Variable aleatoria

Introducción

Una variable aleatoria es una aplicación que permite asociar valores del espacio muestral con números reales.

Ejemplos

a) Experimento arrojar 3 veces una moneda honesta y sea la variable que cuenta el número de veces que resultó cara en las 3 tiradas.

b) Experimento se examinan baterías en una línea de producción, independientemente una de otra, hasta obtener la primera que cumple las condiciones de calidad. Una variable de interés podría ser el número de baterías examinadas hasta obtener la primera que cumple las condiciones de calidad.

c) Sea la variable definida como el tiempo (en minutos) que demora un alumno en realizar un parcial de a lo sumo dos horas de duración.

Definición:

Sea $(S\ ,\mathscr{A}\ ,P)$ un m.p. entonces se llama **variable aleatoria (v.a.)** a cualquier función $X\colon \mathrm{S}\to \mathrm{R}$ tal que $\{w\ \in \mathrm{S} : \mathrm{X(w)} \leq x\}\ \in \mathscr{A}$ para todo $x\in R$.

Notación: Para todo $x\in R$

$$[\mathrm{X}\leq x] = \{w\ \in \mathrm{S} : \mathrm{X(w)} \leq x\}$$

$$[\mathrm{X} = x] = \{w\ \in \mathrm{S} : \mathrm{X(w)} = x\}$$

Definición:

Si X es una v.a. entonces se llama **función de distribución acumulada (f.d.a.)** a la función $F\colon R\to [0;1]$ definida como

$$F(x) = P([\mathrm{X}\leq x])\ \text{para todo}\ x\in R.$$

Clasificación de variables aleatorias:

DISCRETAS: número de caras en tres tiradas de una moneda honesta, número de accidentes en una autopista durante el fin de semana; número de camas ocupadas en la UTI de un hospital diariamente; número de incendios en Calamuchita durante el verano; número de bacterias por cm^3 de agua; …

CONTINUAS: tiempo que demora un estudiante en realizar el parcial; la altura de niños recién nacidos; cantidad de lluvia caída durante el verano; …..

Variables aleatorias discretas

Definición:

Sea $(S\ ,\mathscr{A}\ ,P)$ un m.p. y $X\colon S\rightarrow \mathrm{R}$ una v.a.

a) Se dice que X es una **v.a. discreta** si toma un número finito o infinito numerable de valores con probabilidad positiva.

b) Si X toma sólo dos valores, por ejemplo 0 (fracaso) y 1 (éxito), con probabilidades positivas y $p = P(X = 1)$ entonces se dice que X tiene distribución $\boldsymbol{Bernoulli}$ **de parámetro** $\boldsymbol{p}$.

c) Si X es una v. a. discreta entonces se llama **función de probabilidad de masa (f.p.m.)** a la función $p: R \rightarrow [0; 1]$ definida como

$$p(x) = P([\mathrm{X} = x]) \text{ para todo } x \in R.$$

<u>Observación</u>:

Sea $(\mathrm{S}, \mathscr{A}, P)$ un m.p., $X: \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{R}$ una v.a. discreta y sea $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$ (el conjunto de todos los valores posibles de la v. a. con probabilidad positiva) con $I \subseteq N$ entonces $\sum_{i \in I} p(a_i) = 1$.

<u>Ejemplos</u>: Hallar la f.p.m. y la f.d.a. para las siguientes v.a.

a) Experimento arrojar 3 veces una moneda honesta y sea X la v.a. que cuenta el número de veces que resultó cara en las 3 tiradas.

b) Experimento se examinan baterías en una línea de producción, independientemente una de otra, hasta obtener la primera que cumple las condiciones de calidad. Sea Y la v.a. que cuenta el número de baterías examinadas hasta obtener la primera que cumple las condiciones de calidad.

Propiedades de la f.d.a. de una v.a. discreta

Sea $(S, \mathscr{A}, P)$ un m.p., $X: \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{R}$ una v.a. discreta y F su f.d.a.

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ para todo $x \in R$.

b) F es monótona creciente: $F(x) \leq F(y)\ \forall x < y$.

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

d) F es una función escalonada con discontinuidades en $Im(X)$.

e) F es continua por derecha, o sea

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) \text{ para todo } a \in R.$$

f) Si $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$ tales que $a_i < a_{i+1} \forall i \in I$, entonces $p(a_1) = F(a_1)$ y $p(a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$.

Observación:

Si X es una v.a. discreta con f.d.a. F entonces:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

pero

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - \lim_{x \to a^-} F(x)$$

para todo $a < b$ números reales.

Valores asociados a la f.p.m.

Definición:

Si X es una v.a. discreta con $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$ y f.p.m. p entonces se define el **valor esperado o valor medio o esperanza de X** como: $\sum_{i \in I} a_i \; p(a_i)$

siempre $\sum_{i \in I} |a_i| \; p(a_i) < \infty$.

Notación: $E(X) = \mu$.

Ejemplos:

a) Experimento arrojar 3 veces una moneda honesta y sea W la variable que cuenta el número de veces que resultó cara en las 3 tiradas. Hallar la $E(W)$.

b) Experimento se examinan baterías en una línea de producción, independientemente una de otra, hasta obtener la primera que cumple las condiciones de calidad. Considerando que $p = P(\text{una batería cumpla la condiciones de calidad})$ y la v.a. X definida como el número de baterías examinadas hasta obtener la primera que cumple las condiciones de calidad. Hallar la $E(X)$.

c) Experimento arrojar un dado honesto dos veces y sea Y la suma de los dos valores obtenidos. Hallar la $E(Y)$.

¿Cómo obtener la esperanza de una función de una v.a. discreta?

Proposición:

Sea X una v.a. discreta con $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$, f.p.m. $p: R \to [0; 1]$ y sea $W = h(X)$ una v.a. discreta. Entonces $E\big(h(X)\big) = \sum_{i \in I} h(a_i)\, p(a_i)$

siempre que $\sum_{i \in I} |h(a_i)|\ p(a_i) < \infty$.

Consecuencia:

Sea X una v.a. discreta con $E(X) < \infty$. Entonces

$E(aX + b) = a\, E(X) + b$ para todo $a, b \in R$.

Definición:

Si X es una v.a. discreta con $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$, f.p.m. p y $E(X) = \mu$. Entonces si $E(X^2) < \infty$ se define la **varianza de X** como: $V(X) = E(X - \mu)^2$ y la **desviación estándar de X** como $\sqrt{V(X)}$.

Notación: $\sigma^2 = V(X)$ y $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Proposición:

Si X es una v.a. discreta con $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$, f.p.m. p y $E(X) = \mu$. Entonces si $E(X^2) < \infty$

a) $0 \leq V(X) = E(X^2) - \mu^2$.
b) $V(aX + b) = a^2\, V(X)$ para todo $a, b \in R$.

<u>Observación</u>:

Sea X una v.a. $Bernoulli$ de parámetro p, donde $p = P(X = 1)$ y $1 - p = P(X = 0)$.

Entonces $E(X) = p \quad \text{y} \quad V(X) = p\,(1 - p)$.

<u>Variable aleatoria Binomial</u>

Para definir esta v.a. se deben cumplir las siguientes condiciones experimentales:

i) El experimento consta de n pruebas o ensayos idénticos.
ii) Cada ensayo tiene sólo dos resultados posibles, que se llamaran éxito (E) o fracaso (F).
iii) Los ensayos son independientes uno de otro.

iv) La probabilidad de éxito es constante en cada ensayo, que llamaremos $p = P(E)$.

Un experimento que cumple con todas estas condiciones se lo llama **experimento Binomial.**

Definición:

Dado un experimento Binomial que consta de n ensayos independientes y $p = P(E)$ en cada uno. La v.a. X que cuenta el número de éxitos en n ensayos independientes se dice que X tiene **distribución Binomial de parámetros $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{p}$.**

Notación: $X \sim B(n\,, p)$.

Proposición:

Si $X \sim B(n\,, p)$ entonces:

a) $p(x) = \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}\,;\, x \in \{k \in Z : 0 \leq k \leq n\}$

b) $E(X) = n\;\; p\;\;$ y $\;\;V(X) = n\, p\, (1-p)$.

Ejemplos:

a) Si X tiene distribución Bernoulli de parámetro p entonces $X \sim B(1\ ,p)$.

b) Sea W la variable que cuenta el número de veces que resultó cara en las 3 tiradas de una moneda honesta entonces $W \sim B(3\ ,\ 0{,}5)$.

c) Ver el enunciado de Ejercicio 13 de la Guía Nº2. Sea Y la variable que cuenta el número de remaches defectuosos en la costura de un avión. Justificar que ésta v.a. tiene distribución Binomial e identifique sus parámetros. Resolver ahora el problema usando esta información.

Distribución de Poisson

Definición:

Se dice que una variable aleatoria **X tiene distribución de Poisson de parámetro λ** (con λ>0) si la función de probabilidad de masa (f.p.m.) está dada por:

$$p(k) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}\ ;\forall\ k \in Im(X) = N \cup \{0\}.$$

Notación: $\boldsymbol{X \sim P(\lambda)}$.

Proposición:

Si $X \sim P(\lambda)$ entonces $\mathrm{E(X)} = \mathrm{V(X)} = \lambda$.

Distribución de Poisson como un límite

Sea $X_n \sim B(n, p)$, si se tiene que $(n\,p) \rightarrow \lambda$ para $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ entonces:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

para todo $k \in N \cup \{0\}$.

Regla práctica para la aproximación binomial por la Poisson

En cualquier experimento binomial donde n sea grande y p pequeño se puede aproximar

$$P(X_n = k) \cong e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

donde $\lambda = np, n \geq 100, p \leq 0.01$ y $np \leq 20$.

Ejemplo:

Un editor de novelas se esfuerza por asegurar que sus libros estén libre de errores tipográficos, teniendo una probabilidad de contener por lo menos un error en una página de 0.005. Suponiendo que los errores son independientes de una página a otra, ¿cuál es la probabilidad de que una de sus novelas de 400 páginas contenga exactamente una página con error? y ¿por lo menos cuatro páginas con errores?

Distribución Hipergeométrica

Definición: Dado un experimento que cumple las siguientes condiciones:

i) la población o conjunto de donde se obtiene la muestra tiene N objetos o individuos,
ii) cada objetos o individuos puede ser clasificado como Éxito (E) o Fracaso (F), siendo M los éxitos y (N-M) los fracasos,
iii) cada subconjunto de n objetos o individuos tiene igual probabilidad de ser seleccionado.

Entonces la variable aleatoria X que cuenta el número de éxitos (E) en la muestra de tamaño n se dice que tiene **distribución Hipergeométrica de parámetros $\boldsymbol{n}$, M y N.**

Notación: $\boldsymbol{X \sim H(n, M, N)}$.

Proposición: Si $X \sim H(n, M, N)$ entonces:

a) la f.p.m. de X está dada por $p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$,

$\forall k \in Im(X) = \{r \in Z : \text{máx}(0; n - N + M) \leq r \leq \text{mín}(n; M)\}$.

b) $E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right)$ y $V(X) = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

Ejemplo: En la biblioteca de una facultad hay 20 ejemplares del libro Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias de Devore, de los cuales 8 son de la quinta edición y 12 de la sexta.

El director del Departamento de estadística, de esta facultad, ha pedido que cinco ejemplares sean reservados por dos horas. Si las elecciones son al azar y cada subconjunto de cinco ejemplares es igualmente probable de ser elegido, entonces ¿cuál es la probabilidad que

a) no haya ninguno de la sexta edición?
b) exactamente uno sea de sexta edición?
c) por lo menos dos sean de sexta edición?

<u>Aproximación a la Hipergeométrica por una Binomial</u>

El uso de ésta aproximación es adecuada si el tamaño de la muestra (n) no excede el 5% de la población (N), o sea:

$$P(X = k) \cong \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad \text{donde} \quad X \sim H(n, M, N),$$

$$p = \frac{M}{N} \text{ y } (1-p) \text{ no sean próximos a cero.}$$

<u>**Distribución Binomial Negativa**</u>

<u>Definición</u>: Dado un experimento que cumpla las siguientes condiciones:

i) consta de una secuencia de ensayos independientes,

ii) cada ensayo puede ser Éxito (E) o Fracaso (F),

iii) la probabilidad de E es constante en cada ensayo $(P(E) = p)$,

iv) los ensayos se continúan hasta obtener r éxitos, con $r \in N$ valor fijado.

Definición:

Dado un experimento que cumpla las condiciones antes enumeradas entonces la v.a. X que cuenta el número de fracasos que preceden al $r -$ ésimo éxito se dice que tiene **distribución Binomial Negativa de parámetros $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{p}$**.

Notación: $\boldsymbol{X \sim B^{-}(r, p)}$.

Proposición: Si $X \sim B^{-}(r, p)$ entonces:

a) la f.d.m. de X está dada por $p(k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$, $\forall k \in Im(X) = N \cup \{0\}$.

b) $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ y $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Ejemplo: Un estudio geológico indica que en un pozo exploratorio podría hallarse petróleo con una probabilidad de 0,2. Suponiendo que las exploraciones son independientes una de otra. ¿Cuál es la probabilidad que

a) el primer descubrimiento ocurra en la tercera perforación?
b) el tercer descubrimiento ocurra en la quinta perforación?