2$

c) $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$

d) $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 1, \quad x = 2$

e) $y = \mathrm{e}^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = -2, \quad x = 1$

f) $y = x+6,\ \ y = x^3,\ \ x = -2,\ \ 2y+x = 0$

12) Usa el cálculo integral para calcular el área de los triángulos con vértices:

a) (0,0); (1,8); (4,3).

b) (-2,5); (0,-3); (5,2).

13) Calcular el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a ella en el punto (1,1) y el eje x.

14) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\ dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\ dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\ dx$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx$

e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\ dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\ dx$

Ayuda: En f) sustituya $x^2+1 = t$.

15) La sustitución $t = \tan\frac{x}{2}$, o equivalentemente, $x = 2\arctan t$, transforma cualquier integral que involucre sólo senos y cosenos vinculados por suma, producto o cociente, en la integral de una función racional. Verificar que con esta sustitución resulta

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Utilizar esta sustitución en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2}{1+\cos x}\ dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ dx$

16) Calcular las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \tan^2 x \; dx$

b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \; dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{12x-8-3x^2}}$

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$

f) $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \; dx$

17) Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \; ds$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^{2/3}} \; dy$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\, e^{-x^2} \; dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) \; dx$

18) Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias converge o no.

a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}-1} \; ds$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \; dx$

c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$

d) $\displaystyle\int_0^1 x \ln(x) \; dx$

e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$

f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \; dx$