Análisis Numérico I - Práctico 7

Matias Sticca

20 de septiembre de 2021

Ejercicio 1

Dibujar en un plano las curvas de nivel de las siguientes funciones y en el mismo dibujo graficar el vector gradiente en el origen, respectivamente:

a) $f(x, y) = 2x + y$

b) $g(x, y) = x - y$

c) $h(x, y) = -x - 2y$

Lo que hacemos para sacar las curvas de nivel, es evaluar la función que nos dan, $f(x, y) = d$ y despejar alguna de las dos variables en función de la otra. Luego, reemplazamos d por cualquier número en $\mathbb{R}$, e.g., $d = 2x + y$, entonces, $y = -2x + d$ para el punto (a).

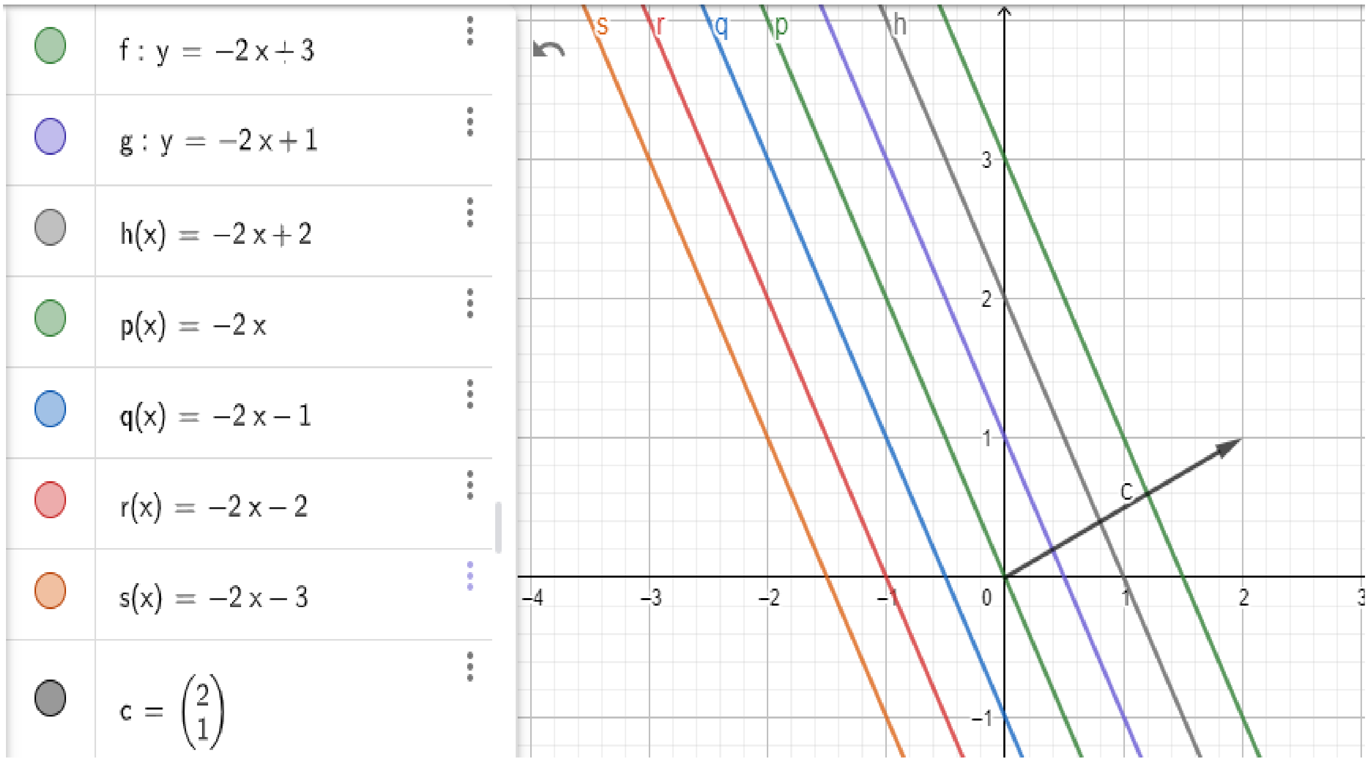


Figura 1: Curvas de nivel de $f(x, y) = 2x + y$

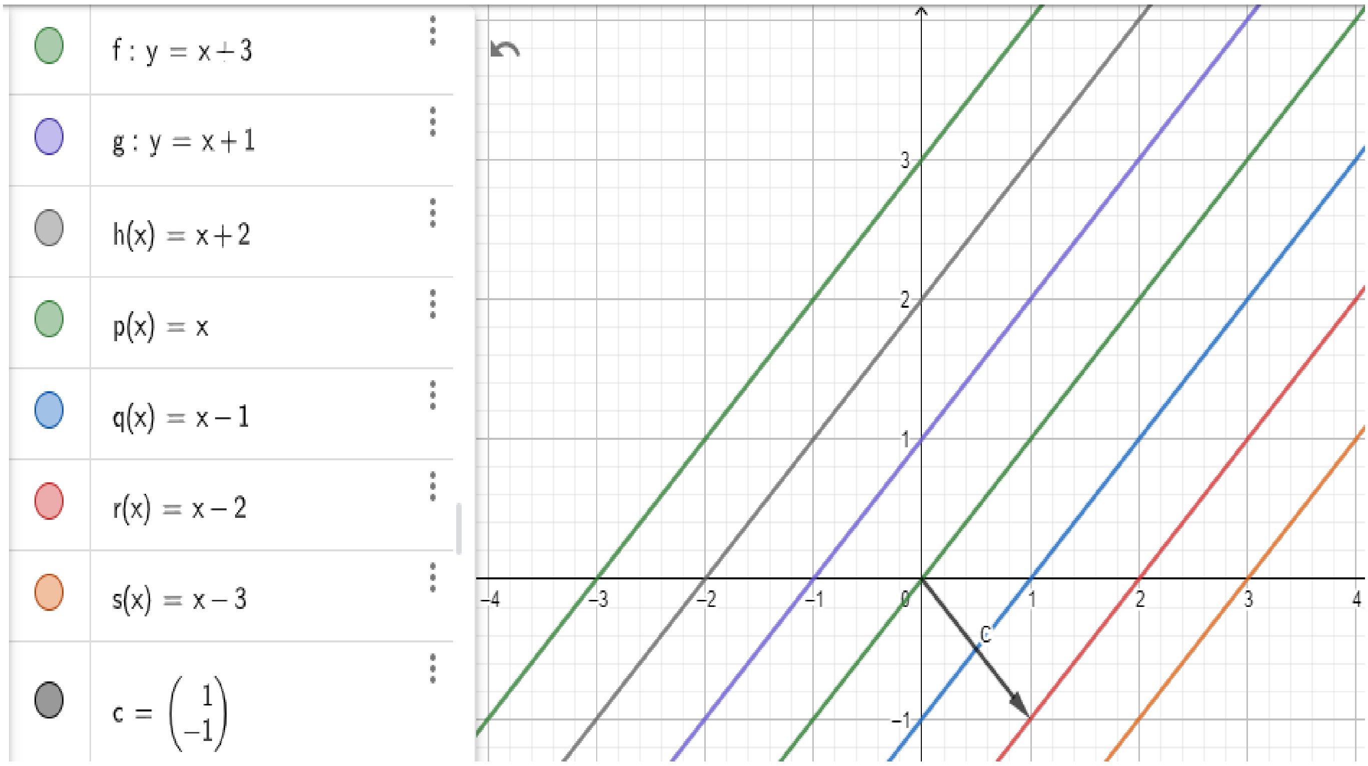


Figura 2: Curvas de nivel de $g(x, y) = x - y$

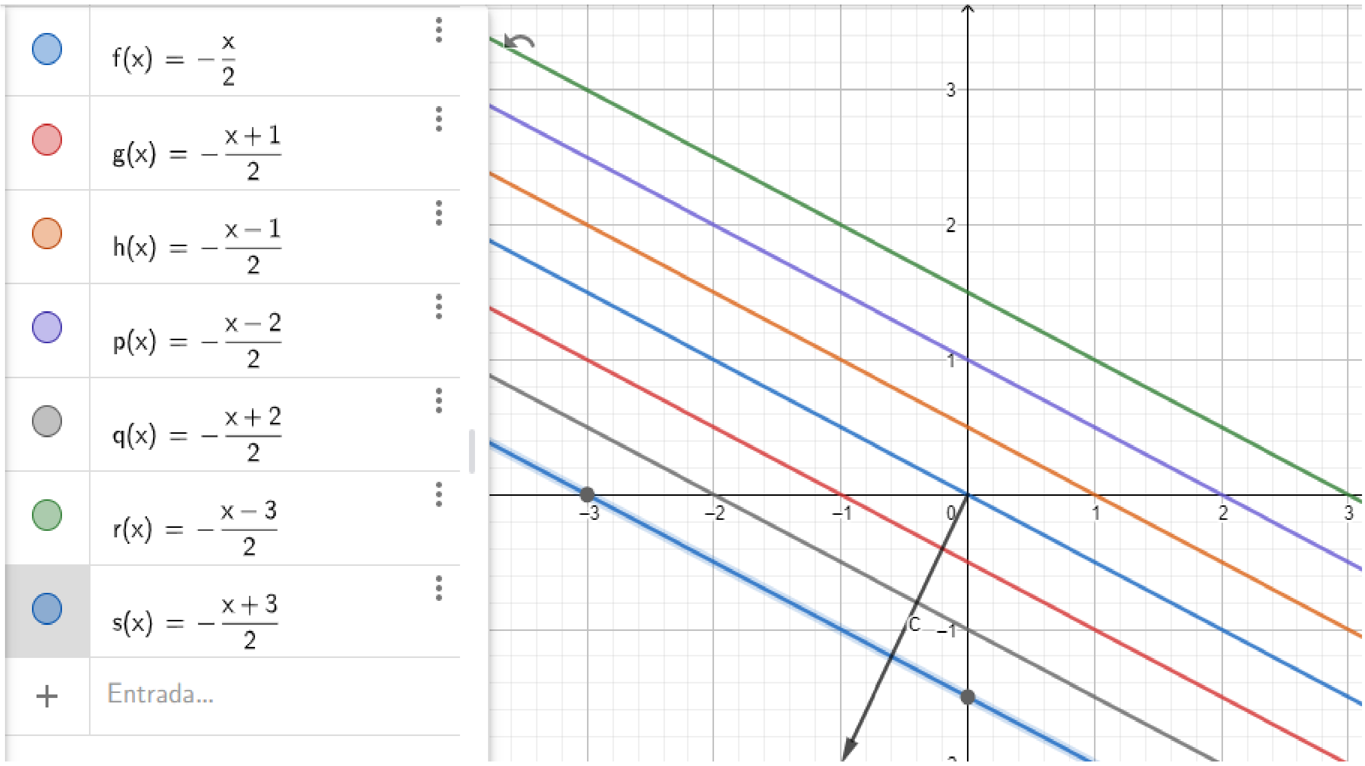


Figura 3: Curvas de nivel de $h(x, y) = -x - 2y$

Ejercicio 2

Transformar los siguientes problemas de programación lineal a la forma estándar:

a)
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3 \\ & 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \leq 7, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 - 5x_2 - 7x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3 \\ & 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq -2, x_2 \geq 0, x_3 \text{ libre} \end{aligned}$$

a) Para pasar a forma estándar, nos debe quedar algo de la forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^{\top} x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & b \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, primero cambiamos de maximizar z, a equivalentemente, minimizar z' = -z. Luego, debemos o bien agregar variables de exceso/holgura según corresponda, o bien, hacer cambios de variable, que es lo que haremos en este caso:
Como $x_1 \geq 1$ entonces $x_1^* = x_1 - 1 \geq 0$. Por otro lado, $x_2^* = 7 - x_2 \geq 0$ y finalmente, tomamos $x_3^* = x_3$, pues ya es mayor igual a cero. Ahora, reemplazando en z:

$$z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \; = \; 3(x_1^* + 1) + 5(7 - x_2^*) - 4(x_3^*) \; = \; 3x_1^* - 5x_2^* - 4x_3^* + 38$$

Luego, nuestro $z^* = -(z - 38)$.
Ahora, para las desigualdades, usaremos variables de exceso y holgura:

$$7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \;\rightarrow\; 7(x_1^* + 1) - 2(7 - x_2^*) - 3x_3^* \geq 4 \;\rightarrow\; 7x_1^* - 2x_2^* - 3x_3^* \geq 11$$
$$\text{agrego variable de exceso} \rightarrow 7x_1^* - 2x_2^* - 3x_3^* - x_4^* \; = \; 11$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3 \;\rightarrow\; -2(x_1^* + 1) + 4(7 - x_2^*) + 8x_3^* = -3 \;\rightarrow\; -2x_1^* - 4x_2^* + 8x_3^* = -29$$

$$\text{multiplico por -1 para } b \geq 0 \rightarrow \; 2x_1^* + 4x_2^* - 8x_3^* = 29$$

$$5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9 \;\rightarrow\; 5x_1^* + 3x_2^* - 2x_3^* \leq 25 \rightarrow$$
$$\text{agrego variable de holgura} \rightarrow \; 5x_1^* + 3x_2^* - 2x_3^* + x_5^* \; = \; 25$$

Con x_4 y x_5 mayores o iguales a cero.

Finalmente, tenemos todo para el formato estándar, que estará dado por:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z^* = -3x_1^* + 5x_2^* + 4x_3^* + 0x_4^* + 0x_5^* \\ \text{sujeto a} & 7x_1^* - 2x_2^* - 3x_3^* - x_4^* = 11 \\ & 2x_1^* + 4x_2^* - 8x_3^* = 29 \\ & 5x_1^* + 3x_2^* - 2x_3^* + x_5^* = 25 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Donde el vector c serán las coordenadas de z^*, el vector b serán las igualdades de las ecuaciones, y la matriz A, las coordenadas de cada ecuación.

b) Veamos primero las variables:

Como $x_1 \geq -2$, entonces usamos $x_1^* = x_1 + 2$. Dado que $x_2 \geq 0$, usamos $x_2^* = x_2$ y finalmente, como x_3 es irrestricta, definimos $x_3 = x_3^* - x_3'$, con cada una mayor igual a cero. Ahora, reemplazando en z:

$$z = x_1 - 5x_2 - 7x_3 = (x_1^* - 2) - 5(x_2^*) - 7(x_3^* - x_3') = x_1^* - 5x_2^* - 7x_3^* + 7x_3' - 2$$

Usamos $z^* = z + 2$ Luego, para las desigualdades:

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \rightarrow 5(x_1^* - 2) - 2x_2^* + 6(x_3^* - x_3') \geq 5 \rightarrow 5x_1^* - 2x_2^* + 6x_3^* - 6x_3' \geq 15$$

$$\text{agregamos variable de exceso} \rightarrow 5x_1^* - 2x_2^* + 6x_3^* - 6x_3' - x_4^* = 15$$

$$3(x_1^* - 2) + 4x_2^* - 9(x_3^* - x_3') = 3 \rightarrow 3x_1^* + 4x_2^* - 9x_3^* + 9x_3' = 9$$

$$7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \rightarrow 7(x_1^* - 2) + 3x_2^* + 5(x_3^* - x_3') \leq 9 \rightarrow 7x_1^* + 3x_2^* + 5x_3^* - 5x_3' \leq 23$$

$$\text{agregamos variable de holgura} \rightarrow 7x_1^* + 3x_2^* + 5x_3^* - 5x_3' + x_5^* = 23$$

Con x_4 y x_5 mayores o iguales a cero.

Finalmente, tenemos todo para el formato estándar, que estará dado por:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z^* = x_1^* - 5x_2^* - 7x_3^* + 7x_3' + 0x_4^* + 0x_5^* \\ \text{sujeto a} & 5x_1^* - 2x_2^* + 6x_3^* - 6x_3' - x_4^* = 15 \\ & 3x_1^* + 4x_2^* - 9x_3^* + 9x_3' = 9 \\ & 7x_1^* + 3x_2^* + 5x_3^* - 5x_3' + x_5^* = 23 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Donde el vector c serán las coordenadas de z^*, el vector b serán las igualdades de las ecuaciones, y la matriz A, las coordenadas de cada ecuación.

Ejercicio 3

Resolver gráficamente los siguientes problemas de programación lineal:

a)

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 - x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) No tiene solución factible, pues gráficamente, en el área donde está sujeto el z, no hay intersección.

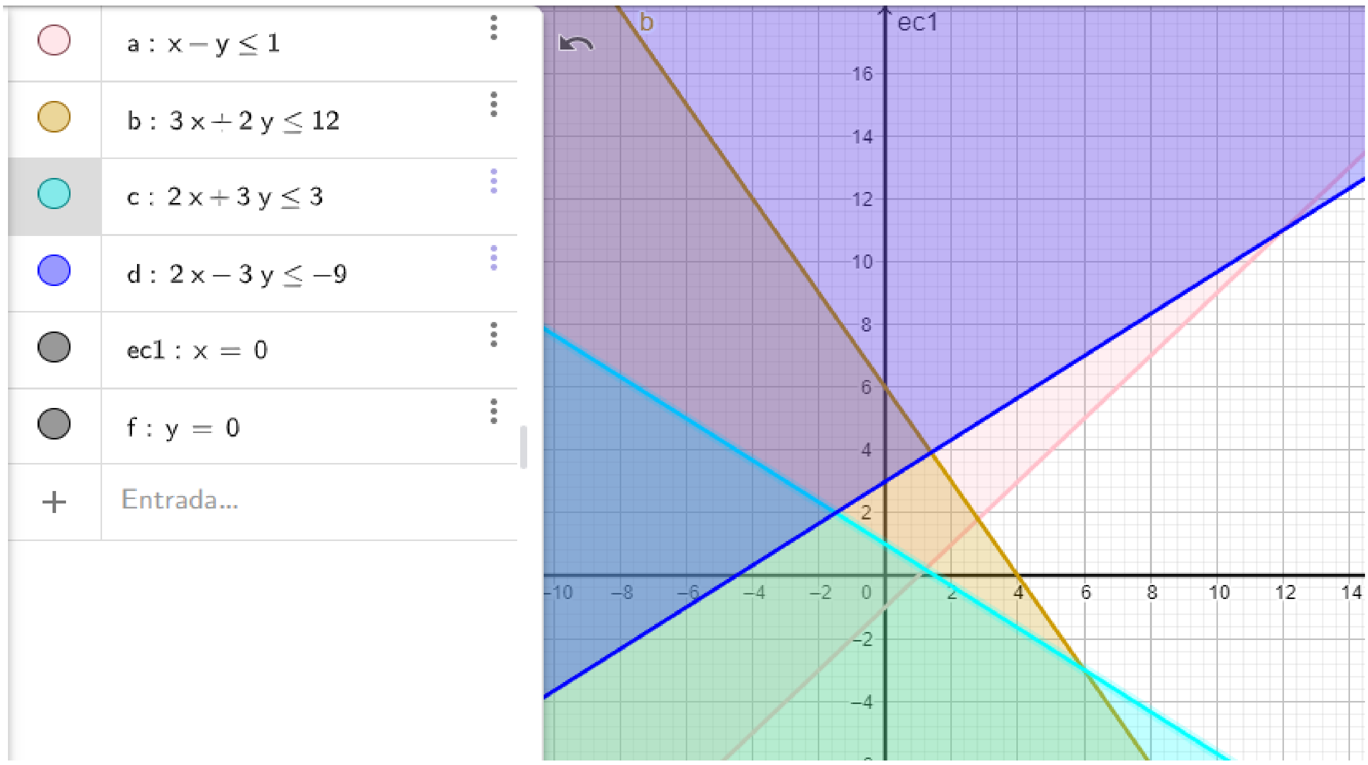


Figura 4: Restricciones

b) En este caso, existe solución factible, pues la intersección entre las restricciones es no vacía, y para saber cuál será el máximo, graficamos el vector gradiente de la función z, para saber a dónde crece:

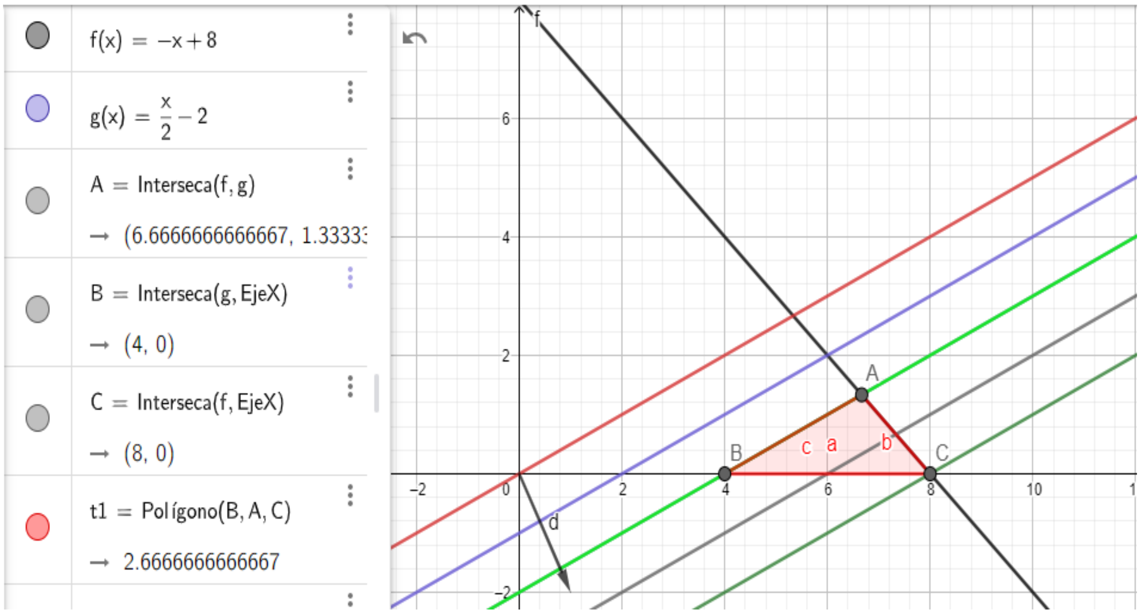


Figura 5: Restricciones y curvas de nivel de $z(x, y) = x - 2y$

Como podemos apreciar en la figura, el vector gradiente $c = [1, -2]$ apunta hacia abajo, con lo cual se alcanza el máximo en el borde $C = (8, 0)$, que interseca con la curva de nivel dada por $x_1 - 2x_2 = 4$.

c) Nuevamente, nuestro conjunto restricción no será vacío, con lo cual tendremos tanto máximo como mínimo, en este caso nos pide minimizar, así que nuevamente, graficando el vector $c = (1, 2)$, sabremos hacia dónde crece y decrece la función z.

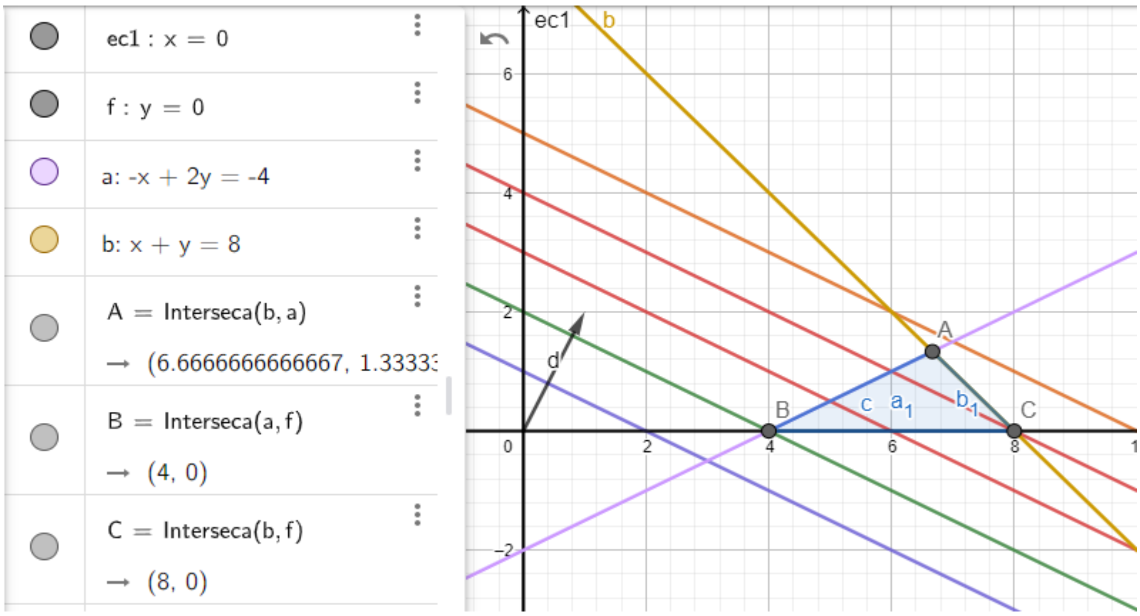


Figura 6: Restricciones y curvas de nivel de $z(x, y) = x + 2y$

Por lo que deducimos que el mínimo se encuentra en el punto $B = (4,0)$, que interseca con la curva de nivel $x_1 + 2x_2 = 2$.

d) Finalmente, no tendremos un mínimo, pues la región factible está bordeada por la recta $-x+2y = -2$, y todo lo que esté por debajo de esa recta hasta $y = 0$ es la región, y el vector gradiente $c = (-1,-1)$ apunta para abajo, con lo cual sí tendremos un máximo dado por $A = (2,0)$, pero no habrá un mínimo pues la región no está acotada.

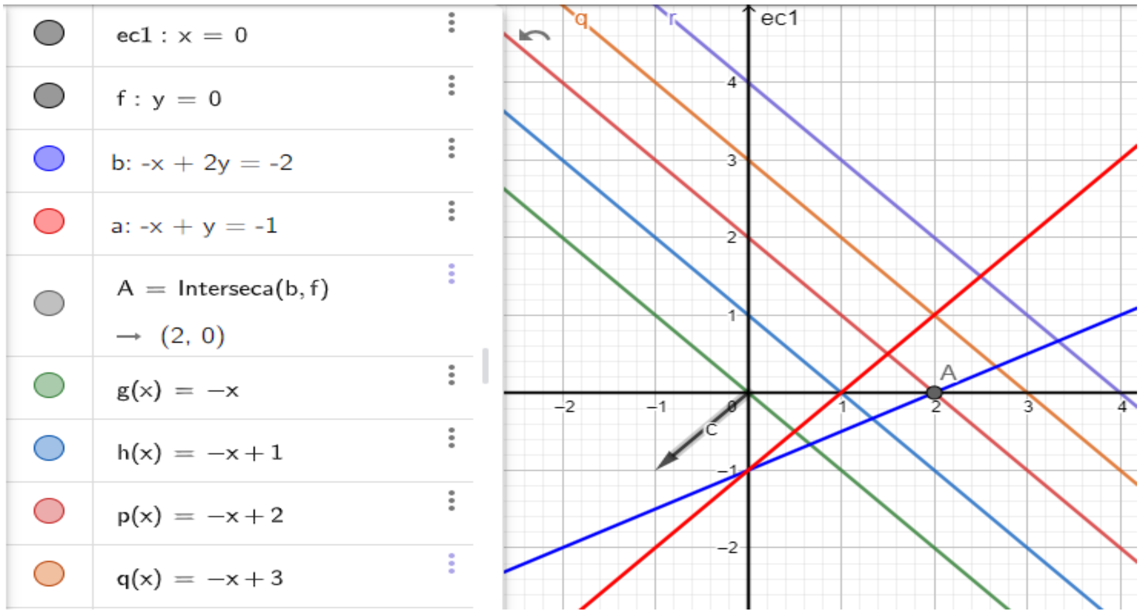


Figura 7: Restricciones y curvas de nivel de $z(x, y) = -x - y$

Resumiendo los resultados anteriores, podemos sacar las siguientes conclusiones para un resultado más general:

- Si la región es acotada habrá máximo y mínimo, más concretamente:
  - Si la región es acotada y ningún lado es curva de nivel, existe un máximo y un mínimo.
  - Si la región es acotada y algún lado es curva de nivel, todo ese lado será máximo o mínimo.
- Si la región no está acotada, no necesariamente hay máximo o mínimo:
  - Si la región fuera todo un cuadrante, por ejemplo, no habría máximo o mínimo.
  - Si la región estuviera encerrada entre dos rectas paralelas que coincidan con dos curvas de nivel, habría infinitos máximos y mínimos.
  - Si es un caso como el inciso (d), no tengo mínimo pero tengo máximo, y podría pasar al revés también.

Ejercicio 4

Determinar los vértices de la región poliedral de $\mathbb{R}^3$ definida por el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z \leq 3 \\ y-z \leq 2 \\ x-2y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dado que son tres incógnitas, lo que haremos para identificar los bordes de la región factible, será tomar tres ecuaciones distintas y resolver el sistema para una igualdad, y así con cada permutación, que nos daría cuatro sistemas, en total, cuatro vértices que pueden o no estar en la región factible:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=2 \\ x-2y=1 \end{cases} \rightarrow \text{la única solución es } p_1=(3,1,-1) \text{ y cumple } x \geq 0.$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \text{la única solución es } p_2=(0,\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ y cumple } x-2y \leq 1.$$

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ y-z=2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \text{la única solución es } p_3=(0,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{5}{2}) \text{ y cumple } x+y+z \leq 3.$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y=2 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \text{la única solución es } p_4=(0,-1,4) \text{ y cumple } y-z \leq 2.$$

Luego, los p_i con $i=1,2,3,4$ serán los vértices de la región factible, pues están dentro de la región.

Ejercicio 5

Dados los vectores

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

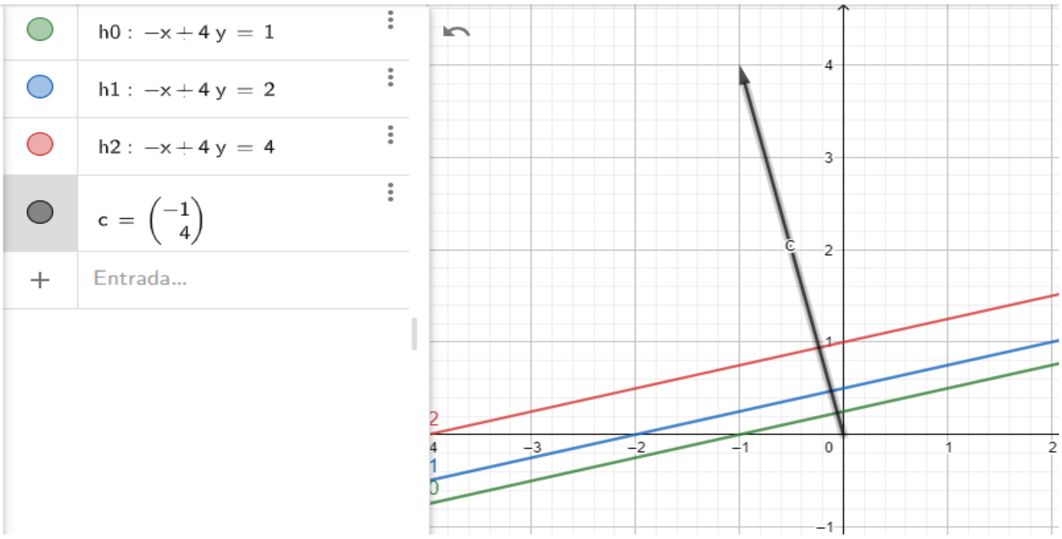
a) Graficar el vector c y los conjuntos $H_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T x = 2^j\}$ para $j=0,1,2$.

b) Realizar tres gráficos con los vectores u, v, w y los conjuntos:

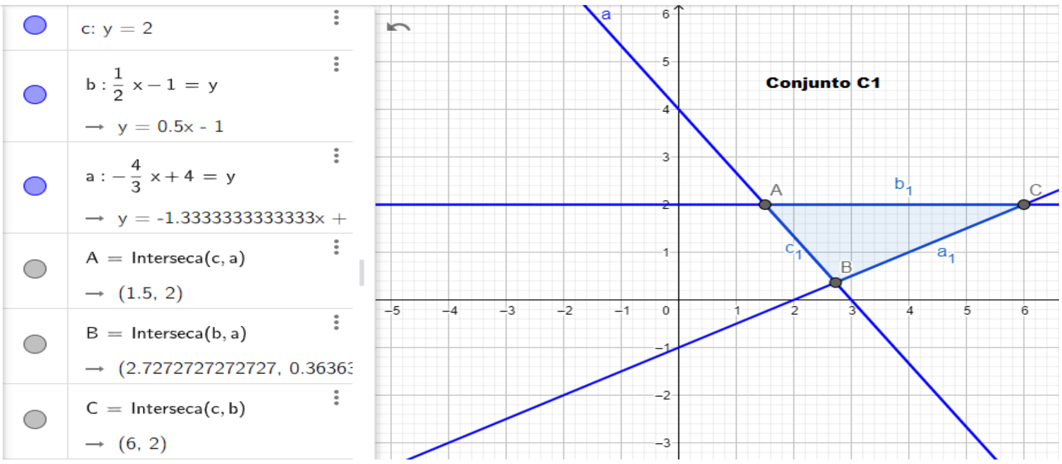
$$\begin{aligned} C_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 | u^T x \leq -3, v^T x \leq 1, w^T x \leq 2\} \\ C_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 | u^T x \leq -3, v^T x \leq 1, w^T x = 2\} \\ C_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 | u^T x \leq -3, v^T x \leq 1, w^T x \geq 2\} \end{aligned}$$

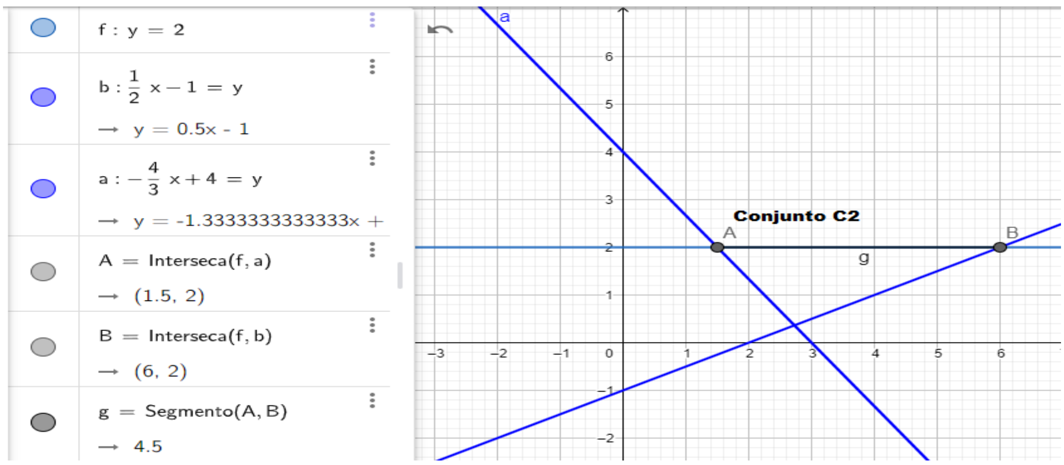
c) Determinar gráficamente el vector x^* que minimiza $c^T x$ en C_1, C_2 y C_3.

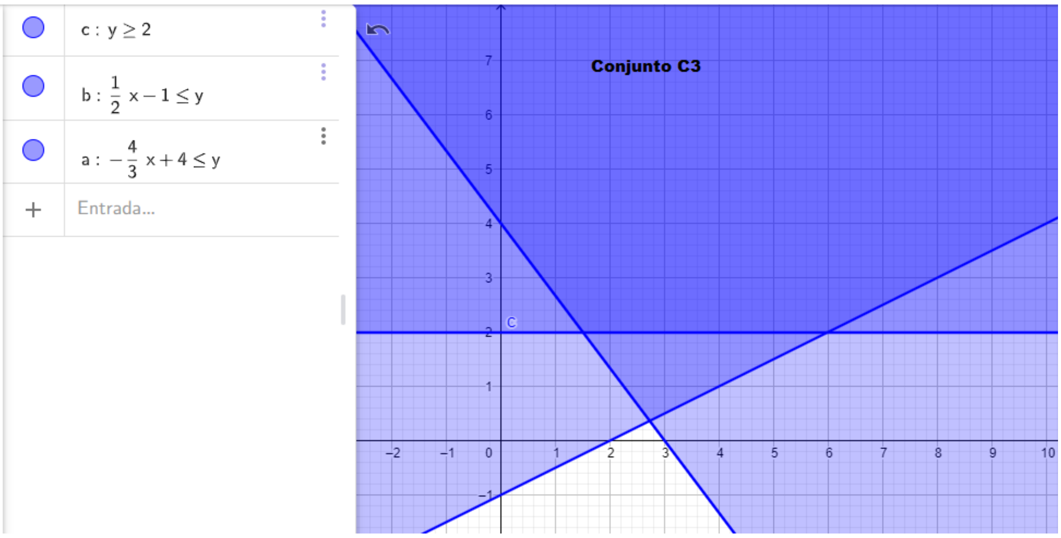
a) .


h0 : −x + 4 y = 1
h1 : −x + 4 y = 2
h2 : −x + 4 y = 4
c = (−1 4)
Entrada...

b) .

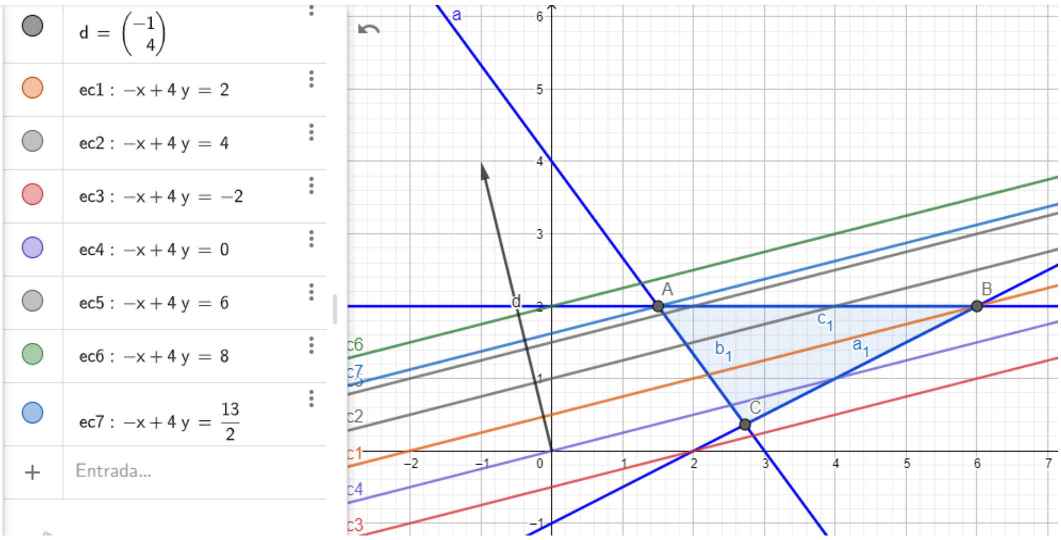

c: y = 2
b : 1/2 x − 1 = y
→ y = 0.5x - 1
a : − 4/3 x + 4 = y
→ y = -1.3333333333333x +
A = Interseca(c, a)
→ (1.5, 2)
B = Interseca(b, a)
→ (2.7272727272727, 0.3636
C = Interseca(c, b)
→ (6, 2)
Conjunto C1


f : y = 2
b : 1/2 x − 1 = y
→ y = 0.5x - 1
a : − 4/3 x + 4 = y
→ y = -1.3333333333333x +
A = Interseca(f, a)
→ (1.5, 2)
B = Interseca(f, b)
→ (6, 2)
g = Segmento(A, B)
→ 4.5
Conjunto C2



El conjunto 1 es un triángulo con vértices A, B y C.
El conjunto 2 es el segmento desde A hasta B.
El conjunto 3 es toda la sombra más azul, encerrada entre las rectas $\frac{x}{2} - 1 = y$, $-\frac{4x}{3} + 4 = y$, con $y \geq 2$.

c) Haciendo el método gráfico, cuando hacemos las curvas de nivel, en C_1 nos queda que $x^* = C = (\frac{30}{11}, \frac{1}{11})$, y tanto en C_2 como en C_3, será el vector $x^* = B = (6, 2)$.

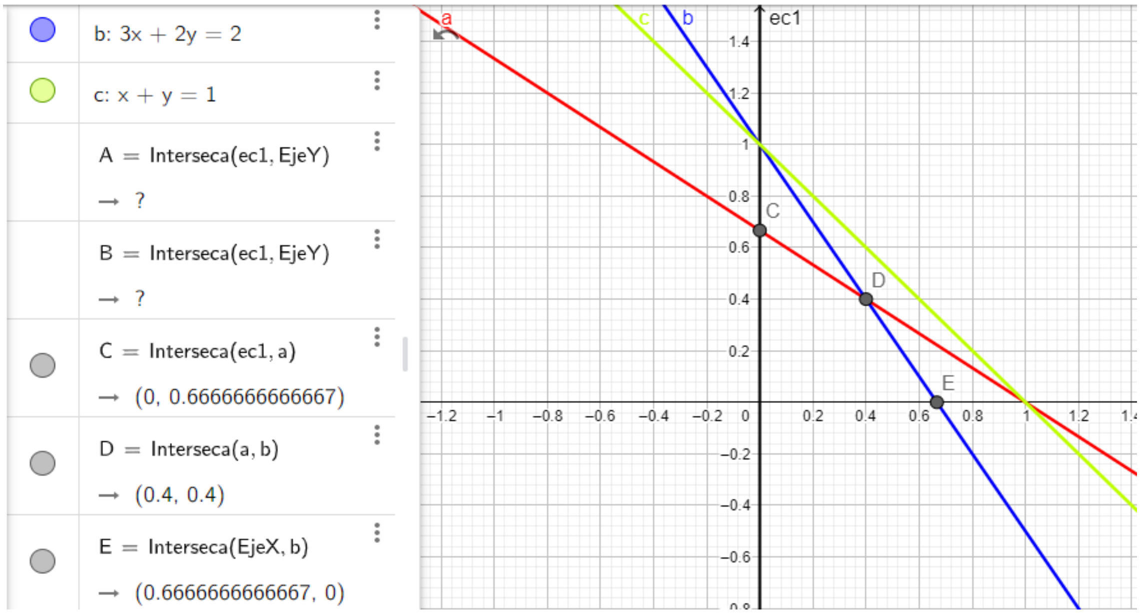


Ejercicio 6

Graficar la región poliedral convexa en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 2 \\ 3x+2y \leq 2 \\ x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cuáles son los vértices de esta región?



Los vértices serán C y D, y a partir de allí, será todo lo que esté por debajo de la recta $3x+2y=2$, con $x \geq 0$.

Ejercicio 7

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \\ x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Escribir este sistema de ecuaciones en la forma estándar y determinar todas las soluciones básicas (factibles e infactibles).

b) Determinar los puntos extremos de la región factible.

Por el teorema 2 de la clase 21, un punto x es punto extremo, si y solo si, es una solución básica factible. Luego, las soluciones factibles que encontremos en el punto (a) nos resuelven el inciso (b).

a) Primero agregamos las variables de holgura para que nos queden las igualdades:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 80 \\ x_1 + x_5 &= 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Con lo que tenemos la matriz A y b que nos definen nuestro problema de programación lineal:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Y por el Teorema Fundamental de Programación Lineal, se tienen a lo sumo $\binom{3}{5} = 10$ soluciones básicas posibles.
A partir de aquí, para encontrarlas todas, tenemos que separar por casos de la siguiente forma: tomaremos 3 columnas de A distintas a la vez, que sabemos serán 10 casos, y cada submatriz formada por esas tres columnas (tomamos tres pues es la cantidad de incógnitas iniciales) la igualamos al vector b. Luego, para saber si son factibles o infactibles, vemos si cumplen nuestras igualdades/desigualdades.
Caso 1:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow Bx_B = b \rightarrow x_B = (40, 40, -20)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (x_B, x_N) = (40, 40, -20, 0, 0)$ (en este caso quedaron acomodados x_B y x_N pero no siempre es así. Lo que sí se mantiene, es que x_N tiene sus coordenadas todas cero), que por ser $x_3 \leq 0$ es infactible, pues $x_3 \geq 0$.

Caso 2:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow Bx_B = b \rightarrow x_B = (40, 20, 20)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (40, 20, 0, 20, 0)$, que por ser $x_1 + x_5 = 20 \neq 40$ es una solución infactible.

Caso 3:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \rightarrow Bx_B = b \rightarrow x_B = (20, 60, 20)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (20, 60, 0, 0, 20)$, que como cumple con todas las igualdades y desigualdades, es una solución factible.

Caso 4:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to \text{No tiene solución única}$$

Luego, no es una solución básica.

Caso 5:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to x_B = (80, 20, 40)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (0, 80, 20, 0, 40)$, que es una solución factible, pues cumple con todas las igualdades y desigualdades.

Caso 6:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to x_B = (100, -20, 40)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (0, 100, 0, -20, 40)$, lo que nos da una solución básica infactible, pues $x_4 = -20 \geq 0$.

Caso 7:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to x_B = (40, 20, 40)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (40, 0, 20, 40, 0)$, que es una solución factible pues cumple las igualdades y desigualdades.

Caso 8:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to x_B = (80, -60, -40)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (80, 0, -60, 0, -40)$, que es una solución infactible, por ser $x_3, x_5 \leq 0$.

Caso 9:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to x_B = (50, 30, -10)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (50, 0, 0, 30, -10)$, que es una solución infactible, pues $x_5 \geq 0$.

Caso 10:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to Bx_B = b \to x_B = (100, 80, 40)$$

Lo que nos da como solución básica a $x = (0, 0, 100, 80, 40)$, que es una solución factible, pues cumple con todas las igualdades y desigualdades.

Ejercicio 8

Un agricultor desea comprar las siguientes cantidades de fertilizantes: fertilizante 1: 185 ton; fertilizante 2: 50 ton; fertilizante 3: 50 ton; fertilizante 4: 200 ton. El agricultor puede comprar estos fertilizantes en 3 comercios A, B y C, siendo la disponibilidad de cada comercio y los costos de los fertilizantes indicados debajo:

Disponibilidad:

	Fert.1	Fert.2	Fert.3	Fert.4
A	70	-	60	150
B	100	30	-	100
C	100	40	35	70

Costo por toneladas:

	Fert.1	Fert.2	Fert.3	Fert.4
A	450	-	300	319
B	425	180	-	350
C	480	200	240	325

¿Cómo el agricultor podría cubrir sus necesidades de fertilizante a un costo mínimo? Resolver usando el método simplex.

En este ejercicio tenemos en total 12 variables, a saber, $(A,B,C)_i, i = 1,2,3$, siendo $(A,B,C)_i$ =cantidad de fertilizante i que compré en el comercio (A,B,C). Sin embargo, dado que no tenemos restricciones entre ellos, es decir, podemos comprar a cualquiera cualquier fertilizante mientras esté disponible, sin que eso afecte nuestra compra con otro comercio. Luego, el problema de minimizar una $f(x)$ con 12 variables (lo cual sería un problema más difícil con método símplex a mano), se desarma en minimizar cuatro funciones $F_i(x)$. Es decir:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & f(x) = minF_1 + minF_2 + minF_3 + minF_4 \\
\text{s.a.} \quad & \text{Restricciones } F_1 \\
& \text{Restricciones } F_2 \\
& \text{Restricciones } F_3 \\
& \text{Restricciones } F_4
\end{aligned}$$

Entonces, tendremos primero (para simplificar notación, usaremos x_i):

$$\begin{array}{rl} \text{min.} & F_1 = 450A_1 + 425B_1 + 480C_1 \\ \text{s.a.} & A_1 + B_1 + C_1 = 185 \\ & A_1 \leq 70 \\ & B_1 \leq 100 \\ & C_1 \leq 100 \\ & (A,B,C)_1 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{estándar}} \begin{array}{rl} \text{min.} & z = 450x_1 + 425x_2 + 480x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 185 \\ & x_1 + x_4 = 70 \\ & x_2 + x_5 = 100 \\ & x_3 + x_6 = 100 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Armamos nuestra tabla como en el ejercicio (9):

-z	450	425	480	0	0	0	0
?	1	1	1	0	0	0	185
?	1	0	0	1	0	0	70
?	0	1	0	0	1	0	100
?	0	0	1	0	0	1	100

Acá tengo $c \geq 0$ pero no tengo 4 pivotes, entonces elijo una solución de $Ax = b$. Como necesito comprar 185 del Fertilizante 1, pero ningún local vende más de 100, tengo que comprar en al menos dos locales. Por ejemplo, elijo B y C que cada uno vende 100. Entonces, como $x_1 + x_2 + x_3 = 185$ y $x_2 = 100, x_3 = 85$, tenemos $x_1 = 0$. Luego, por $x_1 + x_4 = 70$, $x_4 = 70$. Así siguiendo, nos quedan $x_5 = 0, x_6 = 15$. $\therefore$ Nuestras variables básicas serán $x_2, x_3, x_4 y x_6$ y las no básicas $x_1 y x_5$. Ahora, haciendo operaciones elementales por fila, reducimos nuestra pseudomatriz e indicamos los pívots respectivamente:

-z	-30	0	0	0	55	0	-84125
x_3	1	0	1	0	-1	0	85
x_4	1	0	0	1	0	0	70
x_2	0	1	0	0	1	0	100
x_6	-1	0	0	0	1	1	15

Ahora, seguimos como nos dice el algoritmo del método de simplex. Primero, vemos el c_i más negativo, en este caso, el $c_1 = -30$ (que es el único). Segundo, hacemos el test del cociente mínimo, i.e., $\text{mín}\{\frac{81}{1}, \frac{70}{1}\}$. Entonces, nos quedamos con el índice 2. Esto nos dice, en el tercer paso, que cambiamos la variable básica x_4 que está en la fila 2, por la no básica x_1 que está en la columna 1. Ahora, actualizamos nuestra pseudomatriz, pivoteando el lugar $a_{2,1}$: $\rightarrow F_0 + 30F_2, F_1 - F_2, F_0 + F_2$

-z	0	0	0	30	55	0	-82025
x_3	0	0	1	-1	-1	0	15
x_1	1	0	0	1	0	0	70
x_2	0	1	0	0	1	0	100
x_6	0	0	0	1	1	1	85

$\therefore x = (70, 100, 15, 0, 0, 85)$ es la solución básica factible óptima y minimiza la función F_1 en $f(x) = 81200$.

Ahora vamos con F_2:

$$\begin{array}{rl} \text{min.} & F_2 = 180B_2 + 200C_2 \\ \text{s.a.} & B_2 + C_2 = 50 \\ & B_2 \leq 30 \\ & C_2 \leq 40 \\ & (B,C)_2 \geq 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{estándar}} \quad \begin{array}{rl} \text{min.} & z = 0x_1 + 180x_2 + 200x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.a.} & x_2 + x_3 = 50 \\ & x_2 + x_4 = 30 \\ & x_3 + x_5 = 40 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Armamos nuestra tabla:

-z	0	180	200	0	0	0
?	0	1	1	0	0	50
?	0	1	0	1	0	30
?	0	0	1	0	1	40

Como en el caso anterior, no tengo 3 pivotes, con lo cual debemos proponer una solución básica factible inicial. Dado que el vendedor A no tiene el fertilizante 2, $x_1 = 0$. Ahora, elijo por ejemplo, $x_3 = 40$ y $x_2 = 10$. Entonces, $x_4 = 20$ y $x_5 = 0$. Luego, las variables básicas serán $x_2, x_3 y x_4$ mientras que las no básicas serán $x_1 y x_5$. Reduciendo la pseudomatriz con operaciones elementales por filas, nos queda:

-z	0	0	0	0	0	400
x_3	0	0	1	0	1	40
x_2	0	1	0	0	-1	10
x_4	0	0	0	1	1	20

Ahora, como tenemos 3 pívots y $c_i \geq 0$ tenemos nuestra solución básica factible óptima, y está dada por $x = (0, 10, 40, 20, 0)$ y minimiza a F_2 en $f(x) = 9800$.

Ahora vamos con F_3:

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & F_3 = 300A_3 + 240C_3 & & \text{min.} \quad z = 300x_1 + 0x_2 + 240x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{s.a.} \quad & A_3 + C_3 = 50 & & \text{s.a.} \quad x_1 + x_3 = 50 \\
& A_3 \leq 60 & \xrightarrow{\text{estándar}} \quad & \quad x_1 + x_4 = 60 \\
& C_3 \leq 35 & & \quad x_3 + x_5 = 35 \\
& (A, B, C)_3 \geq 0 & & \quad x_i \geq 0
\end{aligned}$$

Armamos nuestra tabla:

-z	300	0	240	0	0	0
?	1	0	1	0	0	50
?	1	0	0	1	0	60
?	0	0	1	0	1	35

Nuevamente, no tenemos 3 pívots, así que propondremos una solución básica factible inicial: dado que no puedo comprar en B, pero A vende 60 y necesito solo 50, compro todo allí. Luego, $x_1 = 50, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 10 y x_5 = 35$. Las que valen 0 son variables no básicas y las demás básicas. Ahora, reducimos por filas la pseudomatriz:

-z	0	0	-60	0	0	0
x_1	1	0	1	0	0	50
x_4	0	0	-1	1	0	10
x_5	0	0	1	0	1	35

Dado que tenemos a $c_3 = -60 < 0$ (columna 3) entonces aplicamos método simplex. Hacemos $\text{mín}\{\frac{50}{1}, \frac{35}{1}\}$ con lo cual nos quedamos con el índice 3. Luego, cambiamos la variable básica x_5 por la no básica x_3 y pivoteamos el lugar $a_{3,3}$. $\rightarrow F_0 + 60F_3, F_2 + F_3, F_1 - F_3$

-z	0	0	0	0	60	2100
x_1	1	0	0	0	-1	15
x_4	0	0	0	1	1	45
x_3	0	0	1	0	1	35

Ahora, dado que $c \geq 0$, tenemos ya nuestra solución básica factible óptima, dada por $x = (15, 0, 35, 45, 0)$ y minimiza a F_3 en $f(x) = 12900$.

Finalmente, vamos con F_4:

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & F_4 = 319A_4 + 350B_4 + 325C_4 \\
\text{s.a.} \quad & A_4 + B_4 + C_4 = 200 \\
& A_4 \leq 150 \\
& B_4 \leq 100 \\
& C_4 \leq 70 \\
& (A,B,C)_4 \geq 0
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{estándar}} \quad
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & z = 319x_1 + 350x_2 + 325x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\
& x_1 + x_4 = 150 \\
& x_2 + x_5 = 100 \\
& x_3 + x_6 = 70 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}$$

Armamos nuestra tabla:

-z	319	350	325	0	0	0	0
?	1	1	1	0	0	0	200
?	1	0	0	1	0	0	150
?	0	1	0	0	1	0	100
?	0	0	1	0	0	1	70

Nuevamente, no tenemos pivoteadas 4 variables, así que propondremos una solución básica factible inicial. $x_1 = 150, x_2 = 50, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 50, x_6 = 70$, donde las variables no básicas son las nulas y las demás básicas. Reducimos por filas y obtenemos:

-z	0	0	-25	31	0	0	-15950
x_2	0	1	1	-1	0	0	50
x_1	1	0	0	1	0	0	150
x_5	0	0	-1	1	1	0	50
x_6	0	0	1	0	0	1	70

No obstante, tenemos a $c_3 = -25 <=$ (columna 3), entonces aplicamos simplex. Hacemos $\text{mín}\{\frac{50}{1}, \frac{70}{1}\}$ entonces elegimos el índice 1 (fila 1). Luego, cambiamos la variable básica x_2 por la no básica x_3. Pivoteamos el lugar $a_{1,3}$ y nos queda:

-z	0	25	0	6	0	0	-14700
x_3	0	1	1	-1	0	0	50
x_1	1	0	0	1	0	0	150
x_5	0	1	0	0	1	0	100
x_6	0	-1	0	1	0	1	20

Como ahora $c \geq 0$, tenemos la solución básica factible óptima, dada por $x = (150, 0, 50, 0, 100, 20)$, que minimiza F_4 en $f(x) = 64100$.

Concluyendo el ejercicio, tendremos que:

- Deberá comprar del fertilizante 1, 70ton en A, 100ton en B y 15ton en C.
- Del fertilizante 2, nada en A, 10ton en B y 40ton en C.
- Del fertilizante 3, 15ton en A, nada en B y 35ton en C.
- Del fertilizante 4, 150ton en A, nada en B y 50ton en C.

Y el precio final, que está minimizado, es de $f(x) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 81200 + 9800 + 12900 + 64100 = 168000$.

Ejercicio 9

Una compañía minera produce 100 toneladas de mineral rojo y 80 toneladas de mineral negro cada semana. Estos pueden tratarse en diferentes formas para producir tres diferentes aleaciones: **frágil, poco frágil y resistente**. Para producir 1t de aleación frágil se necesitan 5t de mineral rojo y 3t de negro, para la poco frágil se requieren 3t de rojo y 5t de negro mientras que para la resistente se requieren 5t de rojo y 5t de negro. Las ganancias que se obtiene de sus ventas son $C250, $C300 y $C400 para el frágil, poco frágil y resistente, respectivamente.
Encontrar la producción semanal de aleaciones que maximiza las ganancias.

Primero planteamos nuestro problema. A saber, la función que queremos maximizar, que son las ganancias, está dada por: $z' = 250x_1 + 300x_2 + 400x_3$, donde x_i =cantidad de toneladas de frágil, poco frágil y resistente respectivamente. Ahora, como queremos maximizar z' es lo mismo que minimizar $z = -z'$.
Por otro lado, dada la naturaleza del problema, tendremos que cada $x_i \geq 0$ y las restricciones: $5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 100$ y $3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 80$. En resumen, tendremos:

$$\begin{array}{rl} \text{min.} & z = -250x_1 - 300x_2 - 400x_3 \\ \text{s.a.} & 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 100 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 80 \\ & x_i \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{estándar}} \begin{array}{rl} \text{min.} & z = -250x_1 - 300x_2 - 400x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.a.} & 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 100 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_5 = 80 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Ahora armamos una tabla que funcionará como una matriz, la cual contendrá nuestra información del problema estándar, a saber, la matriz A de las restricciones, el vector b al que está igualado, el vector de costos c y nuestras variables básicas, en este caso, x_4 y x_5:

-z	-250	-300	-400	0	0	0
x_4	5	3	5	1	0	100
x_5	3	5	5	0	1	80

Ahora, nuestro método símplex va por pasos. El **primer paso**, es comprobar que algún c_i es decir, alguna coordenada del vector c sea negativa. En caso de que haya alguna, elegimos la más negativa, en este caso, será la coordenada $c_3 = -400$. En realidad, lo que hacemos aquí, es primero elegir la columna (en este caso la columna 3), para luego elegir la fila, en la que cambiaremos una variable básica por una no básica, hasta que nuestro vector c tenga todas coordenadas no negativas, siempre y cuando, el vector b se mantenga no negativo.

El **segundo paso** es el test de cociente mínimo, que consiste en determinar el índice s tal que $\frac{b_s}{a_{s,t}} = \text{mín}_{1\leq i\leq 2}\{\frac{b_i}{a_{i,t}}|a_{i,t} > 0\}$. En este caso, tendremos que $\{\frac{100}{5}, \frac{80}{5}\} = \frac{80}{5}$ con lo cual, el índice es 2. Es decir, tomamos la fila 2. Ahora, cambiamos el pívot, i.e., x_3 (por estar en la columna 3) pasa a ser básica, x_5 (por estar en la fila 2) pasa a ser no básica.

Luego, el **tercer paso** es actualizar en la table nuestras nuevas variables básicas x_B y nuestra matriz B que está conformada por las columnas de los pívots, ahora serían la columna 3 y 5 (básicamente, tenemos que hacer 0 los elementos de la columna 3 por encima de la fila 2, para que efectivamente sea un pívot):

$\xrightarrow{F_0+80F_2,\, F_1-F_2,\, \frac{F_2}{5}}$

-z	-10	100	0	0	80	6400
x_4	2	-2	0	1	-1	20
x_3	$\frac{3}{5}$	1	1	0	$\frac{1}{5}$	16

Nuevamente, volvemos a repetir los pasos:

1. Tomamos $c_1 = -10$, pues es la única coordenada negativa. Entonces, nos quedamos con la columna 1.
2. Vemos el $\text{mín}\{\frac{20}{2}, \frac{16}{\frac{3}{5}}\} = \frac{20}{2}$. Entonces, nos quedamos con la fila 1.
   Por lo tanto, cambiamos la variable básica x_4 por la no básica x_1, y nuevamente actualizamos x_B y B con el nuevo pívot que es x_1 en el lugar $a_{1,1}$:
3. Lo hacemos con el orden puesto en la flehca en ambos casos:
   $\xrightarrow{F_0+5F_1,\, \frac{F_1}{2}\, F_2-\frac{3}{5}F_1}$

-z	0	90	0	5	75	6500
x_1	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10
x_3	0	$\frac{8}{5}$	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	10

Ahora, se acaba el algoritmo, pues todos los c_i son no negativos, al igual que nuestro b. Y por nuestro test de optimalidad, es la solución óptima. ($Bx_B = b$ nos dice cuánto vale x_B)
Finalmente, $c^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (10, 0, 10, 0, 0)$ y $-z = 10\cdot 250+0\cdot 300+10\cdot 400 = 6500$ es la ganancia. Concluimos entonces, que se deben producir 10 toneladas de producto frágil (x_1), 10 toneladas de producto resistente (x_3) y nada del producto poco frágil (x_2).
Como comentario, interpretamos las variables de holgura y exceso como lo que no compramos o lo que compramos de más.

Además, para tener en cuenta, podría no habernos quedado nuestra matriz B como la identidad. En ese tipo de casos, hacemos lo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{16}$$

(por si no nos aparece justo la matriz identidad)

$B \longrightarrow$ matriz básica $\longrightarrow x_B = [x_1, x_2]$

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 5/16 & -3/16 \\ -3/16 & 5/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/8 & 5/16 & -3/16 \\ 0 & 1 & 5/8 & -3/16 & 5/16 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/16 & -3/16 \\ -3/16 & 5/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65/4 \\ 25/4 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -250 & -300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16} = \begin{pmatrix} -\frac{350}{16} & -\frac{750}{16} \end{pmatrix} \longrightarrow c_B^T B^{-1} b = 100\left(-\frac{350}{16}\right) + 80\left(-\frac{750}{16}\right) = \underbrace{-5937{,}5}_{\hat{z}}$$

$-z$	0	0	$\hat{c}_N^T$			5937,5
x_1	1	0	5/8	5/16	-3/16	65/4
x_2	0	1	5/8	-3/16	5/16	25/4
variables básicas	$\hat{A}$					$\hat{b}$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

$$C^T = (\underbrace{-250 \quad -300}_{c_B^T} \quad \underbrace{-400 \quad 0 \quad 0}_{c_N^T})$$

$$c_B^T B^{-1} = \left(-\frac{350}{16}, -\frac{750}{16}\right)$$

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{350}{16} & -\frac{750}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(-343{,}75 \,|\, -21{,}875 \,|\, -46{,}875\right)$$

$$\hat{c}_N^T = (-400 \quad 0 \quad 0) - (-343{,}75 \,|\, -21{,}875 \,|\, -46{,}875) = (-56{,}25 \quad 21{,}875 \quad 46{,}875)$$

$-z$	0	0	$\hat{c}_N^T$	$\hat{z}$
x_B	1	0	$\hat{N}$	$\hat{b}$
	0	1		

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \qquad \hat{z} = c_B^T B^{-1} b$$

$$\hat{N} = B^{-1} N \qquad \hat{b} = B^{-1} b$$

$-z$	0	0	-56.25	21.875	46.875	5937.5
x_1	1	0	5/8	5/16	-3/16	65/4
x_2	0	1	5/8	-3/16	5/16	25/4

Ejercicio 10

Una dietética vende tres tipos de barras de cereal: **masticable, crocante y almendrada**. Las barras se hacen mezclando semillas, pasas y almendras. Las especificaciones son dadas por la siguiente tabla:

Mezcla	Semillas	Pasas	Almendras	Precios/kg
Masticable	-	al menos 60 %	a lo sumo 25 %	\$C16
Crocante	al menos 60 %	-	-	\$C12
Almendrada	a lo sumo 20 %	-	al menos 60 %	\$C20

Los proveedores pueden entregar semanalmente a lo sumo 100kg de semillas a \$C10/kg, 80kg de pasas a \$C15/kg y 60kg de almendras a \$C20/kg. Suponiendo que toda la producción se vende, formular el problema de hallar el esquema de producción que maximice la ganancia semanal.

El ejercicio nos pide maximizar la ganancia. Ahora bien, la ganancia está determinada por la diferencia entre los ingresos y los gastos. Dado que nos pide maximizar la ganancia, es lo mismo que minimizar la diferencia entre gastos e ingresos, i.e., en este caso en particular, tendremos:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 10(x_1 + x_2) + 15x_3 + 20(x_4 + x_5) - (16M + 12C + 20A) \\
\text{sujeto a} \quad & x_1 - \tfrac{60}{100}C \geq 0 \\
& x_2 - \tfrac{20}{100}A \leq 0 \\
& x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_3 - \tfrac{60}{100}M \geq 0 \\
& x_3 \leq 80 \\
& x_4 - \tfrac{25}{100}C \leq 0 \\
& x_5 - \tfrac{60}{100}A \geq 0 \\
& x_4 + x_5 \leq 60 \\
& x_i \geq 0, (A, M, C) \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde x_1 es la cantidad de kilos de semillas en kilos de las barritas crocantes, x_2 la cantidad de kilos de semillas en kilos de las barritas de almendrado, x_3 la cantidad de kilos de pasas en kilos de las barritas masticables, x_4 la cantidad de kilos de almendras en kilos de barritas masticables y x_5 la cantidad de kilos de almendras en kilos de barritas almendradas. Mientras que A, M y C representan la cantidad de kilos de las barritas almendradas, masticables y crocantes respectivamente. Es bastante largo, así que lo corrí en Python y me dio $x = (100, 0, 80, 0, 60)$ y $(M, C, A) = (\frac{400}{3}, \frac{500}{3}, 100)$.