Análisis Numérico I - Práctico 5

Matias Sticca

24 de junio de 2021

Ejercicio 1

Usando interpolación polinomial deducir la regla de Simpson calculando

$$I(p_2) = \int_a^b p_2(x)dx$$

donde p_2 es el polinomio que interpola a f en los puntos x_0 = a, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y x_2 = b

Primero que nada, escribimos a p_2:

$$\sum_{i=0}^{2} f(x_i)l_i(x)$$

Luego, si hacemos la integral, nos queda:

$$I(p_2) = \int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{2} f(x_i)l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx \tag{1}$$

Y ahora resolvemos cada integral sobre los $l_i(x)$:

$$\int_a^b l_0(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}dx = \int_a^b \frac{(x-\frac{a+b}{2})}{(a-\frac{a+b}{2})}\frac{(x-b)}{(a-b)}dx = \frac{b-a}{6}$$

$$\int_a^b l_1(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}dx = \int_a^b \frac{(x-a)}{(\frac{a+b}{2}-a)}\frac{(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-b)}dx = \frac{2}{3}(b-a)$$

$$\int_a^b l_2(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}dx = \int_a^b \frac{(x-a)}{(b-a)}\frac{(x-\frac{a+b}{2})}{(b-\frac{a+b}{2})}dx = \frac{b-a}{6}$$

Con lo cual, (1) nos termina quedando:

$$f(a)\frac{b-a}{6} + f(\frac{a+b}{2})\frac{2}{3}(b-a) + f(b)\frac{b-a}{6} = (\frac{b-a}{6})[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Que es la regla de Simpson.

Ejercicio 2

La función f se define en el intervalo $[0,1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & si \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Calcular los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar $\int_0^1 f(x)dx$:

a) La regla del trapecio sobre el intervalo [0, 1].

b) La regla del trapecio, primero sobre el intervalo $[0,\frac{1}{2}]$ y luego sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

c) La regla de Simpson sobre el intervalo [0, 1].

d) ¿Qué se puede concluir de los resultados obtenidos en los tres items anteriores?

Tenemos que las reglas son:

Regla	Fórmula
Trapecio	$\frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$
Simpson	$\frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

Entonces,

a) Tendremos que:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{(1-0)}{2}[f(0)+f(1)]$$

i.e., $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[0+0] = 0$

b) Ahora, partimos el intervalo al medio:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \approx \frac{(\frac{1}{2}-0)}{2}[f(0)+f(\frac{1}{2})] + \frac{(1-\frac{1}{2})}{2}[f(\frac{1}{2})+f(1)]$$

i.e., $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4}[0+\frac{1}{2}] + \frac{1}{4}[\frac{1}{2}+0] = \frac{1}{4}$

c) Finalmente, con Simpson sin partir el intervalo:

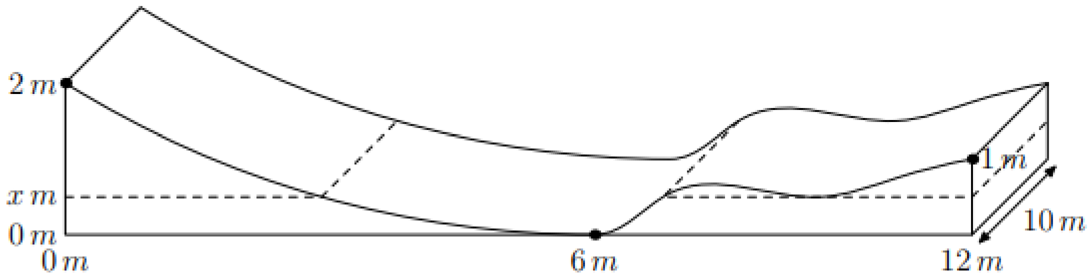
$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{(1-0)}{6}[f(0)+4f(\frac{0+1}{2})+f(1)]$$

i.e., $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}[0+4\frac{1}{2}+0] = \frac{1}{3}$

d) Sabemos que la integral de $f(x)$ es exactamente $\frac{1}{4}$ pues forma un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{2}$ con lo cual, la fórmula de su área, que es $\frac{base.altura}{2}$ nos da efectivamente $\frac{1}{4}$. Luego, podemos concluir que la mejor forma de aproximar integrales definidas por partes es aplicar la regla que sea pero por intervalos.

Ejercicio 3

Se desea emparejar el siguiente terreno de $12metros \times 10metros$:



a) Usando la regla de Simpson, dar una estimación de los metros cúbicos de tierra que posee el terreno.

b) Estimar la altura x que tendrá el terreno si lo emparejamos sin remover nada de tierra.

a) De acuerdo con el dibujo podemos saber tres puntos de nuestra función, a saber: $f(0m) = 2m$ $f(6m) = 0m$ $f(12m) = 1m$. Luego, por la regla de Simpson, tendremos que el área del terreno, es decir, la integral numérica de estos puntos, multiplicada por la profundidad, nos dará el volumen del terreno:

$$V = \int_{0m}^{12m} f(x)dx \times 10m = \frac{12m}{6}(f(0m)+4f(6m)+f(12m)) \times 10m = 6m^2 \times 10m = 60m^3$$

Entonces, hay aproximadamente $60m^3$.

b) Ahora, para emparejar, sabemos que no cambia la cantidad de tierra, solo cambia la forma, con lo cual será el mismo volumen, solo que cambiará la altura. Entonces, tendremos:

$$V_{noparejo} = V_{parejo} \Rightarrow 60m^3 = 12m \times x \times 10m$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}m$$

Luego, la altura del terreno emparejado, será de $\frac{1}{2}m$.

Ejercicio 4

a) Construir una regla de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-0{,}5) + A_2 f(0) + A_3 f(0{,}5)$$

que sea exacta en los polinomios de grado menor igual que 2.

b) Determinar el grado de precisión de la fórmula para:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{4}{3} f(-0{,}5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0{,}5)$$

a) Bien, para encontrar la fórmula de manera tal que sea exacta para polinomios de grado menor igual que 2, tenemos que plantear lo siguiente:
Por definición,

$$\int_{-1}^{1} 1dx = A_1(1) + A_2(1) + A_3(1)$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = A_1(-0{,}5) + A_2(0) + A_3(0{,}5)$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = A_1(0{,}25) + A_2(0) + A_3(0{,}25)$$

Es decir, tendremos tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\ -0{,}5A_1 + 0{,}5A_3 = 0 \\ 0{,}25A_1 + 0{,}25A_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

De lo cual, tendremos que:

$$A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = -\frac{2}{3}, A_3 = \frac{4}{3}$$

Entonces, la fórmula será:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{4}{3} f(-0{,}5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0{,}5)$$

b) Ahora, para determinar el grado de precisión de la fórmula dada, veremos si las integrales de x^k son iguales a la aproximación hasta algún $k \in \mathbb{N}$.

Por construcción, sabemos que tiene al menos precisión 2. Veamos si tiene más que eso:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = \frac{4}{3} f(-0{,}5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0{,}5)$$

Luego, también tiene al menos precisión de grado 3. Veamos si tiene de grado 4:

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$$

Pero por otro lado,

$$\frac{4}{3} f(-0{,}5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0{,}5) = \frac{1}{6}$$

Y obviamente, $\frac{2}{5} \neq \frac{1}{6}$.

Entonces, tiene precisión de exactamente grado 3.

Ejercicio 5

¿Para cuáles polinomios son exactas las reglas de integración del rectángulo, del trapecio, del punto medio y de Simpson?
Por el teórico:

Regla	Grado de precisión
Rectángulo	0
Punto medio	1
Trapecio	1
Simpson	3

Ejercicio 6

Determinar el número de subintervalos n de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-6}$, suponiendo que e^{-x^2} se puede calcular de manera precisa.
Repetir este ejercicio para la Regla de Simpson compuesta.

Sabemos por el teórico que el error por el método de trapecio compuesto de f es:

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

Como nuestro intervalo es $[0,1]$ y nuestra $f(x) = e^{-x^2}$, tomando módulo, nos quedará:

$$|E(f)| = \frac{1}{12}h^2 2e^{-\mu^2}|(2\mu^2 - 1)|$$

Ahora, partiendo de la desigualdad $0 < \mu < 1$ podremos acotar la segunda derivada de nuestra función: $\quad |2\mu^2 - 1| < 1 \quad$ y $\quad e^{-1} < e^{-\mu^2} < 1$. Entonces:

$$E(f) \leq \frac{h^2}{12} \leq \frac{10^{-6}}{2}$$

De lo cual, obtenemos que como $h = \frac{1}{n}$, entonces $n > 578$.

Ahora, para la Regla de Simpson compuesta, el error está dado por:

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$$

Y sabemos que nuestra $f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$.
Es obvio que $4e^{-1} < 4e^{-\mu^2} < 4$. Por otro lado, para acotar el polinomio con módulo, aplicamos desigualdad triangular:

$$|4x^4 - 12x^2 + 3| \leq 4x^4 + |-12|x^2 + 3 = 4x^4 + 12x^2 + 3$$

Entonces, usando esto y que $0 < \mu < 1$ tendremos que $f^{(4)}(\mu) \leq 19 \cdot 4 = 76$.
Finalmente, nos queda que:

$$E(f) \leq \frac{h^4}{180} 76 \leq \frac{1}{2} 10^{-6}$$

Y esto vale para $n > 30$.
Para obtener un n más acotado, podemos calcular la derivada de la parte polinómica para ver que es decreciente, entonces el máximo del valor absoluto se encuentra en los extremos y determinar que $|f^{(4)}(x)| \leq 20$ o bien calcular los máximos y mínimos de $f^{(4)}$ viendo los ceros de $f^{(5)}$ (toma varias cuentas pero se reduce a encontrar ceros de un polinomio) y determinar que $|f^{(4)}(x)| \leq 12$, de manera que obendríamos $n > 21$ o $n > 19$ respectivamente.

Ejercicio 7

Un automóvil recorre una pista de carreras en 24 segundos. Su velocidad se determina cada 6 segundos mediante una pistola de radar y está dada, en metros/segundos [m/s], desde el principio del recorrido, por los datos de la siguiente tabla:

Tiempo	0	6	12	18	24
Velocidad	38	41	46	48	45

¿Cuál es la longitud aproximada de la pista?
Ayuda: Usar la regla del trapecio y recordar que $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ donde $v(t)$ y $x(t)$ son la velocidad y posición al tiempo t.

La regla de trapecio compuesta nos dice lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)],\ con\, h = \frac{(b-a)}{n}$$

En este caso, $f(x) = v(t)$ pues $\int_0^t v(s)ds = x(t)$, y en particular, lo que queremos averiguar es $x(24s)$, i.e., $\int_0^{24} v(s)ds$.
Reemplacemos la integral con la regla mencionada anteriormente:

$$\int_0^{24} v(s)ds \approx \frac{6}{2}[v(0s) + 2\sum_{j=1}^{4-1} v(t_j) + f(24s)] = 1059m$$

Por lo tanto, la longitud de la pista será aproximadamente 1059 metros.

Ejercicio 8

Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

Que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 5. Aplicar la regla a la función $f(x) = cos(x)$ y comparar con el valor real de la integral.
Aclaración: Se puede utilizar calculadora para comparar los resultados. Recordar utilizar radianes.

CUADRATURA GAUSSIANA

Intervalo $[a,b]$, peso $\omega(x)$. Busco precisión $N = 2n+1 \Rightarrow \frac{N-1}{2} = n$

1
$x + a$
$x^2 + bx + c$
$x^3 + \ldots$

① Construyo $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n+1}$ ortogonales, tales que $gr(\phi_k) = k$

② Calculo las raíces de ϕ_{n+1}. $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$

③ Construir $l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ $\quad i = 1, \ldots, n+1$

④ Calculamos $A_i = \int_a^b l_i(x)\, \omega(x)\, dx$

⑤ La regla es $I(f) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(x_i)$

raíces de ϕ_{n+1}

El teorema 1 de
me dice que este m
da una regla de c
con precisión al men 2

Con lo anterior, seguiremos el ejercicio, recalcando que en este caso, $n = 2$, pues $N = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

1. Polinomios Ortogonales: Usaremos los de Legendre, y podemos usarlos porque estamos en I=[-1,1], la función peso $\omega = 1$ y $gr(\phi_k) = k$, entonces son ortogonales. Además, son los siguientes:

$$\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x,\ \phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},\ \phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

2. Calculamos las raíces del polinomio n+1, en este caso, el último:

$$\phi_3(x) = x \cdot (x^2 - \frac{3}{5}) = x \cdot (x - \sqrt{\frac{3}{5}}) \cdot (x + \sqrt{\frac{3}{5}})$$

Luego, $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

3. Ahora, construimos los l_1, l_2 y l_3:

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-\sqrt{\frac{3}{5}})}{(-\sqrt{\frac{3}{5}}-0)(-\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}})} = \frac{5}{6}(x^2-\sqrt{\frac{3}{5}}x)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+\sqrt{\frac{3}{5}})(x-\sqrt{\frac{3}{5}})}{(0+\sqrt{\frac{3}{5}})(0-\sqrt{\frac{3}{5}})} = -\frac{5}{3}(x^2-\frac{3}{5})$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+\sqrt{\frac{3}{5}})(x-0)}{(\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{3}{5}})(\sqrt{\frac{3}{5}}-0)} = \frac{5}{6}(x^2+\sqrt{\frac{3}{5}}x)$$

4. Calculo $A_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)\cdot 1dx$:

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}(x^2-\sqrt{\frac{3}{5}}x)dx = \frac{5}{9}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} -\frac{5}{3}(x^2-\frac{3}{5})dx = \frac{8}{9}$$

$$A_3 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}(x^2+\sqrt{\frac{3}{5}}x)dx = \frac{5}{9}$$

5. Finalmente, podemos concluir que la siguiente regla tiene precisión de al menos grado 5:

$$\int_{1}^{-1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

Lo probaremos para $f(x) = cos(x)$:

$$\int_{-1}^{1} cos(x)dx \approx \frac{5}{9}cos(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}cos(0) + \frac{5}{9}cos(\sqrt{\frac{3}{5}}) \approx 1,683003548$$

Mientras que el valor exacto, es aproximadamente de $1,68294197$.

Ejercicio 9

Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2 dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2 dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.
Ayuda: Utilizar el ejercicio 11 del práctico 4.

Este ejercicio se resuelve de manera análoga al anterior, solo que en este caso, usaremos otros polinomios ortogonales en I = [-1,1] respecto a $\omega(x) = x^2$, y como $N = 3 = 2\cdot 1 + 1$ entonces $n = 1$.

1. Polinomios Ortogonales: Usaremos los que conseguimos en el Práctico 4, ejercicio 11, a saber:
$$\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x,\ \phi_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}$$
2. Calculamos las raíces de $\phi_2(x)$:
$$\phi_2(x) = (x - \sqrt{\frac{3}{5}}) \cdot (x + \sqrt{\frac{3}{5}})$$
Entonces $x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.
3. Construimos los l_i:
$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x + \sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt{15}}{6}(x + \sqrt{\frac{3}{5}})$$
$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - \sqrt{\frac{3}{5}}}{-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}} = -\frac{\sqrt{15}}{6}(x - \sqrt{\frac{3}{5}})$$
4. Calculamos los A_i:
$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{15}}{6}(x + \sqrt{\frac{3}{5}})x^2 dx = \frac{1}{3}$$
$$A_2 = \int_{-1}^{1} -\frac{\sqrt{15}}{6}(x - \sqrt{\frac{3}{5}})x^2 dx = \frac{1}{3}$$
5. Finalmente, tenemos nuestra regla de al menos precisión 3:
$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2 dx \approx \frac{1}{3} f(\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{1}{3} f(-\sqrt{\frac{3}{5}})$$