NOCIONES DE PROBABILIDAD

Un suceso puede ser: Determinístico o Aleatorio.

Determinístico: Se puede predecir su resultado con exactitud.

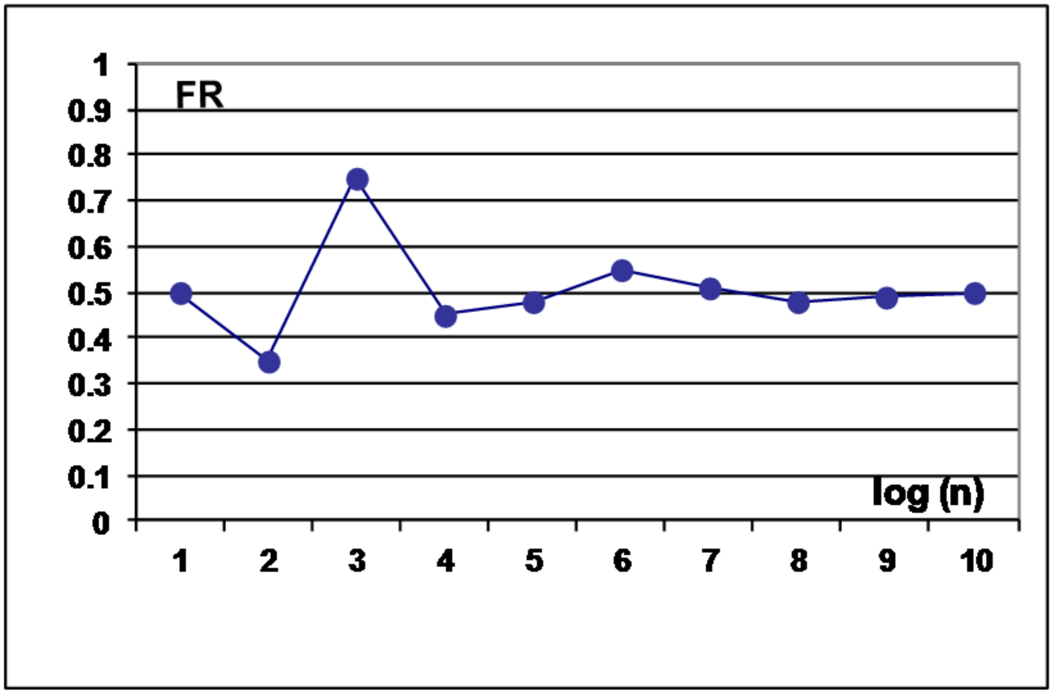
Aleatorio: No se puede predecir su resultado con exactitud.

A **sucesos aleatorios**, asociados a un experimento, se asignará lo que llamaremos **PROBABILIDAD**.

Ejemplo

Supongamos que el experimento consiste en arrojar una moneda. Dicho experimento es aleatorio ya que no se puede predecir su resultado con exactitud pero si se pueden listar los resultados posibles, en éste caso cara (C) o que salga cruz (X).

La Teoría frecuentista dice que en una larga serie de tiradas de la moneda la frecuencia relativa de que resulte C, para éste ejemplo, tiende a estabilizarse alrededor de un número fijo llamado probabilidad del suceso (en el caso que la moneda sea honesta este sería ½).



La definición que daremos de **Probabilidad** será tal que sea consistente con la **Teoría frecuentista**.

Algunas propiedades sobre conjuntos

a) $\bar{A} \cup A = S$

b) $\bar{S} = \emptyset$ y $\bar{\emptyset} = S$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \text{d) } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}\right\} \text{Leyes de De Morgan}$$

e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

f) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Modelo probabilístico

Definiciones:

a) **Experimento aleatorio** es todo proceso que genera resultados aleatorios.

b) **Espacio muestral** ($\boldsymbol{S}$) es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

c) **Evento** se llama a cualquier subconjunto de $\mathbf{S}$**.** Si el evento tiene sólo un elemento se lo llama evento simple y si tiene por lo menos dos elementos se lo llama compuesto.

d) **Familia de eventos de $\boldsymbol{S}$** ($\mathscr{A}$) es tal que sea no vacía y cumpla las siguientes condiciones:

- Si $A \in \mathscr{A}$ evento entonces $\bar{A} \in \mathscr{A}$
- Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ son eventos en $\mathscr{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Un caso particular es tomar $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbf{S})$ (se lee partes de S) que está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral incluído el vacío.

e) **Probabilidad** es una función $\boldsymbol{P}: \mathscr{A} \rightarrow R$ que debe cumplir:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ para cada $A \in \mathscr{A}$

2) $P(\mathbf{S})$=1

3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

para $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eventos disjuntos en $\mathscr{A}$.

Notar que esta condición también vale para uniones finitas de eventos disjuntos.

f) **Modelo probabilístico** está conformado por el espacio muestral ($\boldsymbol{S}$), una familia de eventos de S ($\mathscr{A}$) y una medida de probabilidad (P). Se denota con $(S, \mathscr{A}, P)$.

Observación:

Dado un S asociado a un experimento tal que $\#\,(S) = \boldsymbol{N} < \infty$ y donde cada resultado es igualmente probable entonces:

$P(E) = 1/N$ para todo evento simple $E \in \mathscr{A}$,

$P(A) = \#(A)/N$ para todo evento $A \in \mathscr{A}$.

Ejemplo:

Dos estaciones de servicio (A y B) tienen seis bombas de expendio cada una de ellas.

El experimento consiste en arrojar tres veces una moneda honesta y registrar los resultados de cada tirada.

a) Determinar un modelo probabilístico para este experimento.
b) Calcular la probabilidad del evento:

i) A:”la primera tirada es cara (c)”
ii) B:”exactamente dos son caras”
iii) C:”al menos una es cara”
iv) A ∪ B.

c) ¿A y B son eventos disjuntos?
d) ¿A y B son eventos complementarios?

Ejemplo (baterías):

El experimento consiste en examinar una línea de producción de baterías, independientemente una de otra, hasta que se obtiene una que cumple con las condiciones de calidad requeridas.

Suponga que se sabe que la probabilidad que una batería cumpla con las condiciones de calidad requeridas es igual a p .

i) Defina un modelo probabilístico adecuado para éste experimento.

ii) Calcular la probabilidad que se necesite examinar por entre dos a cuatro baterías hasta encontrar una batería cumpla la condición de calidad.

Propiedades de una función Probabilidad

Dado un modelo probabilístico $(S\,,\mathscr{A}\,,P)$ asociado a un experimento. Para cualquier A y B eventos en $\mathscr{A}$

a) Si $A \subseteq B$ entonces

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \text{ y } P(B) \geq P(A)$$

b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Esta última propiedad puede ser generalizada a k eventos. Sean $\{ A_i \}_{i=1}^{k}$ eventos en $\mathscr{A}$ entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} B_i$$

donde

$$B_i = \sum\nolimits_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_i})$$

Ejemplo:

Una compañía eléctrica ofrece una tasa subsidiada a cualquier familia cuyo consumo de electricidad sea menor de 240 kWh durante un mes. Sea A el evento en que la familia elegida al azar no rebase el consumo subsidiado durante el mes de marzo y sea B el evento análogo para el mes de septiembre (A y B se refieren a la misma familia). Suponga que

$P(A) = 0{,}8\ ; P(B) = 0{,}7\ y\ P(A \cup B) = 0{,}9.$

Calcular:

a) $P(\bar{A})$; $P(A \cap B)$ y $P(A \cap \bar{B})$.

b) La probabilidad que el consumo subsidiado se rebasado en exactamente uno de éstos meses. (Describa el evento en término de los eventos A y B.)

Probabilidad condicional e independencia

Ejemplo:

En una empresa hay dos líneas de producción (A Y B). En un día dado se producen 8 artículos por la línea A y 10 por la línea B, de los cuales dos fueron defectuosos (D) para A y uno para B.

Línea	Defectuoso	No Defectuoso	Total
A	2	6	8
B	1	9	10
Total	3	15	18

Ahora supongamos que se elige al azar un artículo producido ese día y resultó defectuoso. Calcular la probabilidad que el artículo haya sido producido por A.

Definición:

Dado un modelo probabilístico $(S, \mathscr{A}, P)$, sean A y B eventos con P(B)>0 entonces se define la **probabilidad condicional de A dado B** como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propiedades de la probabilidad condicional

Dado un modelo probabilístico $(S\ ,\ \mathscr{A}\ \ ,P)$ y B evento con P(B)>0 entonces

a) $0 \leq P(A|B) \leq 1\ \ \forall\ A\ \in \mathscr{A}$

b) $P(S|B) = 1$

c) $\forall\ A$ y $C\ \in \mathscr{A}$ eventos disjuntos entonces

$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$$

Nota: Esta propiedad también es válida para una unión infinita de eventos disjuntos, o sea:

$$P(\ \cup_{i=1}^{\infty} A_i\ \ |\ B)\ =\ \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

para $\{\ A_i\ \}_{i=1}^{\infty}$ eventos disjuntos en $\mathscr{A}$.

Por lo tanto como $P_B(A) = P(A|B)\ \forall\ A\ \in \mathscr{A}$ al cumplir las propiedades a), b) y c) resulta ser una función de probabilidad.

d) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)\ \ \forall\ A\ \in \mathscr{A}.$

Definición:

A y B eventos, asociados a un experimento, diremos que son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Proposición:

Si A y B son eventos independientes, asociados a un experimento, entonces:

a) $\bar{A}$ y B son independientes.
b) A y $\bar{B}$ son independientes.
c) $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

Definición:

Diremos que $A_1, A_2, \dots A_n$ son eventos **mutuamente independientes** si para todo subconjunto de subíndices $\{i_r\}_{r=1}^{k} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ se cumple

$$P\left(\bigcap_{r=1}^{k} A_{i_r}\right) = \prod_{r=1}^{k} P(A_{i_r})$$

Regla de la multiplicación

Sean $A_1, A_2, \dots, A_k$ eventos en $\mathscr{A}$ tales que $P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) > 0$ entonces:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

Ejemplos:

I) Una urna contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Se seleccionan aleatoriamente dos bolas de la urna sin reposición, primero una y después la otra.

i) Sea A el evento la primera bola es blanca y B la segunda bola es negra. ¿Son A y B eventos independientes? Justifique su respuesta.

ii) Calcular la probabilidad que
   - ambas bolas sean blancas
   - ambas bolas sean de igual color.

II) Sea un sistema compuesto con cuatro componentes idénticas conectadas en paralelo, tal que el sistema funciona (F) si las componentes 1 y 2 funcionan o las componentes 3 y 4 funcionan.

Suponga que las componentes funcionan independientemente una de otra y que la probabilidad de funcionar cada una de ellas es 0,9 entonces ¿cuál es la probabilidad que el sistema funcione?

Ley de Probabilidad Total

Sean $A_1, A_2, \dots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes tal que $S = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Entonces:

$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)\ P(A_i)$; $\forall$ B en $\mathscr{A}$.

<u>Teorema de Bayes</u>

Sean $A_1, A_2, \dots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes tal que $S = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ y

$$P(A_i) > 0\ \forall\ i = 1, 2, \dots, k.$$

Entonces: $P\left(A_j|B\right) = \dfrac{P\left(B|A_j\right) P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) P(A_i)}$

$\forall\ j = 1, 2, \dots, k$ y $\forall\ B$ evento en $\mathscr{A}$ con $P(B) > 0$.

Ejemplo:

En una estación de servicio se comercializa tres tipos de gasolinas: $A_1, A_2\ y\ A_3$ tal que el 40% de los clientes consumen la A_1, el 35% la A_2 y el resto la A_3.

Además de los clientes que consumen A_1 el 30% llena su tanque (evento B). De los que compran gasolina A_2 el 60% llena su tanque, en tanto que quienes cargan A_3 el 50 % llena su tanque.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente pida gasolina A_2 y llene el tanque?
b) ¿Cuál es la probabilidad que el cliente llene el tanque?
c) Si se sabe que el cliente llenó el tanque ¿cuál es la probabilidad que haya pedido la gasolina A_3?