

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 29 de septiembre de 2021

1 Deducción natural

- Definición inductiva de \mathcal{D}
- Inducción y recursión en derivaciones
- Relación de deducción y teoremas

2 Corrección y completitud de la lógica proposicional

- Relación entre verdad y demostrabilidad
- Teorema de corrección

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

\mathcal{D} es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida tales que:

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

\mathcal{D} es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a \mathcal{D} .



Universidad
Nacional
de Córdoba



El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

\mathcal{D} es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a \mathcal{D} .

- $\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi \end{array} D_1 \in \mathcal{D} \text{ y } \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi' \end{array} D_2 \in \mathcal{D} \implies$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

\mathcal{D} es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida tales que:

- Un árbol de un sólo nodo $\varphi \in PROP$ pertenece a \mathcal{D} .

$$\blacksquare \quad \begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D} \text{ y } \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathcal{D} \implies D := \frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \quad \vdots D_2 \\ \varphi \quad \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \in \mathcal{D}.$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

$$\blacksquare \quad \begin{array}{c} \vdots D \\ \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathcal{D} \implies$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

$$\blacksquare \quad \frac{\vdots D}{\varphi \wedge \varphi'} \in \mathcal{D} \implies D_1 := \frac{\frac{\vdots D}{\varphi \wedge \varphi'}}{\varphi} \wedge E \in \mathcal{D}, \quad D_2 := \frac{\frac{\vdots D}{\varphi \wedge \varphi'}}{\varphi'} \wedge E \in \mathcal{D}.$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

$$\blacksquare \quad \frac{\vdots D}{\varphi \wedge \varphi'} \in \mathcal{D} \implies D_1 := \frac{\varphi \wedge \varphi'}{\varphi} \wedge E \in \mathcal{D}, \quad D_2 := \frac{\varphi \wedge \varphi'}{\varphi'} \wedge E \in \mathcal{D}.$$

$$\blacksquare \quad \frac{\varphi}{\vdots D} \in \mathcal{D} \implies D' := \frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots D \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \in \mathcal{D}.$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

$$\blacksquare \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \vee \psi \end{array} D_1 \in \mathcal{D}, \quad \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array} D_2 \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array} D_3 \in \mathcal{D} \implies$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

$$\blacksquare \quad \begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \in \mathcal{D}, \quad \begin{array}{c} \varphi \\ \vdots D_2 \\ \chi \end{array} \in \mathcal{D} \quad y \quad \begin{array}{c} \psi \\ \vdots D_3 \\ \chi \end{array} \in \mathcal{D} \implies$$

$$D_4 \quad := \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots D_2 \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \vdots D_3 \\ \chi \end{array}}{\chi} \vee E \quad \in \mathcal{D}$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

- $(\forall I)$ y (\perp) son como $(\wedge E)$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

- $(\forall I)$ y (\perp) son como $(\wedge E)$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

- $(\forall I)$ y (\perp) son como $(\wedge E)$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

- $(\rightarrow E)$ es como $(\wedge I)$.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow E$$

El conjunto \mathcal{D} de las derivaciones

- $(\forall I)$ y (\perp) son como $(\wedge E)$

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

- $(\rightarrow E)$ es como $(\wedge I)$.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow E$$

- (RAA) es como $(\rightarrow I)$.

Al igual que con *PROP*, se puede hacer inducción y recursión en \mathcal{D} .

Recursión en derivaciones: *Hip*

Al igual que con *PROP*, se puede hacer inducción y recursión en \mathcal{D} .

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D .

Recursión en derivaciones: *Hip*

Al igual que con *PROP*, se puede hacer inducción y recursión en \mathcal{D} .

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D .

PROP Si $\varphi \in PROP$, $Hip(\varphi) := \{\varphi\}$.

Recursión en derivaciones: *Hip*

Al igual que con *PROP*, se puede hacer inducción y recursión en \mathcal{D} .

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D .

\boxed{PROP} Si $\varphi \in PROP$, $Hip(\varphi) := \{\varphi\}$.

$\boxed{\wedge I}$

$$Hip \left(\frac{\begin{array}{cc} \vdots D & \vdots D' \\ \varphi & \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \right) := Hip \left(\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array} \right) \cup Hip \left(\begin{array}{c} \vdots D' \\ \varphi' \end{array} \right).$$

$\boxed{\wedge E}$

$$\text{Hip} \left(\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi} \wedge E \right) = \text{Hip} \left(\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \right) := \text{Hip} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \right).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\wedge E}$

$$\text{Hip} \left(\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi} \wedge E \right) = \text{Hip} \left(\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \right) := \text{Hip} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \right).$$

$\boxed{\rightarrow I}$

$$\text{Hip} \left(\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \right) := \text{Hip} \left(\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array} \right) \setminus \{\varphi\}.$$

$\boxed{\vee E}$

$$\text{Hip} \left(\frac{\begin{array}{ccc} \vdots D_1 & [\varphi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots D_2 & \vdots D_3 \\ \varphi \vee \psi & \chi & \chi \end{array}}{\chi} \vee E \right) :=$$
$$\text{Hip}(D_1) \cup (\text{Hip}(D_2) \setminus \{\varphi\}) \cup (\text{Hip}(D_3) \setminus \{\psi\}).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\forall I, \perp}$ Son como $(\wedge E)$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\forall I, \perp}$ Son como $(\wedge E)$ \longrightarrow *Hip* se define igual.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\forall I, \perp}$ Son como $(\wedge E)$ \longrightarrow *Hip* se define igual.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

$\boxed{\rightarrow E}$ Es como $(\wedge I)$.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow E$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\forall I, \perp}$ Son como $(\wedge E)$ \longrightarrow *Hip* se define igual.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \varphi'} \vee I$$

$\boxed{\rightarrow E}$ Es como $(\wedge I)$.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow E$$

\boxed{RAA} Es como $(\rightarrow I)$.

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.



Universidad
Nacional
de Córdoba



Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
 - $\{\psi, \neg\varphi \rightarrow \neg\psi\} \vdash \varphi$.



Universidad
Nacional
de Córdoba



Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
 - $\{\psi, \neg\varphi \rightarrow \neg\psi\} \vdash \varphi$.
- Principio de no contradicción: $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba



Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Recordemos: $\Gamma \models \varphi \iff$ para toda v que valide Γ , $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$.



Universidad
Nacional
de Córdoba



Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Recordemos: $\Gamma \models \varphi \iff$ para toda v que valide Γ , $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$.

Semántica	Cálculo
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
\models	\vdash
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Recordemos: $\Gamma \models \varphi \iff$ para toda v que valide Γ , $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$.

Semántica	Cálculo
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
\models	\vdash
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$



Universidad
Nacional
de Córdoba



Teorema de corrección

- Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

Teorema de corrección

- Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La implicación (\Rightarrow) es la **Compleitud** y (\Leftarrow) es la **Corrección**.

Teorema de corrección

- Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La implicación (\Rightarrow) es la **Compleitud** y (\Leftarrow) es la **Corrección**.

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.



Universidad
Nacional
de Córdoba



Teorema de corrección

- Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La implicación (\Rightarrow) es la **Complejitud** y (\Leftarrow) es la **Corrección**.

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

Demostración.

Probamos por inducción en $D \in \mathcal{D}$:

“Para todo Γ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models Concl(D)$ ”.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “ $\forall \Gamma : \dots$ ”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “ $\forall \Gamma : \dots$ ”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

\boxed{PROP} $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq PROP$.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “ $\forall \Gamma : \dots$ ”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

\boxed{PROP} $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq PROP$.

$$Hip(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma$$

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “ $\forall \Gamma : \dots$ ”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

\boxed{PROP} $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq PROP$.

$$Hip(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \varphi \in \Gamma$$

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma “ $\forall \Gamma : \dots$ ”:
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

\boxed{PROP} $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq PROP$.

$$Hip(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \varphi \in \Gamma \implies \Gamma \models \varphi = Concl(D).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{smallmatrix} \vdots D_1 \\ \varphi_1 \end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix} \vdots D_2 \\ \varphi_2 \end{smallmatrix}$,

Prueba del teorema de corrección, caso ($\wedge I$)

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{smallmatrix} \vdots D_1 \\ \varphi_1 \end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix} \vdots D_2 \\ \varphi_2 \end{smallmatrix}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\frac{\vdots D_1}{\varphi_1}$ y $\frac{\vdots D_2}{\varphi_2}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\frac{\vdots D_1}{\varphi_1} \quad \frac{\vdots D_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Prueba del teorema de corrección, caso ($\wedge I$)

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\frac{\vdots D_1}{\varphi_1}$ y $\frac{\vdots D_2}{\varphi_2}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\frac{\vdots D_1}{\varphi_1} \quad \frac{\vdots D_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

\parallel
 $Hip(D_1) \cup Hip(D_2)$

Prueba del teorema de corrección, caso ($\wedge I$)

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi_1 \end{array}$ y $\begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi_2 \end{array}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\begin{array}{c} \parallel \\ Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2). \end{array}$$

Prueba del teorema de corrección, caso ($\wedge I$)

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\frac{\vdots D_1}{\varphi_1}$ y $\frac{\vdots D_2}{\varphi_2}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\frac{\vdots D_1}{\varphi_1} \quad \frac{\vdots D_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

\parallel
 $Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2).$

Prueba del teorema de corrección, caso ($\wedge I$)

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\frac{\vdots D_1}{\varphi_1}$ y $\frac{\vdots D_2}{\varphi_2}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\frac{\vdots D_1}{\varphi_1} \quad \frac{\vdots D_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\begin{array}{c} \parallel \\ Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2). \end{array}$$

Prueba del teorema de corrección, caso ($\wedge I$)

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\frac{\vdots D_1}{\varphi_1}$ y $\frac{\vdots D_2}{\varphi_2}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\frac{\vdots D_1}{\varphi_1} \quad \frac{\vdots D_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\begin{array}{c} \parallel \\ Hip(D_1) \cup Hip(D_2) \supseteq Hip(D_1), Hip(D_2). \end{array}$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi_1 \end{array}$ y $\begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi_2 \end{array}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\begin{array}{c} \vdots D_1 \\ \varphi_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots D_2 \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Sea v una asignación que valide $\Gamma \implies \llbracket \varphi_1 \rrbracket_v = 1$ y $\llbracket \varphi_2 \rrbracket_v = 1$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\frac{\vdots D_1}{\varphi_1}$ y $\frac{\vdots D_2}{\varphi_2}$,

1 para todo Γ , $Hip(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y

2 para todo Γ , $Hip(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

■ para todo Γ , $Hip \left(\frac{\frac{\vdots D_1}{\varphi_1} \quad \frac{\vdots D_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge I \right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Sea v una asignación que valide $\Gamma \implies \llbracket \varphi_1 \rrbracket_v = 1$ y $\llbracket \varphi_2 \rrbracket_v = 1$.

Luego $\llbracket \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rrbracket_v = \min\{\llbracket \varphi_1 \rrbracket_v, \llbracket \varphi_2 \rrbracket_v\} = 1$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \psi$, y

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip\left(\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ D \\ \psi \end{array}\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi.$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ .

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \implies v$ valida $\Gamma \cup \{\varphi\}$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \implies v$ valida $\Gamma \cup \{\varphi\}$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \implies v$ valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \implies v \text{ valida } \Gamma \cup \{\varphi\} \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1$
 $\implies \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1.$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \implies v$ valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1$
 $\implies \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$.

2 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 0$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\rightarrow I)$

Para todo Γ , $Hip(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models Concl(D)$

$\boxed{\rightarrow I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ D, \\ \psi \end{array}$

■ para todo Γ' , $Hip(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

■ para todo Γ , $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Supongamos $Hip(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies Hip(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.

Sea v una asignación que valide Γ . Casos en $\llbracket \varphi \rrbracket_v$:

1 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1 \implies v$ valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies \llbracket \psi \rrbracket_v = 1$
 $\implies \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$.

2 $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 0 \implies \llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$.