ALGEBRA DE BOOLE

AXIOMAS Y POSTULADOS BÁSICOS

Elementos Básicos

- Sea B un conjunto de elementos:
- B={a, b, c,…} y el conjunto {0, 1}
- Sea ϕ un conjunto de operaciones en B con resultados en {0, 1} :
- ϕ= {+, ., ‘}
- Estos elementos conforman un álgebra de Boole si satisfacen los siguientes axiomas:

AXIOMAS

- Clausura:
  - Si a $\in B$ y b $\in B$, entonces a+b $\in B$, a.b $\in B$
- Axioma del 0:
  - $\exists\ 0\ \in B\ tal\ que\ a + 0 = a$, para todo a $\in B$
- Axioma del 1:
  - $\exists\ 1\ \in B\ tal\ que\ a.1 = a$, para todo a $\in B$
- Conmutatividad:
  - a+b= b+a a.b = b.a, para todo a,b, en B.

Axiomas (continuación)

- Distributividad de “+” respecto a “.”
  - $\forall\, a, b, c \in B, a + (b.c) = (a + b).(a + c),$
- Distributividad de “.” respecto a “+”
  - $\forall\, a, b, c \in B, a.(b + c) = (a.b) + (a.c),$

Axiomas (continuación)

- Axioma Inverso:
  - Sea a $\in B$, entonces existe a' tal que: $a + a' = 1 \;\; a.a' = 0$
- Cardinalidad:
  - $|B| \geq 2,$

Teoremas, Idempotencia, (Primera parte)

- a.a = a ¿?
- $a.a = a.a + 0$, Axioma del 0
- $a.a = a.a + a.a'$, Axioma del Inverso
- $a.a = a.(a + a')$, Distributividad
  $a.a = a.1$, Axioma del inverso
- $a.a = a$, Axioma del 1

Teoremas, Idempotencia, (Segunda parte)

- a+a = a ¿?
- $a + a = a + a\,.\,1$, Axioma del 1
- =$(a + a).\,(a + a')$, Axioma del Inverso
- $a + a = a + (a.\,a')$, Distributividad
- $a + a\ = a +\ 0$, Axioma del inverso
- $a + a = a$, Axioma del 0

Teoremas, propiedad del 0

- a.0=0 ¿?
- $a.0 = a.0 + 0$, Axioma del 0
- $= a.0 + a.a'$, Axioma del Inverso
- $= a.(0 + a')$, Distributividad
- $= a.a'$, Axioma del 0
- $= 0$, Axioma del inverso

Teoremas, propiedad del 1

- a+1=1 ¿?
- $a + 1 = a + 1\,.\,1$, Axioma del 1
- $= a + 1\,.\; a + a'$, Axioma del Inverso
- $= a + \;(1\,.\,a'\,)$, Distributividad
- $= a + a'$, Axioma del 1
- $= 1,$ Axioma del inverso

Teoremas, Unicidad del Inverso

- Sean a, a_1 y a_2 tales que: $a+a_1 = 1$, $a.a_1=0$, $a+a_2=1$, $a.a_2=0$, entonces $a_1=a_2$. En efecto:

Teoremas, Unicidad del Inverso

- $a2 = a2 \,.\, 1,$ axioma del 1
- $a2 = a2 \,.\, (a + a1),$ hipótesis
- $a2 = a2 \,.\, a \ + a2 \,.\, a1,$ Distr.
- $a2 = 0 \ + a2 \,.\, a1,$ hipótesis
- $a2 = a.\, a1 \ + a2 \,.\, a1,$ hipótesis
- $a2 = \ a1 \,.\, (a + a2)$ Distr.
- $a2 = \ a1 \,.\, 1$ Hipot.
- $a2 = \ a1$ Tesis

Teoremas, absorción, parte 1

- $a + a\,.\,b = a,$ ¿?
- $a + a\,.\,b = a\,.1 + a\,.\,b\,,$ Ax. del 1
- $a + a\,.\,b = a\,.\,1 + \ b\,,$ Distrib.
- $a + a\,.\,b = a\,.\,1\,,$ Prop. Del 1
- $a + a\,.\,b = a\,,$ Ax. del 1

Teoremas, absorción, parte 2

• $a \,.\, a + b = a,$	¿?
• $= a + 0 \,.\, a + b\,,$	Ax. del 0
• $= a + 0 \,.\, b\,,$	Distrib.
• $= a + 0\,,$	Prop. Del 0
• $= a\,,$	Ax. del 0

Leyes de De Morgan

- Leyes de De Morgan
-
- $(a+b)' = a'.b'$
-
- $(a.b)' = a' + b'$
- Ejercicio:
-
- Demostrar las leyes de De Morgan.