Sucesiones

Definición: una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales $\mathbb{N}$ y cuya imagen está incluida en $\mathbb{R}$. O sea $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

tq $1 \mapsto a(1) \doteq a_1$, $2 \mapsto a(2) \doteq a_2$, y en general $n \mapsto a(n) \doteq a_n$.

Notación: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$

Ejemplos

① $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = n$

② $\{-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots\}$, $\{(-1)^n\}$, $a_n = (-1)^n$

③ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}$, $a_n = \frac{1}{n}$

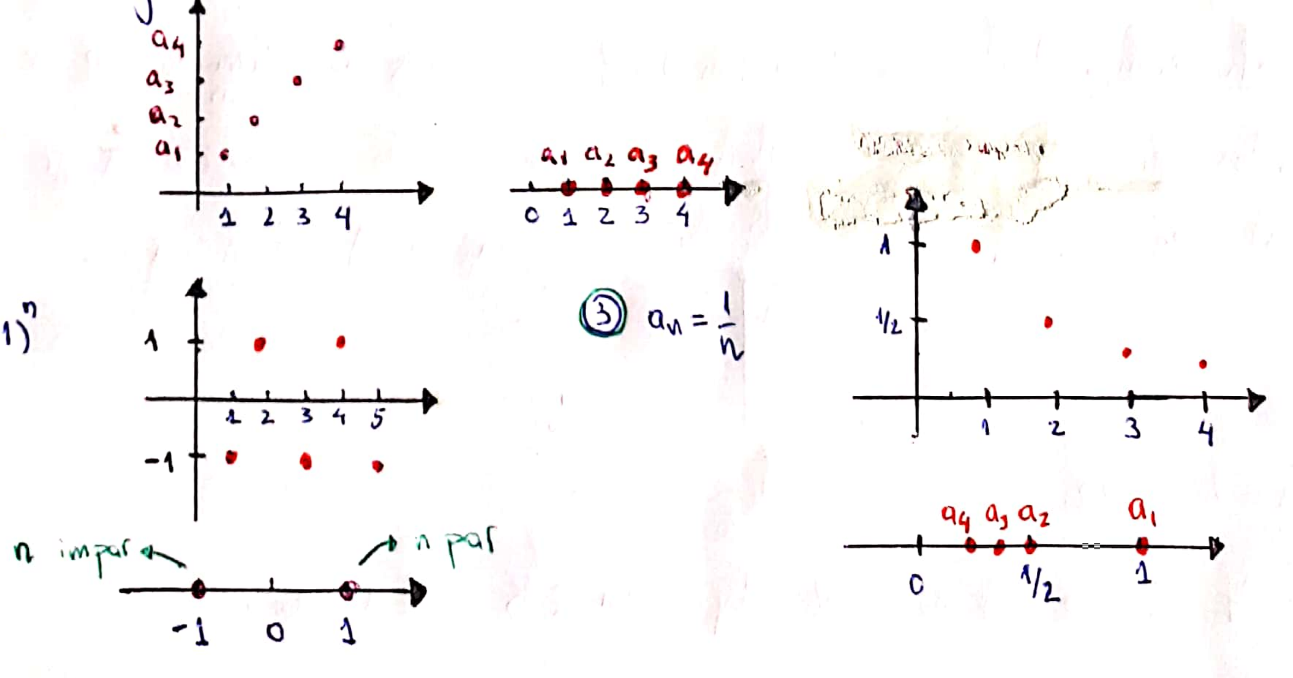
④ Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la restricción de f a $\mathbb{N}$ define una sucesión.

Observación: una sucesión $\{a_n\}$ se puede representar como el gráfico de una función o como un conjunto de números reales.

① $a_n = n$

② $a_n = (-1)^n$

③ $a_n = \frac{1}{n}$



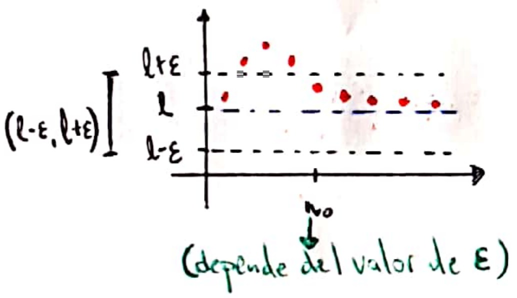
Definición: una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $l \in \mathbb{R}$ y se escribe

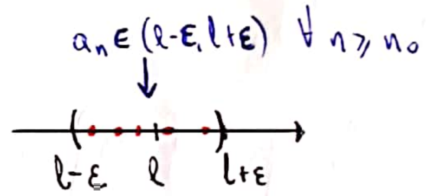
$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ ó $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ si los términos a_n se acercan a l tanto como queramos al hacer n suficientemente grande. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 .$$

- Recordemos que $|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$.

Gráficamente $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$





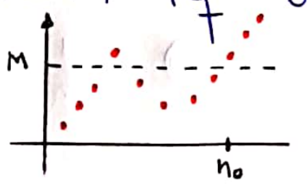
Ejemplo: Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Luego, como $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Entonces, basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Definición: dada una sucesión $\{a_n\}$, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ó $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si los términos se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande.

Esto es, $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $a_n > M \quad \forall n \geq n_0$.



Análogamente, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ó $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si

$$\forall K < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } a_n < K \quad \forall n \geq n_0 .$$

Definición: si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ y $\ell \in \mathbb{R}$ (o sea $\ell \neq \pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a ℓ. En los demás casos decimos que diverge.

Ejemplo: Decida si la sucesión dada converge o diverge.

① $a_n = \frac{1}{n}$. Recién vimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ converge a 0.

② $a_n = n$. Como $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ (Probarlo usando la definición) $\Rightarrow \{n\}$ diverge.

③ $a_n = (-1)^n$. Como $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe (alterna entre 1 y -1) $\Rightarrow \{(-1)^n\}$ diverge.

Observación: Se puede demostrar que si el límite existe, entonces es único.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(iv) Si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Ejemplos:

① $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \underset{(iv)}{\overset{\text{no puedo usar}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+1/n} = \frac{2}{1} = 2.$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3(1+7/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(1+7/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(1+7/n^3)} = 0 \cdot 1 = 0.$

Teorema (Relación entre límite de funciones y sucesiones).

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ y $a_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Ejemplo: calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$, con $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$

Sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, para $x>0$. Tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

y como $f(n) = a_n$ $\forall n \geq 1 = n_0$ $\Rightarrow$ por Teorema $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Observación: NO es cierto que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces cualquier función f tal que $f(n) = a_n$ cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (este límite puede NO existir).

Por ejemplo, si $a_n = \operatorname{sen}(\pi n)$ $(=0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y claro que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pero $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$ no existe

Teorema (del "sandwich" para sucesiones).

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Ejemplos:

① Encontrar $l = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2(n)}{n}$. Tenemos que $0 \leq \cos^2(n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$. Sean $a_n = 0$ y $c_n = \frac{1}{n}$, como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos^2(n)}{n} = 0$.

② Hallar $l = \lim \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3}$. Tenemos que $\frac{-1}{n^3} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego, como $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, por T. Sandwich $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} = 0$.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Ejemplos

① Probar que la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ converge a 0.

Tenemos que $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y con lo cual $|a_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{|-1|^n}{n} = \frac{1}{n}$.

Luego como $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por el Teorema anterior $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

② ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

- Analicemos primero el caso $r > 0$.

Recordemos que $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x\ln(r)}$ y además $\ln(r) \begin{cases} > 0 & \text{si } 1 < r \\ < 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

Luego, sea $f(x) = r^x$. Tenemos que $r^n = f(n)$ y como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

entonces por teorema $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r \quad \text{(I)} \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Por otra parte,

- si $r = 1$, $r^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$. (III)
- si $r = 0$, $r^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (IV)

- Ahora consideramos el caso $r < 0$
  - Si $r \in (-1, 0) \Rightarrow 0 < |r| < 1$ y por (II) $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 \therefore$ por Teo. anterior $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
  - Si $r = -1$, $r^n = (-1)^n$ que ya sabemos que no tiene límite para $n\to\infty$.
  - Si $r < -1$, r^n no tiene límite cuando $n \to \infty$

Conclusión

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in (-1, 1) \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{diverge en los otros casos.} \end{cases}$$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tq $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y f una función continua en $x=a$.

Entonces, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ $\left(= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\right)$.

Ejemplos

① Calcule el límite de la sucesión $\{e^{1/n}\}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y $f(x) = e^x$ es continua en $x=0$, entonces por teorema

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1.$$

② Calcule el límite de la sucesión $\{n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\}$.

Primero notemos que $n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}$.

Tomamos $a_n = \frac{1}{n}$; sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (o sea $a=0$ en el teorema).

Elegimos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Tenemos que f es cont. en $x=0$ ya que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 = f(0).$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Aplico el} \\ \text{teorema}}}{=} f(a) = f(0) = 1.$

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

- creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$;
- estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;
- decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$;
- estrictamente decreciente si $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$.

Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente, decimos que es monótona.

Ejemplos:

① $\{n\}$. Como $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$ $\forall n$, $\{n\}$ es estrictamente creciente.

② $\{\ln(n)\}$. Sabemos que $f(x) = \ln(x)$ es estrictamente creciente, por lo tanto
$n < n+1 \Rightarrow a_n = \ln(n) < \ln(n+1) = a_{n+1}$. Luego $\{\ln(n)\}$ es estric. crec.

③ $\{1,1,2,2,3,3,\ldots\}$. Como $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \Rightarrow \{a_n\}$ es creciente.

④ $\{\frac{1}{n}\}$. Tenemos que $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. O sea, $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$
y entonces $\{\frac{1}{n}\}$ es estrictamente decreciente.

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

(i) acotada inferiormente, si $\exists M_i \in \mathbb{R}$ tq $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) acotada superiormente, si $\exists M_s \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

① $\{\frac{1}{n}\}$. Como $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ es acotada (puedo tomar $M=1$).

② $\{-n\}$. Como $-n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$ es acotado sup. pero **no** inf.

③ $\{n+3\}$. Como $4 \leq n+3$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{n+3\}$ es acotado inf. pero **no** sup.

Observación: en la definición anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$.

- Análogamente se puede definir cota superior e inferior de cualquier subconjunto de números reales.
- Notar que las cotas sup. e inf. NO son únicas.
  Por ejemplo si $a_n = (-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores.

Axioma de completitud de los números reales.

Todo conjunto no vacío de números reales que es acotado sup. tiene una menor cota sup. en $\mathbb{R}$ y todo conjunto no vacío de número reales que es acotado inf. tiene una mayor cota inf. en $\mathbb{R}$.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Si A es acotado sup., la menor cota superior se llama supremo de A y la denotamos $\sup(A)$.
- Si A es acot. inf, la mayor cota inferior se llama ínfimo de A y la denotamos $\inf(A)$.

Además, si $\sup(A) \in A$, decimos que es el máximo de A y
si $\inf(A) \in A$, decimos que es el mínimo de A.

Ejemplo: Pensemos a las siguientes sucesiones como conjuntos de números reales, entonces

1. $\{\frac{1}{n}\} = A$. $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$ y A no tiene máximo ni mínimo.
2. $\{-n\} = B$. $\sup(B) = -1$, y -1 es el máximo. B no tiene ínfimo y $\therefore$ No tiene mínimo.
3. $\{(-1)^n\} = C$. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = -1$. Además 1 es el max. de C y -1 el mínimo de C.
4. $\{n+3\} = D$. $\inf(D) = 4$, y 4 es el mínimo de D. Además D no tiene supremo y por lo tanto no tiene máximo.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada.

Observación: La recíproca es falsa, o sea, $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow$ convergente.

Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$.

Sin embargo, sí es cierto si la sucesión es creciente o decreciente.

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotado superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 = \inf(\{a_n\})$

Observación: se puede demostrar que si $\{a_n\}$ es creciente entonces converge o $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Análogamente, si $\{a_n\}$ es decreciente, entonces converge o $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Subsucesiones

- Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos extraer de ésta otras sucesiones descartando algunos término (quizás una cantidad infinita). Cada una de estas nuevas sucesiones se llama subsucesión de $\{a_n\}$.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \dots\}$. Podemos extraer las siguientes subsucesiones

- $\{-1, -1, -1, \dots\}$ (términos impares)
- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ (términos pares)
- $\{-1, -1, -1, \frac{1}{4}, -1, -1, -1, \frac{1}{7}, \dots\}$

Definición: una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde los $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_3 & a_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_{n_1} & a_{n_2} & a_{n_3} \\ n_1 = 1 & n_2 = 3 & n_3 = 5 \end{array}$$

O sea $n_j = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.

- Notar que $\{a_{n_j}\}$ es una sucesión, o sea podemos escribir $\{a_{n_j}\} = \{b_j\}$.

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además los límite son iguales.

Ejemplo: Dada $\{\frac{1}{n}\}$, tenemos que $\{\frac{1}{2j-1}\}$ es una subsucesión. (Otra forma de escribirlo $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n_j} = \frac{1}{2j-1}$). Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = 0$.

Observación: el teorema anterior es muy útil para demostrar que una sucesión No tiene límite: basta encotrar dos subsucesiones distintas que converjan a a distintos límites.

Ejemplo: Sea $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Luego $a_{n_j} = (-1)^{2j}$ y $a_{n_K} = (-1)^{2K+1}$ son dos subsucesiones de $\{a_n\}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente $\therefore$ $\{a_n\}$ no tiene límite o sea diverge.

Teorema (Bolzano - Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Observación: puede haber más de una subsucesión convergente

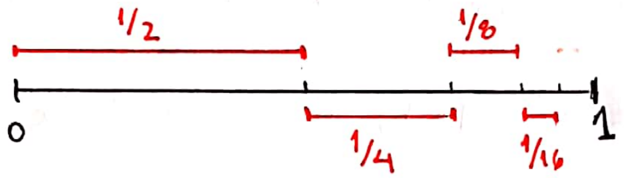
Si $\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\} \Rightarrow$ $b_j = a_{2j} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $c_K = a_{2K+1} = \{-1, -1, -1, \dots\}$ son ambas sucesiones convergentes.

Series

Dada una sucesión $\{a_n\}$ queremos sumar sus infinitos términos, esto es $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$; lo cual escribiremos como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ejemplo si $a_n = \frac{1}{2^n}$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Podemos pensar a_n como longitudes y entonces sumar un término se puede interpretar como agregar la mitad de lo que falta para llegar a 1.



Graficamente, es claro que la suma se aproxima a 1 tanto como se quiera.
Pero, ¿cómo sumar una cantidad <u>infinita</u> de números?
Como sabemos sumar una cantidad <u>finita</u> de números, podemos definir $S_1 \doteq a_1$, $S_2 \doteq a_1 + a_2$, ..., $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ y después hacer $\lim_{k \to \infty} S_k$.

<u>Definición:</u> dada $\{a_n\}$ sucesión de números reales, llamaremos <u>serie</u> de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la k-ésima <u>suma parcial</u> S_k de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k \doteq a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Luego, $\{S_k\}$ es una sucesión de números reales.
Si el límite de la suc. $\{S_k\}$ existe y es finito, i.e. $\lim_{k \to \infty} S_k = S < \infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es <u>convergente</u> y definimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
Si $\lim_{k \to \infty} S_k$ no existe o es $\pm\infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es <u>divergente</u>.

Ejemplos: Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Tenemos que $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$s_1 = 1$; $s_2 = 1+2 = 3$; $s_3 = 1+2+3 = 6, \ldots, s_k = 1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Luego, como $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Observemos que esta serie comienza desde $n=0$. Entonces

$s_0 = 1$; $s_1 = 1+(-1) = 0$; $s_2 = 1+(-1)+1 = 1$; y en general $s_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$

Luego, NO existe $\lim_{k\to\infty} s_k$ pues $\{s_k\}$ admite dos subsucesiones con límites distintos : $\{s_{2j}\}$ tiene límite 1 y $\{s_{2j+1}\}$ tiene límite 0.

Al no existir $\lim_{k\to\infty} s_k$, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$ parece convergente. Veremos que efectivamente, es convergente.

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots$ se llama serie geométrica.

Teorema:

(i) Si $|r| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Demostración: Fijamos $r \in \mathbb{R}$. Luego tenemos que

$$\left.\begin{aligned} s_k &= 1 + r + r^2 + \ldots + r^k \\ r s_k &= r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_k - r s_k = 1 - r^{k+1}. \text{ O sea, } (1-r)s_k = 1 - r^{k+1}$$

(i) Supongamos $|r|<1$.

Por un lado, como $r\neq 1$, tenemos que $S_k = \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r}$.

Por otra parte, como $|r|<1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = r \lim_{k\to\infty} r^k = 0$ (recordar cuando analizamos la sucesión $\{r^n\}$)

Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$ y listo!.

(ii) Supongamos $|r|\geq 1$.

- Si $r=-1$, ya vimos en el ejemplo ② que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.
- Si $r=1$, entonces $S_k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{K\text{-veces}} = K$. Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$ y con lo cual $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ es divergente.
- Si $|r|>1$.

  Por un lado tenemos que $S_K = \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r}$.

  Por otra parte, ya sabemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ \nexists & \text{si } r<-1 \end{cases}$ ∴ en ambos casos no es finito

Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(\dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{k+1}}{1-r}\right)$ es divergente y con lo cual

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Observación: Si $|r|<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \dfrac{1}{1-r} - 1 = \dfrac{r}{1-r}$.

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = \sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-1/2} = 1$ (la serie que vimos antes!)
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{5}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ es divergente pues $r=\dfrac{4}{3}>1$.

Propiedades de series convergentes.

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ son series convergentes y además

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b$
- $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Demostración (Idea): estas propiedades se desprenden de la def. de serie convergente y de las propiedades de los límites. Ejemplo: veamos que $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

- Sean $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ y $t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$. Por hipótesis $\lim_{k\to\infty} s_k = s < \infty$ y $\lim_{k\to\infty} t_k = t < \infty$
- Sea $u_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)$ → k-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.
- Veamos que $\{u_k\}$ converge.

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} b_n$$

$$= \lim_{k\to\infty} s_k + \lim_{k\to\infty} t_k = s + t$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y además $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ejercicio: probar que $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie ya que es difícil deducir una fórmula par S_K. Sin embargo, hay varios criterios que permiten establecer si una serie converge o diverge sin tener que hallar una fórmula explícita para S_K.

Teorema (Criterio de la divergencia). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ o $\lim a_n \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración: tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} S_K = a_1 + \dots + a_{K-1} + a_K \\ S_{K-1} = a_1 + \dots + a_{K-1} \end{array}\right\} \Rightarrow S_K - S_{K-1} = a_K .$$

Ahora, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces por definición existe $\lim_{K\to\infty} S_K \doteq S$.

Pero entonces también vale que $\lim_{K\to\infty} S_{K-1} = S$ (pues $K\to\infty \Leftrightarrow K-1\to\infty$)

Luego, $\lim_{K\to\infty} a_K = \lim_{K\to\infty} (S_K - S_{K-1}) = \lim_{K\to\infty} S_K - \lim_{K\to\infty} S_{K-1} = S - S = 0$ ✓.

Ejemplo: Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ es divergente.

Tenemos que $a_n = \frac{n^2}{5n^2+4}$. Luego, como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ por el Crit. de la div. la serie es divergente.

Observación: no vale el recíproco del teorema. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica)

Vale que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pero veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Vamos a probar que una subsucesión de la sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$ es divergente (y por lo tanto, por teo. visto anteriormente, la sucesion $\{S_k\}$ también diverge, o sea que la serie diverge).

Consideramos la subsucesión $\{S_{2^j}\}$. Tenemos que si

$j=1 \to S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$j=2 \to S_{2^2} = S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$j=3 \to S_{2^3} = S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$j=4 \to S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) > S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \frac{1}{2}$

$\vdots$

De manera general $S_{2^j} > 1 + j\frac{1}{2}$.

Luego, $\lim_{j\to\infty} S_{2^j} \geq \lim_{j\to\infty} \left(1 + j\frac{1}{2}\right) = \infty$. O sea, $\{S_{2^j}\}$ es una subsucesión de sumas parciales que diverge. Luego $\{S_k\}$ diverge y por def. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Observación: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1}}_{\text{cantidad finita de sumandos } < \infty} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Teorema (Criterio de comparación para series)

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Equivalentemente, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración:

Para cada $K \in \mathbb{N}$ con $K \geq n_0$ definimos $s_K \doteq a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_K$ y $t_K \doteq b_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_K$

Como $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, entonces existe $\lim_{K\to\infty} t_K \doteq t$. Queremos ver que existe $\lim_{K\to} s_K$.

Por un lado, como $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, las sucesiones $\{s_K\}$ y $\{t_K\}$ son crecientes.

Además, $a_n \leq b_n$ implica que $s_K \leq t_K \underset{\{t_K\}\text{ creciente}}{\leq} \lim_{K\to\infty} t_K = t < \infty$, con t que no depende de K. O sea que la suc. $\{s_K\}$ está acotada (superiormente) y además es creciente, por lo tanto existe su límite. Entonces, por definición $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplos: Analice la convergencia de las siguientes series.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)^2}{2^n+n}$. Tenemos que $0 \leq \frac{\operatorname{sen}(n)^2}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego,

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (por ser serie geom. con $|r|<1$) por el teorema anterior podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n}$ converge.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Tenemos que $0 \leq \frac{n}{n^2+n^2} \leq \frac{n}{n^2+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego,

como $\frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverge (por ser serie armónica), entonces por el teorema concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

Teorema (Criterio de comparación en el límite)

Sean $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ series de terminos positivos. Entonces

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\iff \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge

(ii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. (o equiv. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ div. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge)

(iii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ent. $\sum b_n$ div. $\Rightarrow \sum a_n$ div. (o equiv. $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow \sum b_n$ conv.)

Demostración:

(i) Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tq $c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$.

Tomemos $\varepsilon = \frac{c}{2}$, entonces $\exists\, n_1$ tq $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c$ $\forall n \geq n_1$. Ahora, como $b_n > 0$

tenemos que $\frac{c}{2} b_n \underset{(\blacktriangle)}{\leq} a_n \underset{(*)}{\leq} \frac{3}{2} c\, b_n$ $\forall n \geq n_1$.

Luego, si $\sum_{n=n_0} a_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_1} a_n$ conv. y como además se cumple $(\blacktriangle)$ por el Teo. de Comparación de Series tenemos que $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{c}{2} b_n$ conv. y $\therefore \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ es convergente.

De la misma forma pero usando $(*)$ podemos ver que $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

con lo cual vimos (i).

(ii) Dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tq $-1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1$ $\forall n \geq n_1$. Más aún, como a_n y b_n son positivas

tenemos que $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1$ $\forall n \geq n_1$, o sea $0 < a_n \overset{(\bullet)}{\leq} b_n$ $\forall n \geq n_1$.

Ahora, si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ conv. y como además se cumple $(\bullet)$ por el Teo. de Compar. de series tenemos que $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ conv $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. O sea, vale (ii).

iii) Dado $M>0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\frac{a_n}{b_n} > M \;\forall n \geq n_1$.

O sea, $a_n > M b_n \;\forall n \geq n_1$ $(\square)$

Luego, si $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ conv y como vale $(\square)$, por el Teo. Comp. tenemos que $\sum_{n=n_1}^{\infty} M b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge.

Ejemplo: determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ ~~...~~ converge o diverge.

Notemos que para n muy grande $\frac{1}{2^n-1}$ se comporta como $\frac{1}{2^n}$. Entonces, sean $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ y $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Luego, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2^n-1}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2^n-1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1$ y

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (serie geometrica $r=\frac{1}{2}<1$) $\Rightarrow$ por Teo. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge.

Teorema (Criterio de la integral para series)

Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$, entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}_{C_1} \Longleftrightarrow \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}}_{C_2}$.

Observaciones:

1. No es cierto en general que $C_1 = C_2$.
2. No es necesario iniciar la serie o la integral en $n=1$. Por ejemplo para la serie $\sum_{n=5} \frac{1}{(n-4)^2}$ consideramos la integral $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$.

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, para $0 < p < \infty$. (Serie p)

Sea $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Tenemos que f es cont., posit. y decreciente en $[1, \infty)$.

Además $f(n) = \frac{1}{n^p}$.

Es fácil ver que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $p > 1$. (Ejercicio). Luego, por el teo. del Crit. Int. para series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$.

Definición: decimos que una serie es alternante si sus términos son positivos y negativos alternadamente.

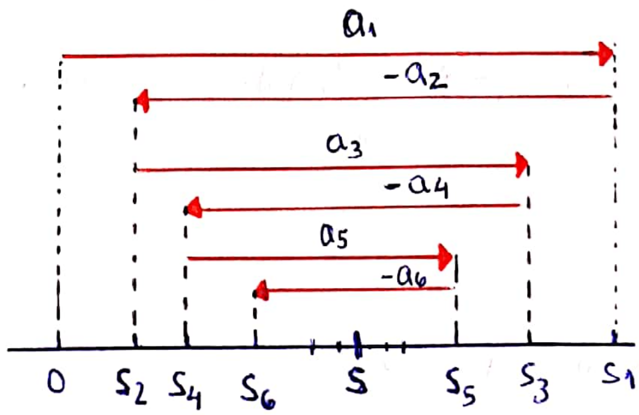
Ejemplos

① $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

② $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Teorema (Criterio para series alternantes). Si $a_n \geq a_{n+1} > 0\ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ también converge)



Ejemplo: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

① $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Tenemos que $a_n = \frac{1}{n}$.

Sabemos que $0 < n < n+1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ o equiv. $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall n$. O sea,

$0 < a_{n+1} < a_n$ $\forall n$. Además $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Entonces, por el

Crit. para ser. alt. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1}$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1}$ NO existe!

y entonces la serie diverge por el crit. de la divergencia.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$. Tenemos que $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ $\forall n > 1$. (1)

Además, como $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow$ por Teo de Suc. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. (2)

Por último, como $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1-\ln(x)) < 0$ $\forall x > e$

tenemos que $a_{n+1} < a_n$ $\forall n \geq 3$ (3)

Luego, de (1), (2) y (3) y por el crit. de Ser. alt. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge y con lo

cual $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.

Definición: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser serie p con $p=2>1$.

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración:
Tenemos que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$, luego $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Como por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces por el Teo. de Comparación de series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ es convergente. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente ■

Ejemplo: Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge o diverge.

Tenemos que $0 \leq \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie $p=2>1$)
Luego, por Teo. Comp. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ converge y con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge.

Observación: NO vale la recíproca, o sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv. $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ conv.
Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (por crit. series alternantes) pero $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armón.)
- En este caso decimos que la serie converge condicionalmente.

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

(i) Si $r<1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente).

(ii) Si $r>1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r=\infty$).

(iii) Si $r=1$, entonces no se puede asegurar nada.

Demostración

(i) Sup. $r<1$. Elegimos s tq $r<s<1$ y sea $\varepsilon \doteq s-r>0$. Ahora, como $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right| < \varepsilon = s-r \ \forall n \geq n_1$. En particular, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s \ \forall n \geq n_1$.

Luego, $|a_{n_1+1}| < s|a_{n_1}|$,

$|a_{n_1+2}| < s|a_{n_1+1}| < s^2|a_{n_1}|$, y en general $0<|a_{n_1+k}| < s^k|a_{n_1}| \ \forall k \geq 1$.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} s^k |a_{n_1}| = |a_{n_1}| \sum_{k=1}^{\infty} s^k$ es convergente pues $s<1$ (serie geom.), por el Crit. de Compar. la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_1+k}| = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_n|$ y también $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, o sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es abs. conv.

(ii) Sup. $r>1$ y sea s tq $1<s<r$ y $\varepsilon \doteq r-s>0$. Por hipótesis existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right| < r-s \ \forall n \geq n_1$. En particular, $-(r-s) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r \ \forall n \geq n_1$, o sea, $s < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ \forall n \geq n_1$ (notar que esto también vale si $r=\infty$, ver def. de límite).

Luego, $|a_{n_1+1}| > s|a_{n_1}|$, $|a_{n_1+2}| > s|a_{n_1+1}| > s^2|a_{n_1}|$ y en gral. $|a_{n_1+k}| > s^k |a_{n_1}| \ \forall k \geq 1$.

Ahora como $s>1$, $\lim_{k\to\infty} |a_{n_1+k}| \geq \lim_{k\to\infty} s^k |a_{n_1}| = \infty$. Entonces, por el Criterio de la divergencia $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1+k} = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$ no converge y $\therefore$ tampoco converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) • Si $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

• Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Por lo tanto si $r=1$ NO podemos asegurar nada.

Ejemplo: analice si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$, con $c \neq 0$, converge o diverge.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|c|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|c|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|^{n+1} n!}{|c|^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{n+1} = 0.$

Luego, por el crit. del cociente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ conv. absolutamente (y ∴ converge)

Observación: notar que del ejemplo anterior podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$ $\forall c \in \mathbb{R}$ (sale usando el criterio de la divergencia).

Ejemplo: analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$, para $c \neq 0$.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|c|^{n+1}}{n\,|c|^n} = \lim_{n\to\infty} |c| \frac{(n+1)}{n} = |c|$. Por lo tanto,

- Si $|c| < 1$, la serie converge absolutamente.
- Si $|c| > 1$, la serie diverge.
- Si $c = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge por crit. divergencia
- Si $c = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ diverge por crit. de divergencia.

Teorema (Criterio de la raíz). Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r \doteq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(i) Si $r<1$, entonces la serie es absolutamente conv. (y por tanto es converg.)

(ii) Si $r>1$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $r=1$, no se puede asegurar nada.

Demostración:

(i) Sup. $r<1$. Elegimos s tq $r<s<1$ y sea $\varepsilon \doteq s-r>0$. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\sqrt[n]{|a_n|}-r\right| < \varepsilon = r-s$ $\forall n \geq n_0$. En particular, $\sqrt[n]{|a_n|} < s$ $\forall n \geq n_0$ y por tanto $0 < |a_n| < s^n$ $\forall n \geq n_0$. Luego, como $s<1$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} s^n$ conv. (serie geom.) y entonces por el crit. comparación tambien converge $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Luego, vale (i).

(ii) Sup. $r>1$. Elegimos s tq $r>s>1$ y sea $\varepsilon \doteq r-s>0$. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\sqrt[n]{|a_n|}-r\right| < \varepsilon = r-s$ $\forall n \geq n_0$. En particular $-(r-s) < \sqrt[n]{|a_n|} - r$ $\forall n \geq n_0$ o equiv. $s < \sqrt[n]{|a_n|}$ $\forall n \geq n_0$ (notar que esto vale si $r=\infty$, ver def. de límite).

Luego, $|a_n| > s^n$ $\forall n \geq n_0$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} |a_n| \geq \lim_{n\to\infty} s^n = \infty$. Entonces, por el criterio de la divergencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii)

- Si $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln(1)-\ln(n))} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

- Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$

y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Por lo tanto si $r=1$, no podemos asegurar nada.