3

Lógica y teoría de conjuntos

Patricia Kisbye
Daniel Fridlender
Alejandro L. Tiraboschi

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

3 | LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Este capítulo se elabora a partir de las Notas para el Curso de Ingreso a FaMAF 2012 elaboradas por los Dres. Patricia Kisbye y Alejandro Tiraboschi quienes, para esas Notas toman contenidos y ejercicios de los primeros capítulos del texto de su autoría: *Elementos de Lógica y Computación* (Trabajos de Informática, No. 1/99). Desde el año 2015, el Dr. Daniel Fridlender, viene realizando modificaciones a contenidos y ejercicios presentados en las Notas originales, tales modificaciones se hacen evidente en el presente capítulo.

Este texto se caracteriza por presentar ideas y conocimientos introductorios al estudio de Lógica y Conjuntos los cuales resultan nuevos para la mayoría de Ustedes pero representan ideas básicas para el trabajo en Matemática, en Ciencias de la Computación y ofrece modos de reconstruir conocimientos y argumentar no sólo para las ciencias antes citadas sino también para el trabajo en Física o Astronomía.

Los principales contenidos tratados se refieren a proposiciones, conectivos lógicos, nociones básicas de conjuntos, operaciones entre conjuntos, producto cartesiano y cuantificadores. La introducción y tratamiento de estos conceptos se ilustra con ejemplos y se acompañan con un conjunto de ejercicios de aplicación.

Si bien se reconoce que estos temas pueden causar un poco de desconcierto por lo nuevo, también se parte de la idea que ellos son una introducción a cuestiones básicas para comprender algunas definiciones o argumentaciones que se darán en capítulos posteriores y ofrece una entrada a una escritura formal que se puede aplicar a otros temas del curso o materias de primer año. De los temas presentados, las nociones básicas sobre conjuntos resultan esenciales para el resto del curso de ingreso o cursos posteriores. Este capítulo resulta importante para los estudiantes de las distintas carreras que ofrece FAMAF y tiene una especial relevancia para los estudiantes interesados en Ciencias de la Computación.

En este capítulo se busca en primera instancia ofrecer un material importante para el resto del curso de ingreso y en segunda instancia achicar la brecha con el trabajo a desarrollar en las materias de primer año.

SECCIÓN 3.1

Elementos de lógica

§ Introducción

La *lógica* es la ciencia de la *inferencia*, es decir, de la adquisición de nuevos conocimientos a partir de conocimientos previos por medio del razonamiento. Identificamos principalmente dos tipos de objetos que estudia la lógica: los conocimientos y los razonamientos. Para expresar conocimientos se utilizan ciertas frases que denominaremos *proposiciones*.

§ Proposiciones

Una *proposición* es una frase susceptible de ser considerada verdadera o falsa. También podríamos decir que una proposición es una sentencia declarativa que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes.

Ejemplo 1. Algunos ejemplos de proposiciones son:

- Los triángulos tienen cuatro vértices.
- $25+24=49$.
- La edad del universo supera los catorce mil millones de años.

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla $\langle$ *ENTER* $\rangle$

no son proposiciones puesto que no tiene sentido declararlas como verdaderas o falsas.

La veracidad (V) o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad* de la proposición. Las dos primeras proposiciones del ejemplo 1 tienen valor de verdad F y V respectivamente.

La última frase del ejemplo puede dar lugar a diferentes posiciones: algunos expertos pueden asegurar que es falsa, otros, por el contrario, afirmar que es verdadera. También puede haber quienes manifiesten que aún no se sabe con certeza, y por qué no, otros que sostengan que es imposible establecer su valor de verdad. Pero no debería haber ninguna duda sobre el carácter declarativo de la frase: la misma expresa una propiedad y tiene perfecto sentido afirmar su veracidad (o falsedad). Esto alcanza para que la frase sea considerada una proposición.

Concluimos entonces que cada proposición tiene un único valor de verdad, V ó F, aunque es posible que, en algunos casos, ignoremos cuál es ese valor. Con frecuencia diremos que una proposición "es V" (o F) como abreviatura de que su valor de verdad es V (o F).

§ Conectivos lógicos

En lógica se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r, para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos se denominan *variables proposicionales* y pueden combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación: (no) $\neg$, la conjunción: (y) $\wedge$, la disyunción: (o) $\vee$, la disyunción exclusiva: (o bien) $\underline{\vee}$, la implicación: (entonces) $\Rightarrow$ y la implicación doble: (si y sólo si) $\Leftrightarrow$. La negación se aplica a *una* proposición y por lo tanto se dice que es *1-aria* o *unitaria*. Los restantes conectivos se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

Los ejemplos que siguen ilustran el uso correcto de los símbolos introducidos.

Ejemplo 2. Consideremos las proposiciones p: ”4 es positivo” y q: ”$\sqrt{2}$ es racional”. Algunas posibles combinaciones de p y q por conectivos lógicos son:

$\neg p$: 4 **no** es positivo.

$p \wedge q$: 4 es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.

$\neg p \wedge q$: 4 **no** es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \vee q$: 4 es positivo **o** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \Rightarrow q$: Si 4 es positivo **entonces** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \Leftrightarrow q$: 4 es positivo **si y sólo si** $\sqrt{2}$ es racional.

A continuación, se analizan con más detalle cada uno de los conectivos lógicos.

§ Negación

Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg p$ a su negación.

Ejemplo 3. Si p simboliza la proposición *estoy en la clase de Álgebra*, entonces $\neg p$ es *no estoy en la clase de Álgebra*.

La *negación* se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad de la proposición que se niega. Esto es, si p es verdadera entonces $\neg p$ es falsa, y si p es falsa entonces $\neg p$ es verdadera. Esta relación entre los valores de verdad de p y $\neg p$ se expresa esquemáticamente en la *tabla de verdad de la negación*:

p	$\neg p$
V	F
F	V

La tabla de verdad posee una línea por cada caso posible de p (V o F), y en la columna correspondiente a $\neg p$ se escribe el valor de verdad de $\neg p$ en cada uno de esos casos. La tabla de verdad de la negación expresa un método para determinar el valor de verdad de una proposición cualquiera de la forma $\neg p$: determinar primero el valor de verdad de p y luego revertirlo para obtener el de $\neg p$.

Ejemplo 4. Consideremos la proposición

p: ”10 es múltiplo de 5”.

Sabemos que el valor de verdad de p es V. Por lo tanto, su negación que es la proposición

$\neg p$: ”10 no es múltiplo de 5”

tiene valor de verdad F.

§ Conjunción

La *conjunción* es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos proposiciones. Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que una de ellas sea falsa para que toda la conjunción sea falsa. En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la 'y', de comas o de una combinación de éstas, o palabras como 'pero'. Así, por ejemplo, la proposición compuesta *Córdoba tiene sierras y tiene ríos* es verdadera porque cada parte de la conjunción es verdadera. No ocurre lo mismo con la proposición *Córdoba tiene sierras y tiene costa al mar*. Esta proposición es falsa porque Córdoba no tiene costa al mar.

La siguiente tabla corresponde a la *tabla de verdad de la conjunción*:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Como observáramos en el caso de la negación, la tabla de verdad posee una línea por cada caso posible, que ahora son cuatro según las posibles combinaciones de valores de verdad de p y q. La columna correspondiente a $p \wedge q$ registra el valor de verdad de la conjunción en cada caso.

Nuevamente la tabla de verdad expresa un método para determinar el valor de verdad de una proposición cualquiera de la forma $p \wedge q$: determinar primero los valores de verdad de p y de q; si ambos son V, entonces el de $p \wedge q$ también lo es. En caso contrario, el valor de verdad de $p \wedge q$ es F.

Ejemplo 5. Si p es $2 < 5$, q es $6 < 3$ y r es $5 < 11$, entonces $p \wedge q$ expresa $2 < 5$ y $6 < 3$, que es falso ya que 6 no es menor o igual que 3. Por otro lado la proposición $p \wedge r$ que dice $2 < 5$ y $5 < 11$ (también puede escribirse $2 < 5 < 11$) es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

§ Disyunción

Existen dos operadores de disyunción: La *disyunción exclusiva o excluyente* y *la disyunción inclusiva o incluyente*.

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\veebar$. La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es verdadera incluso si ambas proposiciones son verdaderas y se indica con el símbolo $\vee$.

En el lenguaje coloquial y en matemática es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el "o inclusivo". A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es exclusiva o inclusiva. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

Los alumnos de este curso son inteligentes o estudian mucho.

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. Pero por ejemplo, si hablando de un viejo amigo decimos "tenía un bar que quedaba en la calle Sucre o Jujuy" normalmente significa que era en una de esas dos calles (tal vez no recordamos cuál), pero no las dos.

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es inclusiva (resp. exclusiva) terminando la frase con *o ambas* (resp. *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \veebar q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por *disyunción* nos referiremos habitualmente a la disyunción inclusiva y por *tabla de verdad de la disyunción*, a la tabla de arriba a la derecha. Nuevamente la tabla de verdad expresa un método para determinar el valor de verdad de una disyunción $p \vee q$: determinar primero los valores de verdad de p y de q; si ambos son F, entonces el de $p \vee q$ también lo es. En caso contrario, el de $p \vee q$ es V.

Ejemplo 6. Si p es $2 = 5$, q es $2 < 5$ y r es $2 > 5$, entonces $p \vee q$ expresa $2 = 5$ ó $2 < 5$, que también puede escribirse $2 \leq 5$ y es verdadero ya que 2 es menor que 5. Por otro lado la proposición $p \vee r$ que dice $2 = 5$ ó $2 > 5$ (y también puede escribirse $2 \geq 5$) es falsa pues es la disyunción de dos proposiciones falsas.

§ Propiedades de la conjunción y la disyunción

Se dice que dos proposiciones son *lógicamente equivalentes* cuando tienen los mismos valores de verdad independientemente del valor de verdad de las variables proposicionales involucradas. Usamos el símbolo $\equiv$ para afirmar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes y el símbolo $\not\equiv$ para expresar que dos proposiciones no lo son.

Para la disyunción y para la conjunción se cumple la *propiedad conmutativa*:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p.$$

También se cumple la *propiedad asociativa*:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

Estas propiedades dicen que si combinamos tres o más proposiciones utilizando uno de estos conectivos, no importa en qué orden se realicen las operaciones. Incluso pueden suprimirse repeticiones y negaciones dobles, dada la *propiedad de idempotencia* y de *negación doble*:

$$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p \qquad \neg\neg p \equiv p.$$

En cambio, si utilizamos conectivos distintos, no se cumple la asociatividad en todos los casos. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge q) \vee r$$

indica que se efectúa primero $p \wedge q$ y luego la disyunción con r; mientras que en la expresión

$$p \wedge (q \vee r)$$

se efectúa la conjunción de p con $q \vee r$. Notemos por ejemplo que si p es F, q es V y r es V, entonces $(p \wedge q) \vee r$ es V y $p \wedge (q \vee r)$ es F, por lo tanto $(p \wedge q) \vee r \not\equiv p \wedge (q \vee r)$.

En el caso de esas expresiones se cumple, sin embargo, la siguiente *propiedad distributiva*:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Con la negación obtenemos las siguientes *Leyes de De Morgan*:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Todas estas propiedades pueden comprobarse construyendo las tablas de verdad correspondientes y verificando que los valores de verdad de ambas proposiciones coinciden en todos los casos.

Por ejemplo, para comprobar la propiedad distributiva de la disyunción respecto a la conjunción, construimos las tablas de verdad de $(p \wedge q) \vee r$ y de $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$, y vemos que sus valores de verdad coinciden en todos los casos.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**
V	F	V	F	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	F	**V**
F	V	F	F	**F**
F	F	V	F	**V**
F	F	F	F	**F**

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	**V**
V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	F	**F**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	**F**
F	F	V	V	V	**V**
F	F	F	F	F	**F**

En total hay ocho casos posibles que resultan de combinar los posibles valores de verdad V y F para cada una de las tres variables proposicionales p, q y r que aparecen. La cuarta columna de la tabla de la izquierda se obtiene aplicando la tabla de verdad de la conjunción a las primeras dos columnas. La quinta columna, aplicando la tabla de verdad de la disyunción a la cuarta y la tercera columnas. Un análisis similar puede hacerse con la tabla de la derecha.

Al comparar dos tablas de verdad de esta manera es imprescindible listar los ocho casos en el mismo orden en ambas tablas y así evitar posibles confusiones. Otra posibilidad es confeccionar una única tabla en que aparezcan las dos proposiciones que se desea comparar, evitando asimismo el trabajo de repetir las primeras tres columnas:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	V	**V**
V	F	V	F	**V**	V	V	**V**
V	F	F	F	**F**	V	F	**F**
F	V	V	F	**V**	V	V	**V**
F	V	F	F	**F**	F	V	**F**
F	F	V	F	**V**	V	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

Otras propiedades verificables con tablas de verdad son: $p \wedge \neg p$ es siempre F (esto nos está confirmando que ninguna proposición p puede ser V y F a la vez) y $p \vee \neg p$ es siempre V (esto confirma que toda proposición p es V o F, que no hay otra posibilidad).

Ejercicios

1. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indicar si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribir correctamente la negación.

a) El dado arrojó un número par.	*a*) El dado arrojó 3.
b) 4 es múltiplo de 8.	*b*) 4 no es múltiplo de 8.
c) La ecuación $x^2-9=0$ no tiene solución real.	*c*) La ecuación $x^2-9=0$ tiene dos soluciones reales.
d) La ecuación $2x+3=0$ no tiene solución real.	*d*) La ecuación $2x+3=0$ tiene al menos una solución real.
e) m es múltiplo de n.	*e*) n es múltiplo de m.

2. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indicar si la correspondiente proposición a la derecha es o no *equivalente* a su negación.

a) $a \leq b$	*a*) $a > b$
b) $a \geq b$	*b*) $a \leq b$
c) $a < b \leq c$	*c*) $a > b \geq c$
d) $a < b \leq c$	*d*) $a \geq b$ o $b > c$
e) h es divisible por 2 y por 3.	*e*) h no es divisible por 2 ni por 3.
f) 2 y 3 dividen al número f.	*f*) 2 no divide a f o 3 no divide a f.

3. Evaluar cada proposición para el caso en que p es F, q es V y r es F.

a) $p \vee q$	*c*) $\neg p \vee q$	*e*) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
b) $\neg p \vee \neg q$	*d*) $p \vee \neg(q \wedge r)$	*f*) $\neg p \wedge (q \vee r)$

4. Comprobar a través de las tablas de verdad, la propiedad asociativa de la disyunción, la distributiva de la conjunción respecto a la disyunción, y las leyes de De Morgan.

SECCIÓN 3.2

Otros conectivos

§ Condicional o implicación

Otra forma de conectar dos proposiciones p y q es diciendo: *si se cumple p entonces se cumple q*, es decir por medio de una implicación. Este conectivo lógico se llama *condicional* o *implicación* y se simboliza con $\Rightarrow$.

Ejemplo 1. Para obtener el certificado de estudios secundarios es necesario aprobar todas las materias del plan de estudios. Ana fue alumna de una escuela secundaria hasta el año pasado. Podemos conectar las proposiciones p: *"Ana ha obtenido el certificado de estudios secundarios"*,

q: *" Ana ha aprobado matemática"*,

con el conectivo condicional $\Rightarrow$:

$p \Rightarrow q$: *"Si Ana ha obtenido el certificado entonces ha aprobado matemática."*

¿Es verdadera la proposición p? ¿Y la proposición q? ¿Y la proposición $p \Rightarrow q$?

No tenemos información suficiente para responder si la proposición p es verdadera. Posiblemente algunos alumnos obtuvieron el certificado y otros no, y no sabemos en cuál de los dos grupos se encuentra Ana. Lo mismo ocurre con el valor de verdad de q: algunos alumnos aprobaron matemática y otros no, no sabemos cuál de los dos es el caso de Ana. Ignoramos, pues, los valores de verdad de p y de q.

Sin embargo, deberíamos poder convencernos de que la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera, ya que su veracidad se deduce de los requisitos necesarios para obtener el certificado. Esa proposición debería ser cierta para Ana y también para cualquier otro alumno: si el alumno obtuvo el certificado, necesariamente debe haber aprobado todas las materias, entre ellas matemática.

La implicación es tal vez el conectivo de mayor dificultad para comprender, porque su uso difiere del habitual en el que frecuentemente existe una relación de causalidad entre p y q. Según esa relación, el ejemplo 1 tal vez haya sorprendido porque la obtención del certificado no es la causa de que haya aprobado matemática. Más bien se podría decir que haber aprobado matemática (entre otras materias) sería la causa, y la obtención del certificado, su efecto.

En lógica, sin embargo, la veracidad de $p \Rightarrow q$ significa que si p es verdadero, q también debe serlo. Ese significado se ve reflejado en la *tabla de verdad del implica*,

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esta tabla de verdad indica que si se quiere verificar que $p \Rightarrow q$ es V, alcanza con comprobar que si p es V, q también lo es. El único caso falso de $p \Rightarrow q$ es que p sea V y q sea F. En el ejemplo, sería el caso en que Ana obtuvo el certificado sin haber aprobado matemática, lo que es imposible pues violaría el requisito para la obtención del certificado.

§ La implicación y el razonamiento deductivo

Es usual en matemática que un teorema tome la forma de una implicación: si p entonces q. Una forma posible de demostración es aceptar p como verdadera y comprobar, a través de una secuencia de pasos de razonamiento, que q es verdadera. Por ejemplo, podemos demostrar que

$$a < b \Rightarrow a + 1 < b + 1$$

es V, aceptando que $a < b$ es V y comprobando que $a + 1 < b + 1$ es V pues el $<$ se mantiene cuando se suma 1 a ambos miembros.

Notar que la implicación ha sido demostrada para cualquier par de números reales a y b. En particular, hemos demostrado que $1 < 2 \Rightarrow 2 < 3$ es V y también que $2 < 1 \Rightarrow 3 < 2$ es V, que ilustran los casos de la primera y de la última línea de la tabla de verdad del implica.

De la misma manera podemos ilustrar el caso de la tercera línea demostrando que

$$2 = 1 \Rightarrow 0 = 0$$

es V. En efecto, si aceptamos que $2 = 1$ es V, multiplicando ambos miembros por 0 se obtiene $2 \cdot 0 = 1 \cdot 0$ que es equivalente a $0 = 0$.

§ Recíproca y contrarrecíproca

En la implicación $p \Rightarrow q$, p se llama *antecedente* y q *consecuente*. La proposición $p \Rightarrow q$ se lee de diferentes maneras:

- p implica q.
- Si p entonces q.
- q si p.

Si $p \Rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Rightarrow p$ es la *recíproca*, $\neg p \Rightarrow \neg q$ es la *inversa* y $\neg q \Rightarrow \neg p$ es la *contrarrecíproca*, y se puede deducir que sus tablas de verdad son:

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles, es decir, son lógicamente equivalentes
$(p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p)$.

Ejemplo 2. Volvamos al ejemplo 1 y analicemos la recíproca de $p \Rightarrow q$, es decir, $q \Rightarrow p$: *si Ana aprobó matemática entonces obtuvo el certificado*. ¿Podemos asegurar que es verdadera esta proposición? Para responder esta pregunta uno puede remitirse a la tabla de verdad de la recíproca, donde se observa que hay un caso en que la misma sería falsa: que p sea F y q sea V, es decir, que Ana no obtuvo el certificado pero aprobó matemática. Evidentemente, es una situación posible.

§ Bicondicional o implicación doble

El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Leftrightarrow q$ y se lee p *si y sólo si* q, y es verdadero en los casos en que ambas proposiciones tengan el mismo valor de verdad. El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

La siguiente tabla es la *tabla de verdad de la implicación doble*:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Queda como ejercicio comprobar la equivalencia lógica $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Ejemplo 3. Supongamos que para aprobar un parcial de Álgebra la nota debe ser mayor que 4. Entonces con las proposiciones simples p: "Apruebo un parcial",

q: "La nota es mayor que 4",

y el conectivo $\Leftrightarrow$ formamos la proposición compuesta

$p \Leftrightarrow q$: " Apruebo un parcial si y sólo si la nota es mayor que 4".

§ Reglas de precedencia para los conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$p \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r \tag{3.1}$$

puede ser interpretada como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$ o como $(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (3.1) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos. Estas reglas son llamadas *reglas de prioridad* o *de precedencia*. Generalmente cada conectivo tiene una prioridad dada, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. El conectivo $\neg$ tiene la prioridad más alta. Por ejemplo, la proposición $\neg p \vee q$ debe ser entendida como $(\neg p) \vee q$, y no como $\neg(p \vee q)$. En el caso de los conectivos binarios el orden de prioridades, de mayor a menor, es $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Pese a que la prioridad de $\wedge$ es mayor que la de $\vee$, suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades: $p \Rightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $p \Rightarrow (p \wedge q)$. La expresión $p \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$. Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis. Por ejemplo, la expresión (3.1) es ambigua, y debe distinguirse si se trata de $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$, o bien de $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

Ejemplo 4. Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos. Por ejemplo, podemos dar la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge (q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee r)$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \wedge \neg r \Rightarrow p \vee r)$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

Ejercicios

1. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:
   - p: "está lloviendo"
   - q: "el sol está brillando"
   - r: "hay nubes en el cielo".

   Traducir lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

   a) Está lloviendo y el sol está brillando.
   b) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.
   c) Si no está lloviendo, entonces el sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
   d) El sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.
   e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el sol está brillando.

2. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior. Traducir lo siguiente a oraciones en español.

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   b) $\neg p \Leftrightarrow (q \vee r)$
   c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
   d) $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$
   e) $\neg(p \vee q) \wedge r$
   f) $\neg(p \Rightarrow q)$

3. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. En base a esta única suposición, ¿cuáles de las siguientes proposiciones puedes asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?

   a) Si llueve entonces Juan usa paraguas.
   b) Si Juan usa paraguas entonces llueve.
   c) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.
   d) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.
   e) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.

4. Escribir la contrarrecíproca de cada una de las siguientes implicaciones:

   a) Si 4 es par entonces $1 > 0$.
   b) $2+3=5$ si $1+1<3$.
   c) Si 4 es impar entonces $1 > 0$.
   d) Si $1+1<3$ entonces $2=4$.

5. Indicar para qué valores de verdad de p y q resulta verdadera la proposición compuesta
$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p).$$

6. Suponiendo que $p \Rightarrow q$ es falso, indicar los valores de verdad para

   a) $p \wedge q$
   b) $p \vee q$
   c) $q \Rightarrow p$

7. Sabiendo que la proposición compuesta $(\neg q) \vee (q \Rightarrow p)$ es falsa, indicar cuál es el valor de verdad de las proposiciones p y q.

8. Utilizar tablas de verdad para comprobar la equivalencia lógica $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

SECCIÓN 3.3

Teoría básica de conjuntos

§ Introducción

Al hablar de conjuntos nos referiremos a cualquier colección de objetos, individuos o entes. En el contexto de la matemática, el término *conjunto* no tiene una definición sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, el de los televisores de la ciudad de Córdoba y el de los peces en los océanos. En este curso nos referiremos específicamente a los conjuntos formados por números y cómo trabajar con ellos desde un punto de vista formal de la matemática. Esta teoría elemental de conjuntos es fundamental en matemática y también de suma importancia en la definición de conceptos básicos de informática.

§ Conjuntos y pertenencia

Un *conjunto* está integrado por objetos y los objetos que integran el conjunto se llaman *elementos* de ese conjunto. Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

- El conjunto de los números enteros.
- El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
- El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.
- El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la FAMAF.

Como mencionamos anteriormente, trabajaremos con conjuntos cuyos elementos son números como es el caso de los dos primeros ejemplos. En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee *a pertenece a A* o *a es un elemento de A*. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $\neg(a \in A)$ o $a \notin A$ y se lee *a no pertenece a A* o *a no es elemento de A*. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

De hecho la forma en que los estamos denotando acá, es la misma con la que se denotaron en el capitulo anterior (ver pg 22), o como se representaron en la escuela.

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más simple, pero que no siempre es posible, es listar todos los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves. Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 5, \pi\}, \qquad B = \{0\}, \qquad M = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

En este caso decimos que el conjunto está definido *por extensión*. El orden en que los elementos se listan es irrelevante, como así también lo sería una eventual (e innecesaria) repetición de elementos. Así, el conjunto A podría haberse definido también por $A = \{1, 3, 5, 2, 3, 5, \pi\}$.

Ejemplo 1. Definir por extensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto T de los números naturales menores que 3.

b) El conjunto S de los números naturales mayores que 3.

En el caso del conjunto T, la definición por extensión es $T = \{1, 2\}$.

En el caso del conjunto S, resulta imposible listar todos los elementos porque hay una cantidad infinita. Esto muestra que no todos los conjuntos pueden definirse por extensión. De todas maneras suele utilizarse una notación similar escribiendo $S = \{3, 4, 5, \dots\}$.

Otra manera de definir un conjunto es enunciando una propiedad que caracteriza a los elementos que lo integran dentro de un cierto universo de elementos que denotamos $\mathcal{U}$, es decir:

$$A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \text{ cumple la propiedad } P\}.$$

Esto se lee: *el conjunto formado por los x en $\mathcal{U}$ tales que x cumple la propiedad P*.

Esta forma de definir al conjunto se llama *por comprensión*. De esta manera, los conjuntos T y S del Ejercicio 1 se definen como

$$T = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$$
$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$$

Ejemplo 2. El conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 2^6 \wedge x \text{ es potencia de } 2\}$$

es el conjunto formado por los elementos 2, 4, 8, 16, 32 y 64 y se define por extensión como

$$C = \{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}.$$

Una forma alternativa de definir por comprensión al conjunto C es

$$C = \{2^k \mid k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq 6\},$$

donde indicamos que los elementos de C son de la forma 2^k, siendo k un natural entre 1 y 6. Esto es, los elementos de C son 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 y 2^6.

Ejemplo 3. Describir por extensión los siguientes conjuntos:

$$M = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}, \qquad Q = \left\{\frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq k < 8\right\}$$

Los elementos de M son de la forma $2x + 1$, donde x es un natural menor que 6. Por lo tanto los elementos de M son

$$2 \cdot 1 + 1, \quad 2 \cdot 2 + 1, \quad 2 \cdot 3 + 1, \quad 2 \cdot 4 + 1, \quad 2 \cdot 5 + 1,$$

es decir:

$$M = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$$

En el caso de Q, sus elementos son racionales de la forma $\frac{k}{2}$, donde k es un natural menor que 8 y mayor o igual a 2. Por lo tanto sus elementos son

$$\frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{7}{2}.$$

Es decir:

$$Q = \{1,\ \frac{3}{2},\ 2, \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2}\}$$

El conjunto vacío

En la teoría de conjuntos es necesario considerar los conjuntos sin elementos. Veamos el siguiente ejercicio:

Ejemplo 4. Definir por extensión el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x < 0\}.$$

Notemos que los elementos de este conjunto cumple la propiedad de ser mayores que 0, y menores que 0. Como no existen números con esa propiedad, decimos que el conjunto A *vacío* y lo denotamos

$$A = \emptyset \qquad \text{o} \qquad A = \{\ \}.$$

§ Subconjuntos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5\}, \qquad \text{y} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Como podemos ver, los elementos de A: $1, 3$ y 5, también son elementos de B. Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B, o que A está *incluido en* B.

> Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B.
> Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido* o *contenido* en B.

En particular, todo conjunto está incluido en sí mismo: $A \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen los mismos elementos, es decir, si los elementos de A son elementos de B, y viceversa. En términos de la inclusión de conjuntos, A y B son iguales si $A \subseteq B$ y también $B \subseteq A$.

> Dos conjuntos A y B son *distintos* si no son iguales.

No siempre es sencillo detectar la igualdad de dos conjuntos.

Ejemplo 5. Consideremos los conjuntos

$$A = \{1,3\} \qquad \text{y} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 4n = -3\}.$$

En principio A y B están definidos de manera diferente, por lo cual no resulta evidente si son iguales o distintos. Los elementos de A son 1 y 3. Notemos que 1 y 3 verifican la propiedad que define a B. En efecto

$$1^2 - 4\cdot 1 = 1 - 4 = -3 \qquad \text{y} \qquad 3^2 - 4\cdot 3 = 9 - 12 = -3.$$

Luego podemos afirmar que

$$A \subseteq B.$$

Además, los elementos de B son los números naturales que satisfacen la ecuación

$$n^2 - 4n + 3 = 0,$$

y esta ecuación tiene exactamente como raíces a 1 y 3 (para verificar que éstas son las raíces podés resolver esta ecuación cuadrática usando lo visto en tu escuela). Por lo tanto también es cierto que todo elemento de B es un elemento de A, es decir

$$B \subseteq A.$$

Concluimos entonces que $A = B$.

Notemos que dos conjuntos pueden ser distintos pero tener uno o más elementos en común. Por ejemplo, $A = \{2,4\}$ y $B = \{1,4,6\}$ son distintos pero el 4 es un elemento de ambos conjuntos.

Dos conjuntos se dicen *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo 6. Los conjuntos $C = \{2,4,6\}$ y $D = \{1,3,5,7\}$ son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B, pero distinto de B,
se dice que A es un *subconjunto propio* de B, y se denota $A \subset B$.

Ejemplo 7. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par y } x < 10\}$ y $B = \{2,4,6,8,10\}$. En este caso, todo elemento de A es un elemento de B, y por lo tanto A es un subconjunto de B: $A \subseteq B$. Además se cumple que 10 pertenece a B pero no pertenece a A, por lo cual A y B no son los mismos conjuntos. Decimos entonces que A es un subconjunto propio de B y lo escribimos $A \subset B$.

Ejemplo 8. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$.

El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos. En efecto, si A es un conjunto cualquiera, entonces la proposición

Si $x \in \emptyset$ entonces $x \in A$

es verdadera, ya que el antecedente de la implicación ($x \in \emptyset$) es falso[1]. Es decir que para todo conjunto A se verifica que $\emptyset \subseteq A$.

Intervalos de números reales

Un *intervalo* de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene la siguiente propiedad: dados dos números a y b en el intervalo, todos los números comprendidos entre a y b también pertenecen al intervalo. Gráficamente, un intervalo se identifica en la recta real con un segmento o una semirrecta, con o sin sus extremos, o con toda la recta real.

Ejemplo 9. El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como un segmento con extremos 2 y 8, como se ilustra en la Figura 3.1 donde se lo destaca con un trazo más grueso.

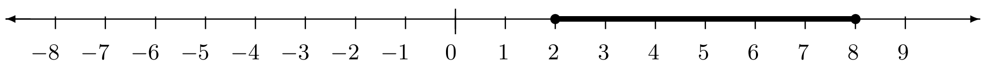

Figura 3.1: El intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$.

También se lo puede graficar con una línea paralela a la recta real, evitando la superposición con la misma para mayor claridad, como en la Figura 3.2.

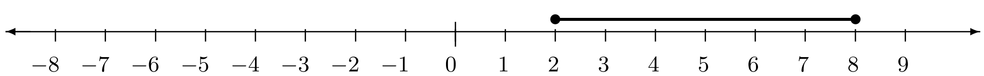

Figura 3.2: El intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$.

Los extremos resaltados del segmento indican que el 2 y el 8 pertenecen al intervalo.

Ejemplo 10. El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como una semirrecta, con origen en -5, sin contar este extremo, como se ilustra en la Figura 3.3.

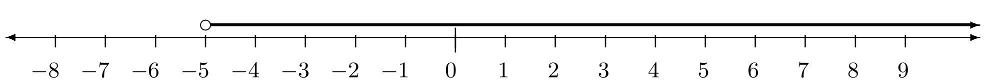

Figura 3.3: El intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$.

En este caso el circulito vacío en el extremo izquierdo indica que el número -5 no pertenece al intervalo, y la flecha a la derecha, que el intervalo no posee extremo derecho, este intervalo se grafica como una semirrecta.

Para los intervalos se utiliza una notación específica, y se los clasifica además en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos. Los distintos tipos de intervalos se definen a continuación y se ilustran en la Figura 3.4.

El intervalo cerrado $[a,b]$, con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

[1] Recordar que si p es falso, entonces la implicación $p \Rightarrow q$ es verdadera.

En particular, a y b son elementos de $[a,b]$.

El intervalo abierto (a,b), con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

En este caso, a y b no son elementos de (a,b). Los subconjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ y $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, también se llaman intervalos abiertos, y para éstos se utiliza la notación (a,∞) y $(-\infty,a)$, respectivamente. Al símbolo ∞ se lo denomina *símbolo de infinito*. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un intervalo abierto, que se denota $(-\infty,\infty)$.

Por último, los intervalos semiabiertos se denotan de la forma $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$ y $(-\infty,b]$, siendo a y b números reales. Se definen por comprensión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \\ (a,b] &= \{x \in R \mid a < x \le b\} \\ [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\} \\ (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \end{aligned}$$

En la Figura 3.4 se ilustran los distintos tipos de intervalos, asumiendo que a y b son números reales tales que $a < b$.

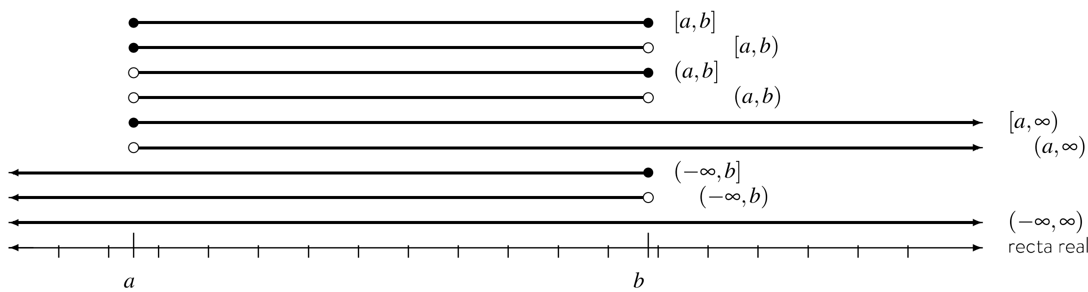

Figura 3.4: Intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

Ejemplo 11. Los intervalos $(-2,3]$ y $[-2,3)$ se grafican en la Figura 3.5.

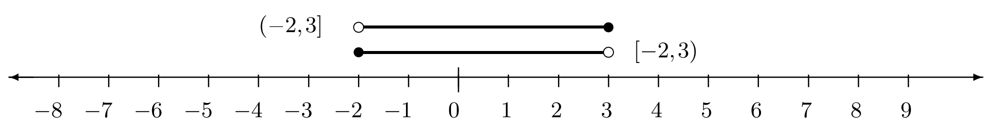

Figura 3.5: Intervalos $(-2,3]$ y $[-2,3)$.

Ejemplo 12. Si tomamos $a = b$ el intervalo cerrado $[a,b] = [a,a]$ tiene un sólo elemento: a. Por ejemplo para $a = b = 5$,

$$[5,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \le x \le 5\} = \{5\},$$

y este conjunto representa un punto en la recta real como se muestra en la Figura 3.6.

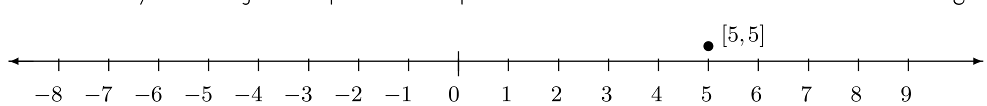

Figura 3.6: El intervalo $[5,5]$.

§ El conjunto universal

Cuando trabajamos con conjuntos es habitual considerar que los elementos pertenecen a un universo de elementos determinado. Por ejemplo, cuando considerábamos intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos, todos ellos eran conjuntos de números reales, sus elementos pertenecían al universo de números reales $\mathbb{R}$. Cuando hablamos de conjuntos de números pares, de conjuntos de potencias de un número natural, de conjuntos de múltiplos de un número natural, de conjuntos de números primos, etc., habitualmente nos referimos a elementos del universo de los números naturales o del universo de los números enteros. A dicho conjunto se lo llama *conjunto universal* y se lo denota por $\mathcal{U}$.

§ Diagramas de Venn

Es frecuente utilizar ciertos diagramas, llamados diagramas de Venn, para representar a los conjuntos. Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. La Figura 3.7 ilustra el diagrama de Venn para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

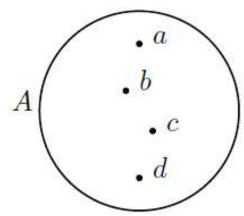

Figura 3.7: Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

En un diagrama de Venn el conjunto universal se representa con un rectángulo y el conjunto que nos interesa representar, digamos A, se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo. En la Figura 3.8, el diagrama de la izquierda ilustra el caso general.

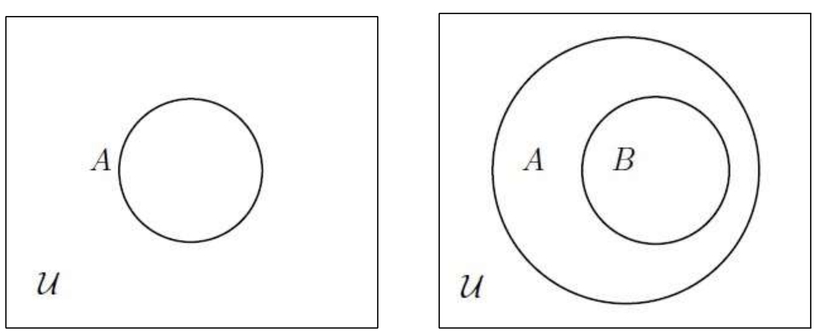

Figura 3.8: Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma grafica de visualizar las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura 3.8, el diagrama de la derecha representa que todo elemento de B, es también elemento de A.

Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto es usual sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota. Veremos ejemplos de esto al estudiar operaciones entre conjuntos, en el próximo capítulo.

Ejercicios

1. Definir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, en caso que sea posible.

   a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 4\}$
   b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid (3x-1)(x+2) = 0\}$
   d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid (3x-1)(x+2) = 0\}$
   e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 4\}$
   f) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$

2. Enumerar tres elementos cualesquiera de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es divisible por } 5\}$
   b) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ es primo }\}$
   c) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
   d) $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r < 1\}$

3. Describir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribe $\emptyset$ si son vacíos:

   a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 9\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$
   c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \wedge x \geq 2\}$

4. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos A y B decir si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, ambas o ninguna de las anteriores.

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par } \wedge x^2 \leq 140\}$ $\quad B = \{2,4,6,8,10,12\}$,
   b) $A = \{1,3,5,7,9,11\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x+1 \text{ es par } \wedge x \leq 12\}$,
   c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar } \wedge x^2 \leq 140\}$ $\quad B = \{1,3,5,7,9\}$
   d) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es un múltiplo de } 6\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}$

5. Representar en la recta real cada uno de los siguientes intervalos, y describirlos por comprensión:

   a) $[1,5]$
   b) $(-2,4)$
   c) $[-1,\infty)$
   d) $(-\infty,5]$
   e) $(2,7]$
   f) $[-4,0)$

SECCIÓN 3.4

Operaciones entre conjuntos

§ Introducción

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, como la adición, la sustracción, la multiplicación, etc., también existen operaciones entre conjuntos. Fijemos un conjunto universal $\mathcal{U}$ y consideremos todos los subconjuntos de $\mathcal{U}$. Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de $\mathcal{U}$.

§ Unión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

> *La unión $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B.*

Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\}$$

En particular, A y B son subconjuntos de $A \cup B$, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a $A \cup B$. En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos (ver Figura 3.9).

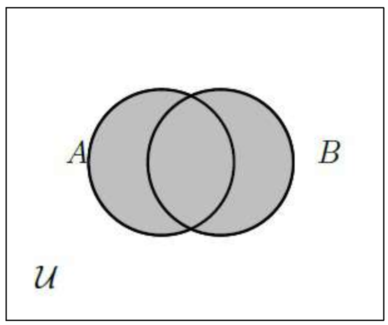

Figura 3.9: La unión de los conjuntos A y B.

Ejemplo 1. Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

Ejemplo 2. Si consideramos el intervalo abierto $(0, 1)$ y el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, entonces

$$(0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1]$$

Si A es un subconjunto de B, esto es, $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$, tal como lo ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Sean $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces la unión entre A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B.$$

Ejemplo 4. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 5\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 10\}$, entonces

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 5\},$$

puesto que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, $B \subseteq A$.

Como $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq \mathcal{U}$, las siguientes igualdades valen en general

$$A \cup A = A, \qquad A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

§ Intersección de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

La *intersección* $A \cap B$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B.

Por comprensión, la intersección de los conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

En particular, $A \cap B$ es subconjunto de A y de B, pues todos los elementos de $A \cap B$ pertenecen a A y a B. En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que está determinada por el interior común de las curvas cerradas que determinan los dos conjuntos. A esta región se la destaca con un sombreado (ver Figura 3.10).

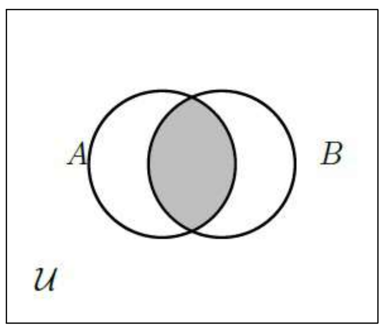

Figura 3.10: Intersección de A y B.

Ejemplo 5. Sean

$$\mathcal{U} = \mathbb{N}, \qquad A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 11\},$$
$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es primo}\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar } \wedge n \leq 20\}$$

Entonces,

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \quad A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}, \quad B \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Ejemplo 6. Si consideramos los intervalos $[0,5)$ y $(3,6]$, entonces

$$[0,5) \cup (3,6] = [0,6] \qquad \text{y} \qquad [0,5) \cap (3,6] = (3,5).$$

Ejemplo 7. La intersección del intervalo $(0,1)$ con el conjunto $\{0,1\}$ no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío:

$$(0,1) \cap \{0,1\} = \emptyset,$$

es decir que $(0,1)$ y $\{0,1\}$ son conjuntos disjuntos.

En general, dos conjuntos son *disjuntos* si y sólo si su intersección es vacía. Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y sólo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerradas que no se cortan.

Las siguientes igualdades valen en general,

$$A \cap A = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap \mathcal{U} = A.$$

Un caso muy particular de la intersección se obtiene cuando A es un subconjunto de B, de la siguiente forma,

- Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$.
- El reciproco de esta afirmación también es verdadero, esto es, si $A \cap B = A$, entonces $A \subseteq B$.

§ Complemento de un conjunto

Fijemos $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A un subconjunto de $\mathcal{U}$.

El complemento *de A con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A y se denota por A^c.*

En símbolos,

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado. (ver Figura 3.11).

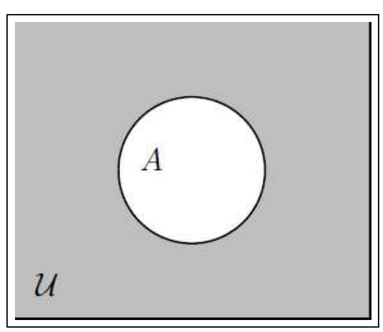

Figura 3.11: Complemento de A.

Ejemplo 8. Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y P es el conjunto de los números naturales pares, entonces P^c es el conjunto de los números naturales impares.

Ejemplo 9. Si $\mathcal{U}$ es un plano, y P es un punto en el plano, entonces $\{P\}^c$ es el plano sin el punto P.

La operación de complementación satisface las siguientes igualdades:

$$\emptyset^c = \mathcal{U}, \qquad \mathcal{U}^c = \emptyset, \qquad (A^c)^c = A.$$

§ Diferencia de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

La diferencia *o* complemento relativo $A - B$ *entre* A *y* B
es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A *y no pertenecen a* B.

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B, destacando la región que es interior a A y exterior a B (ver Figura 3.12).

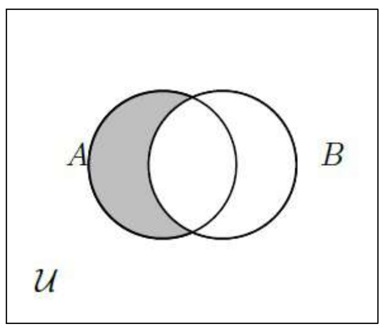

Figura 3.12: Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.

Ejemplo 10. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$.

Ejemplo 11. $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5\}$

Ejemplo 12. $[-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

Dejemos por un momento el mundo de los conjuntos numéricos para ver que la teoría de conjuntos puede servir para modelar y analizar situaciones del mundo real.

Ejemplo 13. Un relevamiento realizado entre los 143 alumnos del tercer año de la Licenciatura en Astronomía de esta Facultad arrojó el siguiente resultado: 48 de ellos son usuarios de twitter, 94 de facebook y 25 de instagram (y son las únicas tres redes sociales que utilizan). La mitad de los usuarios de twitter no usan ninguna otra red social. De la otra mitad, 15 usan también facebook y 12 usan también instagram. Hay solo 5 alumnos que tienen a instagram como única red social. Llamemos T, F e I respectivamente, a los conjuntos de alumnos usuarios de cada una de esas redes sociales. Podemos expresar toda esta información utilizando el lenguaje de la teoría de conjuntos. Por ejemplo:

a) Que la mitad de los usuarios de twitter no usen ninguna otra red social, nos dice que $T-(F\cup I)$ tiene 24 elementos.

b) Que de la otra mitad (los otros 24), 15 usen también facebook y 12 usen también instagram, nos dice que $F\cap T$ tiene 15 elementos, que $T\cap I$ tiene 12 elementos, y que , $I\cap T\cap F$ tiene 3 elementos.

Podemos volcar la información obtenida en un diagrama de Venn:

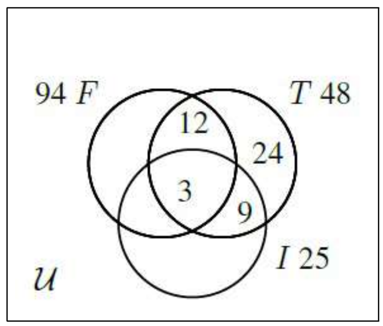

Figura 3.13: Los números indican cantidades de elementos.

Usando toda la información disponible, se deja como ejercicio completar el diagrama de la Figura 3.13 respondiendo las siguientes preguntas:

1. ¿cuántos alumnos pertenecen a $I-(F\cup T)$?
2. ¿cuántos pertenecen a $(F\cap I)-T$?
3. ¿cuántos pertenecen a $F-(I\cup T)$?
4. ¿cuántos alumnos no utilizan ninguna de las tres redes sociales?

§ Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Resumimos a continuación las propiedades que cumplen las operaciones de unión, intersección y complementación:

Propiedad conmutativa

$$A\cap B=B\cap A, \qquad A\cup B=B\cup A.$$

Propiedad asociativa

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), \qquad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

Idempotencia y complemento doble

$$A\cap A=A, \qquad A\cup A=A, \qquad (A^c)^c=A.$$

Propiedad distributiva

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\qquad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Leyes de De Morgan

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c,\qquad (A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran estas propiedades.

Ejemplo 14. Si

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{2,3,4\} \text{ y } C=\{1,3,5\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap C &= \{2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{3\}\\ A\cap(B\cap C) &= \{1,2,3\}\cap\{3\}=\{3\}.\\ (A\cup B)\cup C &= \{1,2,3,4\}\cup\{1,3,5\}=\{1,2,3,4,5\}\\ A\cup(B\cup C) &= \{1,2,3\}\cup\{1,2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 15. Sean

$$\mathcal{U}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ A=\{0,2,4,6,8\},\ B=\{0,3,6,9\} \text{ y } C=\{1,3,5,7,9\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A\cap C) &= \{0,6\}\cup\emptyset=\{0,6\},\\ A\cap(B\cup C) &= \{0,2,4,6,8\}\cap\{0,1,3,5,6,7,9\}=\{0,6\},\\ (A\cup B)\cap(A\cup C) &= \{0,2,3,4,6,8,9\}\cap\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=\{0,2,3,4,6,8,9\},\\ A\cup(B\cap C) &= \{0,2,4,6,8\}\cup\{3,9\}=\{0,2,3,4,6,8,9\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Si A, B y $\mathcal{U}$ son como en el Ejemplo 15, entonces

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c &= \{0,2,3,4,6,8,9\}^c=\{1,5,7\},\\ A^c\cap B^c &= \{1,3,5,7,9\}\cap\{1,2,4,5,7,8\}=\{1,5,7\},\\ (A\cap B)^c &= \{0,6\}^c=\{1,2,3,4,5,7,8,9\},\\ A^c\cup B^c &= \{1,3,5,7,9\}\cup\{1,2,4,5,7,8\}=\{1,2,3,4,5,7,8,9\}.\end{aligned}$$

Destacamos que en estos ejemplos sólo hemos hecho una comprobación en un caso particular, eso no basta para demostrar que la misma se cumple para todo par de conjuntos A y B.

§ Relación con la lógica proposicional

El paralelo entre las propiedades que acabamos de enunciar para operaciones entre conjuntos, y las propiedades que enunciáramos oportunamente para los conectivos lógicos es asombroso. No ocurre por casualidad, sino que es consecuencia de las siguientes propiedades de las operaciones de intersección, unión y complementación:

$$x \in A \cap B \text{ si y sólo si } x \in A \wedge x \in B$$
$$x \in A \cup B \text{ si y sólo si } x \in A \vee x \in B$$
$$x \in A^c \text{ si y sólo si } x \notin A$$

La intersección se define en términos de la conjunción, la unión en términos de la disyunción y la complementación en términos de la negación. Habiendo hecho esta observación, es comprensible que compartan tantas propiedades.

Sea F una proposición que es siempre falsa y V una proposición que es siempre verdadera, se cumplen las equivalencias

$$p \wedge \neg p \equiv F, \qquad p \vee \neg p \equiv V, \qquad p \wedge F \equiv F, \qquad p \wedge V \equiv p, \qquad p \vee F \equiv p, \qquad p \vee V \equiv V,$$

que nuevamente se corresponden a las siguientes igualdades de conjuntos

$$A \cap A^c = \emptyset, \qquad A \cup A^c = \mathcal{U}, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap \mathcal{U} = A, \qquad A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

Además de maravillarnos, esta relación entre los conectivos lógicos y las operaciones entre conjuntos habituales permite demostrar las igualdades presentadas en este capítulo, utilizando las propiedades respectivas de la lógica. Recordemos que las de la lógica, a su vez, se pueden demostrar de manera mecánica confeccionando la tabla de la verdad correspondiente.

Ejercicios

1. Dados $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ el conjunto universal y $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, definir por extensión los siguientes conjuntos:

   a) $A \cup B$
   b) $A - B$
   c) A^c
   d) $B^c \cap (C - A)$
   e) $(A \cap B)^c \cup C$
   f) $B \cap C$
   g) $A \cap (B \cup C)$
   h) $(A \cap B) \cup C$
   i) $(A \cap B) - C$
   j) $(A \cup B) - (C - B)$

2. En diagramas de Venn como el de la figura, sombrear los conjuntos siguientes:

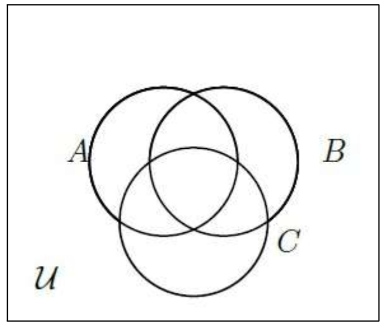

Figura 3.14: Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $(A \cup C) \cap B$
d) $A \cap B \cap C$
e) $(A \cup C)^c$
f) $(A - B) \cap C$
g) $(A \cap C) \cup C^c$
h) $(A \cap B \cap C)^c$
i) $(A - B) - C$

3. De un total de 64 alumnos de un colegio:

- 15 estudian solamente francés,
- 11 estudian solamente francés e inglés;
- 12 estudian solamente alemán;
- 8 estudian solamente francés y alemán;
- 10 estudian solamente inglés;
- 5 estudian solamente inglés y alemán; y
- 3 los tres idiomas.

Ayudandote de un diagrama de Venn como el del ejercicio anterior, determina:

a) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
b) ¿Cuántos estudian alemán?
c) ¿Cuántos estudian alemán e inglés?
d) ¿Cuántos estudian francés?

4. Describir por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y graficarlo en la recta real. Indicar si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso representarlo en la notación de intervalos.

a) $[-1, \infty) \cap (-3, 2)$.
b) $(-\infty, 2) \cup [0, \infty)$
c) $(-3, 1] \cap (2, \infty)$
d) $(-2, 3] \cup (-\infty, 1)$
e) $[-3, 0) \cap (-2, 3)$

5. Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la intersección y la unión, y las Leyes de De Morgan, comprobar las siguientes identidades. Ilustrar cada caso con un diagrama de Venn. Recordar que $A - B = A \cap B^c$.

a) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$
b) $A \cap (B \cup A)^c = \emptyset$
c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$
e) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

6. Simplificar la expresión de modo que A, B y C aparezcan a lo sumo una vez:

a) $((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$
b) $(A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$

SECCIÓN 3.5

Cuantificadores

§ Funciones proposicionales

Consideremos las siguientes proposiciones:

q : ”El perro es un animal.”
r : ”La rosa es un animal.”
s : ”La vaca es un animal.”

Las tres proposiciones tienen en común el *predicado lingüístico* ”es un animal”, y tienen diferente el *sujeto*. La frase ”es un animal” está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

x es un animal

obtenemos una oración que, para cada sujeto x constituye una proposición diferente. Así, si a x le damos el valor $x =$ ”El perro” se obtiene la proposición

El perro es un animal

que es verdadera, mientras que si a x le damos el valor $x =$ “La rosa” obtenemos la proposición

La rosa es un animal

que es falsa. En este ejemplo, la frase

x es un animal

es una *función proposicional*, y la variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso*. A la operación que reemplaza la variable por un valor en ese conjunto la llamamos *instanciación de la variable x*. Entonces, las funciones proposicionales son funciones que para cada valor de un cierto universo devuelven una proposición, que se obtiene instanciando la variable en dicho valor. A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la variable entre paréntesis. Por ejemplo:

$P(x)$: x es un animal.

Gracias a nombrar $P(x)$ a esta función proposicional, también podemos nombrar a sus instancias. Por ejemplo, P(El perro) es la instancia ”El perro es un animal” de la función proposicional $P(x)$.

§ Cuantificadores

Hemos visto que las funciones proposicionales permiten construir proposiciones por instanciación de sus variables. Los *cuantificadores* nos permiten construir otras proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Ejemplifiquemos esto. Si consideramos la función proposicional

$$P(x) : x \text{ es mayor que } 0,$$

podemos particularizar esto diciendo:

Existe un número real que es mayor que 0,

que es una proposición verdadera, o generalizarlo diciendo

Todos los números reales son mayores que 0,

que es una proposición falsa. Notemos que tanto en la particularización como en la generalización se especifica un conjunto en donde toma valores la variable, en este ejemplo el conjunto de los números reales.

Existe una notación específica para la particularización y la generalización:

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \mid \ x > 0,$$

que se lee *existe un* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* x *es mayor que 0*; mientras que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x > 0$$

se lee *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* x *es mayor que* 0.

El símbolo $\forall$ se llama *cuantificador universal*
y el símbolo $\exists$ se llama *cuantificador existencial*

Como ya lo hemos afirmado, un cuantificador transforma una función proposicional en una proposición, que tiene un valor de verdad.

Ejemplo 1. Consideremos la función proposicional $P(n)$: *4 n es par*. Entonces la proposición

$$p : \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n)$$

es decir, "para todo n natural se cumple que $4n$ es par", equivale a enunciar la conjunción

$$4 \cdot 1 \text{ es par y } 4 \cdot 2 \text{ es par y } 4 \cdot 3 \text{ es par y } 4 \cdot 4 \text{ es par y } \dots$$

La proposición p es verdadera ya que cada una de las proposiciones de la conjunción es verdadera.

Ejemplo 2. Dada la función proposicional

$$P(n)\text{: } n \text{ es un número mayor que } 1,$$

entonces la proposición

$$q : \forall n \in \mathbb{N}, \ P(n)$$

está enunciando que para todo n natural, se cumple que n es mayor que 1, que equivale a enunciar la conjunción

1 es mayor que 1 y 2 es mayor que 1 y 3 es mayor que 1 y 4 es mayor que 1 y ...

que es falso ya que la primera proposición de la conjunción es falsa, 1 no es mayor que 1. Entonces la proposición q es falsa, no importa que para todos los demás valores de n $(2,3,4,\ldots)$ la proposición $P(n)$ sea verdadera.

Si aplicamos el cuantificador existencial y enunciamos

$$r : \exists n \in \mathbb{N} \mid P(n),$$

equivale a enunciar la disyunción

1 es mayor que 1 o 2 es mayor que 1 o 3 es mayor que 1 o 4 es mayor que 1 o ...

La proposición r es verdadera, pues al menos una de las proposiciones de la disyunción, por ejemplo la tercera, es verdadera, es decir, 3 es mayor que 1.

> Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
> $\forall x \in A,\ P(x)$
> es verdadera si y sólo si la instancia $P(a)$ es verdadera para *todos* los $a \in A$.

De esta forma, para demostrar que la proposición $\forall x \in A,\ P(x)$ es verdadera debo ver que $P(a)$ es verdadera para todas las instancias posibles. Para demostrar que es falsa, en cambio, basta con encontrar un elemento $a \in A$ tal que $P(a)$ sea falsa. En este caso, a suele denominarse un *contraejemplo* de $\forall x \in A,\ P(x)$.

Ejemplo 3. Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la función proposicional

$$P(n): n^2 \leq 40$$

entonces la proposición $\forall n \in A,\ P(n)$ es V pues se verifica que el cuadrado de todos los números naturales entre 1 y 6 es menor que 40, mientras que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ es F, dado que no vale $P(7)$. El número 7 en este caso es un contraejemplo.

> Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
> $\exists x \in A \mid P(x)$
> es verdadera si y sólo si la instancia $P(a)$ es verdadera para *algún* $a \in A$.

Ejemplo 4. Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la función proposicional entonces la proposición $\exists n \in \mathbb{N} \mid Q(n)$ es V puesto que vale $Q(7)$, mientras que $\exists n \in A \mid Q(n)$ es F, dado que ninguno de los elementos $n \in A$ satisface $Q(n)$.

$$Q(n): n^2 > 40$$

Ejemplo 5. Sea $A = \emptyset$. Entonces, cualquiera sea la función proposicional $P(x)$, se tiene que $\forall x \in A,\ P(x)$ es V mientras que $\exists x \in A \mid P(x)$ es F.

§ Negación de proposiciones cuantificadas

La negación de una proposición cuantificada es también una proposición, que a su vez puede describirse con un cuantificador. Sea p la proposición $\forall x \in A,\ P(x)$. Recordando lo que aprendimos sobre la negación, $\neg p$ es una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, y verdadera siempre que p sea falsa. Entonces $\neg p$ es verdadera si y sólo si p es falsa. ¿Y cuándo es falsa p? Cuando no sea cierto que para todos los $a \in A$ se cumpla $P(a)$, es decir, cuando para alguno de ellos, $P(a)$ no se cumpla. Esto último equivale a que para algún $a \in A$, $\neg P(a)$ sea verdadero. Luego

$$\neg(\forall x \in A,\ P(x)) \equiv \exists x \in A \mid \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición "todos los números naturales son primos" equivale a la proposición "existe un número natural que no es primo", que es verdadera. Análogamente, la negación de la proposición $\exists x \in A \mid P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(a)$ es falsa para todo $a \in A$. Equivalentemente, $\neg(\exists x \mid P(x))$ es verdadera si $\neg P(a)$ es verdadera para todo $a \in A$. Luego

$$\neg(\exists x \in A \mid P(x)) \equiv \forall x \in A,\ \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición "existe un planeta que está habitado" equivale a la proposición "todos los planetas están deshabitados" (que se puede enunciar también como "ningún planeta está habitado").

§ Funciones proposicionales de varias variables

Además de los ejemplos de funciones proposicionales como los que hemos visto, con una sola variable, es posible encontrar otros con varias variables, por ejemplo

$$R(x,y) : x \text{ es menor o igual que } y.$$

Para obtener una proposición por instanciación, debemos instanciar ambas variables. Por ejemplo, $R(1,3)$ es la proposición "1 es menor o igual que 3", que es verdadera, mientras que $R(4,2)$, es la proposición "4 es menor o igual que 2" que es falsa.

Si queremos obtener una proposición utilizando los cuantificadores, también debemos cuantificar ambas variables. Por ejemplo, si $R(x,y)$ es la función proposicional recientemente definida, entonces

- $p : \forall x \in \mathbb{N},\ (\exists y \in \mathbb{N} \mid R(x,y))$ es la proposición que afirma que todo numero natural es alcanzado o superado por algún otro, la cual es V.
- $q : \exists x \in \mathbb{N} \mid (\forall y \in \mathbb{N},\ R(x,y))$ es la proposición que afirma que hay un número natural que es más chico o igual que todos los demás, la cual también es V.
- $r : \exists y \in \mathbb{N} \mid (\forall x \in \mathbb{N},\ R(x,y))$ es la proposición que afirma que hay un número natural que es más grande o igual que todos los demás, la cual es F.

§ Renombre de variables

Los nombres de las variables que estamos usando junto a los cuantificadores normalmente no aparecen en el lenguaje coloquial. Proposiciones tales como "para todo número natural existe uno mayor" es representada por $\forall x \in \mathbb{N},\ (\exists y \in \mathbb{N} \mid x < y)$ que requirió que se introdujeran las variables x e y. La elección de esos nombres fue arbitraria, la misma proposición podría representarse por $\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists m \in \mathbb{N} \mid n < m)$ y cualquier otro par de nombres que eligiéramos para esas variables.

Siempre que una proposición pueda obtenerse a partir de otra solamente reemplazando los nombres de las variables cuantificadas, diremos que las dos proposiciones son equivalentes. Debe tenerse cuidado con reemplazar consistentemente todas las ocurrencias de una variable por la misma variable, y que no se reemplacen dos variables por una misma, o una que ya se esté utilizando en la proposición.

Por ejemplo, $\forall x \in \mathbb{N},\ (\exists y \in \mathbb{N} \mid x < y)$ es equivalente a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists m \in \mathbb{N} \mid n < m)$$

y también a

$$\forall y \in \mathbb{N},\ (\exists x \in \mathbb{N} \mid y < x).$$

Sin embargo, no es equivalente a

$$\forall y \in \mathbb{N},\ (\exists x \in \mathbb{N} \mid x < y),$$

ni a

$$\forall i \in \mathbb{N},\ (\exists j \in \mathbb{N} \mid j < i)$$

ni tampoco a

$$\forall z \in \mathbb{N},\ (\exists z \in \mathbb{N} \mid z < z).$$

Al reemplazo correcto de los nombres de las variables cuantificadas por otros nombres llamamos *renombre de variables*.

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, se define la relación $R(x,y)$ por medio la función proposicional "x es múltiplo de y". Representar cada una de las siguientes frases utilizando cuantificadores.

   a) Algún número entero es múltiplo de 2020.
   b) 2020 es múltiplo de algún número entero.
   c) Todos los múltiplos de 170 son múltiplos de 17.
   d) Algún múltiplo de 11 es múltiplo de 27
   e) Todos los números enteros son múltiplos de 1.
   f) Existe al menos un número entero que es múltiplo de $3, 5, 11$ y 17, en simultaneo.

2. Analizar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

   a) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 > 0.$
   b) $\forall x \in \mathbb{Z},\ (x \in \mathbb{N} \vee x \leq 0).$
   c) $\forall x \in \mathbb{N}, (\exists y \in \mathbb{N} \mid x < y).$
   d) $\exists y \in \mathbb{Z} \mid (\forall x \in \mathbb{N},\ y < x).$

3. Calcular la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

   a) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{\pi}.$
   b) $\forall x \in \mathbb{Q},\ 1/x \in \mathbb{Q}.$
   c) $\forall x \in \mathbb{Q},\ (\exists y \in \mathbb{Q} \mid xy = 1).$
   d) $\exists x \in \mathbb{Q} \mid (\forall y \in \mathbb{Q},\ xy = x).$

4. Sobre renombre de variables cuantificadas:

   a) Renombrar x por z en $\exists x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{\pi}.$
   b) Renombrar x por i e y por j en $\exists x \in \mathbb{Q} \mid (\forall y \in \mathbb{Q},\ xy = x).$
   c) Renombrar x por z e y por x en $\exists x \in \mathbb{Q} \mid (\forall y \in \mathbb{Q},\ xy = x).$

SECCIÓN 3.6

Producto cartesiano

§ Pares ordenados y producto cartesiano

Dos elementos dados en cierto orden forman un *par ordenado*. Por ejemplo, un punto geográfico está determinado por las coordenadas latitud y longitud, una fecha en el año está dada por dos números: el mes y el día. En general, si x e y son dos objetos, se puede formar el par ordenado de x e y, y este par se denota como (x,y). De esta manera, la fecha $(10,03)$ significa "3 de octubre", mientras que $(03,10)$ indica el "10 de marzo". Como vemos, el orden en que se dan los elementos del par ordenado es relevante. Se los llama *primera* y *segunda coordenadas*.

Los elementos que forman un par ordenado pueden o no pertenecer a un mismo conjunto. Por ejemplo, en el caso de las fechas, la primera coordenada es un número natural entre 1 y 12, mientras que la segunda es un natural entre 1 y 31. También podemos formar los pares ordenados de la forma

(apellido, nro. de documento),

donde la primera coordenada de cada par es un apellido tomado de un conjunto de personas, y la segunda coordenada es un número. En este caso, las coordenadas son de distinta naturaleza.

> *Sean A y B dos conjuntos. El conjunto de todos los pares ordenados tales que el primer miembro del par ordenado es un elemento de A y el segundo miembro es un elemento de B, se llama el* producto cartesiano *de A por B y se escribe $A \times B$.*
>
> *Si $A = B$, se puede escribir indistintamente $A \times A$ o A^2.*

En símbolos, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Ejemplo 1. Si $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{4,5,6\}$, el producto cartesiano de A por B es

$$A \times B = \{(2,4),\ (2,5),\ (2,6),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}$$

Ejemplo 2. Si $A = \{\alpha,\ \beta\}$ y $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\ (\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}\\
B \times A &= \{(1,\alpha),\ (1,\beta),\ (2,\alpha),\ (2,\beta),\ (3,\alpha),\ (3,\beta)\}\\
A^2 &= \{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha),(\beta,\beta)\}\\
B^2 &= \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}.
\end{aligned}$$

Si los conjuntos tienen una cantidad finita de elementos puede resultar útil el uso de una tabla de doble entrada, como la siguiente:

$A\times B$	1	2	3
α	$(\alpha,1)$	$(\alpha,2)$	$(\alpha,3)$
β	$(\beta,1)$	$(\beta,2)$	$(\beta,3)$

$B\times A$	α	β
1	$(1,\alpha)$	$(1,\beta)$
2	$(2,\alpha)$	$(2,\beta)$
3	$(3,\alpha)$	$(3,\beta)$

Así, en la primera tablas del producto cartesiano $A \times B$, tenemos que la fila correspondiente al elemento α de A contiene todos los pares ordenados de $A \times B$ cuya primera coordenada es α, mientras que la columna correspondiente al elemento 1 de B contiene todos los pares ordenados de $A \times B$ cuya segunda coordenada es 1. Con este mismo criterio, se llena la tabla para los demás elementos de $A \times B$. De manera similar se construye la tabla correspondiente a $B \times A$.

§ Representación en ejes cartesianos

Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales, entonces resulta útil la representación gráfica del producto cartesiano en *ejes cartesianos*. Los ejes cartesianos están formados por dos rectas perpendiculares, donde una de ellas representa el *eje de las abscisas* y el otro el *eje de las ordenadas*. En ambas rectas se representan los números reales y el punto de intersección de ambas corresponde *usualmente* al origen de coordenadas, es decir, al 0 en ambos ejes. Al lado de cada eje se deja indicada una letra que sugiere qué coordenada se representa en dicho eje. Las "flechas" dibujadas indican el sentido creciente en cada una de las rectas (Figura 3.15).

Dado un punto P en el plano, trazamos las rectas perpendiculares a cada uno de estos ejes por el punto P. Los puntos de intersección de cada una de estas rectas con los ejes de las abscisas y de las ordenadas se denominan *abscisa* y *ordenada* del punto P, respectivamente, o también primera y segunda coordenada. De este modo, cada punto P del plano está en correspondencia con un par ordenado (x,y), donde x es la abscisa de P e y es la ordenada. A su vez, a cada par ordenado (a,b) le corresponde un punto del plano cuya abscisa es a y cuya ordenada es b.

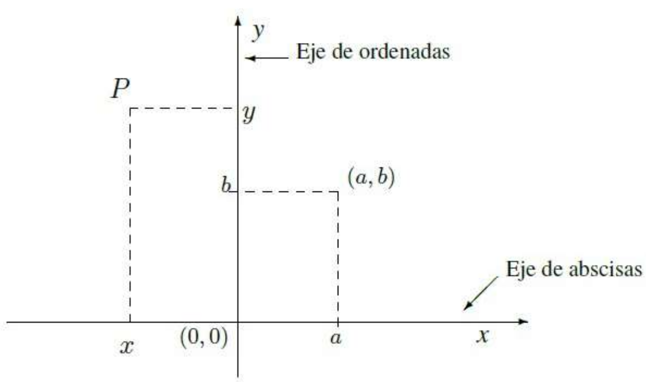

Figura 3.15: Representación de puntos en ejes cartesianos

En la Figura 3.16 podemos ver la representación gráfica en ejes cartesianos de (una parte de) los siguientes conjuntos:

$$C = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \ \mid m = n^2\} \qquad L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid y = x+1\}$$

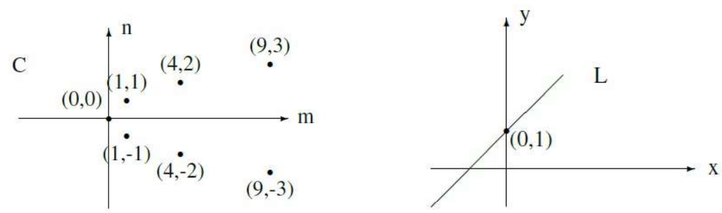

Figura 3.16: Representación gráfica de los conjuntos C y L

Notemos que C es un conjunto infinito de puntos *separados*, pues sus coordenadas son números enteros, mientras que L es una recta continua de puntos. También podemos graficar regiones del plano, como muestra la Figura 3.17, siendo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid -1 \leq x \leq 2, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

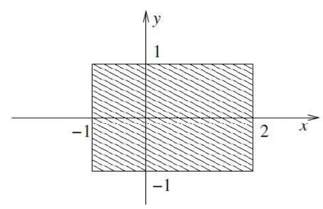

Figura 3.17: Representación gráfica del conjunto R.

Pueden ser también regiones no acotadas. Por ejemplo, la banda infinita

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid 0 \leq y < 3\},$$

representada en la Figura 3.18.

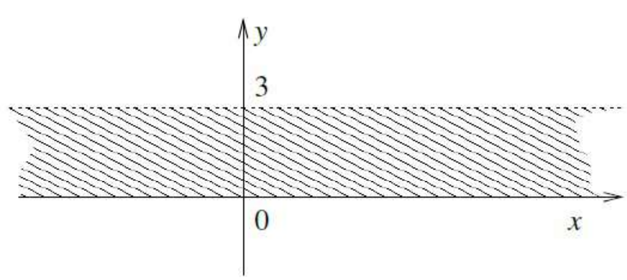

Figura 3.18: Representación gráfica del conjunto A.

La línea punteada en el borde superior de la banda indica que los puntos con segunda coordenada igual a 3 no pertenecen a A, mientras que la línea llena inferior indica que los puntos con segunda coordenada igual a 0 sí pertenecen.

Observación: Cada punto del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ que no este sobre el eje x ni el eje y, pertenece a uno de los cuatro *cuadrante* del plano, según se ilustra en la Figura 3.19.

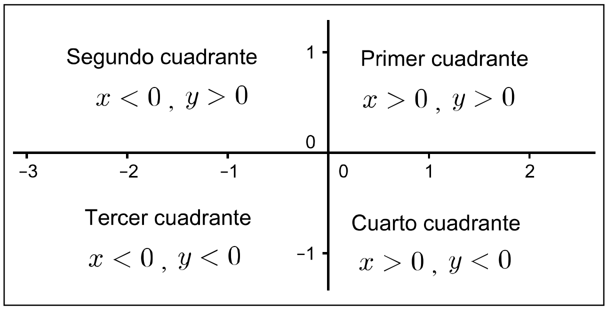

Figura 3.19: Cuadrantes en el plano

Ejercicios

1. Sea $A = \{a,\ b,\ c\}$ y $B = \{a,\ b,\ d\}$.

    a) Listar los pares ordenados de $A \times A$.
    b) Listar los pares ordenados de $A \times B$.
    c) Listar los elementos del conjunto $\{(x,y) \in A \times B \mid x = y\}$

2. Sean los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{2,5,10\}$. Describir por extensión los siguientes conjuntos:

    a) $\{(a,b) \in A \times B \mid a+b < 11\}$.
    b) $\{(a,b) \in A \times B \mid a+b \geq 11 \wedge a+b$ es par$\}$.

3. Definir por comprensión los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ representados en la Figura 3.20:

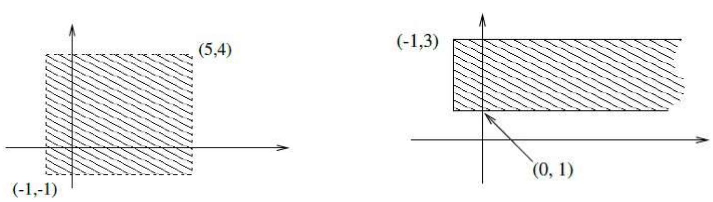

Figura 3.20

4. Graficar en ejes cartesianos las siguientes regiones o conjuntos:

    a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, -2 < y < 3\}$
    b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2\}$
    c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
    d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 2\}$
    e) $\{(x,y) \in R^2 \mid y < 3\}$

5. Describir por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

    a) El conjunto de puntos que en un sistema cartesiano forman el eje de las ordenadas.
    b) El conjunto de puntos que en un sistema cartesiano forman el eje de las abcisas.
    c) El conjunto de puntos que en un sistema cartesiano forman el segundo cuadrante.