Funciones de varias variables

Dados dos conjuntos A y B, recordemos que una función $f: A \to B$ es una regla que a cada elemento de A le asigna exactamente un único elemento de B.

Definición: una función f de n variables es una regla que asigna a cada n-tupla $\bar{x} \doteq (x_1, \dots, x_n)$ un único número real $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

- el dominio de f es el subconjunto $Dom(f)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$Dom(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) \text{ está bien definida}\}$$

- el rango o imagen de f es el subconjunto $Im(f)$ de $\mathbb{R}$ dado por

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, \bar{x} \in Dom(f) \text{ con } y = f(\bar{x})\}$$

- el gráfico de f es el subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in Dom(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$= \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in Dom(f)\}$$

Notar que sólo podemos dibujar el gráfico de f cuando

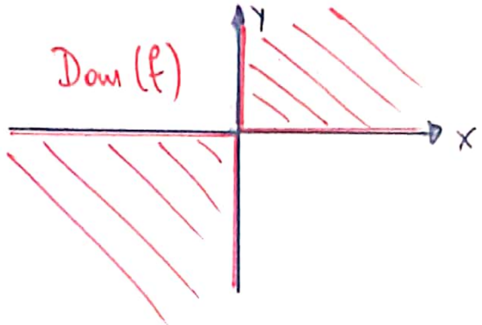
- $n = 1$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una curva en el plano)
- $n = 2$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una superficie en el espacio)

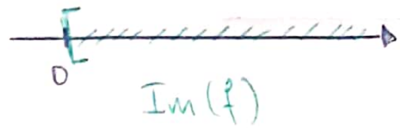
Observación: si $n=2$ escribiremos $f(x,y)$ en lugar de $f(x_1,x_2)$ y si $n=3$ escribiremos $f(x,y,z)$ en lugar de $f(x_1,x_2,x_3)$.

Ejemplos

① Sea $f(x,y) = \sqrt{xy}$ (función de $n=2$ variables)

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \leq 0\}$





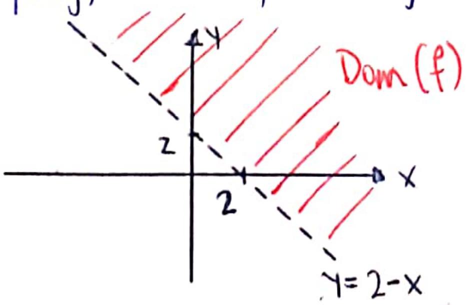
- $\text{Im}(f) = [0, \infty)$. En efecto, si elegimos $y = 1$ tenemos que $f(x,1) = \sqrt{x}$ y ya sabemos que $h(t) = \sqrt{t}$ es sobreyectiva de $[0,\infty) \to [0,\infty)$ $\therefore$ $f(x,1)$ también.

- Otra forma: dado $z \geq 0$ basta tomar $x = y = z$ y luego

$$f(x,y) = \sqrt{xy} = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{z^2} = z \quad \therefore \ z \in \text{Im}(f) \ ✓$$

② Sea $f(x,y) = \ln(x+y-2)$

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y-2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2-x\}$

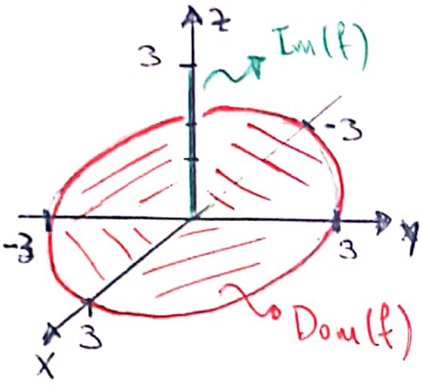


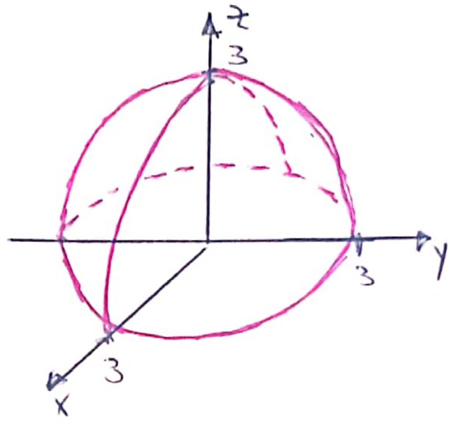
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. En efecto, si elegimos $x = 0$ tenemos que $f(0,y) = \ln(y-2)$ y ya sabemos que $h(t) = \ln(t-2)$ de $(2,\infty) \to (-\infty,\infty)$ es sobre.

- Otra forma: dado $z \in \mathbb{R}$ basta tomar $(x,y) = (0, e^z + 2) \in \text{Dom}(f)$ ya que $f(0, e^z+2) = \ln(e^z) = z$. ✓

③ Sea $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ (notación usual $z = f(x,y)$)

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3^2\} \rightarrow$ Ec. circunf. centrado en $(0,0)$ y de radio 3





- $\text{Im}(f) = [0,3]$

En efecto, si $y=0$, $f(x,y) = \sqrt{9-x^2}$ sabemos que es sobre de $[-3,3] \rightarrow [0,3]$

Otro forma: dado $0 \leq z \leq 3$, basta tomar $(x,y) = ((9-z^2)^{1/2}, 0)$ ya que

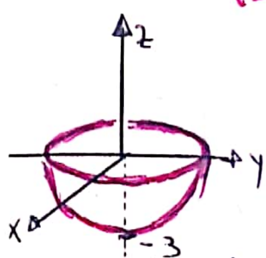
$$f((9-z^2)^{1/2}, 0) = \sqrt{9-(9-z^2)} = \sqrt{z^2} = z \checkmark$$

- $\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3^2 \wedge z = \sqrt{9-x^2-y^2}\}$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3^2 \wedge \underbrace{\underbrace{z^2+x^2+y^2 = 3^2}_{\text{Esfera de centro } (0,0,0) \text{ y radio}=3} \wedge \underbrace{z \geq 0}_{z \text{ no negativo}}}_{\text{hemisferio superior (solo la "cáscara"} \rightarrow \text{superficie)}}\}$$

④ Sea $f(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$

- $\text{Dom}(f) =$ igual al anterior
- $\text{Im}(f) = [-3,0]$



- $\text{Graf}(f) =$ hemisferio inferior (cáscara) de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 3.

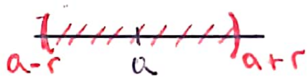
Límite y continuidad de funciones de varias variables

Definición: dado $r>0$ y $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, llamamos bola (abierta) de centro $\bar{a}$ y radio r al conjunto $B(\bar{a},r) \doteq \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{a}\|<r\}$.

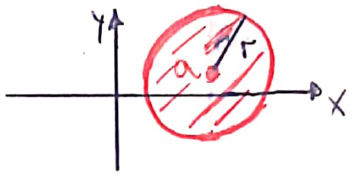
Observación: si escribimos $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ y $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$, entonces

$$B(\bar{a},r)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}<r\}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2<r^2\}$$

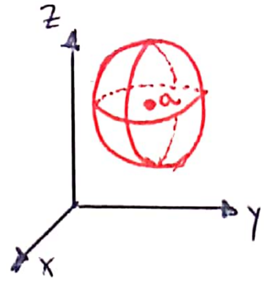
- Si $n=1$, $B(\bar{a},r)$ es un intervalo abierto centrado en $\bar{a}$ y de "radio" r



- Si $n=2$, $B(\bar{a},r)$ es un disco abierto con centro $\bar{a}$ y de radio r

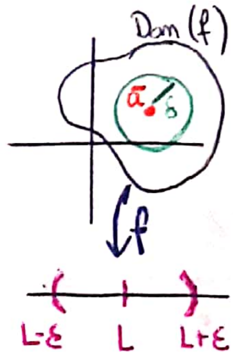


- Si $n=3$, $B(\bar{a},r)$ es una bola centrada en $\bar{a}$ y de radio r (interior de la "cáscara")



Definición (Límite): Sea $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ y $f:\mathrm{Dom}(f)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida en un dominio $\mathrm{Dom}(f)$ que incluye ptos. arbitrariamente cercanos a $\bar{a}$. Decimos que

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=L \quad \left(\text{o} \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n)=L\right)$$

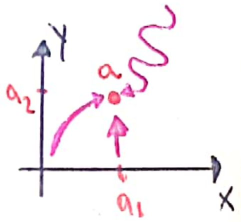


si $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0$ tq $\bar{x}\in\mathrm{Dom}(f)\cap B(\bar{a},\delta) \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$

(si $\bar{x}\in\mathrm{Dom}(f)$ queda $\|\bar{x}-\bar{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$)

Esto significa que si nos acercamos "por cualquier lado" al punto $\bar{a}$, f se acerca a L.

Observación: la definición establece que la distancia (en $\mathbb{R}$) entre $f(\bar{x})$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo que la distancia (en $\mathbb{R}^n$) entre $\bar{x}$ y $\bar{a}$ sea suficientemente pequeña. Sin embargo NO hay referencia a la dirección o modo de aproximación. Luego, si existe el límite entonces $f(x,y)$ tiene que aproximarse a L sin importar como $\bar{x}$ se aproxima a $\bar{a}$.



Por lo tanto, si encontramos dos maneras distintas de aproximarnos a $\bar{a}$ en las cuales la función $f(\bar{x})$ tiene diferentes límites, entonces esto nos dice que $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$ NO existe.

Ejemplos:

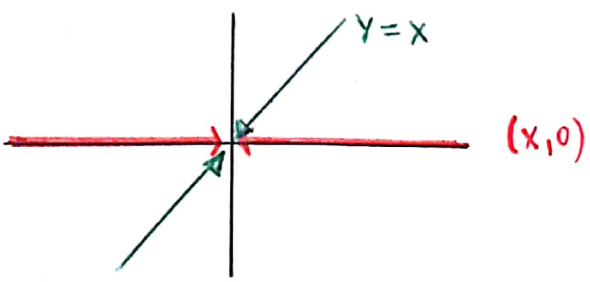
① Sea $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Demuestre que $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x})$ NO existe $\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\right)$

Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por puntos del eje x, o sea si $(x,y)=(x,0)\to(0,0)$ como $f(x,0)=0$ tenemos que $\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. ①

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y=x$, o sea si $(x,y)=(x,x)\to(0,0)$ como $f(x,x)=\dfrac{xx}{x^2+x^2}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ tenemos que $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. ②

De ① y ② concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NO existe.



2) Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$. Probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ No existe.

Notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}$ ("plano - eje x")

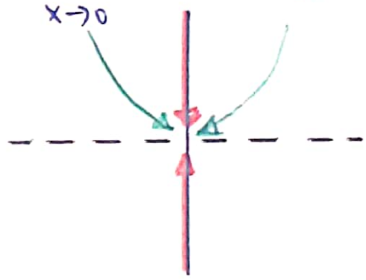
- Si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje y, o sea $(x,y)=(0,y)\to(0,0)$. Como

$f(0,y)=\dfrac{0^2+y^2}{y}=y$, entonces $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} y = 0$ (1)

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por la parábola $y=x^2$, o sea si $(x,y)=(x,x^2)\to(0,0)$.

Como $f(x,x^2)=\dfrac{x^2+x^4}{x^2}=1+x^2$, entonces $\lim\limits_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim\limits_{x\to 0} 1+x^2 = 1$ (2)

De (1) y (2) concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ No existe.



Ejercicio: usando la definición de límite demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Definición (Continuidad): Sea $f: Dom(f)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$. Decimos que f es continua en $\bar{a}$ si $\bar{a}\in Dom(f)$ y $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

- Decimos que f es continua si f es continua $\forall \bar{x}\in Dom(f)$.

Observación: valen propiedades similares a las de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
O sea, si f y g son continuas entonces también son continuas $f\pm g$, $f\cdot g$, etc.

Derivadas Parciales

Intro/Motivación: sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Si fijamos b, tenemos que $g(x) \doteq f(x,b)$ es una función de una sóla variable (la x) y entonces tiene sentido considerar su derivada en $x=a$. Esto es

$$g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \doteq \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \doteq f_x(a,b)}_{\text{Derivada parcial de } f \text{ con respecto a } x \text{ en el pto. } (a,b)}$$

- En general, para cualquier punto (x,y) definimos la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x,y) como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) \doteq \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

- Notar que para calcular $f_x(x,y)$ dejamos la variable y fija (la pensamos como una constante) y derivamos respecto a la variable x. Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2y + e^y + x$ entonces $f_x(x,y) = 2xy+1$.

- De manera análoga podemos definir $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, y más aún también podemos hacer lo mismo para funciones de n variables.

Definición: Sean $f:\mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ y sup. $B(\bar{a},r)\subset\mathrm{Dom}(f)$ para algún $r>0$. Definimos la derivada parcial de f respecto a x_j en el punto $\bar{a}$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_n) = f_{x_j}(a_1,\dots,a_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Observación:

- Si $n=2$ escribimos f_x y f_y en lugar de f_{x_1} y f_{x_2}
- Si $n=3$ escribimos f_x, f_y, f_z en lugar de $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$.
- Si $n=1$ tenemos que $f_{x_1}(a) = f'(a)$ (la derivada usual).

<u>Observación:</u> para calcular la derivada parcial de f respecto a x_j, consideramos todas las variables x_k con $k \neq j$ como constante y derivamos con respecto a la variable x_j.

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$. Entonces, las derivadas parciales de f son

$$f_x(x,y,z) = \frac{z}{y+z} \quad ; \quad f_y(x,y,z) = \frac{-xz}{(y+z)^2} \quad ; \quad f_z(x,y,z) = \frac{x(y+z) - xz \cdot 1}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+z)^2}.$$

<u>Observación:</u> Sabemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \Rightarrow f$ es continua en a. Sin embargo, si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 2$ lo anterior no es cierto. Es decir pueden existir todas la derivadas parciales de f en $\bar{a}$ pero f puede ser discontinua en $\bar{a}$.

- Por ejemplo, sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

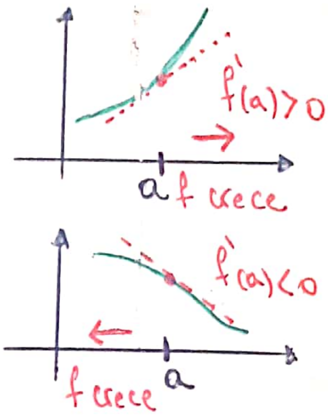
Tenemos que $f_x(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(h,0)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h} = 0$.

De manera análoga se prueba que $f_y(0,0) = 0$. Sin embargo f NO puede ser continua en $(0,0)$ ya que ni siquiera existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ (ver pág. 89).

- Si pedimos continuidad de las derivadas parciales f_{x_j} en $\bar{a}$ entonces podemos garantizar continuidad de f en $\bar{a}$. Esto es:

<u>Teorema:</u> Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ y $B(\bar{a}, r) \subset \mathrm{Dom}(f)$, para algún $r > 0$.
Si $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ existen y son continuas para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r) \Rightarrow f$ es continua para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$. (En particular para $\bar{x} = \bar{a}$).

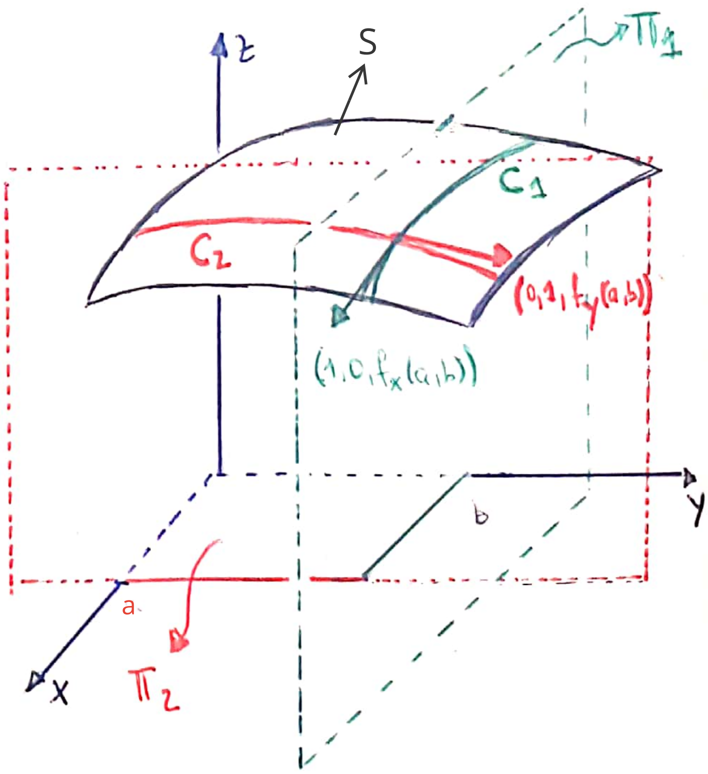
Interpretación geométrica de las derivadas parciales.



- Recordemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada $f'(a)$ nos da información sobre la dirección de crecimiento de f en a. O sea si $f'(a)>0$ la función crece yendo a la derecha y si $f'(a)<0$ la función crece yendo a la izq (o decrece yendo a la derecha). Además cuando más positiva/negativa es $f'(a)$ más rápido crece/decrece f en a.

Para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivada parcial $f_{x_j}(\bar{a})$ da la tasa de crecimiento de f en $\bar{a}$ cuando nos movemos dejando todas las coordenadas fijas salvo la j-ésima.

- Supongamos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea S el gráfico de f, es decir



$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \wedge (x,y) \in Dom(f)\}$.

Sea Π_1 el plano $y=b$ y $C_1 = S \cap \Pi_1$. O sea C_1 es la imagen de la función vectorial $r_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ def. por $r_1(x) = (x, b, f(x,b))$.

Sabemos que $r_1'(x)$ es un vector tangente a $r_1(x)$

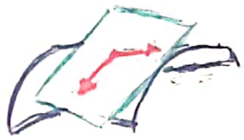
Entonces $r'(a) = (1, 0, f_x(a,b))$ es tangente a la curva C_1 en el pto $(a,b,f(a,b))$.

Análogamente si Π_2 es el plano $x=a$ y $C_2 \doteq S \cap \Pi_2$, el vector $(0,1,f_y(a,b))$ es tangente a C_2 en el pto $(a,b,f(a,b))$.

- Otra interpretación: $f_x(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1.

$f_y(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2.

Definición: Sea $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in Dom(f)$. El plano que pasa por $(a,b,f(a,b))$ y es generado por los vectores $(1,0,f_x(a,b))$ y $(0,1,f_y(a,b))$ se llama plano tangente al gráfico de f en el punto $(a,b,f(a,b))$.



Observación: la ecuación vectorial del plano tangente al gráfico de f en $(a,b,f(a,b))$ es

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t\,(1,0,f_x(a,b)) + r\,(0,1,f_y(a,b)) \quad , \text{ con } t,r \in \mathbb{R}.$$

- Sabemos que el vector $(1,0,f_x(a,b)) \times (0,1,f_y(a,b)) = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$ es perpendicular al plano tangente. Luego, la ecuación normal del plano tangente es

$$\langle (x,y,z) - (a,b,f(a,b)) \,,\, (-f_x(a,b), -f_y(a,b), +1) \rangle = 0 .$$

O equivalentemente

$$z = (x-a)\,f_x(a,b) + (y-b)\,f_y(a,b) + f(a,b)$$

Ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(a,b,f(a,b))$.

Ejemplo: Obtener la ecuación del plano tangente al gráfico de $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punto $\left(\pi, 4, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ y además dar la ec. de la recta normal a dicho plano y que pasa por el mismo punto.

- Tenemos que:
  - $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{y}\right) \rightsquigarrow f(\pi,4) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} \rightsquigarrow f_x(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
  - $f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{(-x)}{y^2} \rightsquigarrow f_y(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{-\pi}{16} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$

Luego, la ecuación del plano tangente en el punto $\left(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) - \frac{\pi\sqrt{2}}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por otra parte, la recta que pasa por el punto $\left(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y es normal al plano anterior es:

$$(x,y,z) = \left(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}\pi}{32}, 1\right)}_{\text{vector normal al plano}}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Regla de la Cadena

- Para funciones de 1 variable sabemos que si $h: I_1 \subseteq \mathbb{R} \to I_2$ y $f: I_2 \subseteq \mathbb{R} \to I_3$ son funciones derivables en sus dominios, entonces la función $g(t) = f(h(t))$ es derivable y además $g'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$

$$t \mapsto h(t) \mapsto f(h(t))$$
$$\underset{I_1}{\mathbb{R}} \xrightarrow{h} \underset{I_2}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \underset{I_3}{\mathbb{R}}$$

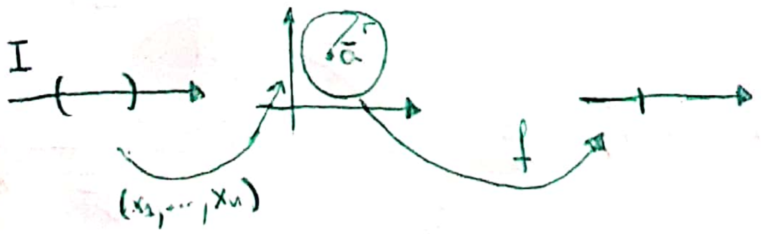
Teorema (Regla de la Cadena, Caso 1): Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ y tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}, r)$ para algún $r > 0$.

Para $1 \leq i \leq n$ y un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sean $x_i: I \to \mathbb{R}$ funciones derivables $\forall t \in I$ y tal que $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in B(\bar{a}, r)$ $\forall t \in I$. Entonces, la función

$g(t) \doteq f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es derivable $\forall t \in I$ y además

$$\frac{dg}{dt} = g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_2'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_n'(t)$$

$$t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \longmapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$
$$\mathbb{R} \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, con $x(t) = \operatorname{sen}(t)$, $y(t) = e^t$. Hallar $\frac{df}{dt}$.

- Tenemos que: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$.

$$x'(t) = \cos(t) \quad ; \quad y'(t) = e^t .$$

Luego

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= (2x(t) + y(t)) \cdot \cos(t) + (2y(t) + x(t))\, e^t$$

$$= (2\operatorname{sen}(t) + e^t) \cos(t) + (2e^t + \operatorname{sen}(t))\, e^t \quad (\blacktriangle)$$

Observación: notar que si escribimos $f(t) = x^2(t) + y^2(t) + x(t)y(t) = \operatorname{sen}^2(t) + e^{2t} + \operatorname{sen}(t)e^t$ entonces $\frac{df}{dt} = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + 2e^{2t} + \cos(t)e^t + \operatorname{sen}(t)e^t$ que es igual a $(\blacktriangle)$.

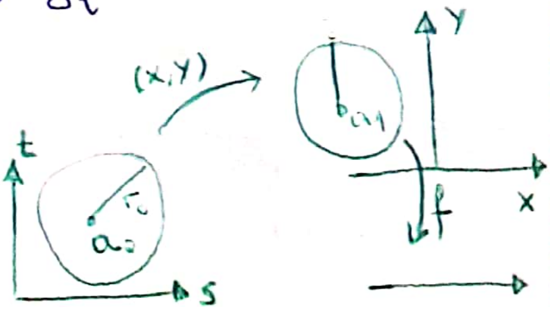
Teorema (Regla de la Cadena, Caso 2): Sea $f: \operatorname{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{a}_1 \in \operatorname{Dom}(f)$ y tq $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}_1, r_1)$ para algún $r_1 > 0$. Sean $x: \operatorname{Dom}(x) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $y: \operatorname{Dom}(y) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones con sus derivadas parciales continuas en $B(\bar{a}_0, r_0)$ para algún $r_0 > 0$ y tal que $(x(s,t), y(s,t)) \in B(\bar{a}_1, r_1)$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$.

Entonces, la función definida por $g(s,t) \doteq f(x(s,t), y(s,t))$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$ tiene derivadas parciales dadas por

- $$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$
- $$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t)) \longmapsto f(x(s,t), y(s,t))$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



Ejemplo: Sea $f(x,y) = xy + 2y^2 + x^3$, donde $x(s,t) = st$, $y(s,t) = e^{st}$.

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ en el punto $(s,t) = (1,1)$.

- Tenemos que:

  - $f_x(x,y) = y + 3x^2$; $f_y(x,y) = x + 4y$
  - $x_s(s,t) = t$; $y_s(s,t) = t\,e^{st}$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_s(s,t)$$

$$= \left(e^{st} + 3(st)^2\right) t + \left(st + 4e^{st}\right) t e^{st} \quad (\blacksquare)$$

Finalmente, si evaluamos en $(s,t) = (1,1)$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,1) = (e+3) \cdot 1 + (1+4e)e = 4e^2 + 2e + 3$$

Observación: notar que si escribimos $f(s,t) = x(s,t)\,y(s,t) + 2y^2(s,t) + x^3(s,t)$

$$= st\,e^{st} + 2e^{2st} + s^3t^3$$

entonces $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t) = te^{st} + st^2e^{st} + 2 \cdot 2t\,e^{2st} + 3s^2t^3$ que es igual a $(\blacksquare)$.

Derivada direccional

Definición: decimos que $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario si $\|u\| = 1$.

Definición: sean $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $B(\bar{a}, r) \subseteq \text{Dom}(f)$ para algún $r > 0$ y $\bar{u}$ un vector unitario. Definimos la derivada direccional de f en la dirección de $\bar{u}$ en el punto $\bar{a}$ como

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$ si este límite existe.

Observaciones:

1. Si el vector $\bar{u}$ no es unitario, entonces consideramos $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{\|u\|}$ (unitario y misma dirección que u)

2. Si tomamos $\bar{u} = e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-ésima coord.}}{1}, 0, \dots, 0)$, entonces $D_{e_i} f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$. O sea, las derivadas parciales son un caso particular de derivada direccional.

Definición: sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$ tq existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ $\forall i = 1, \dots, n$.
Llamos gradiente de f en $\bar{a}$ al vector $\nabla f(\bar{a}) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$.

Teorema: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r) \subseteq \text{Dom}(f)$ y $\forall i = 1, \dots, n$ y $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vector unitario. Entonces vale que

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) u_n.$$

Demostración:

Definimos $g(h) = f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n)$ (función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)

Luego, $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$. ①

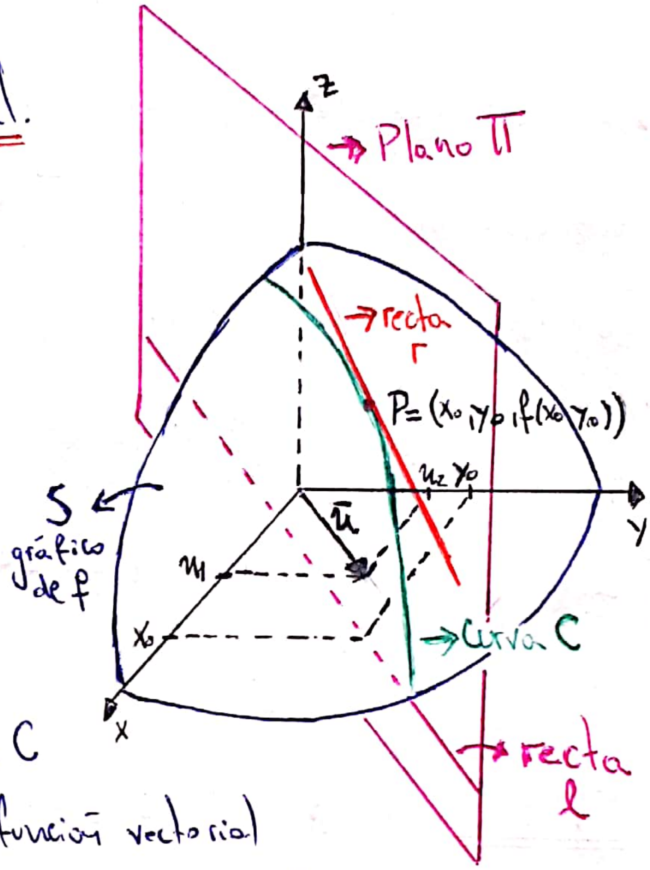
Ahora, por la regla de la cadena (caso 1) $g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot \frac{\partial (a_1 + hu_1)}{\partial h} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\,) \frac{\partial (a_n + hu_n)}{\partial h}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot u_n$$
$$= \langle \nabla f(\bar{a} + h\bar{u}), \bar{u} \rangle$$

Con lo cual, $g'(0) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle$. ②

De ① y ② obtenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle$.

Interpretación geométrica de la derivada direccional.



- Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ y $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in Gra.(f) \doteq S$
- Sea l la recta en el plano x-y dada por $(x, y) = (x_0, y_0) + t\,(u_1, u_2)$.

  Sea Π el plano vertical que contiene a la recta l.
- Sea $C \doteq \Pi \cap S$ y r la recta tangente a la curva C en el punto P. Notemos que C es la imagen de la función vectorial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $g(t) = (x_0 + t u_1, y_0 + t u_2, \underbrace{f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)}_{\doteq h(t)})$

  Sabemos que $h'(t)$ da la pendiente de la recta al gráfico de h (pues $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

  Ahora, $h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_n$ y por lo tanto

  $h'(0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \bar{u} \rangle = D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$.
- Entonces $D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$ da la pendiente de r, o sea la tasa de crecimiento de f en (x_0, y_0), cuando nos movemos en la dirección $\bar{u} = (u_1, u_2)$.

Notar que r viene dado por la ecuación $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\,(u_1, u_2, D_{\bar{u}} f(x_0, y_0))$ para $t \in \mathbb{R}$.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: calcular la derivada direccional de $f(x,y) = xe^y$ en el punto $P = (2,0)$ en la dirección de $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$.

- Notemos que $\bar{v}$ no es unitorio ya que $\|\bar{v}\| = \sqrt{1+3} = 2$. Luego, debemos considerar el vector $\bar{u} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ que tiene la misma dirección que $\bar{v}$ pero es unitario.

Por otra parte, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y$, ambas son funciones continuas.

Luego, por teorema, $D_{\bar{u}} f(2,0) = \langle \nabla f(2,0), \bar{u} \rangle$

$$= \langle (e^0, 2e^0), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \rangle = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \; \blacksquare$$

Teorema: sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r)$ y para $1 \leq i \leq n$. Si $\nabla f(\bar{a}) \neq (0, \dots, 0)$, entonces

(i) el vector $\bar{u} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de máximo crecimiento de f en $\bar{a}$

(ii) el vector $\bar{v} = -\frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de mínimo crecimiento de f en $\bar{a}$.

Demostración:

- Tenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \|\nabla f(\bar{a})\| \underbrace{\|\bar{u}\|}_{=1} \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{toma valores entre } -1 \text{ y } 1}$. El máximo valor de $\cos(\theta)$ (y por ende el máximo valor de $D_{\bar{u}} f(\bar{a})$) se da cuando $\cos(\theta) = 1$, o sea $\theta = 0$ y esto nos dice que $\nabla f(\bar{a})$ y $\bar{u}$ son paralelos y tiene mismo sentido.
- De manera análoga, el mínimo valor de $\cos(\theta)$ es cuando vale -1, o sea $\theta = \pi$. Es decir, cuando los vectores $\nabla f(\bar{a})$ y $\bar{u}$ son paralelos y con sentido opuesto.

Observación: $\tilde{u} = \nabla f(\bar{a})$ y $\tilde{v} = -\nabla f(\bar{a})$ tienen la misma dirección que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respect. pero no son unitarios.

Ejemplo: ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,2)$, para obtener la mayor tasa de crecimiento y la mayor tasa de decrecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2$?

- Tenemos que $\nabla f(x,y) = \big(2(x+y-2),\ 2(x+y-2)\big)$. Luego, $\nabla f(1,2) = (2,2)$.

Por lo tanto:

- la tasa de mayor crecimiento es en la dirección $\tilde{u} = \nabla f(1,2) = (2,2)$.
- la tasa de mayor decrecimiento es en la dirección $\tilde{v} = -\nabla f(1,2) = (-2,-2)$.

Observación: para poder calcular las derivadas direccionales y obtener los valores de las tasas de máximo crecimiento/decrecimiento debemos considerar los vectores $\bar{u} = \dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$ y $\bar{v} = \dfrac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$.

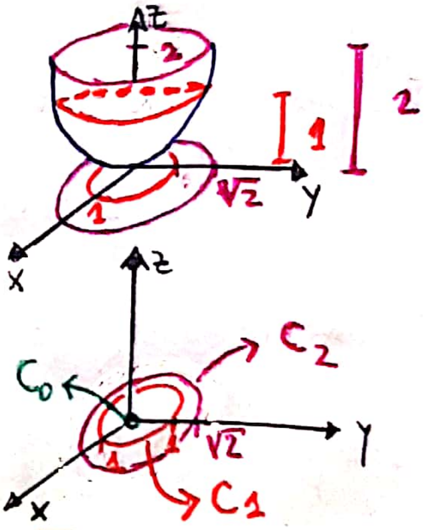
Curvas y Superficies de nivel

Definición: Sea $K \in \mathbb{R}$ y $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Llamamos curva de nivel K de f al subconjunto de $\mathrm{Dom}(f)$ definido por $C_K = \{(x,y) \in \mathrm{Dom}(f) : f(x,y) = K\}$

(C_K puede ser $\emptyset$, puntos aislados o una curva).

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$.

- Si $K < 0$, entonces $C_K = \emptyset$ (ya que $f(x,y) \geq 0$)
- Si $K = 0$, entonces $C_K = \{(0,0)\}$
- Si $K > 0$, entonces C_K es un círculo centrado en $(0,0)$ y de radio $\sqrt{K}$



(las curvas de nivel nos ayudan a entender el gráfico de f)

Definición: Sea $K \in \mathbb{R}$ y $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Llamamos superficie de nivel K de f al subconjunto de $Dom(f)$ definido por

$$S_K = \{(x,y,z) \in Dom(f) : f(x,y,z) = K\}$$

Ejemplo: Si $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, tenemos que

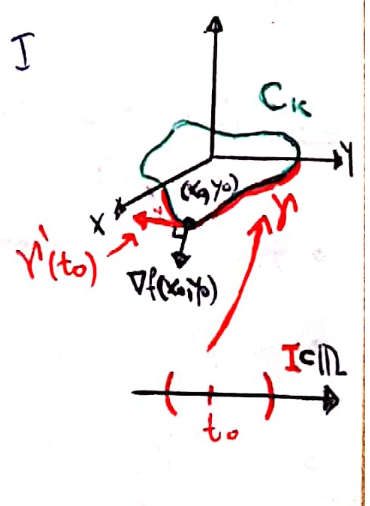
- Si $K<0$, $S_K = \emptyset$
- Si $K=0$, $S_K = \{(0,0,0)\}$
- Si $K>0$, S_K es una esfera centrada en $(0,0,0)$ y de radio $\sqrt{K}$

Observación: notar que dado $P \in Dom(f)$, existe a lo sumo una curva (o superficie) de nivel que pasa por P.

- Dada $f: Dom(f): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, consideramos C_K. Sea γ una curva incluida en C_K. O sea, γ es la imagen de una función vectorial $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con t en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sea $t_0 \in I$ y denotamos $(x_0,y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Como $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in C_K$ $\forall t \in I$, tenemos que $f(x(t),y(t)) = K$ $\forall t \in I$

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$



En particular, para $t=t_0$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0$$

O sea,

$$\langle \nabla f(x_0,y_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Luego, si $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, tenemos que $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular (u ortogonal) al vector tangente a la curva γ, y por lo tanto a la curva de nivel de f, que pasa por (x_0, y_0).

↗ es perpendicular a $\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

Entonces, el vector $\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ es tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0).

Definición: la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0,y_0) está definida como $(x,y) = (x_0,y_0) + t\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ y $P = (1,1)$. Calcular

(i) el gradiente de f en P;

(ii) la ec. de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por P;

(iii) la ec. del plano tangente al gráfico de f en P.

Respuestas:

(i) Tenemos que $f_x(x,y) = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$ y $f_y(x,y) = \frac{-1.(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2}\right)$ y en particular $\nabla f(1,1) = \left(\frac{2}{4}, -\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(ii) La ec. de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por $P=(1,1)$ es

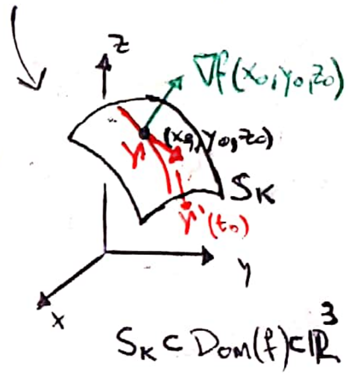
$$(x,y) = (1,1) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

(iii) La ec. del plano tangente al gráfico de f en P es

$$z = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(1,1)}} + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$$

$$= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1).$$

- Dada $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, consideramos S_K. Es fácil ver que si $(x_0,y_0,z_0) \in S_K$ y $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ entonces $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ es un vector perpendicular (ortogonal) al plano tangente a la superficie de nivel S_K (al igual que para $n=2$ podemos considerar $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tq su imagen esté contenida en S_K $\forall t \in I$ algún intervalo de $\mathbb{R}$, o sea $f(x(t),y(t),z(t)) = K$ $\forall t \in I$. Luego derivando con respecto a t obtenemos el resultado buscado).



Definición: la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel que pasa por (x_0,y_0,z_0) es:

$$\langle (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \,,\, \underbrace{\nabla f(x_0,y_0,z_0)}_{\text{vector normal al plano}} \rangle = 0$$

Observación: supongamos que S es el gráfico de una función $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
O sea, $S = \{(x,y,z) : z = g(x,y)\}$.
Sea $(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,g(x_0,y_0)) \in S$. Vimos (ver pág. 94) que el plano tangente al gráfico de g en el punto $(x_0,y_0,g(x_0,y_0))$ es

$$z = g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (\blacktriangle)$$

Si definimos ahora $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $f(x,y,z) = z - g(x,y)$ tenemos que S (gráfico de g) es justamente S_0 la curva de nivel 0 de f. Por lo visto recién, el plano tangente a $(x_0,y_0,z_0) \in S_0 = S$ está dado por

$$\langle (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \,,\, \nabla f(x_0,y_0,z_0) \rangle = 0$$

y como $z_0 = g(x_0,y_0)$, $f_x(x,y,z) = -g_x(x,y)$, $f_y(x,y,z) = -g_y(x,y)$; $f_z(x,y,z) = 1$, obtenemos

$$\langle (x-x_0, y-y_0, z-g(x_0,y_0)), (-g_x(x_0,y_0), -g_y(x_0,y_0), 1) \rangle = 0$$ que es justamente $(\blacktriangle)$

Por lo tanto, las dos definiciones de plano tangente coinciden.

Ejemplo: Dar la ecuación del plano tangente a la esfera S de centro O y radio 1, en el punto $(0,0,1)$.

Consideremos la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Tenemos que S es justamente la superficie de nivel S_1 de f, o sea

$$S = S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=1\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

↓ solo la "cáscara"

Por lo tanto la ecuación del plano tangente a S en $(0,0,1)$ es

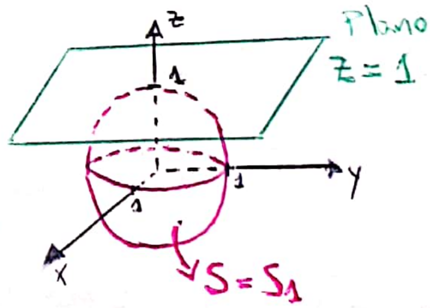
$$\langle (x,y,z)-(0,0,1), \nabla f(0,0,1)\rangle = 0 \quad .$$

Como $\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, tenemos que $\nabla f(0,0,1) = (0,0,2)$ y por lo tanto la ecuación queda

$$\langle (x,y,z)-(0,0,1), (0,0,2)\rangle = 0$$

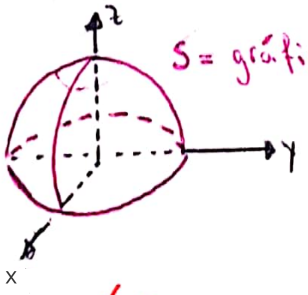
$$(z-1).2 = 0$$

$$\boxed{z = 1}$$



$(Dom(f) = \mathbb{R}^3 \supset S)$

Ejercicio: Dar la ecuación del plano tangente al gráfico de la función $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ en el punto $(0,0,1)$.



S = gráfico de g (cáscara de hemisferio superior).

$\left(Dom(g) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \right)$

Derivadas de orden 2.

- Dada una función f de n variables, es decir $f(x_1, \dots, x_n)$, y tq existen sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ (que son funciones de n variables), podemos preguntarnos si existen las derivadas parciales de cada función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$. Estas se llaman derivadas parciales segundas (o de orden 2) de f.

- Si $n=2$, hay 4 derivadas parciales de orden 2:

$$(f_x)_x \doteq f_{xx} \doteq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y \doteq f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x \doteq f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y \doteq f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Si $n=3$, hay 9 derivadas parciales de orden 2: $f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}$, etc.

- En general, si f tiene n variables, entonces hay n^2 derivadas parciales de orden 2.

Ejemplos:

(1) Calcular las derivadas parciales de orden 2 de $z = x^2(1+y^2)$.

Tenemos que $z_x = 2x(1+y^2)$ y $z_y = x^2 2y$.

Luego, $z_{xx} = 2(1+y^2)$

$z_{xy} = 2x\,2y = 4xy$

$z_{yx} = 2x\,2y = 4xy$

$z_{yy} = 2x^2$.

② Si $z = f(x,y)$, con $x(s,t) = 2s+3t$, $y(s,t) = 3s-2t$, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$.

Primero debemos calcular $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y luego a esta función calcularle la derivada parcial con respecto a s.

Entonces, por la regla de la cadena (caso 2)

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t) \quad (A)$$

donde $\dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t) = 3$ y $\dfrac{\partial y}{\partial t}(s,t) = -2$

Luego, (A) queda

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)).$$

Calculemos la derivada parcial con respecto a s de la función $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 3\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] - 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

donde $\dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = 2$ y $\dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 3$

Finalmente,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 3\left[2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right] - 2\left[2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

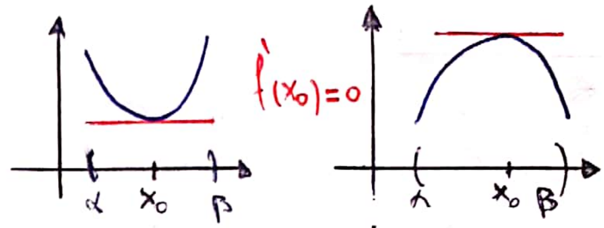
Teorema: Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$. Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en $B(\bar{a}, r) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ para algún $r > 0$, entonces

$$f_{xy}(\bar{x}) = f_{yx}(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{a}, r).$$

Máximos y mínimos de funciones de dos variables ($n=2$).

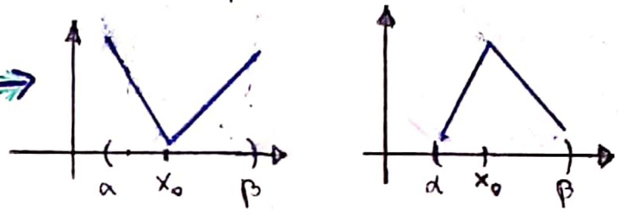
Repaso: Sea $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ y sea $x_0\in(\alpha,\beta)$. Si f tiene un mínimo local o un máximo local en x_0 entonces:

- $f'(x_0)=0$ (x_0 se llama punto crítico) $\Rightarrow$



o

- $f'(x_0)$ No existe (x_0 se llama pto. singular) $\Rightarrow$



Definición: Sea $f:\mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $(x_0,y_0)\in\mathrm{Dom}(f)$. Decimos que

- f tiene un máximo local (o relativo) en (x_0,y_0) si existe una bola (disco) B centrada en (x_0,y_0), con $B\subset\mathrm{Dom}(f)$ y tq $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ $\forall(x,y)\in B$.
  El número $f(x_0,y_0)$ se llama valor máximo local de f.

- f tiene un mínimo local (o relativo) en (x_0,y_0) si existe una bola B centrada en (x_0,y_0), con $B\subset\mathrm{Dom}(f)$ y tq $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ $\forall(x,y)\in B$.
  El número $f(x_0,y_0)$ se llama valor mínimo local de f.

- Si las desigualdades se cumplen $\forall(x,y)\in\mathrm{Dom}(f)$, entonces decimos que f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto, según corresponda) en (x_0,y_0).

Observación: decimos que f tiene un extremo local en (x_0,y_0) si f tiene un máximo local o un mínimo local en (x_0,y_0).

Teorema: Si $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un extremo local en (x_0, y_0) y existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0), entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Demostración:

Sea $g(x) = f(x, y_0)$. Entonces, g tiene un extremo local en $x = x_0$. Luego,

$0 = g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.

De la misma forma tambien deducimos que $f_y(x_0, y_0) = 0$ ∎

Definición: dado $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) se llama punto crítico de f si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (o sea $\nabla f(x_0, y_0) = 0$).

Decimos además que (x_0, y_0) es punto singular de f si $\nexists f_x(x_0, y_0)$ o $\nexists f_y(x_0, y_0)$.

Conclusión: Si $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un extremo local en (x_0, y_0), entonces

- o bien (x_0, y_0) es pto. crítico de f (y por lo tanto $\nabla f(x_0, y_0) = 0$)
- o bien (x_0, y_0) es pto. singular de f (y por lo tanto $\nexists \nabla f(x_0, y_0)$).

Repaso: si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 es punto crítico de f (o sea $f'(x_0) = 0$) y si además

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow x_0 \text{ es mínimo local de } f \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow x_0 \text{ es máximo local de } f \\ f''(x_0) = 0 & \Rightarrow \text{no podemos asegurar nada.} \end{cases}$$

- Veamos un resultado similar para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Teorema (Test de las derivadas segundas).

- Sean $f: \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(f)$. Supongamos que las derivadas parciales de 1er y 2do orden de f son continuas en una bola $B^{\subset \mathrm{Dom}(f)}$ de centro (x_0, y_0) y supongamos además que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (o sea, (x_0, y_0) es pto. crítico de f).

Sea $D \doteq D(x_0, y_0) \doteq f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$, entonces:

1. si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (o $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) $\Rightarrow$ f tiene mínimo local en (x_0, y_0).
2. si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (o $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) $\Rightarrow$ f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
3. si $D < 0$, entonces f no un máx. local ni un mín. local en (x_0, y_0). En este caso decimos que f tiene un punto silla en (x_0, y_0).
4. si $D = 0$, no se puede asegurar nada.

Observación: para recordar la fórmula que define $D(x_0, y_0)$ notemos que $D(x_0, y_0)$ es el determinante de la matriz $H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$

ya que $\det(H(x_0, y_0)) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - \underbrace{f_{yx}(x_0, y_0)\, f_{xy}(x_0, y_0)}_{f_{xy}(x_0, y_0)^2}$

Insert text here

pues $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ por Teo. anterior (pág. 107).

- La matriz H se llama hessiana de f en (x_0, y_0) y su determinante se llama hessiano de f en (x_0, y_0) (o discriminante).

Ejemplo Caso 3. Sea $f(x,y) = y^2 - x^2$

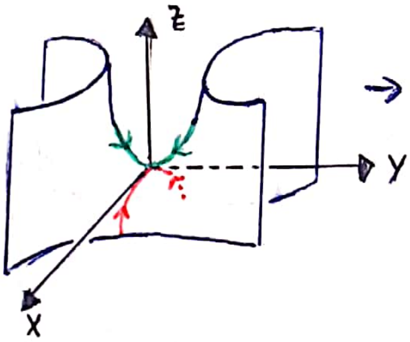
• Tenemos que $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$. Luego, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, o sea $(0,0)$ es punto crítico de f.

• Además, $f_{xx}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = 2$ y $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$.

Por lo tanto, $D(0,0) = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0$ y entonces estamos en el caso 3.

• Analicemos el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto $(0,0)$.

- Si nos acercamos por el eje y tenemos $f(0,y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$ luego $(0,0)$ NO es máx local
- Si nos acercamos por el eje x tenemos $f(x,0) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$ luego $(0,0)$ NO es mín local



→ Gráfico de f

(cerca del $(0,0)$ el gráfico tiene la forma de una silla de montar)

• En este caso decimos que $(0,0)$ es un punto de silla.

Ejemplo caso 4

(i) Sea $f(x,y) = x^4 + y^4$.

Es fácil ver que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y que $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$.

Por lo tanto, $D(0,0) = 0$ y estamos en el caso 4

Ahora, por como está definida f tenemos que $f(x,y) = x^4 + y^4$

$f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$ y entonces $(0,0)$ es un mínimo local (y global) de f

(ii) Sea $h(x,y) = -(x^4+y^4)$.

Es fácil ver (ejercicio) que $D(0,0)=0$ y entonces también se cumple el caso (4).

Sin embargo, por como está definida h tenemos que $(0,0)$ es un máximo local (y global) de h.

(iii) Sea $g(x,y) = y^4 - x^4$

Es fácil ver (ejercicio) que $D(0,0)=0$ y entonces estamos en el caso (4).

Sin embargo, si graficamos g nos damos cuenta que $(0,0)$ es un punto de silla de g (analizar el comportamiento cuando nos acercamos a $(0,0)$).

- Por lo tanto, de (i), (ii) y (iii) vemos que si $D(x_0,y_0)=0$, el punto (x_0,y_0) podría ser un max local, mín. local o punto silla. Es decir, $D(x_0,y_0)=0$ no nos asegura nada sobre qué tipo de punto ~~que~~ es (x_0,y_0).

<u>Ejemplo:</u> Encontrar y clasificar (máx./mín relativo, pto. silla) los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4+y^4-4xy+2$.

- Recordemos que (x_0,y_0) es pto. crítico de f si $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$.

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (4x^3-4y,\ 4y^3-4x)$, entonces

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \iff \begin{matrix} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x^3=y \\ y^3=x \end{matrix} \iff y^9=y \iff y(y^8-1)=0$$

reemplazo

Por lo tanto, los únicos puntos críticos de f son: $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$

Clasifiquemos estos ptos. críticos utilizando el Test de las 2^{das} derivadas.

Tenemos que: • $f_{xx}(x,y) = 12x^2$

• $f_{yy}(x,y) = 12y^2$

• $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4$

Entonces $D(x,y) = \det\begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 16$.

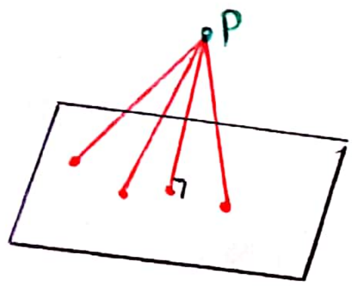
Luego,

• $D(0,0) = -16 < 0$, y por lo tanto $(0,0)$ es pto. de silla. de f.

• $D(1,1) = 144 - 16 > 0$, y por lo tanto $(1,1)$ es mínimo local de f.

• $D(-1;1) = 144 - 16 > 0$ y por lo tanto $(-1,-1)$ es mínimo local de f.

Ejemplo: Encontrar la distancia más corta desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x + 2y + z = 4$



• Recordemos que si $Q = (x,y,z)$ es un pto. en el espacio, la distancia entre P y Q es

$$d(\underbrace{(1,0,-2)}_{P}, \underbrace{(x,y,z)}_{Q}) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} \quad (\blacksquare)$$

• Ahora, si consideramos que Q está en el plano $x+2y+z=4$, entonces Q es de la forma $Q = (x, y, 4-x-2y)$. Reemplazando en $(\blacksquare)$ tenemos que la distancia de P a un pto. Q que está en el plano es:

$$d(P, Q(x,y,z)) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2} \quad (\geq 0)$$

Por lo tanto, para hallar la distancia más corta de P al plano basta hallar el mínimo de la función (¿por qué?)

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

(el punto (x_0, y_0) donde las funciones $d(x,y)$ y $f(x,y)$ toman su mínimo valor coinciden, sin embargo no es cierto que $d(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$).

Ejercicio (está en el práctico!): Hallar el punto (x_0,y_0) donde f alcanza su mínimo valor y calcular $d(x_0,y_0)$ = distancia más corta de $P=(1,0,-2)$ al plano $x+2y+z=4$.