PRÁCTICO 3

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA. DISTRIBUCIONES CLÁSICAS

1. Un mazo de 52 cartas es mezclado y se dan 13 cartas a cada uno de los 4 jugadores A, B, C y D.

   a) Sea X el número de ases que el jugador D tiene en su mano. Calcular la función de densidad discreta de X.

   b) Si nos restringimos a la situación en que $X = 1$ y definimos Y como la variable aleatoria que mira el número de ases del jugador A, ¿cuál es la función de densidad discreta de Y?

2. Un equipo de fútbol tiene que jugar dos partidos en esta semana. El resultado del primer partido es independiente del resultado del segundo. La probabilidad de que no pierda el primer partido es 0.4 y la probabilidad de que no pierda el segundo es 0.3. Si no pierde un partido en particular, la probabilidad de ganar ese partido es la misma que la de empatarlo. Por cada partido, el equipo recibe dos puntos si gana, un punto si empata y 0 puntos si pierde. Hallar la distribución de probabilidad del número total de puntos que recibe el equipo al finalizar la semana.

3. **Problemas de coincidencias**.

   Supongamos que n cartas marcadas con $1,\dots,n$ son mezcladas y puestas en fila. Sea X la variable aleatoria "número de coincidencias" (i.e., la carta i está en la posición i).

   a) Sea A_i el evento "la carta i está en la posición i", con $i = 1,\dots,n$. Sea S_k definida por

   $$S_k = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$$

   con $k = 1,\dots,n$. Mostrar que

   $$P(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \quad \text{y que} \quad S_k = \frac{1}{k!}.$$

   b) Mostrar que la probabilidad de que no haya coincidencias es $p_n = P(X=0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ y que $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$.

   c) Mostrar que $P(X = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}$, donde p_j denota la probabilidad de que no haya coincidencias cuando j cartas se ubican en fila.

   d) Mostrar que $|P(X=0)-P(X=1)| = \frac{1}{n!}$.

4. Distribuyamos aleatoriamente n bolas en m celdas, y sea X el número de celdas vacías.

   a) Probar que la probabilidad de que ninguna celda quede vacía es

   $$P(X=0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n} = p_{n,m}$$

   b) Probar que $P(X=k) = \binom{m}{k} (\frac{m-k}{m})^n p_{n,m-k}$.

5. Distribuir aleatoriamente n bolas en m celdas. Sea U la variable aleatoria "número de bolas que caen en la celda 1". Hallar la distribución de U.

6. Sean n bolas distribuídas aleatoriamente en m celdas, y sea r un entero positivo con $r \leq m$. Sea V la variable aleatoria "número de bolas que caen en r celdas especificadas".

   Mostrar que $P(V = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{r^k(m-r)^{n-k}}{m^n}$ con $k = 0, \ldots, n$.

7. Con el propósito de verificar la exactitud de sus estados financieros, las compañías tienen auditores permanentes para verificar los asientos contables. Supóngase que los empleados de una compañía efectúan asientos erróneos el 5% de las veces. Si un auditor verifica tres asientos al azar:

   a) Hallar la distribución de probabilidad para Y, el número de errores detectado por el auditor.
   b) Hallar la probabilidad de que el auditor detecte más de un error.

8. Un complejo sistema electrónico está construido con cierto número de componentes de apoyo en sus subsistemas. Un subsistema contiene cuatro componentes idénticos, cada uno con una probabilidad de 0.2 de fallar en menos de 1000 horas. El subsistema funciona si dos componentes cualesquiera de los cuatro trabajan en forma adecuada. Se supone que los componentes operan independientemente.

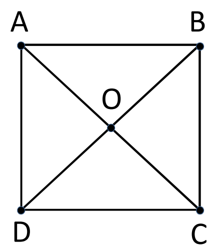
   a) Hallar la probabilidad de que exactamente dos de cuatro componentes resistan más de 1000 horas.
   b) Hallar la probabilidad de que el subsistema funcione por más de 1000 horas.

9. a) Sea X el número de caras obtenidas en 4 lanzamientos de una moneda honesta. Dibujar el gráfico de $F(x) = P(X \leq x)$, la función de distribución acumulada de X.
   b) Si adoptáramos $G(x) = P(X < x)$ como definición de función de distribución de X, ¿cuál sería la diferencia entre el gráfico de G y el dibujado en a)?

10. Una concentración particular de una sustancia química, encontrada en agua contaminada, resulta ser mortal para el 20% de los peces expuestos a esta concentración durante 24 horas. Se colocan 20 peces en un tanque que contiene agua con esta concentración del producto químico.

    a) Determinar la probabilidad de que exactamente 14 sobrevivan.
    b) Determinar la probabilidad de que por lo menos 10 sobrevivan.
    c) Obtener la probabilidad de que a lo sumo 16 sobrevivan.

11. Un guardia de seguridad se encuentra en la base de control (punto O) y debe vigilar los puntos A, B, C y D del siguiente diagrama:



    Se traslada a uno de los cuatro puntos de vigilancia, eligiéndolo al azar. Luego vuelve a la base o se dirige a uno de los dos puntos de vigilancia adyacentes, teniendo para cada una de las tres posibilidades la misma probabilidad. Este procedimiento continúa hasta que el guardia regresa a la base de control.

    a) Sea $X =$ Número total de visitas a puntos de vigilancia. Obtener la distribución de probabilidad de X.

b) Obtener la función de distribución acumulada de X.
c) Sea $Y =$ Número de movimientos que el guardia realiza. Obtener la distribución de probabilidad de Y.

12. Un geólogo ha recolectado 10 especímenes de roca basáltica y 12 de granito. Si instruye a un asistente de laboratorio para que seleccione al azar 15 de los especímenes para analizarlos,
    a) ¿cuál es la función de densidad del número de especímenes de basalto seleccionados para ser analizados?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los especímenes de uno de los dos tipos de roca sean seleccionados para el análisis?

13. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.
    a) Describir el espacio muestral asociado a este experimento.
    b) Encontrar las funciones de densidad discreta y de distribución asociadas a X.
    c) Calcular la probabilidad de que haga falta un número par de tiradas.
    d) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número total de tiradas hasta obtener el tercer as. Dar la distribución de Y.

14. a) Sea $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ y $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Demostrar que $P(X=0) = P(Y > n-1)$.
    b) Hallar el número de bebés que debe tener una pareja para que la probabilidad de tener al menos un varón sea $\geq \frac{8}{9}$.

15. Se sabe que el 10% de los pacientes que presentan ciertos síntomas tienen una determinada enfermedad. El diagnóstico final de la misma depende de la sangre. Sin embargo, como los análisis individuales son caros, el hematólogo espera hasta que N pacientes que presentan los mismos síntomas lo visiten. Entonces, mezcla la sangre de los N pacientes y le hace el análisis. Si ninguna de las N personas está enferma, el análisis sobre la muestra de la mezcla de sangre es negativo. Sin embargo, si uno de los pacientes está enfermo, entonces el análisis dará positivo, y el hematólogo deberá hacer análisis individuales para determinar cuál de los pacientes tiene la enfermedad.
    a) Hallar la probabilidad de que el análisis de sangre mezclada dé negativo.
    b) Si X es el número de análisis que debe hacer el hematólogo sobre los N pacientes, determinar la función de densidad de X.

16. Un médico necesita 5 personas con cierta enfermedad para probar un nuevo tratamiento. Supongamos que la probabilidad de que una persona que tiene esta enfermedad, elegida al azar, acepte a participar es de 0.2.
    a) ¿Cuál es la función de densidad de la variable “número de pacientes que rechazan participar antes de encontrar los 5 que acepten"?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesite entrevistar a 15 pacientes para encontrar los 5 dispuestos a participar?

17. En un concurso de pesca cada pescador paga \$100 por participar. Las cantidades de peces que cada uno de los pescadores puede obtener durante el desarrollo del concurso es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4.5$. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de \$50 por cada pieza. Calcular la función de densidad de la ganancia neta.

18. Un minorista ha verificado que la demanda de cajones es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ cajones por semana. El minorista completa su stock los lunes por la mañana a fin de tener 4 cajones al principio de la semana, y no vuelve a completar su stock sino hasta la semana siguiente. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:
    a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?
    c) ¿Cuál es el mínimo número de cajones con los que deberá iniciar la semana para que la probabilidad de cumplir con todos los pedidos sea mayor o igual a 0.99?
    d) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?
19. Se tienen 3 fuentes radiactivas F1, F2 y F3. El número de partículas que emite cada fuente por hora es una variable con distribución $P(\lambda_i)$, siendo $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Un investigador elige una fuente al azar y observa que ésta emite 4 partículas en una hora. Encontrar la probabilidad de que haya elegido la fuente F2.