Análisis Numérico I - Práctico 6

Matias Sticca

20 de septiembre de 2021

Ejercicio 1

Resolver los sistemas lineales Ax = b para los A y b dados, utilizando sustitución hacia atrás o hacia adelante según corresponda:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \\ 6 \\ -5 \\ 40 \end{bmatrix}$$

a) De nuestro sistema lineal Ax = b, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ 6x_3 = 6 \end{cases}$$

Con lo cual, haciendo sustitución hacia atrás, obtendremos que: x_1 **= 3,** x_2 **= 2 y** x_3 **= 1.**

b) De nuestro sistema lineal Ax = b, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ 2x_2 = 8 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Con lo cual, haciendo sustitución hacia adelante, obtendremos que: x_1 **= 2,** x_2 **= 4 y** x_3 **= 6.**

c) De nuestro sistema lineal Ax = b, tenemos que:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 2x_5 = 21 \\ 5x_3 + 113x_5 = 6 \\ 2x_4 - 7x_5 = -5 \\ 40x_5 = 40 \end{cases}$$

Con lo cual, haciendo sustitución hacia atrás, obtendremos que: x_1 **= 1,** x_2 **= 1,** x_3 **= 1,** x_4 **= 1 y** x_5 **= 1.**

Ejercicio 2

En un supermercado Martín compra 5 paquetes de un producto A, 4 de B y 3 de C, pagando en total C$53 (pesos Cordobeses). Natalia compra 2 paquetes de A, 7 de B y 4 de C, gastando C$46. Un tercer cliente, Oscar, compra 8 de A, 13 de B y 5 de C, pagando C$99. ¿Cuánto vale cada producto?

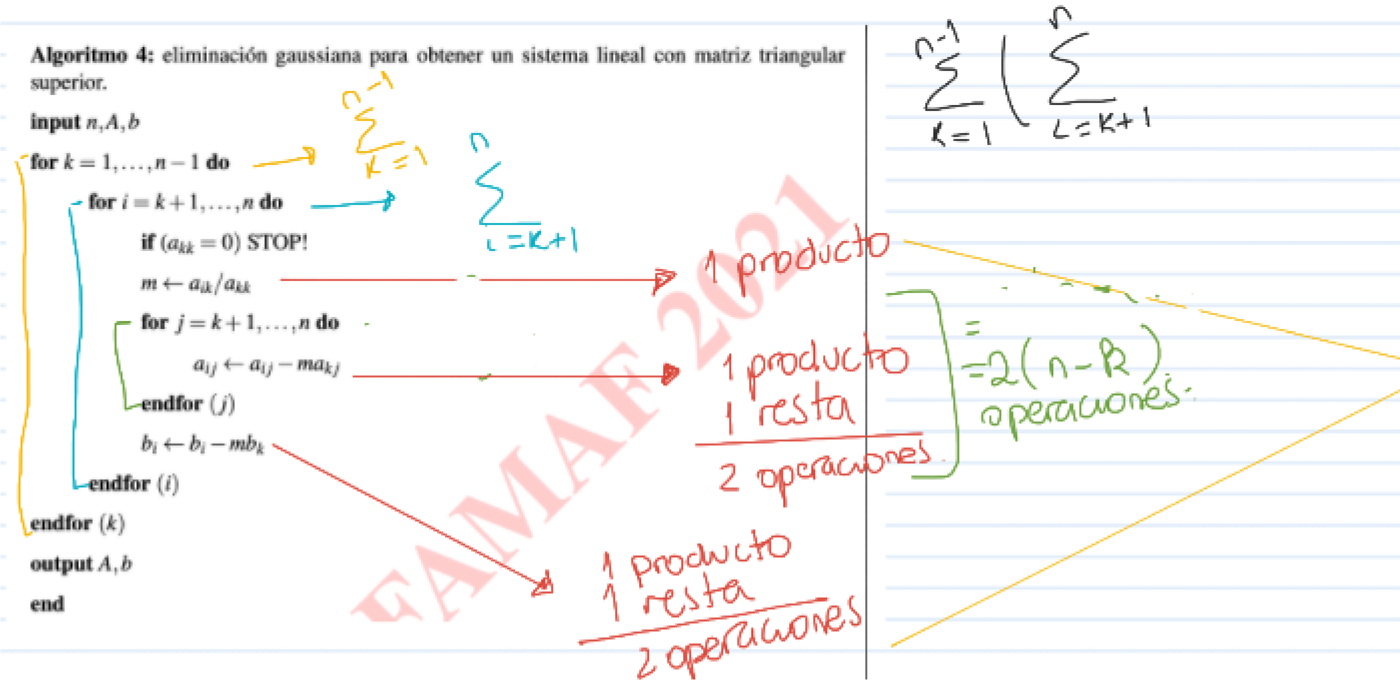
Tendremos el sistema de ecuaciones lineales $\alpha X = \beta$ dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 8 & 13 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad \beta = \begin{bmatrix} 53 \\ 46 \\ 99 \end{bmatrix}$$

Lo cual nos dice entonces, que A vale C$6 , B vale C$2 y C vale C$5.

Ejercicio 3

Mostrar que el costo total de operaciones del método de eliminación gaussiana para resolver un sistema Ax = b, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ flops.
Ayuda: recordar que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *y* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



Entonces tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} [1 + 2(n-k) + 2] = \sum_{k=1}^{n-1} [3 + 2(n-k)](n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} 3(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 =$$

$$= 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n = \mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

Que es lo que queríamos probar.

Ejercicio 4

Considerar el sistema lineal Ax = b, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar una solución usando el método de eliminación Gaussiana.

b) Encontrar una solución usando descomposición LU.

c) Repetir los items anteriores para b = $[-2, 1, 3]^\top$ y b = $[-10, 4, 8]^\top$. Analizar las ventajas de utilizar descomposición LU en lugar de eliminación Gaussiana

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 - \frac{f_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Siendo la última matriz (sin extender) la parte U de la descomposición, e y la parte extendida. Ahora, haciendo sustitución hacia atrás, tenemos:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{13}{2} \\ -4x_3 = -4 \end{cases}$$

Con lo cual, $x = [1, 2, 1]^\top$.

b) Para la descomposición A = LU, planteamos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{32}u_{12} + u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, primero tendremos que: $u_{11} = 2,\ u_{12} = -2\ y\ u_{13} = 1$.
Luego, como $l_{21} = \frac{1}{u_{11}}$ y $l_{31} = \frac{0}{u_{11}}$ entonces $l_{21} = \frac{1}{2}\ y\ l_{31} = 0$.
Ahora, tenemos:

$$\begin{cases} l_{21}u_{12} + u_{22} = 1 \\ l_{21}u_{12} + u_{23} = 3 \\ l_{32}u_{12} + u_{22} = 4 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 1 \end{cases}$$

Entonces, reemplazando por los datos que ya tenemos, y resolviendo de arriba para abajo el sistema, nos queda:
$l_{32} = 2,\ u_{22} = 2,\ u_{23} = \frac{5}{2}$ y $u_{33} = -4$.
Ahora, lo que debemos hacer es resolver primero el sistema $Ly = b$ y finalmente, $Ux = y$, para obtener x.

$$Ly = b \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Con lo que, haciendo sustitución hacia adelante, obtenemos $y = [-1, \frac{13}{2}, -4]^\intercal$.
Y por otro lado,

$$Ux = y \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Con lo que haciendo sustitución hacia atrás, nos queda $x = [1, 2, 1]^\intercal$.

c) Dado que ya tenemos las composiciones A = LU, haremos la eliminación Gaussiana y ya desde ahí, tendremos despejado el y que nos haría falta para luego hacer las respectivas sustituciones hacia atrás y adelante. Primero para $b = [-2, 1, 3]^\intercal$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 - \frac{f_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

Con lo cual, tendremos que $y = [-2, 2, -1]^\intercal$ y resolviendo con sustitución hacia atrás, $x = [-\frac{7}{16}, \frac{11}{6}, \frac{1}{4}]^\intercal$.

Ahora, para $b = [-10, 4, 8]^\intercal$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 - \frac{f_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \end{array}\right]$$

Con lo que, tendremos que $y = [-10, 9, -10]^\intercal$ y resolviendo con sustitución hacia atrás, $x = [-\frac{39}{8}, \frac{11}{8}, \frac{5}{2}]^\intercal$.

Por otro lado, cabe destacar que realizaríamos menos cuentas utilizando descomposición LU, puesto que como ya los tenemos desde el punto (b), ahora solo deberíamos hacer dos sistemas triangulares (uno para y y otro para x), que salen haciendo sustitución hacia atrás, en lugar de tener que reducir la matriz con operaciones (esto quizá no se nota tanto, pero en una matriz más grande hay una <u>GRAN</u> diferencia.

Ejercicio 5

Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior). Además, si las matrices tienen unos en la diagonal su producto también los tiene.

b) La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es triangular inferior (superior). Además, si la matriz tiene unos en la diagonal su inversa también los tiene.

c) Suponiendo que A = LU donde L tiene unos en la diagonal y U elementos diagonales no nulos. Usando los items anteriores demostrar que la descomposición LU es única.

a. Veamos. Sean dos matrices A, B $\in \mathbb{R}^{n\times n}$. Por definición, el producto de A y B es:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k} B_{k_j}$$

Supongamos ahora que son triangulares inferiores, es decir, que se cumple $A_{i_k} = 0$ si k>i, y $B_{k_j} = 0$ si k<j. Tenemos que probar que $(AB)_{ij} = 0$ si i<j. Entonces, desarrollemos la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i_k} B_{k_j} = \sum_{k=1}^{j} A_{i_k} B_{k_j} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{i_k} B_{k_j} = 0$$

Pues, en la primera parte, k<j implica que $B_{k_j} = 0$ entonces cada sumando es cero, y en la segunda parte, k>j>i entonces $A_{i_k} = 0$, luego también cada sumando es cero, y tenemos lo que queríamos.
Además, si consideramos la diagonal, suponiendo que ambas matrices sólo tienen unos en sus diagonales, tendremos:

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k} B_{k_i} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{i_k} B_{k_i} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i_k} B_{k_i} + A_{i_i} B_{i_i} = 1$$

Por el razonamiento anteriormente utilizado, la primera y segunda suma son cero, y como las diagonales valen uno en cada matriz, $A_{i_i} \cdot B_{i_i} = 1$. Que es lo que queríamos probar. (Cabe aclarar que para triangular superior se usa un argumento similar, solo que cambiando las desigualdades en los subíndices)

b. En primer lugar, recordemos que una matriz triangular inferior(superior) es invertible $\Leftrightarrow$ todas las entradas diagonales son distintas de cero. Además, si A es triangular inferior, entonces $A^{\intercal}$ es triangular superior, y como $(A^{-1})^{\intercal} = (A^{\intercal})^{-1}$, entonces el resultado con triangular inferior ya nos lo prueba para superior.
Ahora bien, tenemos que $(AB)_{i_j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i_k} B_{k_j} = \delta_{i_j}$ Pues B es la inversa de A, y queremos probar que B es triangular inferior, i.e, $B_{i_j} = 0$ si $j > i$ y que $B_{i_i} = A_{i_i}^{-1}$.

Lo haremos por inducción fuerte sobre la fila i. Entonces, sea $i = 1$:

$$(AB)_{1_j} = A_{1_1}B_{1_j} = \begin{cases} 1 & si\ j = 1 \\ 0 & si\ j > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_{1_1} = A_{1_1}^{-1} \\ \quad B_{1_j} = 0 \quad si\ j > 1 \end{cases}$$

Luego, suponemos que vale para las filas $k = 1, .., i-1$ y veamos que vale para i. Entonces, Hay que ver que $B_{i_i} = A_{i_i}^{-1}$ y $B_{i_j} = 0$ si $j > i$.

$$1 = (AB)_{i_j} \overbrace{=}^{A\ triangular} \sum_{k=1}^{i-1} A_{i_k}B_{k_i} \overbrace{=}^{H.I.} 0 + A_{i_i}B_{i_i} \rightarrow B_{i_i} \overbrace{=}^{A\ inversible} A_{i_i}^{-1}$$

$$0 = (AB)_{i_j} \overbrace{=}^{A\ triangular} \sum_{k=1}^{i-1} A_{i_k}B_{k_j} \overbrace{=}^{H.I.} 0 + A_{i_i}B_{i_j} \rightarrow B_{i_j} \overbrace{=}^{A\ inversible} 0$$

Luego, vale para n, con lo cual, B es triangular inferior.

c. Supongamos que existen U' y L' descomposición de A como pide el ejercicio. Además, recordemos que al tener diagonales distintas de cero, son invertibles estas matrices. Entonces, tendremos:

$$A = LU = L'U'$$

Multiplicando por L^{-1} a izquierda y por U'^{-1} por derecha, nos queda $UU'^{-1} = L^{-1}L'$. Dado que demostramos anteriormente que producto de triangulas superiores es triangular superior, e inversa de triangular superior es triangular superior (ídem con triangular inferior) entonces nos queda una matriz triangular superior igual a una matriz triangular inferior, lo que nos dice que entonces esa matriz es diagonal. Más aún, como la diagonal de $L^{-1}L$ son todos unos, también por los incisos anteriores, entonces nos queda la matriz identidad. Luego, como la inversa es única, y $(A^{-1})^{-1} = A$ esto nos dice que $U = U'$ Y $L = L'$. Luego, la descomposición LU descripta en el ejercicio de A es única.

Ejercicio 6

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Sea $A = LU$ la descomposición LU de A. Entonces $det(A) = det(U)$

b) La matriz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ no tiene descomposición LU.

c) La matriz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right]$ no tiene descomposición LU.

a. Verdadero, puesto que como L es una matriz triangular inferior, con unos en la diagonal, con lo cual su determinante es exactamente uno. Además, $det(A) = det(LU) = det(L) \cdot det(U)$ con lo cual, $det(A) = det(U)$.

b. Verdadero, puesto que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ lu_1 & lu_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, $u_1 = 0$, pero entonces $lu_1 = 0$ y además, $lu_1 = 1$. Absurdo.

c. Falso, haciendo la misma argumentación que recién, podemos de hecho obtener varias descomposiciones LU, por ejemplo, tomando $l = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = a$ y $u_3 = b$, nos quedaría A expresado como queremos.

Ejercicio 7

Probar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tiene una única descomposición LU para $r \neq 0$, pero infinitas para $r = 0$.

Haciendo la descomposición LU de A, nos quedará que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{32}u_{12} + u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Lo que, haciendo el sistema, nos quedaría: $u_{1i} = 1\,\forall i$, $l_{21} = l_{31} = 0$ y $u_{23} = 2$, independientemente del valor de r. Pero, por otro lado, como $u_{22} = r$ nos quedarán estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} l_{32}r = 0 \\ 2l_{32} + u_{33} = 3 \end{cases}$$

Ahora bien, si $r \neq 0$ entonces $l_{32} = 0$ y tenemos una única solución al sistema, con $u_{33} = 3$. Pero si $r = 0$ entonces nos queda un sistema compatible determinado, es decir, con soluciones infinitas. A saber, las soluciones para los pares (l_{32}, u_{33}) serán de la forma $t(1,-2) + (0,3)$ para $t \in \mathbb{R}$.
Luego, existen infinitas descomposiciones LU de A para $r = 0$.

Ejercicio 8

Considerar el sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Obtener los autovalores y autovectores de la matriz de iteración asociada al método Gauss-Seidel para decidir si el método es convergente.
Sin hacer los cálculos, predecir el comportamiento de las sucesiones que se obtienen con los siguientes valores iniciales:
$(a) x_0 = (2,0)$ $(b) x_0 = (-0{,}03, 0{,}03)$ $(c) x_0 = (0,1)$.

Primero obtengamos la matriz asociada al sistema, que claramente es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ahora, separamos a $A = L + D + U$, con esas tres matrices triangular inferior, diagonal y triangular superior respectivamente, y como utilizamos el método de Gauss-Seidel, tendremos que $M = L + D$ y que $N = M - A = -U$. Quedándonos así, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces, haciendo las cuentas, $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Haciendo el polinomio característico, obtenemos los autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$. Y ahora, por el teorema 5 de la clase 18, como $\rho(M^{-1}N) = máx\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = 1$, entonces no converge $\forall x^{(0)}$. (i.e., existe algún $x^{(0)}$ que diverge)

Ahora, saquemos los autovectores:
Planteamos $(M^{-1}N - \lambda_i I)v_i = \lambda_i v_i$, y con los respectivos autovalores, nos queda $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (-1,1)$. Ahora, si tomamos un $x^{(0)}$ cualquiera, tendriamos que es una combinación lineal de estos dos autovectores (que forman una base): $(x,y) = (t,0) + (-s,s) = (t-s,s)$, con lo cual, $t = x+y$ y $s = y$. Ahora apliquemos a un vector cualquiera nuestra matriz:

$$M^{-1}N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}N\left((x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overbrace{=}^{autov} \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M^{-1}Nx^{(k)} = x^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & si\ x^{(0)} = (t,0) \\ -x^{(k)} & si\ x^{(0)} = (-s,s) \end{cases}$$

Para algún $t, r \in \mathbb{R}$. Entonces:

- Si $x^{(0)} = (x,0) \rightarrow x^{(1)} = (0,0)$.
- Si $x^{(0)} = (x,y),\ y \neq 0 \rightarrow x^{(1)} = (y,-y)$.
  Además, $x^{(k)} = \begin{cases} (y,-y) & si\ k\ es\ impar \\ (-y,y) & si\ k\ es\ par \end{cases}$

Entonces, sabemos que el método sólo convergerá en (a).

Por otro lado, para el método de Jacobi, tomamos $M = D$, con lo cual $N = M - A = -(L+U)$. Así, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Haciendo las cuentas, $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Por el teorema 2 de la clase 18, como A no es diagonalmente dominante, es decir, no cumple que:

$$|a_{i_i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i_j}| \quad para \quad i = 1, \ldots, n.$$

Entonces existe al menos algún $x^{(0)}$ para el cual no converge la sucesión generada por el método de Jacobi.
Sin embargo, no podemos repetir el proceso, puesto que $ch(M^{-1}N) = x^2 + 1$, con lo cual los autovalores serán números complejos. No obstante, es fácil ver que, dada la naturaleza imaginaria de los autovalores, $(M^{-1}N)^4 = Id$. Veamos entonces solamente los primeros cuatro $x^{(i)}$.
$x^{(0)} = (x,y)$, $x^{(1)} = (M^{-1}N)x^{(0)} + M^{-1}b$. Este último término, al igual que en el inciso anterior, es $[0,0]^\intercal$ pues $b = [0,0]^\intercal$. Entonces, $x^{(1)} = (y,-x)$ e iterando, $x^{(2)} = (-x,-y)$ y $x^{(3)} = (-y,x)$. Así, tendremos que:

$$x^{(k)} = \begin{cases} (x,y) & si\ \ k = 4n \\ (y,-x) & si\ \ k = 4n+1 \\ (-x,-y) & si\ \ k = 4n+2 \\ (-y,x) & si\ \ k = 4n+3 \end{cases}$$

Con lo cual, el método converge $\leftrightarrow x = (0,0)$.

Ejercicio 9

Dado el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$:

a) Deducir la iteración de Jacobi y la de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$.

b) Determinar si la sucesión $\{x^{(k)}\}$ generada por el método de Jacobi es convergente justificando su respuesta.

a. Primero vamos con el método de Gauss-Seidel. Entonces, $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con lo cual, $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Luego, la fórmula de iteración para Gauss-Seidel es:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad para \;\; k \geq 0. \tag{1}$$

Por otro lado, para Jacobi, nos quedará $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces, $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Luego, la iteración para Jacobi es:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad para \;\; k \geq 0. \tag{2}$$

b. La sucesión generada por el método de Jacobi converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$, pues se cumple la hipótesis del teorema 2 de la clase 18, al ser A diagonalmente dominante, pues:

$$|a_{1_1}| > |a_{1_2}| \leftrightarrow 3 > 2 \;\; y \;\; |a_{2_2}| > |a_{2_1}| \leftrightarrow 2 > 1$$

Ejercicio 10

Considerar la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Deducir la iteración de Jacobi para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

b) ¿Esta iteración es convergente? Justificar la respuesta.

a. En este caso, $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Claramente, $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, con lo cual, $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

Luego, el método iterativo de Jacobi está dado por:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} b, \quad para \;\; k \geq 0. \tag{3}$$

b. Para ver si es convergente el método, chequeamos si se cumplen las hipótesis del teorema 2, i.e.,

$$|a_{i_i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{i_j}| \quad para \quad i = 1,2,3.$$

Para $i = 1$, tenemos que:

$$|a_{1_1}| = 4 > |a_{1_2}| + |a_{1_3}| = 3 + 0 = 3$$

Para $i = 2$, tenemos que:

$$|a_{2_2}| = 4 > |a_{2_1}| + |a_{2_3}| = 2 + 1 = 3$$

Finalmente, para $i = 3$, nos queda:

$$|a_{3_3}| = 4 > |a_{3_1}| + |a_{3_2}| = 0 + 1 = 1$$

Concluimos entonces que el método iterativo converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11

Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior e invertible. Probar que tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen en a lo sumo n pasos.

Al ser A triangular superior, la matriz M de Gauss-Seidel y Jacobi coinciden, con lo cual N también. Además, la matriz $M^{-1}N$ será triangular superior estricta:

$$M^{-1}N = B = \begin{bmatrix} 0 & a_{1_2}/a_{1_1} & \cdots & a_{1_n}/a_{1_1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2_n}/a_{2_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, si hacemos el polinomio característico de esta matriz, nos quedará $ch_B(x) = x^n$, y por Careley-Hamilton, $ch_B(B) = B^n = 0$, entonces, B es nilpotente.
Ahora bien, veamos la siguiente afirmación:
Si $B^m = 0$ para algún m, entonces el método converge en finitos pasos.
Dem: $x^{(1)} = Bx^{(0)} + y$, con $y = M^{-1}b$, para cualquier $x^{(0)}$. Iterando,
$x^{(2)} = B^2x^{(0)} + By + y \cdots x^{(n)} = B^n x^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} B^k y$
Dado que vimos que $B^n = 0$, entonces a partir de $x^{(m)} = x^{(n)}\ \forall m \geq n$.
Una vez probado, ahora sólo nos queda ver que el método converge efectivamente a la solución. Esto se puede ver de dos formas:

1. $$x^{(n)} = B^{n-1}y + \cdots + By$$

   Queremos ver que $Ax^{(n)} = b$. Usanod que $A = M - N$, y las correspondientes definiciones de B e y, nos queda una suma telescópica:

   $$\begin{aligned}(M-N)x^{(n)} &= (M-N)(M^{-1}N)^{n-1}M^{-1}b + \cdots + (M-N)M^{-1}NM^{-1}b + (M-N)M^{-1}b \\ &= (N(M^{-1}N)^{n-2} - N(M^{-1}N)^{n-1})M^{-1}b + \cdots = -N(M^{-1}N)^{n-1}M^{-1}b + b \\ &= -M(M^{-1}N)(M^{-1}N)^{n-1}M^{-1}b + b = b\end{aligned}$$

2. Usando que $x^{(k)}$ converge, i.e., $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, tendremos lo siguiente:

   $$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

   Tomando el límite cuando $k \to \infty$,

   $$x^{(*)} = M^{-1}Nx^{(*)} + M^{-1}b, \quad aplicando\, M$$

   $$Mx^{(*)} = MM^{-1}Nx^{(*)} + MM^{-1}b$$

   $$(M-N)x^{(*)} = b$$

   Que es lo que queríamos probar (pues $A = M - N$).

   Alternativamente, se puede probar por inducción, que $(M-N)^k$ tiene $n-k$ diagonales no nulas, con lo que si $k = n$, entonces no tiene diagonales no nulas. Luego, $(M-N)^n$ es nilpotente, y se sigue como anteriormente.

Ejercicio 12

Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a es A definida positiva?

b) ¿Para qué valores de a es convergente el método de Gauss-Seidel?

c) Si se quisiera acelerar el método, ¿cuál sería el parámetro óptimo de aceleración ω^*? (NO ES NECESARIO)

a. A es definida positiva $\leftrightarrow$

Ejercicio 13

Mostrar que si A es real y definida positiva, entonces la iteración de Gauss-Seidel converge independientemente del punto inicial elegido. NO ES NECESARIO.

Ejercicio 14

Hallar la solución al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utilizando alguno de los métodos iterativos.

Por el ejercicio 11, sabemos que este sistema $Ax = b$ converge en a lo sumo 3 iteraciones, pues nuestra A es triangular superior e inversible (pues su determinante es $1 \neq 0$).
Ahora, para hallar la solución, utilicemos alguno de los métodos (da igual cuál elijamos, pues los métodos coinciden en construcción para matrices triangulares superiores).

Entonces tomamos $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Así, $M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tomemos cualquier punto y veamos a dónde converge (pues sabemos que convergerá por el ej.11):

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$\to x^{(1)} = M^{-1}Nx^{(0)} + M^{-1}b = b$$

$$\to x^{(2)} = M^{-1}Nb + M^{-1}b = \begin{bmatrix} 48 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\to x^{(3)} = M^{-1}Nx^{(2)} + M^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, tenemos que la solución es $x = (3,2,1)$.

Ejercicio 15

El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y-2z = 7 \\ x+y+z = 2 \\ 2x+2y+z = 5 \end{cases}$$

tiene solución $(x,y,z) = (1,2,-1)$.

a) Mostrar que el método de Jacobi, comenzando con $x^{(0)} = (0,0,0)$, encuentra la solución en un número finito de iteraciones.

b) Realizar 4 iteraciones del método de Gauss-Seidel, comenzando con $x^{(0)} = (1,2,1,-1)$.

a. Primero, armemos la matriz asociada al sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ahora, por el método de Jacobi, tenemos que:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, el método de iteración está dado por:

$$x^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

Puesto que $M = Id$.
Haciendo las cuentas, vemos que el método converge en la tercera iteración, i.e., $x^{(3)} = (1,2,-1)$.

b. Primero, armemos a M y N:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Siendo el método iterativo:

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comenzando por $x^{(0)} = (1, 2, -1)$, tenemos que:

$$\to x^{(1)} = (0{,}8, 2{,}2, -1)$$

$$\to x^{(2)} = (0{,}6, 2{,}4, -1)$$

$$\to x^{(3)} = (0{,}2, 2{,}8, -1)$$

$$\to x^{(4)} = (-0{,}6, 3{,}6, -1)$$

Con lo cual, vemos que el método parece no converger con este $x^{(0)}$.