Probabilidad y Estadística
Profesorados, Lic. en Computación y Lic. en Matemática Aplicada

Guía N° 8: Pruebas de hipótesis basadas en una sola muestra

Ejercicio 1.
La calibración de una balanza debe ser revisada después de pesar 25 veces un espécimen de prueba de 10 kg. Se supone que los resultados de diferentes pesos son independientes entre sí y que el peso en cada intento está normalmente distribuido con $\sigma = 0,200$ kg. Se representa con μ el verdadero promedio de lectura de peso de la balanza.
a) ¿Qué hipótesis probaría?
b) Se supone que la balanza debe ser revisada si $\bar{x} \leq 9,8968$ o $\bar{x} \geq 10,1032$. ¿Cuál es la probabilidad de que la revisión se realice cuando no sea necesaria?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la revisión se considere innecesaria cuando $\mu = 10,1$? ¿Y cuando $\mu = 9,8$?
d) Sea $z = \frac{\bar{x}-10}{\sigma/\sqrt{n}}$. ¿Para qué valor de c es la región de rechazo de la parte b) equivalente a la región bilateral $z \geq c$ o $z \leq -c$?

Ejercicio 2.
Considere que el estadístico de prueba Z tiene distribución normal estándar cuando $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera y sea z el valor observado de Z. Proporcione el nivel de significación para cada una de las siguientes situaciones:
a) $H_a : \mu > \mu_0$, región de rechazo $z \geq 1,88$.
b) $H_a : \mu < \mu_0$, región de rechazo $z \leq -2,75$.
c) $H_a : \mu \neq \mu_0$, región de rechazo $z \geq 2,88$ o $z \leq -2,88$.

Ejercicio 3.
Se ha determinado el punto de fusión de cada una de 16 muestras de cierta marca de aceite vegetal hidrogenado, con resultado $\bar{x} = 94,32$. Suponga que la distribución del punto de fusión es normal con $\sigma = 1,20$. Considere $H_0 : \mu = 95$ contra $H_a : \mu \neq 95$.
a) Lleve a cabo la prueba de hipótesis a nivel 0,01.
b) Si se utiliza una prueba de nivel 0,01, ¿cuál es $\beta(94)$, la probabilidad de error de tipo II cuando $\mu = 94$?
c) ¿Qué valor de n es necesario para asegurar que $\beta(94) = 0,1$ cuando $\alpha = 0,01$?

Ejercicio 4.
Considere el ejercicio 5 de la guía 7. Lleve a cabo una prueba de hipótesis de nivel de significación 0,05 para determinar si las mediciones del laboratorio son aceptables y compare con las conclusiones obtenidas a partir del intervalo de confianza.

Ejercicio 5.
Se supone que el diámetro promedio real de unas ruedas de cierto tipo es de 0,5 pulgadas. Para verificar esto, se hará una prueba t bilateral a partir de una muestra de n ruedas. ¿Qué conclusión es adecuada en cada uno de los casos siguientes?
a) $n = 13$ $t_{obs} = 1,6$ $\alpha = 0,05$.
b) $n = 13$ $t_{obs} = -1,6$ $\alpha = 0,05$.
c) $n = 25$ $t_{obs} = -2,6$ $\alpha = 0,01$.

Ejercicio 6.
Se realizaron $n = 26$ observaciones del tiempo de escape (en segundos) para trabajadores petroleros, en un ejercicio simulado, a partir de las cuales se calcularon el promedio y la desviación estándar muestrales, que fueron 370,69 y 24,26 respectivamente. Los investigadores suponen que el tiempo real promedio de escape es de 6 minutos a lo sumo. ¿Contradicen los datos esta suposición? Asumiendo distribución normal para el tiempo de escape, pruebe las hipótesis apropiadas con un nivel de significación de 0,05.

Ejercicio 7.

La prueba de impacto Charpy de muesca V es la base para estudiar muchos criterios de resistencia de materiales. Se aplicó esta prueba a una muestra de 42 materiales de una aleación especial a 110°F. El promedio muestral de expansión lateral transversal se calculó en 73,1 milésimas de pulgada y la desviación estándar muestral fue $s = 5,9$ milésimas de pulgada. El verdadero promedio de cantidad de expansión debe ser menor de 75 milésimas de pulgada para ser adecuada en cierta aplicación. La aleación no se utilizará a menos que la muestra proporcione fuerte evidencia de que este criterio se ha satisfecho.

a) Pruebe las hipótesis pertinentes empleando $\alpha = 0,01$ para determinar si la aleación es adecuada.

b) Si se sabe que $\sigma = 5,9$, ¿cuál es la probabilidad de error de tipo II $\beta(\mu')$ de la prueba de nivel 0,01 para la alternativa $\mu' = 70$?

Ejercicio 8.

Se determinó la cantidad de desgaste de un eje, después de un recorrido fijo de millas, para cada uno de $n = 8$ motores de combustión interna, que llevan cobre y plomo como material antifricción, resultando $\bar{x} = 3,72$ y $s = 1,25$.

a) Se supone que la distribución de desgaste del eje es normal con media μ. Utilice una prueba de hipótesis de nivel 0,05 para probar $H_0 : \mu = 3,50$ contra $H_a : \mu > 3,50$.

b) En las condiciones de a) y $\sigma = 1,25$, ¿cuál es la probabilidad de error de tipo II $\beta(\mu')$ de la prueba para la alternativa $\mu' = 4,00$?

Ejercicio 9.

Dos empresas distintas desean establecerse en cierta región y brindar servicios de televisión por cable. Se denota por p a la proporción de suscriptores potenciales que prefieren la primera empresa sobre la segunda. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 16 para probar $H_0 : p = 0,5$ contra $H_a : p \neq 0,5$. Se representa con X el número de suscriptores en la muestra que están a favor de la primera empresa y con x el valor observado de X.

a) ¿Cuál de las siguientes regiones de rechazo es la más adecuada?

$R_1 = \{x : x \leq 3 \text{ o } x \geq 13\}$ $\quad R_2 = \{x : x \leq 4\}$ $\quad R_3 = \{x : x \geq 12\}$

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estadístico de prueba X cuando H_0 es verdadera? Utilícela para calcular la probabilidad de error de tipo I.

c) Calcule la probabilidad de error de tipo II para la región seleccionada cuando $p = 0,2$. Repita lo mismo para $p = 0,4$, $p = 0,6$ y $p = 0,8$.

d) Mediante la región seleccionada, ¿qué concluye si 5 de los 16 individuos favorecieron a la primera empresa?

Ejercicio 10.

Una muestra aleatoria de 150 donaciones en un banco de sangre revela que 92 eran de sangre tipo A.

a) ¿Sugiere esto que el porcentaje real de donadores tipo A difiere del porcentaje de la población con sangre tipo A, que se considera del 40%? Haga una prueba de las hipótesis adecuadas, con un nivel de significación de 0,01. ¿Sería distinta su conclusión si se usara un nivel de significación de 0,05?

b) Construya un intervalo de 90% de confianza para la proporción real de donadores de sangre tipo A.

Ejercicio 11.

Algunos científicos piensan que los robots jugarán un papel esencial en las fábricas, en los próximos 20 años. Supongamos que en un experimento para determinar si es factible el uso de robots para trenzar cables de computadora, se empleó un robot para ensamblar 500 cables. Se examinaron los cables y encontraron 5 defectuosos. Si los ensambladores humanos tienen una tasa de 0,03 (3%), ¿apoya esta información la hipótesis de que la proporción de partes defectuosas es menor para robots que para humanos? Obtenga el valor p y concluya a un nivel de significación de 0,01.

Ejercicio 12.

Se proporcionan pares de valores p y niveles de significancia α. Para cada par exprese si el valor observado p llevaría al rechazo de H_0 al nivel de significancia dado.

a) valor $p = 0,084$, $\alpha = 0,05$.

b) valor $p = 0,003.$, $\alpha = 0,001$.
c) valor $p = 0,498$, $\alpha = 0,05$.
d) valor $p = 0,084$, $\alpha = 0,10$.
e) valor $p = 0,039$, $\alpha = 0,01$.
f) valor $p = 0,218$, $\alpha = 0,10$.

Ejercicio 13.
Calcular el valor p para una prueba basada en un estadístico Z en cada una de las siguientes situaciones y dar una conclusión a un nivel de significación de $\alpha = 0,05$.
a) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu > 5$
i) $z_{obs} = 1,42$ ii) $z_{obs} = 2,48$
b) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu < 5$
i) $z_{obs} = -1,96$ ii) $z_{obs} = -0,11$
c) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu \neq 5$
i) $z_{obs} = 2,10$ ii) $z_{obs} = -1,75$

Ejercicio 14.
En un experimento para probar los efectos de hormonas en el crecimiento de ganado para carne, se implantaron 200 mg de progesterona y 20 mg de benzoato de estradiol en el oído externo de 16 terneros seleccionados al azar, cada uno con un peso aproximado de 500 lb. Se encontró que el promedio muestral de peso ganado por día durante cierto número de días fue de 2,72 lb y la desviación estándar muestral de 0,41 lb por día. ¿Sugiere esta información que la media verdadera diaria de ganancia de peso para terneros tratados con el implante de hormonas excede 2,5 lb? Acotar el valor p y concluir a un nivel de significación de 0,05.

Ejercicio 15.
Acotar el valor p para una prueba basada en un estadístico T en cada una de las siguientes situaciones y dar una conclusión a un nivel de significación de $\alpha = 0,02$.
a) Prueba de cola superior, grados de libertad $= 8$, $t_{obs} = 2$.
b) Prueba de cola inferior, grados de libertad $= 11$, $t_{obs} = -2,4$.
c) Prueba bilateral, grados de libertad $= 15$, $t_{obs} = -1,6$.

Ejercicio 16.
Según el Código Alimentario Argentino (CAA) un alimento es considerado bajo en sodio si el mismo posee a lo sumo 120 mg de sodio por cada 100 g de producto. Se tomaron 16 muestras aleatoriamente elegidas de galletas rotuladas como bajas en sodio de cierta marca, con el fin de determinar el cumplimiento de las normas alimentarias del CAA. Los contenidos de sodio (mg) por cada 100 g de muestra de galleta fueron:

125,02	121,45	122,25	119,37	120,80	124,78	121,35	124,97
119,98	117,50	121,13	123,09	124,40	126,97	118,89	121,72

Suponga que el contenido de sodio tiene distribución normal. ¿Esta información sugiere que esta marca de galleta no está cumpliendo las normas alimentarias del CAA? Plantear las hipótesis de interés y concluir usando un nivel de significancia de 0,05, interpretando la siguiente salida de R:

```
> sodio<-c(125.02,121.45,122.25,119.37,120.80,124.78,121.35,124.97,
+ 119.98,117.50,121.13,123.09,124.40,126.97,118.89,121.72)
> t.test(sodio,alternative="greater",mu=120)

        One Sample t-test

data:  sodio
t = 3.2419, df = 15, p-value = 0.002737
alternative hypothesis: true mean is greater than 120
```

```
95 percent confidence interval:
 120.9664      Inf
sample estimates:
mean of x
 122.1044
```

Ejercicio 17.
Para chequear las lecturas de detectores de radón de cierto tipo, se seleccionó una muestra de 12 detectores y cada uno se expuso a 100 pCi/L de radón. Las lecturas obtenidas fueron las siguientes:

105,6	90,9	91,2	96,9	96,5	91,3
100,1	105,0	99,6	107,7	103,3	92,4

Considere la siguiente salida de R para este conjunto de datos:

```
> x<-c(105.6,90.9,91.2,96.9,96.5,91.3,100.1,105.0,99.6,107.7,103.3,92.4)
> t.test(x,mu=100,conf.level=0.98)

        One Sample t-test

data:  x
t = -0.9214, df = 11, p-value = 0.3766
alternative hypothesis: true mean is not equal to 100
98 percent confidence interval:
  93.58125 103.16875
sample estimates:
mean of x
98.375
```

a) ¿Estos datos indican que la lectura de radón media difiere del valor al que fueron expuestos los detectores? Plantee las hipótesis de interés, indique cuál es el valor observado del estadístico de prueba y concluya utilizando un nivel de significancia de 0,02.
b) Obtenga un intervalo de 98% de confianza para la lectura media de radón de los detectores de este tipo y concluya respecto a las hipótesis de interés. Compare con lo obtenido en a).
c) ¿Qué supuestos se necesitan para que las conclusiones obtenidas en a) y b) sean válidas?