Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 1 de octubre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Completitud de la lógica proposicional
   - Relación entre verdad y demostrabilidad
   - Estrategia de prueba de Completitud
   - Consistencia
   - Conjuntos consistentes maximales
   - Teorema de existencia de modelos

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

Hoy vamos por la implicación $(\Rightarrow)$: **Completitud**.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \nvDash \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

El foco estará en construir asignaciones (“modelos”) que validen ciertos conjuntos.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

El foco estará en construir asignaciones ("modelos") que validen ciertos conjuntos.

Veremos: $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$.

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \not\models \varphi \qquad (1)$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1) \ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \qquad (2)$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1 \ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \qquad (3)$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \qquad (4)$$

El foco estará en construir asignaciones (“modelos”) que validen ciertos conjuntos.

Veremos: $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$.

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \qquad (5)$$

Estrategia para ver $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$

Vamos por la **contrarrecíproca**.

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \nvDash \varphi \tag{1}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : (\forall \psi \in \Gamma.\ [\![\psi]\!]_v = 1)\ \&\ [\![\varphi]\!]_v = 0 \tag{2}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1\ \&\ [\![\neg\varphi]\!]_v = 1 \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \varphi \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{4}$$

El foco estará en construir asignaciones ("modelos") que validen ciertos conjuntos.

Veremos: $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot.$

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\varphi\}]\!]_v = 1 \tag{5}$$

Teorema (Existencia de modelos)

$$\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$$

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

Ahora veremos $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ (negando ambos lados).

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

Ahora veremos $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ (negando ambos lados).

Lema

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*

(In)Consistencia

- $\Gamma' \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma']\!]_v = 1$

Damos nombre a la noción del antecedente.

Definición

$\Gamma \subseteq PROP$ es **inconsistente** $\iff \Gamma \vdash \bot$.
$\Gamma \subseteq PROP$ es **consistente** $\iff \Gamma \nvdash \bot$ (¡negación de lo anterior!).

Ahora veremos $\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ (negando ambos lados).

Lema

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*

Demostración.

Tomamos $D \in \mathscr{D}$ que atestigüe un lado y la usamos para construir $D' \in \mathscr{D}$ que atesigüe el otro.

- $\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente $\implies \Gamma \vdash \varphi$.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Por el Criterio de Consistencia, $\mathrm{Th}(v)$ es consistente.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \bot \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Por el Criterio de Consistencia, $\mathrm{Th}(v)$ es consistente. Pero además no hay conjunto más grande que aún sea consistente.

Conjuntos consistentes maximales

- $\Gamma \nvdash \perp \implies \exists v : [\![\Gamma]\!]_v = 1$

Para construir una asignación v, pensemos cómo son los conjuntos validados por alguna v.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si existe v que valide Γ, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

Sea v asignación y $\mathrm{Th}(v) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_v = 1\}$. Por el Criterio de Consistencia, $\mathrm{Th}(v)$ es consistente. Pero además no hay conjunto más grande que aún sea consistente.

Definición

Γ es **consistente maximal** si es consistente y $\Gamma \subsetneq \Delta \subseteq PROP$ implica que Δ no lo es.

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Teorema

Γ *consistente* $\implies$ *existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Teorema

Γ *consistente* $\implies$ *existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Construcción de conjuntos consistentes maximales

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset (Conjuntos consistentes, $\subseteq$).

Teorema

Γ *consistente* $\implies$ *existe* Γ^* *consistente maximal tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$*.*

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de una cuidando que no se vuelva inconsistente.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar:
  $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

- Γ consistente $\implies$ existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de una cuidando que no se vuelva inconsistente.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Γ *consistente maximal y* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Γ *consistente maximal y* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$. $\longrightarrow$ *en el apunte*

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Γ *consistente maximal y* $\Gamma \vdash \varphi$ *implica* $\varphi \in \Gamma$. $\longrightarrow$ en el apunte

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.

- Γ consistente maximal y $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$.
- $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [no $\varphi \in \Gamma$].

- Γ consistente maximal y $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$.
- $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [no $\varphi \in \Gamma$].
- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma$].

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ*.*

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ consistente maximal. Para todas $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ.

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$*,*

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ*.*

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Definimos asignación:
$v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ consistente maximal. Para todas $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ*.*

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Definimos asignación:
$v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
Probaremos por inducción en φ que $\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$.

Teorema de existencia de modelos

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ consistente maximal. Para todas $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff$ [*no* $\varphi \in \Gamma$].
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff$ [$\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma$].

Teorema (Existencia de modelos)

Γ *es consistente* $\implies$ *existe asignación* v *que valida* Γ*.*

Demostración.

Sea $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal. Definimos asignación:
$v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
Probaremos por inducción en φ que $\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$.
En particular, v valida a Γ.

- $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal.
- Hemos definido $v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
- $\neg\varphi \in \Gamma*$ $\iff$ [no $\varphi \in \Gamma^*$].
- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ $\iff$ [$\varphi \in \Gamma^*$ implica $\psi \in \Gamma^*$].

$$\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$$

$\boxed{\varphi \in At}$

- $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente maximal.
- Hemos definido $v(p_n) := 1 \iff p_n \in \Gamma^*$.
- $\neg\varphi \in \Gamma* \iff$ [no $\varphi \in \Gamma^*$].
- $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma^*$ implica $\psi \in \Gamma^*]$.

$$\varphi \in \Gamma^* \iff [\![\varphi]\!]_v = 1$$

$$\boxed{(\varphi \to \psi)}$$