3 Minimización en el nivel de compuertas

3-1 EL MÉTODO DEL MAPA

La complejidad de las compuertas de lógica digital que implementan una función booleana está relacionada directamente con la complejidad de la expresión algebraica a partir de la cual se implementa la función. Aunque la representación de una función como tabla de verdad es única, hay muchas formas de expresarla algebraicamente. Las expresiones booleanas se simplifican algebraicamente como se explicó en la sección 2-4, pero este procedimiento de minimización resulta poco práctico porque carece de reglas específicas que predigan cada paso sucesivo del proceso de manipulación. El método del mapa ofrece un procedimiento sencillo y directo para minimizar las funciones booleanas. Este método podría considerarse como una versión pictórica de la tabla de verdad. El método del mapa también se conoce como mapa de Karnaugh o mapa K.

El mapa es un diagrama hecho de cuadrados, cada uno de los cuales representa un minitérmino de la función. Puesto que cualquier función booleana se puede expresar como una suma de minitérminos, toda función booleana se reconocerá gráficamente en el mapa por el área delimitada por los cuadrados cuyos minitérminos están incluidos en la función. De hecho, el mapa presenta un diagrama visual de todas las maneras en que una función se puede expresar en forma estándar. Al reconocer diversos patrones, el usuario puede deducir expresiones algebraicas alternas para la misma función, y luego escoger la más simple.

Las expresiones simplificadas generadas por el mapa siempre están en una de las dos formas estándar: suma de productos o producto de sumas. Supondremos que la expresión algebraica más simple es la que tiene menos términos y el mínimo posible de literales en cada término. Esto produce un diagrama de circuito con el mínimo de compuertas y el mínimo de entradas a cada compuerta. Más adelante se verá que la expresión más simple no es única. Hay ocasiones en que es posible encontrar dos o más expresiones que satisfagan los criterios de minimización. En esos casos, cualquiera de las soluciones es satisfactoria.

Mapa de dos variables

En la figura 3-1a) se presenta el mapa de dos variables. Hay cuatro minitérminos para dos variables; por tanto, el mapa consiste en cuatro cuadrados, uno para cada minitérmino. En b) se ha redibujado el mapa de modo que muestre la relación entre los cuadrados y las dos variables x y y. El 0 y el 1 que se marcan en cada fila y columna indican los valores de las variables. La variable x aparece con apóstrofo en la fila 0 y sin apóstrofo en la fila 1. De forma similar, y aparece con apóstrofo en la columna 0 y sin él en la columna 1.

Si marcamos los cuadrados cuyos minitérminos pertenecen a una función dada, el mapa de dos variables se convertirá en otra forma útil de representar cualquiera de las 16 funciones booleanas de dos variables. Como ejemplo, hemos mostrado la función xy en la figura 3-2a). Puesto que xy es igual a m_3, se coloca un 1 dentro del cuadrado que pertenece a m_3. Asimismo, la función $x + y$ se representa en el mapa de la figura 3-2b) con tres cuadrados marcados con unos. Esos cuadrados se obtienen de los minitérminos de la función:

$$m_1 + m_2 + m_3 = x'y + xy' + xy = x + y$$

Los tres cuadrados también podrían haberse deducido de la intersección de la variable x en la segunda fila y la variable y en la segunda columna, que encierra el área perteneciente a x o y.

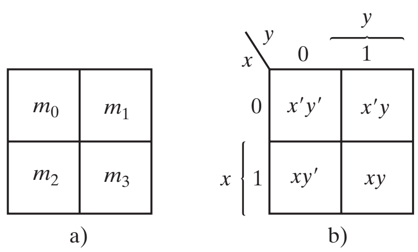


FIGURA 3-1
Mapa de dos variables

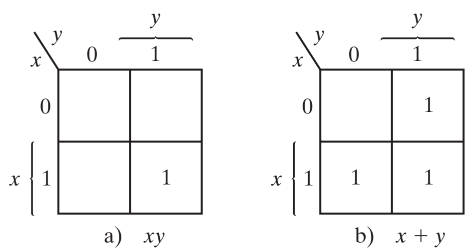
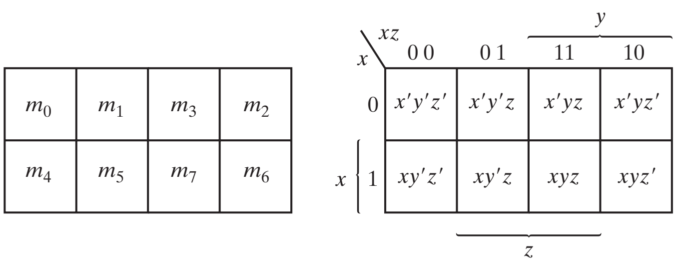


FIGURA 3-2
Representación de funciones en el mapa



a) b)

FIGURA 3-3
Mapa de tres variables

Mapa de tres variables

En la figura 3-3 se muestra un mapa de tres variables. Hay ocho minitérminos para tres variables binarias; por tanto, el mapa consta de ocho cuadrados. Advierta que los minitérminos no están acomodados en sucesión binaria, sino en una sucesión similar al código Gray (tabla 1-4). La característica de esta sucesión es que sólo un bit cambia de valor entre dos columnas adyacentes. El mapa dibujado en la parte b) se ha marcado con números en cada fila y columna que indican la relación entre los cuadrados y las tres variables. Por ejemplo, el cuadrado asignado a m_5 corresponde a la fila 1 y la columna 01. Si concatenamos estos dos números, obtendremos el número binario 101, cuyo equivalente decimal es 5. Otra forma de ver el cuadrado $m_5 = xy'z$ es considerarlo como ubicado en la fila marcada x y la columna perteneciente a $y'z$ (columna 01). Observe que hay cuatro cuadrados en los que cada variable es 1 y cuatro en los que es 0. La variable aparece sin apóstrofo en los cuatro cuadrados en los que es 1, y con apóstrofo en los que es 0. Por conveniencia, se escribe la variable con su símbolo alfabético bajo los cuatro cuadrados en los que no lleva apóstrofo.

Para entender la utilidad del mapa en la simplificación de funciones booleanas, hay que entender la propiedad básica que poseen dos cuadrados adyacentes. Cualesquier dos cuadrados adyacentes del mapa difieren en una sola variable, que tiene apóstrofo en un cuadrado y no lo tiene en el otro. Por ejemplo, m_5 y m_7 están en dos cuadrados adyacentes. La variable y tiene apóstrofo en m_5 y carece de apóstrofo en m_7, mientras que las otras dos variables son iguales en ambos cuadrados. De los postulados del álgebra booleana, se sigue que la suma de dos minitérminos en cuadrados adyacentes se simplifica a un solo término AND que consiste en sólo dos literales. Para aclarar esto, consideremos la suma de dos cuadrados adyacentes como m_5 y m_7:

$$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y' + y) = xz$$

Aquí, los dos cuadrados difieren en la variable y, que se elimina al formarse la suma de los dos minitérminos. Así, cualesquier dos minitérminos en cuadrados adyacentes a los que se aplique un OR permitirán eliminar la variable diferente. Los ejemplos que siguen explican el procedimiento para minimizar una función booleana con un mapa.

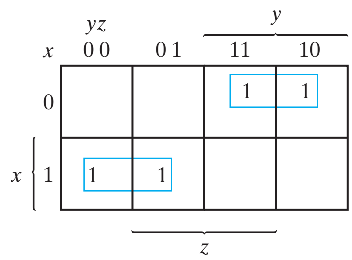


FIGURA 3-4
Mapa para el ejemplo 3-1; $F(x, y, z) = \sum(2, 3, 4, 5) = x'y + xy'$

EJEMPLO 3-1

Simplifique la función booleana

$$F(x, y, z) = \sum(2, 3, 4, 5)$$

Primero, marcamos con un 1 cada uno de los minitérminos que representan a la función. Esto se indica en la figura 3-4, donde se han marcado con 1 los cuadrados correspondientes a los minitérminos 010, 011, 100 y 101. El siguiente paso es encontrar los posibles cuadrados adyacentes, que se indican en el mapa con dos rectángulos, cada uno de los cuales encierra dos unos. El rectángulo de arriba a la derecha representa el área delimitada por $x'y$. Esto se determina observando que el área de dos cuadrados está en la fila 0, que corresponde a x', y las últimas dos columnas, que corresponden a y. De forma similar, el rectángulo inferior izquierdo representa el término de producto xy'. (La segunda fila representa a x y las dos columnas de la izquierda representan a y'.) La suma lógica de estos dos términos producto da la expresión simplificada:

$$F = x'y + xy'$$

Hay casos en los que se considera que dos cuadrados del mapa están adyacentes, aunque no se estén tocando. En la figura 3-3, m_0 es adyacente a m_2 y m_4 adyacente a m_6 porque los minitérminos difieren en una sola variable. Esto se puede verificar fácilmente con álgebra:

$$m_0 + m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'(y' + y) = x'z'$$
$$m_4 + m_6 = xy'z' + xyz' = xz' + (y' + y) = xz'$$

Por tanto, deberemos modificar la definición de cuadrados adyacentes de modo que incluya este caso y otros similares. Esto se hace considerando que el mapa está dibujado en una superficie cuyos bordes derecho e izquierdo están en contacto para formar cuadrados adyacentes.

EJEMPLO 3-2

Simplifique la función booleana

$$F(x, y, z) = \sum(3, 4, 6, 7)$$

El mapa para esta función se presenta en la figura 3-5. Hay cuatro cuadrados marcados con unos, uno para cada minitérmino de la función. En la tercera columna se combinan dos cuadrados

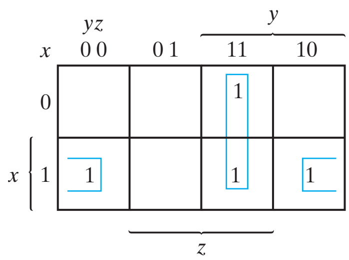


FIGURA 3-5
Mapa para el ejemplo 3-2; $F(x, y, z) = \sum(3, 4, 6, 7) = yz + xz'$

adyacentes para dar un término de dos literales, yz. Los otros dos cuadrados que incluyen unos también son adyacentes según la nueva definición, por lo que en el diagrama sus valores se encierran con medios rectángulos. Estos dos cuadrados combinados dan el término de dos literales xz'. La función simplificada es

$$F = yz + xz'$$

Considere ahora cualquier combinación de cuatro cuadrados adyacentes en el mapa de tres variables. Cualquier combinación así representa la suma lógica de cuatro minitérminos y da como resultado una expresión con una sola literal. Por ejemplo, la suma lógica de los cuatro minitérminos adyacentes 0, 2, 4 y 6 se reduce a un término de una sola literal, z':

$$\begin{aligned} m_0 + m_2 + m_4 + m_6 &= x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz' \\ &= x'z'(y' + y) + xz'(y' + y) \\ &= x'z' + xz' = z'(x' + x) = z' \end{aligned}$$

El número de cuadrados adyacentes que es posible combinar siempre debe ser una potencia de 2, como 1, 2, 4 y 8. Al aumentar el número de cuadrados adyacentes que se combinan, se reduce el número de literales del término producto obtenido.

Un cuadrado representa un minitérmino, lo que da un término con tres literales.

Dos cuadrados adyacentes representan un término de dos literales.

Cuatro cuadrados adyacentes representan un término de una sola literal.

Ocho cuadrados adyacentes abarcan todo el mapa y producen una función que siempre es igual a 1.

EJEMPLO 3-3

Simplifique la función booleana

$$F(x, y, z) = \sum(0, 2, 4, 5, 6)$$

El mapa de F se muestra en la figura 3-6. Primero, combinamos los cuatro cuadrados adyacentes de la primera y la última columnas para obtener el término de una sola literal z'. El cuadrado restante, que representa el minitérmino 5, se combina con un cuadrado adyacente que ya se usó una vez. Esto no sólo es permisible, sino hasta deseable, porque los dos cuadrados adya-

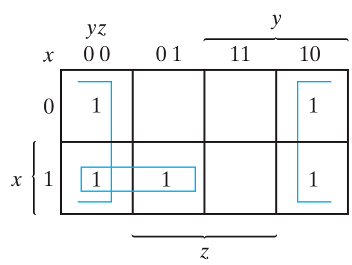


FIGURA 3-6
Mapa para el ejemplo 3-3; $F(x, y, z) = \sum(0, 2, 4, 5, 6) = z' + xy'$

centes dan el término de dos literales xy', mientras que el cuadrado solo representa el minitérmino de tres literales $xy'z$. la función simplificada es

$$F = z' + xy'$$

Si una función no está expresada como suma de minitérminos, podemos usar el mapa para obtener los minitérminos de la función y luego simplificar la función a una expresión con el mínimo de términos. Hay que asegurarse de que la expresión algebraica esté en forma de suma de productos. Cada término de producto se puede marcar en el mapa en uno, dos o más cuadrados. Luego, los minitérminos de la función se leen directamente del mapa.

EJEMPLO 3-4

Dada la función booleana

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

a) exprésela como suma de minitérminos

b) y luego halle la expresión mínima de suma de productos.

Tres términos de producto de la expresión tienen dos literales y se representan en un mapa de tres variables con dos cuadrados cada uno. Los dos cuadrados correspondientes al primer término, $A'C$, se encuentran en la figura 3-7 en la intersección de A' (primera fila) y C (dos columnas de en medio), que da los cuadrados 001 y 011. Observe que, al marcar los cuadrados

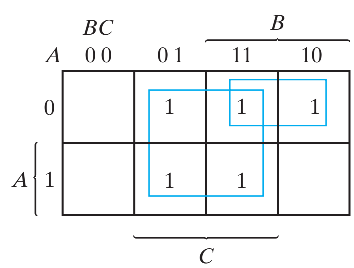


FIGURA 3-7
Mapa para el ejemplo 3-4; $A'C + A'B + AB'C + BC = C + A'B$

con 1, podríamos hallar ahí un 1 colocado por un término anterior. Esto sucede con el segundo término, $A'B$, que tiene unos en los cuadrados 011 y 010. Sin embargo, el cuadrado 011 también corresponde al primer término, $A'C$, así que simplemente dejamos el 1 que ya está ahí. Continuando de la misma manera, determinamos que el término $AB'C$ va en el cuadrado 101, que corresponde al minitérmino 5, y que el término BC tiene dos unos en los cuadrados 011 y 111. La función tiene un total de cinco minitérminos, como puede verse por los cinco unos en el mapa de la figura 3-7. Los minitérminos se leen directamente del mapa, y son 1, 2, 3, 5 y 7. La función se expresa en forma de suma de minitérminos:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 3, 5, 7)$$

La expresión de suma de productos dada originalmente tiene demasiados términos; puede simplificarse, como se muestra en el mapa, a una expresión de sólo dos términos:

$$F = C + A'B$$

3-2 MAPA DE CUATRO VARIABLES

El mapa para las funciones booleanas de cuatro variables se ilustra en la figura 3-8. En a) se presentan los 16 minitérminos y los cuadrados asignados a cada uno. En b) se ha redibujado el mapa de modo que muestre su relación con las cuatro variables. Las filas y columnas se numeran en orden según el código Gray, de modo que sólo un dígito cambie de valor entre dos filas o columnas adyacentes. El minitérmino correspondiente a cada cuadrado se obtiene de la concatenación del número de fila con el número de columna. Por ejemplo, los números de la tercera fila (11) y la segunda columna (01) dan, al concatenarse, el número binario 1101, que es el equivalente binario del 13 decimal. Así, el cuadrado de la tercera fila y la segunda columna representa al minitérmino m_{13}.

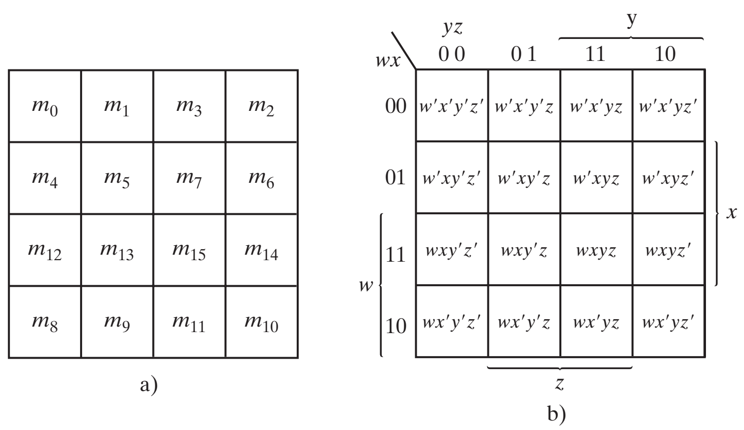


FIGURA 3-8
Mapa de cuatro variables

La minimización por mapa de funciones booleanas de cuatro variables es similar al método que se emplea para minimizar funciones de tres variables. Definimos los cuadrados adyacentes como cuadrados que están juntos. Además, consideramos que el mapa está en una superficie cuyos bordes superior e inferior, y derecho e izquierdo, están en contacto para formar cuadrados adyacentes. Por ejemplo, m_0 y m_2 forman cuadrados adyacentes, lo mismo que m_3 y m_{11}. Es fácil determinar la combinación de cuadrados adyacentes que es útil para el proceso de simplificación, por inspección del mapa de cuatro variables:

Un cuadrado representa un minitérmino, lo que da un término con cuatro literales.

Dos cuadrados adyacentes representan un término de tres literales.

Cuatro cuadrados adyacentes representan un término de dos literales.

Ocho cuadrados adyacentes representan un término de una sola literal.

Dieciséis cuadrados adyacentes representan la función igual a 1.

Ninguna otra combinación de cuadrados puede simplificar la función. Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso del procedimiento para simplificar funciones booleanas de cuatro variables.

EJEMPLO 3-5

Simplifique la función booleana

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

Puesto que la función tiene cuatro variables, hay que usar un mapa de cuatro variables. Los minitérminos indicados en la suma se han marcado con 1 en el mapa de la figura 3-9. Es posible combinar ocho cuadrados adyacentes marcados con 1 para formar el término de una literal y'. Los tres unos restantes de la derecha no pueden combinarse para dar un término simplificado. Se deberán combinar como dos o cuatro cuadrados adyacentes. Cuanto mayor sea el número

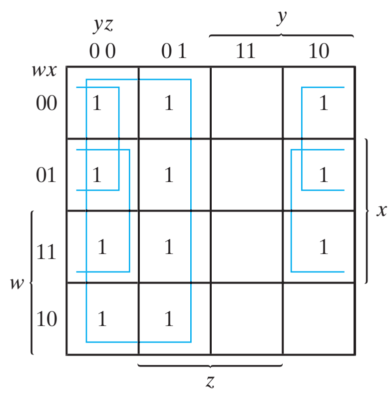


FIGURA 3-9
Mapa para el ejemplo 3-5; $F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14) = y' + w'z' + xz'$

de cuadrados combinados, menos literales tendrá el término correspondiente. En este ejemplo, los dos unos de arriba a la derecha se combinan con los dos unos de arriba a la izquierda para dar el término $w'z'$. Cabe señalar que está permitido usar el mismo cuadrado más de una vez. Ahora nos queda un cuadrado marcado con 1 en la tercera fila y la cuarta columna (cuadrado 1110). En vez de tomar este cuadrado solo (lo que daría un término con cuatro literales), lo combinamos con cuadrados que ya usamos antes para formar un área de cuatro cuadrados adyacentes. Estos cuadrados ocupan la intersección de las dos filas de en medio y las dos columnas de los extremos, y dan el término xz'. La función simplificada es

$$F = y' + w'z' + xz'$$

EJEMPLO 3-6

Simplificar la función booleana

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

El área del mapa cubierta por esta función consiste en los cuadrados marcados con 1 en la figura 3-10. Esta función tiene cuatro variables y, en la forma en que está expresada, consta de tres términos de tres literales cada uno y un término de cuatro literales. Cada término de tres literales se representa en el mapa con dos cuadrados. Por ejemplo, $A'B'C'$ se representa en los cuadrados 0000 y 0001. La función se puede simplificar en el mapa tomando los unos de las cuatro esquinas para dar el término $B'D'$. Esto es posible porque los cuatro cuadrados están adyacentes si el mapa se dibuja en una superficie cuyos bordes superior e inferior, y derecho e izquierdo, están en contacto. Los dos unos de la izquierda en la fila superior se combinan con los dos unos de la fila inferior para dar el término $B'C'$. El uno restante se puede combinar en un área de dos cuadrados para dar el término $A'CD'$. La función simplificada es

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

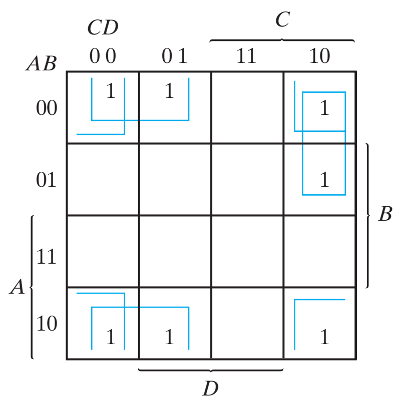


FIGURA 3-10
Mapa para el ejemplo 3-6; $A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C' = B'D' + B'C' + A'CD'$

Implicantes primos

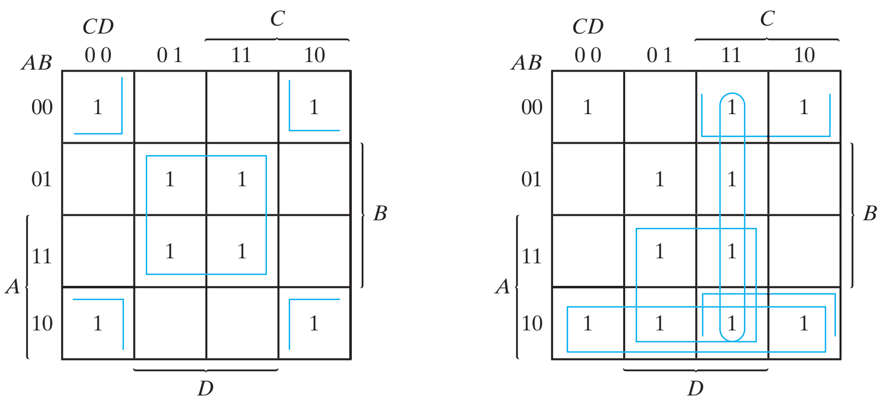
Al escoger cuadrados adyacentes en un mapa, debemos asegurarnos de cubrir todos los minitérminos de la función al combinar los cuadrados. Al mismo tiempo, es necesario minimizar el número de términos de la expresión y evitar términos redundantes cuyos minitérminos ya estén cubiertos por otros términos. Ocasionalmente, habrá dos o más expresiones que satisfacen los criterios de simplificación. El procedimiento para combinar cuadrados en el mapa podría hacerse más sistemático si entendemos el significado de los términos denominados implicante primo e implicante primo esencial. Un *implicante primo* es un término de producto que se obtiene combinando el número máximo posible de cuadrados adyacentes en el mapa. Si un minitérmino de un cuadrado está cubierto por sólo un implicante primo, decimos que ese implicante primo es *esencial*.

Podemos obtener los implicantes primos de una función a partir de un mapa combinando todos los números máximos posibles de cuadrados. Esto implica que un solo 1 en un mapa representa un implicante primo si no está adyacente a ningún otro 1. Dos unos adyacentes forman un implicante primo si no están dentro de un grupo de cuatro cuadrados adyacentes. Cuatro unos adyacentes forman un implicante primo si no están dentro de un grupo de ocho cuadrados adyacentes, y así sucesivamente. Los implicantes primos esenciales se encuentran examinando cada uno de los cuadrados marcados con 1 y tomando nota del número de implicantes primos que lo cubren. El implicante primo es esencial si es el único que cubre al minitérmino.

Considere la siguiente función booleana de cuatro variables:

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

Los minitérminos de la función se han marcado con 1 en los mapas de la figura 3-11. La parte a) de la figura muestra dos implicantes primos esenciales. Un término es esencial porque sólo hay una forma de incluir el minitérmino m_0 en cuatro cuadrados adyacentes. Estos cuatro cuadrados definen al término $B'D'$. Asimismo, sólo hay una forma de combinar el minitérmi-



a) Implicantes primos esenciales BD y B′D′

b) Implicantes primos CD, B′C AD y AB′

FIGURA 3-11
Simplificación empleando implicantes primos

no m_5 con cuatro cuadrados adyacentes, y esto da el segundo término, BD. Los dos implicantes primos esenciales cubren ocho minitérminos. Ahora hay que considerar los tres minitérminos restantes, m_3, m_9 y m_{11}.

La figura 3-11b) muestra todas las formas posibles en que se cubren los tres minitérminos con implicantes primos. El minitérmino m_3 puede cubrirse con el implicante primo CD o con el $B'C$. El minitérmino m_9 puede cubrirse con AD o con AB'. El minitérmino m_{11} se cubre con cualquiera de los cuatro implicantes primos. La expresión simplificada se obtiene de la suma lógica de los dos implicantes primos esenciales y de cualesquier dos implicantes primos que cubran los minitérminos m_3, m_9 y m_{11}. Hay cuatro posibles formas de expresar la función con cuatro términos de producto de dos literales cada uno:

$$\begin{aligned} F &= BD + B'D' + CD + AD \\ &= BD + B'D' + CD + AB' \\ &= BD + B'D' + B'C + AD \\ &= BD + B'D' + B'C + AB' \end{aligned}$$

El ejemplo anterior demuestra que la identificación de los implicantes primos en el mapa ayuda a determinar las alternativas con que se cuenta para obtener una expresión simplificada.

El procedimiento para obtener del mapa la expresión simplificada requiere identificar primero todos los implicantes primos esenciales. La expresión simplificada se obtiene de la suma lógica de todos los implicantes primos esenciales y los demás implicantes primos necesarios para cubrir los minitérminos restantes que no estén cubiertos por los implicantes primos esenciales. Ocasionalmente, habrá más de una manera de combinar cuadrados, y cada combinación podría dar pie a una expresión igualmente simplificada.

3-3 MAPA DE CINCO VARIABLES

El uso de mapas para más de cuatro variables no es tan sencillo. Un mapa de cinco variables necesita 32 cuadrados, y uno de seis variables, 64 cuadrados. Cuando hay muchas variables, el número de cuadrados aumenta en forma considerable y la geometría para combinar cuadrados adyacentes se complica progresivamente.

El mapa de cinco variables se muestra en la figura 3-12. Consta de dos mapas de cuatro variables con las variables A, B, C, D y E. La variable A distingue a los dos mapas, como se indica en la parte superior del diagrama. El mapa de cuatro variables de la izquierda representa los 16 cuadrados en los que $A = 0$; el otro representa los cuadrados en los que $A = 1$. Los minitérminos 0 a 15 corresponden a $A = 0$ y los minitérminos 16 a 31 corresponden a $A = 1$. Cada mapa de cuatro variables conserva las adyacencias que definimos antes cuando se le considera aparte. Además, cada cuadrado del mapa $A = 0$ es adyacente al cuadrado correspondiente del mapa $A = 1$. Por ejemplo, el minitérmino 4 es adyacente al minitérmino 20, y el minitérmino 15, al 31. La mejor forma de visualizar esta nueva regla de adyacencia es imaginar que los dos medios mapas están uno encima del otro. Cualesquier dos cuadrados que queden uno encima del otro se considerarán adyacentes.

Siguiendo el procedimiento empleado con el mapa de cinco variables, es posible construir un mapa de seis variables con cuatro mapas de cuatro variables, para obtener los 64 cuadrados necesarios. Los mapas con seis o más variables requieren demasiados cuadrados y su uso

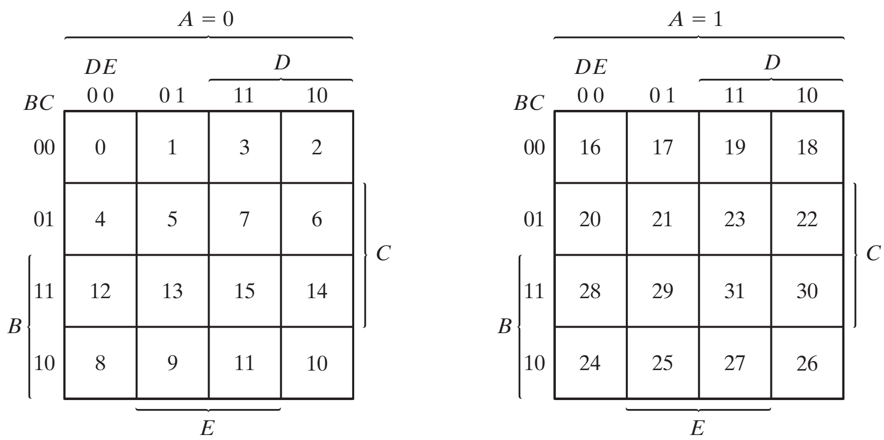


FIGURA 3-12
Mapa de cinco variables

resulta impráctico. La alternativa es utilizar programas de computadora escritos específicamente para facilitar la simplificación de funciones booleanas que tienen un gran número de variables.

Por inspección, y tomando en cuenta la nueva definición de cuadrados adyacentes, es posible demostrar que cualesquier 2^k cuadrados adyacentes, para $k = (0, 1, 2, \ldots, n)$, en un mapa de n variables, representan un área que produce un término de $n - k$ literales. Para que esta afirmación tenga sentido, n deberá ser mayor que k. Cuando $n = k$, toda el área del mapa se combina para dar la función de identidad. La tabla 3-1 muestra la relación entre el número de cuadrados adyacentes y el número de literales en el término. Por ejemplo, ocho cuadrados adyacentes combinan un área del mapa de cinco variables para dar un término de dos literales.

Tabla 3-1
Relación entre el número de cuadrados adyacentes y el número de literales en el término

	Número de cuadrados adyacentes	**Número de literales del término en un mapa de *n* variables**			
K	2^k	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	1	2	3	4	5
1	2	1	2	3	4
2	4	0	1	2	3
3	8		0	1	2
4	16			0	1
5	32				0

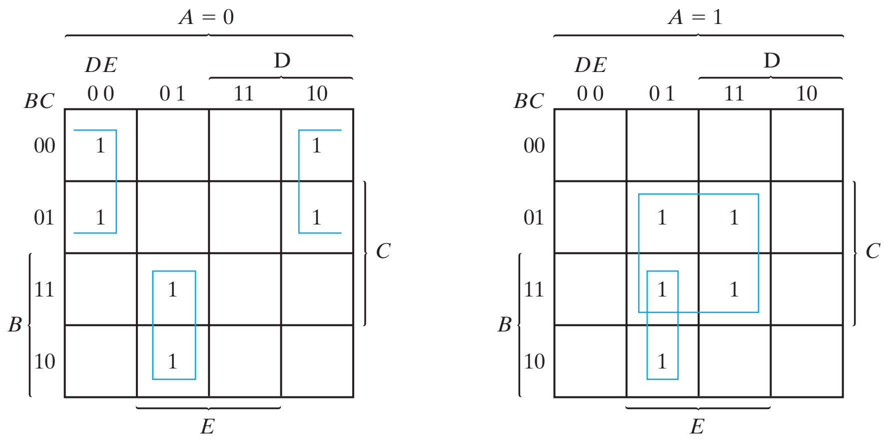


FIGURA 3-13
Mapa para el ejemplo 3-7; $F = A'B'E' + BD'E + ACE$

EJEMPLO 3-7

Simplifique la función booleana

$$F(A, B, C, D, E) = (0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

El mapa de cinco variables para esta función se muestra en la figura 3-13. Hay seis minitérminos, del 0 al 15, que pertenecen a la parte del mapa en la que $A = 0$. Los otros cinco minitérminos pertenecen a $A = 1$. Cuatro cuadrados adyacentes del mapa $A = 0$ se combinan para dar el término de tres literales $A'B'E'$. Advierta que es necesario incluir A' en el término porque todos los cuadrados están asociados a $A = 0$. Los dos cuadrados de la columna 01 y las dos últimas filas son comunes a ambas partes del mapa; por tanto, constituyen cuatro cuadrados adyacentes y dan el término de tres literales $BD'E$. La variable A no se incluye aquí porque los cuadrados adyacentes pertenecen tanto a $A = 0$ como a $A = 1$. El término ACE se obtiene de los cuatro cuadrados adyacentes que están totalmente dentro del mapa $A = 1$. La función simplificada es la suma lógica de los tres términos:

$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$

3-4 SIMPLIFICACIÓN DE PRODUCTO DE SUMAS

Las funciones booleanas simplificadas que dedujimos del mapa en todos los ejemplos anteriores se expresaron en la forma de suma de productos. Con una modificación menor, se obtiene la forma de producto de sumas.

El procedimiento para obtener una función minimizada en forma de producto de sumas es consecuencia de las propiedades básicas de las funciones booleanas. Los unos que se colocan en los cuadrados del mapa representan los minitérminos de la función. Los minitérminos no incluidos en la función denotan el complemento de la función. Entonces, el complemento de una función está representado en el mapa por los cuadrados que no se han marcado con 1. Si marcamos los cuadrados vacíos con 0 y los combinamos en cuadrados adyacentes válidos, obtendremos una expresión simplificada del complemento de la función, es decir, de F'. El complemento de F' nos dará otra vez la función F. Por el teorema generalizado de DeMorgan, la función así obtenida estará automáticamente en forma de producto de sumas. La mejor forma de explicar esto es con un ejemplo.

EJEMPLO 3-8

Simplifique la siguiente función booleana en forma de **a)** suma de productos y **b)** producto de sumas:

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

Los unos marcados en el mapa de la figura 3-14 representan todos los minitérminos de la función. Los cuadrados marcados con 0 representan los minitérminos no incluidos en F y, por tanto, denotan al complemento de F. Si combinamos los cuadrados que tienen 1, obtendremos la función simplificada en forma de suma de productos:

a) $F = B'D' + B'C' + A'C'D$

Si combinamos los cuadrados marcados con 0, como se indica en el diagrama, obtendremos la función complementada simplificada:

$$F' = AB + CD + BD'$$

Al aplicar el teorema de DeMorgan (obteniendo el dual y complementando cada literal como se describe en la sección 2-4) se obtiene la función simplificada en forma de producto de sumas:

b) $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

■

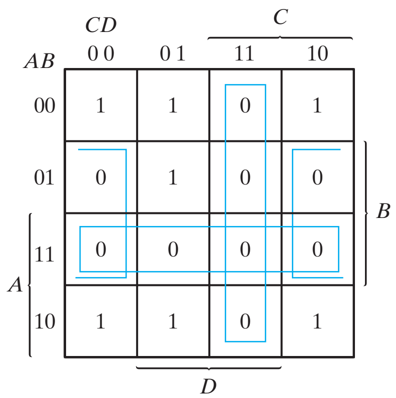


FIGURA 3-14
Mapa para el ejemplo 3-8; $F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10) = B'D' + B'C' + A'C'D = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

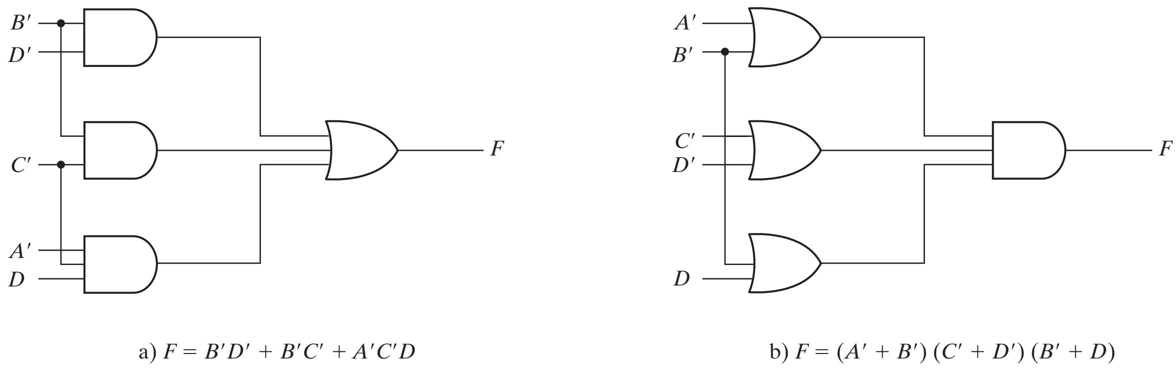


FIGURA 3-15
Implementación con compuertas de la función del ejemplo 3-8

La implementación de las expresiones simplificadas obtenidas en el ejemplo 3-8 se muestra en la figura 3-15. La expresión de suma de productos se implementa en a) con un grupo de compuertas AND, una para cada término AND. Las salidas de las compuertas AND se conectan a las entradas de una sola compuerta OR. En b) se ha implementado la misma función en forma de producto de sumas con un grupo de compuertas OR, una por cada término OR. Las salidas de las compuertas OR se conectan a las entradas de una sola compuerta AND. En cada caso, suponemos que contamos directamente con las variables de entrada complementadas, por lo que no se necesitan inversores. El patrón de configuración establecido en la figura 3-15 es la forma general de implementar cualquier función booleana expresada en una de las formas estándar. Si está en suma de productos, se conectan compuertas AND a una sola compuerta OR; si está en producto de sumas, se conectan compuertas OR a una sola compuerta AND. Cualquiera de las configuraciones forma dos niveles de compuertas, por lo que se afirma que la implementación de una función en forma estándar es una implementación de dos niveles.

El ejemplo 3-8 ilustró el procedimiento para obtener la simplificación de producto de sumas cuando la función se expresa originalmente en la forma canónica de suma de minitérminos. El mismo procedimiento es válido cuando la función se expresa originalmente en la forma

Tabla 3-2
Tabla de verdad de la función F

x	*y*	*z*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

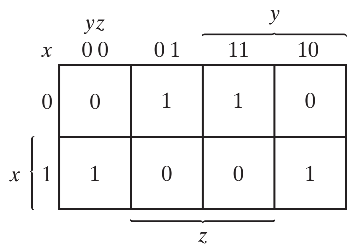


FIGURA 3-16
Mapa de la función de la tabla 3-2

canónica de producto de maxitérminos. Consideremos, por ejemplo, la tabla de verdad que define la función F en la tabla 3-2. En suma de minitérminos, esta función se expresa así:

$$F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 4, 6)$$

En producto de maxitérminos, se expresa así:

$$F(x, y, z) = \Pi\,(0, 2, 5, 7)$$

Dicho de otro modo, los unos de la función representan a los minitérminos, y los ceros, a los maxitérminos. El mapa de esta función se presenta en la figura 3-16. Podemos comenzar a simplificar esta función marcando con 1 los cuadrados correspondientes a cada minitérmino para el cual la función da 1. Los cuadrados restantes se marcan con 0. Por otra parte, si lo que se da originalmente es el producto de maxitérminos, podemos comenzar por colocar ceros en los cuadrados indicados por la función; luego marcaremos con 1 los cuadrados restantes. Una vez marcados todos los cuadrados, es posible simplificar la función en cualquiera de las formas estándar. Si queremos la suma de productos, combinaremos los unos para obtener

$$F = x'z + xz'$$

Si queremos el producto de sumas, combinaremos los ceros para obtener la función complementada simplificada

$$F' = xz + x'z'$$

lo que demuestra que la función OR exclusivo es el complemento de la función de equivalencia (sección 2-6). Al calcular el complemento de F', se obtiene la función simplificada en forma de producto de sumas:

$$F = (x' + z')(x + z)$$

Para introducir en el mapa una función expresada como producto de sumas, se calcula el complemento de la función, el cual indicará los cuadrados que deben marcarse con 0. Por ejemplo, la función

$$F = (A' + B' + C')(B + D)$$

se puede introducir en el mapa obteniendo primero su complemento,

$$F' = ABC + B'D'$$

y marcando después con 0 los cuadrados que representan a los minitérminos de F'. Los cuadrados restantes se marcarán con 1.

3-5 CONDICIONES DE INDIFERENCIA

La suma lógica de los minitérminos asociados con una función booleana especifica las condiciones en que la función da 1. La función da 0 para el resto de los minitérminos. Esto supone que todas las combinaciones de valores de las variables de la función son válidas. En la práctica, hay algunas aplicaciones en las que la función no está especificada para ciertas combinaciones de las variables. Por ejemplo, el código binario de cuatro bits para los dígitos decimales tiene seis combinaciones que no se usan y que, por tanto, se consideran no especificadas. Las funciones con salidas no especificadas para ciertas combinaciones de entradas se llaman funciones incompletamente especificadas. En casi todas las aplicaciones, es irrelevante el valor que asuma la función para los minitérminos no especificados. Por ello, se acostumbra llamar condiciones de indiferencia (*don't care*, en inglés) a los minitérminos no especificados de una función. Conviene usar estas condiciones de indiferencia en el mapa para simplificar aún más la expresión booleana.

Debe quedar claro que un minitérmino indiferente es una combinación de variables cuyo valor lógico no está especificado. No podemos marcarlo con 1 en el mapa porque ello requeriría que la función siempre dé 1 para esa combinación. Por lo mismo, si marcamos con 0 su cuadrado en el mapa, estaremos exigiendo que la función sea 0. Para distinguir la condición de indiferencia, usamos una *X* en lugar de unos y ceros. Así, una *X* en un cuadrado del mapa indica que no nos importa si se asigna el valor de 0 o de 1 a *F* para el minitérmino en cuestión.

Al escoger cuadrados adyacentes para simplificar la función, podemos suponer que los minitérminos indiferentes son 0 o 1, lo que más nos convenga. Al simplificar la función, podemos optar por incluir cada minitérmino indiferente con los unos o con los ceros, dependiendo de qué combinación produzca la expresión más simple.

EJEMPLO 3-9

Simplifique la función booleana

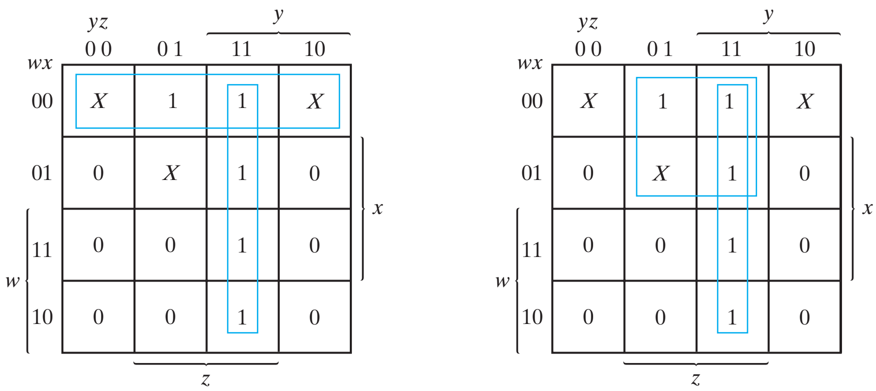
$$F(w, x, y, z) = \Sigma(1, 3, 7, 11, 15)$$

que tiene las condiciones de indiferencia

$$d(w, x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5)$$

Los minitérminos de *F* son las combinaciones de variables que hacen que la función dé 1. Los minitérminos de *d* son los minitérminos indiferentes a los que podría asignarse 0 o bien 1. La simplificación del mapa se muestra en la figura 3-17. Los minitérminos de *F* se marcan con 1, los de *d* se marcan con *X* y los cuadrados restantes se marcan con 0. Para obtener la expresión simplificada en forma de suma de productos, deberemos incluir los cinco unos del mapa, pero podríamos incluir o no cualquiera de las *X*, dependiendo de qué tanto ello simplifique la función. El término yz cubre los cuatro minitérminos de la tercera columna. El minitérmino restante, m_1, se puede combinar con el minitérmino m_3 para dar el término de tres literales $w'x'z$. Pero si incluimos una o dos *X* adyacentes podremos combinar cuatro cuadrados adyacentes para obtener un término de dos literales. En la parte a) del diagrama se han incluido los minitérminos indiferentes 0 y 2 junto con los unos, para dar la función simplificada

$$F = yz + w'x'$$



a) $F = yz + w'x'$ b) $F = yz + w'z$

FIGURA 3-17
Ejemplo con condiciones de indiferencia

En la parte b), se ha incluido el minitérmino 5 junto con los unos, y ahora la función simplificada es

$$F = yz + w'z$$

Cualquiera de las dos expresiones anteriores satisface las condiciones planteadas para el ejemplo.

El ejemplo anterior ilustró cómo los minitérminos indiferentes se marcan inicialmente con *X* en el mapa y se consideran como 0 o como 1. La decisión de tomar cada uno como 0 o como 1 dependerá de cómo ello simplifique la función incompletamente especificada. Una vez tomada la decisión, la función simplificada obtenida consistirá en una suma de minitérminos que incluye los minitérminos que inicialmente no estaban especificados y que ahora se ha decidido incluir con los unos. Consideremos las dos expresiones simplificadas que se obtienen en el ejemplo 3-9:

$$F(w, x, y, z) = yz + w'x' = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 11, 15)$$
$$F(w, x, y, z) = yz + w'z = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

Ambas expresiones incluyen a los minitérminos 1, 3, 7, 11 y 15, que hacen a la función *F* igual a 1. Los minitérminos indiferentes 0, 2 y 5 se tratan de diferente manera en cada expresión. La primera expresión incluye a los minitérminos 0 y 2 junto con los unos y deja al minitérmino 5 con los ceros. La segunda expresión incluye al minitérmino 5 con los unos y deja a los minitérminos 0 y 2 con los ceros. Las dos funciones son algebraicamente distintas. Ambas cubren los minitérminos especificados de la función, pero cada una cubre diferentes minitérminos indiferentes. En lo que a la función incompletamente especificada concierne, cualquiera de las dos expresiones es aceptable porque la única diferencia radica en el valor de *F* para los minitérminos indiferentes.

También es posible obtener una expresión simplificada de producto de sumas para la función de la figura 3-17. En este caso, la única forma de combinar los ceros es incluyendo los minitérminos indiferentes 0 y 2 con los ceros, para dar una función complementada simplificada:

$$F' = z' + wy'$$

Al calcular el complemento de F' obtenemos la expresión simplificada como producto de sumas:

$$F(w, x, y, z) = z(w' + y) = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

En este caso, hemos incluido los minitérminos 0 y 2 con los ceros, y el minitérmino 5 con los unos.

3-6 IMPLEMENTACIÓN CON NAND Y NOR

Muchos circuitos digitales se construyen con compuertas NAND y NOR en lugar de con compuertas AND y OR. Las primeras son más fáciles de fabricar con componentes electrónicos y son las compuertas básicas empleadas en todas las familias de lógica de CI digitales. En virtud del destacado papel que las compuertas NAND y NOR desempeñan en el diseño de circuitos digitales, se han desarrollado reglas y procedimientos para convertir funciones booleanas expresadas en términos de AND, OR y NOT en diagramas lógicos NAND y NOR equivalentes.

Circuitos NAND

Se dice que la compuerta NAND es una compuerta universal porque cualquier sistema digital puede implementarse con ella. Para demostrar que cualquier función booleana se puede implementar con compuertas NAND, basta con demostrar que las operaciones lógicas AND, OR y complemento se pueden obtener exclusivamente con compuertas NAND. Esto se aprecia en la figura 3-18. La operación complemento se obtiene con una compuerta NAND de una sola entrada que se comporta exactamente como un inversor. La operación AND requiere dos compuertas NAND. La primera produce la operación NAND y la segunda invierte el sentido lógico de la señal. La operación OR se logra con una compuerta NAND que lleva inversores en cada entrada.

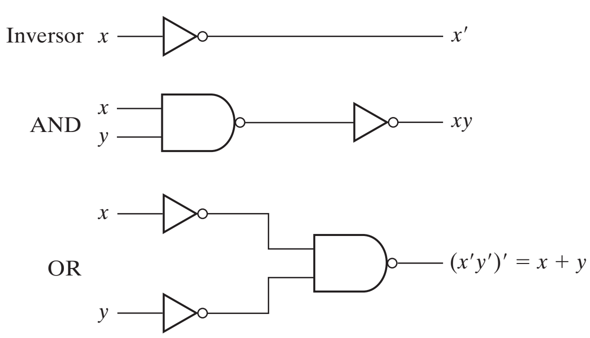


FIGURA 3-18
Operaciones lógicas con compuertas NAND