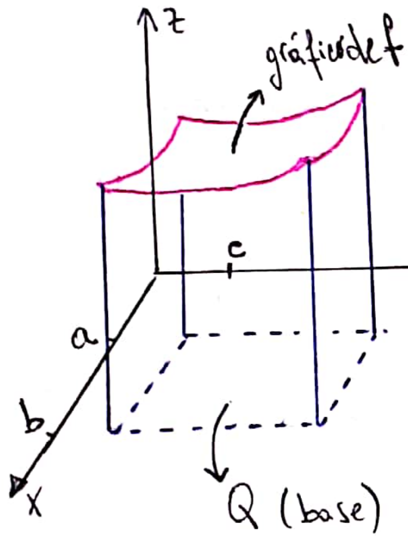
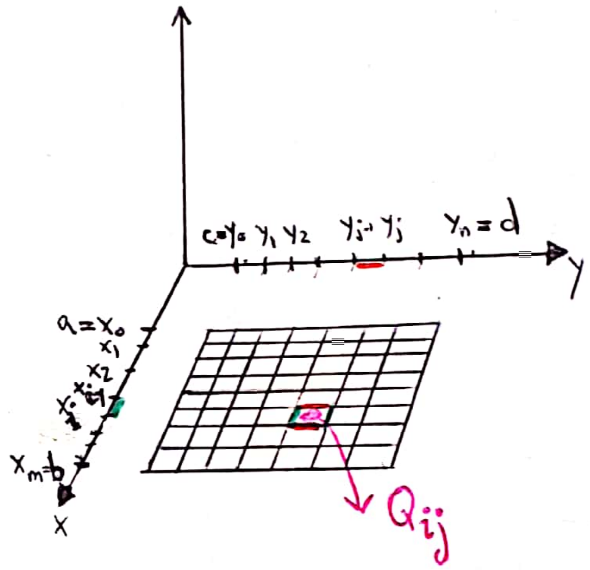
Integrales dobles en rectángulos

- Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f: Q \to \mathbb{R}$ no negativa $(f(x,y) \geq 0)$

¿Cuál es el volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q?





- Para calcular el volumen haremos un procedimiento análogo al que realizamos para cálcular el área bajo una curva.

- Dadas particiones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, es decir

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad y \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

formamos una partición del rectángulo Q de la siguiente manera:

definimos $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $\begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$.

En total hay $m.n$ subrectángulos Q_{ij} y su unión cubre a Q.

- Si llamamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, tenemos que el área de Q_{ij} es $\Delta x_i . \Delta x_j$

116

- Luego, en cada Q_{ij} elegimos un pto (x_{ij}, y_{ij}) y consideramos la (doble) suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j \rightarrow$$ suma de los volúmenes de los paralelepípedos de base Q_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$.

- El volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q es el límite de este proceso.

<u>Definición</u>: dado una partición $P = \{Q_{ij} : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ de un rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$ definimos la norma de la partición P como la mayor longitud de las diagonales de los subrectángulos Q_{ij} y la denotamos por $\|P\|$.

<u>Definición</u>: Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f : Q \to \mathbb{R}$, la integral doble de f sobre el rectángulo Q es

$$\iint_Q f(x,y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$ si este límite existe.

En tal caso, f se dice integrable sobre Q.

<u>Observaciones</u>:

1. En la def. de int. doble no pedimos $f \geq 0$. La def. vale también si $f \leq 0$ o f cambia de signo.
2. Se puede demostrar que si f es continua en $Q \Rightarrow f$ es integrable sobre Q. Más aún, si f es acotada y continua en Q, salvo una cantidad finita de curvas suaves entonces f es integrable sobre Q (resultado análogo a de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
3. Si $f \geq 0$ e integrable sobre $Q \Rightarrow \iint_Q f(x,y)\, dA =$ volumen bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo Q
4. A veces denotamos $\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy$ en lugar de $\iint_Q f(x,y)\, dA$.

Integrales iteradas

- Al igual que para el caso de funciones de una variable, **no resulta** muy fácil **calcular** integrales dobles a partir de la definición (Para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ utilizamos el TFC)
- Veremos que, en muchos casos, el cálculo de integrales dobles se reduce al cálculo de integrales de funciones de una variable. En efecto, sean $Q=[a,b]\times[c,d]$ y $f:Q\to\mathbb{R}$. Notemos que si fijamos una de las dos variables, por ejemplo y, obtenemos una función de la otra variable y entonces podemos integrarla como ya sabemos. O sea, para cada $y\in[c,d]$ hacemos $\int_a^b f(x,y)\,dx$ → esto define una función de y que podemos volver a integrar obteniendo $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$ → esta integral se llama integral iterada de f.

Observaciones:

1. Podríamos haber hecho el proceso en el otro orden obteniendo $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$, lo que nos daría la "otra" integral iterada de f.
2. Usualmente se omiten los paréntesis y se escribe $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ o $\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.

Ejemplo: calcule la siguiente integral iterada $\int_0^2\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx\,dy$.

- Primero debemos integrar $f(x,y)=x^2y^3$ con respecto a x en el intervalo $[-1,1]$.

Entonces, $\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx = \underbrace{y^3}_{\text{"cte"}}\int_{-1}^1 x^2\,dx = y^3\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = y^3\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right) = y^3\cdot\frac{2}{3}$.

Por lo tanto, $\int_0^2\underbrace{\int_{-1}^1 x^2y^3\,dx}_{\frac{2}{3}y^3}\,dy = \int_0^2\frac{2}{3}y^3\,dy = \frac{2}{3}\,\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right) = \frac{8}{3}$

Ejemplo: calcule la siguiente integral iterada $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} x^2y^3\,dy\,dx$.

• En este caso primero debemos integrar $f(x,y)=x^2y^3$ con respecto a y en $[0,2]$.

Luego, $\int_0^2 x^2y^3\,dy = x^2\int_0^2 y^3\,dy = x^2 \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = x^2\left(\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right) = x^2 4$.

Finalmente, $\int_{-1}^{1}\int_0^2 x^2y^3\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} 4x^2\,dx = 4\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{(-1)}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

• Notemos que las integrales iteradas dieron el mismo resultado. Esta situación es bastante general según el siguiente teorema.

Teorema de Fubini: si f es continua en el rectángulo $Q=[a,b]\times[c,d]$, entonces

$$\iint_Q f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy .$$

Observación: el teorema anterior también vale si f es acotada en Q, discontinua sólo en un nro. finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

Ejemplo: calcule el volumen del sólido debajo del plano $z=4-x-y$ y arriba del rectángulo definido por $0\leq x\leq 1$, $1\leq y\leq 2$.

• Sea $f(x,y)=4-x-y$. Notemos que $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in Q$ y entonces lo que se nos pide es calcular $\iint_Q f(x,y)\,dA$ → para esto usaremos Fubini.

$$\iint_Q (4-x-y)\,dA = \int_1^2\int_0^1 (4-x-y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^1 dy = \int_1^2\left(4-\frac{1}{2}-y\right)dy = \left(4y-\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2.$$

• Por lo tanto, el volumen del sólido bajo el gráfico de f y arriba de Q es 2.