Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta

FaMAF, 17 de septiembre de 2021

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Deducción natural
   - Reglas de inferencia
   - Cancelación de hipótesis: introducción de $\to$
   - Ejemplos con cancelación
   - Reducción al absurdo y de eliminación de $\vee$
   - Ejemplos con RAA y $\vee E$

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0, 1\}$.
  - La verdad es información local sobre el modelo: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0, 1\}$.
  - La verdad es información local sobre el modelo: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas").
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0, 1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_v : PROP \to \{0, 1\}$.
  - La verdad es información local sobre el modelo: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Ahora

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{aligned}
& \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv \{ & \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
& \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv \{ & \text{ Conmutativa } \vee\text{, Idempotencia } \vee \ \} \\
& p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv \{ & \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
& \mathit{True}
\end{aligned}
$$

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee, \text{ Idempotencia } \vee \ \} \\
 & p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

Es un cálculo ecuacional:

$$\frac{q \vee q \equiv q}{\quad}$$

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv \{ & \text{Definición de} \Rightarrow \ \} \\
 & \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \vee, \text{Idempotencia} \vee \} \\
 & p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv \{ & \text{Conmutativa} \vee \ \} \\
 & \mathit{True}
\end{array}
$$

Es un cálculo ecuacional:

$$
\frac{q \vee q \equiv q}{q \vee q \vee p \equiv q \vee p}
$$

El cálculo en primer año

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
& \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
& \underline{p} \vee q \vee \underline{p} \equiv \underline{q \vee q} \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee, \text{ Idempotencia } \vee \ \} \\
& p \vee q \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
& \mathit{True}
\end{array}
$$

Es un cálculo ecuacional:

$$
\frac{q \vee q \equiv q}{q \vee q \vee p \equiv q \vee p}
$$

Deducción natural: un cálculo más parecido a los razonamientos “intuitivos”.

Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge \boldsymbol{I}$$

Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge \boldsymbol{I}$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

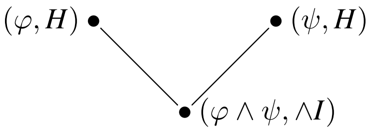
- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.

Deducción natural

$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{\color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$



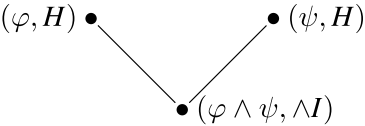
Deducción natural

$$\frac{\color{red}{\varphi} \qquad \color{red}{\psi}}{\color{blue}{(\varphi \wedge \psi)}} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$

“De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$”

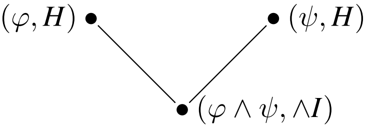


Deducción natural

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)} \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión $(Concl)$: $(\varphi \wedge \psi)$



"De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$"

$\{\varphi, \psi\} \vdash (\varphi \wedge \psi)$.

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \rightarrow \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \rightarrow \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee I$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \rightarrow \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \rightarrow \chi\big).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\, \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\, \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\, \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\, \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\, \vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

Algunas reglas de inferencia

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \left(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\right).$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E$$

Ejemplo

De $\{\varphi, \varphi \vee \psi \to \chi\}$ se deduce χ.

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee I \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E$$

Ejemplo

De $\{\varphi, \varphi \vee \psi \to \chi\}$ se deduce χ.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.
- Luego, n es par.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.
- Luego, n es par.

Luego, (n es múltiplo de 4) implica (n es par).

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to \boldsymbol{I}$$

Introducción de la implicación

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: φ.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \dfrac{\dfrac{\psi \wedge \chi}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi}\to I$$

Introducción de la implicación

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \dfrac{\dfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \to \psi$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi}\wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \to \psi$.

"$\psi \wedge \chi \to \psi$ es un **teorema** ".

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \dfrac{\dfrac{[\psi \land \chi]_1}{\psi}\land E}{\psi \land \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \land \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \land \chi \to \psi$.

"$\psi \land \chi \to \psi$ es un **teorema** ". $\quad \vdash \psi \land \chi \to \psi$.

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\to E \qquad \neg\psi}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_1$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ RAA$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\,RAA \qquad\qquad \dfrac{\varphi\vee\psi \quad \begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\,\vee E.$$

Ejemplo usando *RAA*

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

Ejemplo usando *RAA*

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{[\neg\psi]_1 \qquad \neg\psi \to \neg\varphi}{\neg\varphi}\to E}{\bot}\to E}{\psi}\, RAA_1$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\perp$ como protagonista:

$$\frac{\perp}{\varphi}\perp$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\perp$ como protagonista:

$$\frac{\perp}{\varphi}\perp$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\perp$ como protagonista:

$$\frac{\perp}{\varphi}\perp$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

$$\cfrac{\cfrac{\neg\varphi \vee \psi \qquad \cfrac{\cfrac{[\varphi]_1 \quad [\neg\varphi]_2}{\perp}\to E}{\psi}\perp \qquad [\psi]_2}{\psi}\vee E_2}{\varphi \to \psi}\to I_1$$