# Ejercicio 5

El enunciado describe las notas obtenidas en tres cursos (A, B y C) cada uno de los cuales consta de la misma cantidad de alumnos (99).

**a) ¿Hay alguna clase que tenga un promedio de notas superior a las demás o son todos iguales?** Para resolver este punto, primero tengamos en cuenta que nos piden el promedio de *notas*. En cada caso, el total $N$ de notas obtenidas por curso es 99 (el total de alumnos de cada curso) y corresponde al tamaño de cada una de las muestras. A los promedios los podemos calcular como sigue:

- **Curso A**: 1 estudiante obtuvo 1 punto, 97 estudiantes obtuvieron 50 puntos y 1 estudiante obtuvo 99 puntos

$$\begin{aligned}\bar{x}_A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i &= \frac{\overbrace{1}^{1\text{ alumno}} + \overbrace{50+\cdots+50}^{97\text{ alumnos}} + \overbrace{99}^{1\text{ alumno}}}{99} \\ &= \frac{1\times 1 + 97\times 50 + 99\times 1}{99} = 50\end{aligned}$$

- **Curso B**: 49 estudiantes obtuvieron 1 punto, 1 estudiante obtuvo 50 puntos y 49 estudiantes obtuvieron 99 puntos

$$\bar{x}_B = \frac{49\times 1 + 1\times 50 + 49\times 99}{99} = 50$$

- **Curso C**: 1 estudiante obtuvo 1 punto, 1 estudiante obtuvo 2 puntos, .... y 1 estudiante obtuvo 99 puntos

$$\begin{aligned}\bar{x}_C &= \frac{1\times 1 + 1\times 2 + \cdots + 1\times 98 + 1\times 99}{99} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{99} i}{99} = 50\end{aligned}$$

  en donde usamos la identidad $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

De lo anterior resulta que los promedios de notas de los cursos A, B y C son todos iguales

**b) ¿Hay alguna clase que tenga una desviación estándar de notas superior a las demás o son todas iguales?** Si bien el enunciado pide desviación estándar, usaremos expresiones para la varianza por simplicidad.

- **Curso A**: 1 estudiante obtuvo 1 punto, 97 estudiantes obtuvieron 50 puntos y 1 estudiante obtuvo 99 puntos

$$
\begin{aligned}
S_A^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}_A)^2 \\
&= \frac{\overbrace{(1-50)^2}^{\text{1 alumno}}+\overbrace{(50-50)^2+\cdots+(50-50)^2}^{\text{97 alumnos}}+\overbrace{(99-50)^2}^{\text{1 alumno}}}{98} \\
&= \frac{1\times(1-50)^2+97\times(50-50)^2+1\times(99-50)^2}{98} \\
&= \frac{2\times 49^2}{98} = 49
\end{aligned}
$$

- **Curso B**: 49 estudiantes obtuvieron 1 punto, 1 estudiante obtuvo 50 puntos y 49 estudiantes obtuvieron 99 puntos

$$
\begin{aligned}
S_B^2 &= \frac{49\times(1-50)^2+1\times(50-50)^2+49\times(99-50)^2}{98} \\
&= \frac{2\times 49^3}{98} = 2401
\end{aligned}
$$

- **Curso C**: 1 estudiante obtuvo 1 punto, 1 estudiante obtuvo 2 puntos, .... y 1 estudiante obtuvo 99 puntos

$$
\begin{aligned}
S_C^2 &= \frac{1\times(1-50)^2+1\times(2-50)^2+\cdots+1\times(98-50)^2+1\times(99-50)^2}{98} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{99}(i-50)^2}{98} = \frac{\sum_{i=1}^{99} i^2 - 99\times 50^2}{98} = 825
\end{aligned}
$$

en donde usamos las identidades:

$$
\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N}x_i^2 - N\bar{x}^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
$$

De lo anterior resulta que el curso B exhibe la mayor varianza y, por lo tanto, la mayor desviación estándar: $S_B = \sqrt{S_B^2} = 49$.

**c [ADICIONAL]) Grafique los histogramas de notas (frecuencias absolutas) correspondientes a los cursos A, B y C. ¿Puede explicar el resultado del punto b a partir de los gráficos observados?**