Final Matemática Discreta II
TEÓRICO
GRUPO C

Agustín M. Domínguez

Julio 2024

Índice

Contexto

1.1 Introducción

Este apunte fue construido para final de la materia **Matemática Discreta II** de la **Facultad de Matemática Física y Computación** en las fechas de Julio/Agosto del año 2024.

Una nota para otros estudiantes: El objetivo de las demostraciones de **este apunte** es ayudar a entenderlas, no ayudar a memorizarlas. Están escritas con todos los pasos explícitos y estrictos, a veces al punto de redundancia y obviedad, *a propósito*. La idea es que el lector tenga que hacer la menor cantidad de saltos de lógica posibles para entender la demostración. La resolución que se haga en el final probablemente pueda tener algunos pasos menos explícitos, pero no es el marco de este apunte.

Fue declarado por la cátedra que estas preguntas van a formar el Teórico del final. A continuación se repite dicho enunciado.

1.2 Enunciado

La parte teórica del final consistirá de 3 preguntas tomadas de esta lista, mas una pregunta extra del tema de Milagro.

Para aprobar el teórico hay que obtener 40% del puntaje EN CADA pregunta (de esta lista). Estos teoremas son para Julio/Agosto 2024, excepto algunos que estan marcado que solo se tomaran a partir de Diciembre.

Ademas de estos teoremas, en Diciembre/Febrero/Marzo pueden agregarse incluso otros, pero si lo hacemos se indicara en la pagina de la materia. Si no se dice nada, estos son los que valen.

De los **tres** teoremas que se tomarán de esta lista, **uno será de los seis primeros, otro de los tres ultimos y el otro del resto**.

1.3 Grupo

Este apunte tiene las respuestas de las opciones para la **tercera pregunta**, desde ahora llamadas el **Grupo C**.

Pregunta 17: 3SAT es NP Completo

2.1 Enunciado detallado

Probar que 3SAT es NP-completo

2.2 Conocimiento presupuesto para la resolución

Def: **P**

La clase P es la clase de problemas de decisión tal que existe un algoritmo que lo resuelve que es polinomial en el tamaño de sus **instancias**.

Definición Formal: **Certificados**

Un certificado para SI de una instancia x de un problema de decisión π es una instancia C de un problema $\tilde{\pi}$ tal que:

$$\tilde{\pi}(C) = \text{`SI'} \implies \pi(x) = \text{`SI'}$$

Un certificado para NO de una instancia x de un problema de decisión π es una instancia C de un problema $\tilde{\pi}$ tal que:

$$\tilde{\pi}(C) = \text{`SI'} \implies \pi(x) = \text{`NO'}$$

Def: **NP**

La clase NP es la clase de problemas de decisión π para los cuales existe un problema polinomial $\tilde{\pi}$ tal que para toda instancia x de π, existe una instancia C de $\tilde{\pi}$ que es un certificado para el SI de x

La clase co-NP es lo mismo reemplazando SI por NO.

Def: **Reducción Polinomial** ***(def de Karp)***

Dados dos problemas de decidisión π y τ, se dice que τ es reducible polinomialmente a $\pi(\tau \leq_P \pi)$, si existe un algoritmo polinomial que, tomando como input una instancia x de τ, produce como output una instancia z de π con la propiedad:

$$\tau(x) = \text{SI} \iff \pi(z) = \text{SI}$$

Esto implica que, si se puede resolver π polinomialmente, entonces se puede resolver τ polinomialmente.

Def: **Completitud NP**

Un problema de decisión π se dice **NP-Completo** si es un problema NP tal que:

$$\tau \in \text{NP} \implies \tau \leq_P \pi$$

Si tenemos que τ es NP-Completo, y $\tau \leq_P \pi \implies \pi$ es NP-Completo ya que $\leq_P$ es transitiva.

Def: **CNF**

Una expresión booleana está en **forma conjutiva normal** *(CNF)* si es una conjunción de disjunciones de literales.
Es decir si es de la forma: $B_1 \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$
con $B_i = x_{i_1} \vee x_{i_2} \ldots \vee x_{i_s}$
Los B_i son expesiones booleanas. y cada x_j son literales booleanos
Es decir la CNF tiene la forma $(\ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots) \wedge \ldots$

Def: **SAT**

El **problema** SAT es el problema: Dada una expresión booleana B, ¿existe un asignamiento de los valores de las variables de B que la vuelvn verdadera?

Def: **CNF-SAT**

Es el problema SAT pero cuando se especifica que la expresión booleana B debe estar en CNF.

Teorema:

SAT es NP-Completo

Def: **3SAT**

El problema 3SAT es un subconjunto de CNF-SAT, excepto que se requiere que cada disjunción sea disjunción de exactamente 3 literales.

2.3 Resolución

> *Teorema:*
> 3SAT es NP Completo

Dem. Nos apoyamos sobre el teorema de que SAT es NP-completo.

Si probamos que SAT $\leq_P$ 3SAT, entonces por definición de NP-Completo (y como la reducción polinomial es transitiva) probamos que 3SAT es NP-completo.

Sea $B = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$ una instancia de SAT en CNF.

Vamos a construir un E_j a partir de cada D_j. Separemos en los casos dependiendo de la cantidad de literales que tiene cada D_j:

Caso 1 (1 literal): $D_j = x_{j_1}$

Sean y_1, y_2 dos literales nuevos. Sea entonces:

$E_j = (x_{j_1} \vee y_1 \vee y_2) \wedge (x_{j_1} \vee \overline{y_1} \vee y_2) \wedge (x_{j_1} \vee y_1 \vee \overline{y_2}) \wedge (x_{j_1} \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_2})$

Sin importar cuales sean, como están todas las combinaciones de disjunciones de y_1, y_2, entonces D_j es satisfacible si y solo sí E_j lo es.

Si queremos probarlo explícitamente podemos verlo así:

Por propiedad distributiva de los operadores lógicos tenemos que:

$E_j \equiv \big[(x_{j_1} \vee y_2) \wedge (y_1 \vee \overline{y_1})\big] \wedge \big[(x_{j_1} \vee \overline{y_2}) \wedge (y_1 \vee \overline{y_1})\big]$ Luego por reordenamiento $\Longrightarrow$

$E_j \equiv \big[(x_{j_1} \vee y_2) \wedge (x_{j_1} \vee \overline{y_2})\big] \wedge \big[(y_1 \vee \overline{y_1}) \wedge (y_1 \vee \overline{y_1})\big]$ Luego como $(y_1 \vee \overline{y_1}) = 1 \Longrightarrow$

$E_j \equiv \big[(x_{j_1} \vee y_2) \wedge (x_{j_1} \vee \overline{y_2})\big] \wedge 1 \wedge 1$ Luego nuevamente por distributividad $\Longrightarrow$

$E_j \equiv x_{j_1} \wedge (y_2 \vee \overline{y_2}) \wedge 1 \wedge 1$ Como $(y_2 \vee \overline{y_2}) = 1 \Longrightarrow$

$E_j \equiv x_{j_1} \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \equiv x_{j_1} = D_j$

Luego como son equivalentes, entonces E_j es satisfacible si D_j lo es.

Caso 2 (2 literales): $D_j = x_{j_1} \vee x_{j_2}$

Sea y_1 un literal cualquiera. Sea entonces:

$E_j = (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee y_1) \wedge (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee \overline{y_1})$

Por propiedad distributiva de los operadores lógicos tenemos que:

$(x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee y_1) \wedge (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee \overline{y_1}) \equiv (x_{j_1} \vee x_{j_2}) \wedge (y_1 \vee \overline{y_1})$

y como $y_1 \vee \overline{y_1} = 1 \Longrightarrow E_j \equiv (x_{j_1} \vee x_{j_2}) \wedge 1 \equiv (x_{j_1} \vee x_{j_2}) = D_j$

Nuevamente D_j es satisfacible si y solo sí E_j lo es.

Caso 3 (3 literales): $D_j = x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee x_{j_3}$

Entonces sea $E_j = D_j \implies D_j$ es satisfacible si y solo sí E_j lo es.

Caso 4 (≥ 4 literales):

$D_j = x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee \ldots \vee x_{j_k} \quad k \geq 4$

Sean variables nuevas $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$

Luego sea:

$$
\begin{aligned}
E_j = {} & (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee y_1) \wedge \\
& (\overline{y_1} \vee y_2 \vee x_{j_3}) \wedge \\
& (\overline{y_2} \vee y_3 \vee x_{j_4}) \wedge \\
& \ldots \\
& (\overline{y_{k-4}} \vee y_{k-3} \vee x_{j_{k-2}}) \wedge \\
& (\overline{y_{k-3}} \vee x_{j_{k-1}} \vee x_{j_k})
\end{aligned}
$$

Veamos que D_j es satisfacible si y solo sí E_j lo es.

Ida ($\implies$): Hipotesis D_j es satisfacible.

$\implies \exists$ un asignamiento tal que: $x_{j_r} = 1$

Hacemos el asignamiento $y_k = \begin{cases} 1 & \text{Si } k \leq r-2 \\ 0 & \text{Si } k > r-2 \end{cases}$

Entonces E_j queda:

$$
\begin{aligned}
E_j = {} & (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee 1) \wedge \\
& (\overline{1} \vee 1 \vee x_{j_3}) \wedge \\
& (\overline{1} \vee 1 \vee x_{j_4}) \wedge \\
& \ldots \\
& (\overline{y_{r-2}} \vee y_{r-1} \vee x_{j_r}) \wedge \quad \text{(esto por el asignamiento es:) } (\overline{1} \vee 0 \vee x_{j_r}) \wedge \\
& (\overline{y_{r-1}} \vee y_r \vee x_{r+1}) \wedge \quad \text{(esto por el asignamiento es:) } (\overline{0} \vee 0 \vee x_{j_{r+1}}) \wedge \\
& (\overline{y_r} \vee y_{r+1} \vee x_{r+2}) \wedge \quad \text{(esto por el asignamiento es:) } (\overline{0} \vee 0 \vee x_{j_{r+2}}) \wedge \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

$(\overline{0} \vee x_{j_{k-1}} \vee x_{j_k})$

Se puede ver renglón a renglón que cada asignación es verdadera, pues en la primera parte son de la forma $(\overline{1} \vee 1 \vee x_{j_{\ldots}}) = 1$

Al final son de la forma: $(\overline{0} \vee 0 \vee x_{j_{\ldots}}) = 1$

y como $x_{j_r} = 1$, entonces $(\overline{y_{r-2}} \vee y_{r-1} \vee x_{j_r}) = 1$

Luego E_j es satisfacible.

Vuelta ($\Longleftarrow$): Hipotesis E_j es satisfacible.

$\exists$ Asignamiento de $y_1, \ldots, y_{k-3}$ tal que $E_j = 1$

Supongamos que D_j no es satisfacible. Significa que el asignamiento en $D_j = 0$

$\Longrightarrow x_{j_1} = x_{j_2} = \cdots = x_{j_k} = 0 \quad \mathbf{(1)}$

Luego E_j tiene la forma:

$E_j \overset{\textbf{HIP}}{=} 1 \overset{\textbf{SUP}}{=} (0 \vee 0 \vee y_1) \wedge$

$(\overline{y_1} \vee y_2 \vee 0) \wedge$

$(\overline{y_2} \vee y_3 \vee 0) \wedge$

$\ldots$

$(\overline{y_{k-4}} \vee y_{k-3} \vee 0) \wedge$

$(\overline{y_{k-3}} \vee 0 \vee 0)$

Como toda la expresión es verdadera, cada término debe ser verdadero.

Por el primer término $(0 \vee 0 \vee y_1)$ concluimos que $y_1 = 1$

$y_1 = 1 \quad \wedge \quad (\overline{y_1} \vee y_2 \vee 0) = 1 \Longrightarrow y_2 = 1$

$y_2 = 1 \quad \wedge \quad (\overline{y_2} \vee y_3 \vee 0) = 1 \Longrightarrow y_3 = 1$

$\ldots$

$y_{k-4} = 1 \quad \wedge \quad (\overline{y_{k-4}} \vee y_{k-3} \vee 0) = 1 \Longrightarrow y_{k-3} = 1$

Pero el último término es

$(\overline{y_{k-3}} \vee x_{j_{k-1}} \vee x_{j_k})$

Pero como $y_{k-3} = 1$ y por **(1)** concluimos que:

$\Longrightarrow (\overline{1} \vee 0 \vee 0) = 1 \quad$ **Absurdo.**

$\therefore \quad D_j$ es satisfacible.

Con esto cubrimos todos los casos de definición de E_j a partir de D_j

$\therefore \quad D_j$ es satisfacible $\iff E_j$ lo es.

Entonces como tenemos B una instancia de SAT en CNF, entonces:

$\tilde{B} = E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_m$ **es una instancia de 3SAT** (con las variables de B más las variables nuevas y_i que no nos importan) y en particular (como una conjunción de términos es satisfacible sí y solo sí cada término es satisfacible):

$\tilde{B}$ es satisfacible $\iff B$ lo es

Es decir que tenemos un algoritmo que convierte instancias de SAT en instancias de 3SAT de tal manera que la solución de la instancia de 3SAT también soluciona SAT. Técnicamente hay que probar que este algoritmo es polinomial.

Se puede ver fácilmente que el algoritmo crea a lo sumo y_{k-3} variables nuevas, con k siendo la cantidad de literales de B. Si B tiene n expresiones, entonces el algoritmo es $\mathcal{O}(nk)$ que es polinomial.

Luego por definición de *Reducción Polinomial* se cumple que SAT $\leq_P$ 3SAT

$\therefore \quad$ **3SAT es NP-Completo**. $\square$

Pregunta 18: 3-COLOR es NP Completo

3.1 Enunciado detallado

Probar que 3-COLOR es NP-completo

3.2 Resolución

> *Teorema:*
> 3-COLOR es NP Completo

Dem. Veremos que 3-SAT $\leq_P$ 3-COLOR (y como 3-SAT es NP completo, eso probaría que 3-COLOR debe serlo también)

Dada una instancia B de 3-SAT, crearemos polinomialmente una instancia (grafo) G de 3-COLOR tal que B sea satisfacible sí y solo sí $X(G) \leq 3$

Sean las variables de B:

$x_1, \ldots, x_n$ y $B = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$

Con $D_j = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}$

Construiremos un grafo G:

Vértices:

v_{x_i} y $v_{\overline{x}_i}$ $\leftarrow$ por cada variable x_i ($2n$ en total)

$e_{j,1}, e_{j,2}, e_{j,3}, a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,3} \leftarrow$ por cada j ($6m$ en total)

Dos vértices s y t.

Esto se construye en tiempo polinomial $2 + 2n + 6m$

Lados:

Lado st

Los lados tv_{x_i} y $tv_{\overline{x}_i}$ por cada vértice x_i ($2n$ en total)

Los lados $v_{x_i}v_{\overline{x}_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$ (n lados en total)

Los lados $se_{j,k}$ para cada $k = 1, 2, 3 \quad j = 1, \ldots, m$ ($3m$ lados en total)

Lados $e_{j,k}a_{j,k}$ para cada $k = 1, 2, 3 \quad j = 1, \ldots, m$ ($3m$ lados en total)

Los lados del **triángulo** $a_{j,1}a_{j,2}a_{j,3}$ para cada $j = 1, \ldots, m$ ($3m$ lados en total)

Los lados $e_{j,k}v_{l_{j,k}}$ para cada $k = 1, 2, 3 \quad j = 1, \ldots, m$ ($3m$ lados en total)

Como fue construido leyendo las variables y los literales de cada disjunción, y estos son $1 + 3n + 12m$, por lo que esta construcción también es polinomial.

$\therefore$ La construcción de G es polinomial.

Como G tiene los triángulos de la construcción, entonces $X(\text{G}) \geq 3$

$\Longrightarrow X(\text{G}) \leq 3 \iff X(\text{G}) = 3$

Queremos probar lo siguiente:

$$B \text{ es satisfacible} \iff X(G) = 3$$

Ida: ($\Longrightarrow$)

Hipotesis: B es satisfacible

Eso implica que existe una asignación de $x_1, \ldots, x_n$ que satisface B

Sea esta asignación $b \in \{0, 1\}^n$ de tal manera que la asignación de x_i es b_i. Con esta palabra, definimos:

$x_i(b) = b_i$

$\overline{x_i}(b) = 1 - x_i(b) \quad (= \neg x_i(b))$

$D_j(b) = l_{j,1}(b) \vee l_{j,2}(b) \vee l_{j,3}(b)$

$B(b) = D_1(b) \wedge \ldots \wedge D_m(b)$

Entonces, reescribiendo la implicación de la hipotesis tenemos que:

$\exists\ b \in \{0, 1\}^n \mid B(b) = 1$

Como $B(b) = 1 \Longrightarrow D_j(b) = 1 \quad \forall\ j$

$D_j(b) = 1 \Longrightarrow \exists\ k_j \mid l_{l,k_j} \ : \ l_{l,k_j}(b) = 1 \quad$ **(1)**

Hacemos el siguiente coloreo:

$$c(v_{x_i}) = x_i(b) \quad \wedge \quad c(v_{\overline{x_i}}) = \overline{x_i}(b) \quad \text{para cada } i$$

$$c(s) = 1 \quad \wedge \quad c(t) = 2$$

$$c(a_{j,k_j}) = 2 \quad \wedge \quad c(a_{j,k_j+1 \mod 3}) = 0 \quad \wedge \quad c(a_{j,k_j+2 \mod 3}) = 1 \quad \text{para cada } j$$

$$c(e_{j,k_j}) = 0 \quad \wedge \quad c(e_{j,r}) = 2 \text{ con } r \neq k_j \quad \text{para cada } j$$

Es decir que en cada triángulo a_j, coloreamos el vértice con el índice k_j con el color 2, y a los otros con 0 y 1. No nos importa cual es 0 y cual 1 mientras sean distintos.

Similarmente, para cada e coloreamos con 0 el e con indice que coincide con k_j y con 2 en los demás.

Veamos que el coloreo sea propio:

Para cada lado $v_{x_i}v_{\overline{x}_i}$ vemos que no tenemos problemas para un coloreo impropio ya que:

$c(v_{\overline{x_i}}) = \overline{x_i}(b) = 1 - x_i(b) \neq x_i(b) = c(v_{x_i})$

El lado st no tiene problemas ya que son colores distintos.

como $c(t) = 2 \notin \{0,1\}$ y $c(v_{x_i}), c(v_{\overline{x_i}}) \in \{0,1\} \implies$ los lados tv_{x_i} y $tv_{\overline{x}_i}$ no tienen problemas.

Cada triángulo formado por los $a_{j,k}$ tiene los tres vértices de distinto color, por lo que no crea problemas.

Respecto a los e, estan unidos a s, a ciertos $a_{j,k}$, y ciertos $v_{l_{j,k}}$

Como $c(e_{j,k_j}) = 0 \neq 2 = c(a_{j,k_j})$ estos lados no generan problemas.

Como cuando $r \neq k_j \implies c(e_{j,r}) = 2$ y $c(a_{j,r}) \in \{0,1\}$, tampoco tenemos problemas con estos lados.

Como $c(e_{j,i}) \in \{2,0\} \implies c(e_{j,i}) \neq 1 = c(s)$

Para $c(e_{j,r}) = 2$ (con $r \neq k_j$) y $c(v_{l_{j,r}}) \in \{0,1\} \implies e_{j,r}v_{l_{j,r}}$ no crea problemas.

Ahora veamos los lados $e_{j,k_j}v_{l_{k_j,j}}$

Por definición del coloreo tenemos que $c(v_{l_{j,k_j}}) = l_{j,k_j}(b)$ y por **(1)** tenemos que $l_{j,k_j}(b) = 1$

$\implies c(v_{l_{j,k_j}}) = 1 \neq 0 = c(e_{j,k_j})$ por lo que no crea problemas.

Coloreamos todos los vértices y verificamos que no hay coloreo impropio $\implies X(\mathrm{G}) \leq 3$

$\therefore \quad X(\mathrm{G}) = 3$

Vuelta: $(\Longleftarrow)$

Hipotesis: $X(\mathrm{G}) = 3$

$\implies$ existe coloreo propio c de G con 3 colores.

Sea $b \in \{0,1\}^n$ a partir del coloreo c de la siguiente forma:

$$b_i = \begin{cases} 1 & c(v_{x_i}) = c(s) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

Como $a_{j,1}, a_{j,21}, a_{j,3}$ forman un triángulo y c colora G con 3 colores, entonces los 3 colores deben estar representados en ese triángulo $\implies \exists\ q \mid c(a_{j,q}) = c(t)$

Como $e_{j,q}a_{j,q} \in E \implies c(e_{j,q}) \neq c(a_{j,q}) = c(t)$

Como $e_{j,q}s \in E \implies c(e_{j,q}) \neq c(s)$

Y como $st \in E \implies c(s) \neq c(t)$

$\therefore \quad c(e_{j,q}) \neq c(s) \neq c(t)$

Entonces podemos considerar que $e_{j,q}$ tiene el 'tercer' color.

Luego como $v_{l_{j,q}}e_{j,q} \in E \implies c(v_{l_{j,q}}) \neq c(e_{j,q})$

$v_{l_{j,q}}t \in E \implies c(v_{l_{j,q}}) \neq c(t)$

Como $e_{j,q}$ tiene el 'tercer' color.

$\therefore \quad c(v_{l_{j,q}}) = c(s)$

Luego $l_{j,q}$ es un literal, asíque es una variable o la negación de una variable.

Caso 1: $l_{j,q} = x_i$ para cierto i

Como $c(v_{l_{j,q}}) = c(s) \implies c(v_{x_i}) = c(s)$

Y por definición $\implies b_i = 1$

Entonces $l_{j,q}(b) = x_i(b) = b_i = 1$

Caso 2: $l_{j,q} = \overline{x_i}$ para cierto i

Como $c(v_{l_{j,q}}) = c(s) \implies c(v_{\overline{x_i}}) = c(s)$

Como $v_{x_i}v_{\overline{x_i}} \in E \implies c(v_{x_i}) \neq c(v_{\overline{x_i}})$

Entonces $c(v_{x_i}) \neq c(s) \implies b_i = 0$

Y por último $l_{j,q}(b) = \overline{x_i}(b) = 1 - x_i(b) = 1 - 0 = 1$

En ambos casos concluimos lo mismo:

$\therefore \quad l_{j,q}(b) = 1$

Como $l_{j,q} \in \{l_{j,1}, l_{j,2}, l_{j,3}\} \implies l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3} = 1$

$\implies D_j(b) = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3} = 1$

En resumen $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \implies D_j = 1$

$\therefore \quad D_j = 1 \quad \forall \ 0 \leq j \leq m$

$\implies B = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m \implies B(b) = 1$

Luego B es satisfacible.

Esto prueba que:

$$B \text{ es satisfacible} \iff X(G) = 3$$

(Acá podría terminar la prueba, pero a continuación dejaremos explícito por qué esto prueba que 3-COLOR es NP-completo)

Por definición de *Reducción Polinomial* tenemos que **3SAT** $\leq_p$ **3-COLOR**, y como se demostró que 3SAT es NP completo, entonces 3-COLOR es NP completo.

En palabras, lo que probamos nos dice que si encontraramos una forma de resolver 3-COLOR de manera eficiente, entonces al mismo tiempo hubieramos encontrado una forma eficiente de resolver 3SAT, porque podemos convertir cualquier problema de 3SAT en un grafo G y resolver 3COLOR sobre ese grafo. Si G puede ser coloreado con 3 colores, entonces sabemos que su B correspondiente es satisfacible.

$\square$

Pregunta 19: Matrimonio 3D es NP Completo

4.1 Enunciado detallado

Probar que Matrimonio3D ("matrimonio trisexual") es NP-completo

4.2 Conocimiento presupuesto para la resolución

Def: **Hipergrafos**

Un **r-hipergrafo** es un par (V, E) donde V es un conjunto de vértices y E es un subconjunto del conjunto de subconjuntos de cardinalidad r de V
(un Grafo es un **2-hypergrafo**)

Def: **k-partito**

Un r-hypergrafo es k-partito si los vértices se pueden colorear con k colores de forma tal que para cada lado, los colores de sus vértices son distintos.

Notación: **El caso que estudiamos**

El caso que nos interesa es $k = 3 = r$
Es decir, decimos que un 3-hypergrafo es tripartito si existen X, Y, Z disjuntos dos a dos tales que $V = X \cup Y \cup Z$ y que todo *lado* en E es de la forma $\{x, y, z\}$ para algunos $x \in X, y \in Y, z \in Z$

Extendiendo la misma definición de grafo tenemos que:

Def: **Matching de un 3-hypergrafo**

Es un subgrafo tal que lados distintos del subgrafo son disjuntos.

Def: **Casamiento 3D *(Matrimonio Trisexual)***

Dado un 3-hypergrafo tripartito, con las tres partes de igual cardinalidad, ¿existe un matching que cubra todos los vértices?
(Es decir que tenga cardinalidad igual a la de cada una de las partes)

4.3 Resolución

Teorema:
Matrimonio 3D es NP completo

Dem. Probaremos que 3SAT $\leq_P$ Casamiento 3D. Ver las otras preguntas de este grupo para entender las cosas que nos salteamos

Sea $B = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$ la instancia de 3SAT, con D_j las disjunciones y $x_1, \ldots, x_n$ las variables de la misma.

Como es una instancia de 3SAT, cada disjunción toma la forma:

$D_k = l_{j_1} \vee l_{j_2} \vee l_{j_3}$ con cada l_{j_r} siendo literales de los x_i

Para simplificar la notación, cuando un índice i se use, estos varían siempre entre 1 y n, cuando un índice j se usa variarán entre 1 y m, cuando un índice k se usa variarán entre 1 y $m(n-1)$, y por último cuando un índice r se usa, variará entre 1 y 3.

Sea H el siguiente 3-hypergrafo tripartito:

Vértices: $V = X \cup Y \cup Z$ con:

$X = \{a_{i,j}\} \cup \{s_j\} \cup \{g_k\}$

$Y = \{b_{i,j}\} \cup \{t_j\} \cup \{h_k\}$

$Z = \{u_{i,j}\} \cup \{w_{i,j}\}$

Observemos que $|X| = |Y| = nm + m + m(n-1) = nm + m + mn - m = 2nm$

y $|Z| = nm + nm = 2nm$

$\therefore \quad |X| = |Y| = |Z|$

Lados: $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ con:

$E_0 = \{a_{i,j} b_{i,j} u_{i,j}\}$

$E_1 = \{a_{i,j+1} b_{i,j} w_{i,j}\}$ (asumiendo que $m + 1 = 1$)

$E_2 = \{g_k h_k u_{i,j}\} \cup \{g_k h_k w_{i,j}\}$

Para definir E_3 definimos lo siguiente:

Para $r = 1, 2, 3$ sea:

$v_{jr} = u_{ij}$ si $l_{jr} = x_i$ $\quad v_{jr} = w_{ij}$ si $l_{jr} = \overline{x_i}$

Entonces sea:

$E_3 = \{v_{jr}s_jt_j\}$

Una vez construido, probemos las implicaciones:

Ida: ($\Longrightarrow$)

Hipótesis: H tiene un matching perfecto.

$\Longrightarrow$ tiene $2mn$ lados.

Vemos que para cada j, a_{ij} debe estar en algun lado del matching, en E_0 o E_1 (E_2 y E_3 no tienen lados con ningun a). Si suponemos que está en algún lado de E_0, entonces ese lado debe ser $a_{ij}b_{ij}u_{ij}$

Si vemos el lado $a_{i(j+1)}$, si estuviera en E_1, entonces tendría que estar en el lado $a_{i(j+1)}b_{ij}u_{ij}$, pero entonces tendríamos que en el matching M hay un lado $a_{ij}b_{ij}u_{ij}$ y un lado $a_{i(j+1)}b_{ij}u_{ij}$, que comparten b_{ij}, por lo que no sería un matching. Absurdo, por lo que concluimos que $a_{i(j+1)}$ está en E_0 igual que a_{ij}, si extendemos esto por inducción tenemos que si para cierto i existe algún j tal que el vértice a_{ij} está en un lado de E_0, entonces todos los m vértices a_{ij} $\forall$ j estárán también.

Con un análisis similar, vemos que si a_{ij} está en un lado de E_1, entonces todos los a_{ij} $\forall$ j estarán tambien.

Definimos una asignación b a partir de este matching:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \exists\ a_{ij} \in E_0 \\ 1 & \exists\ a_{ij} \in E_1 \end{cases}$$

Dado $j \in \{1,\ldots,m\}$, como el matching es perfecto, los vértices s_j, t_j deben estar en algun lado de M. Y los únicos lados que tienen esos vértices son los lados de E_3, que son de la forma $\{v_{jr}s_jt_j\}$, por lo tanto para todo j debe existir al menos un $r \in \{1,2,3\} \mid v_{jr}s_jt_j$ es un lado de M.

Para ese r existe un i tal que $v_{jr} = u_{ij}$ o $v_{jr} = w_{ij}$

$\Longrightarrow$ Ese vértice u_{ij} o w_{ij} no puede estar en ningun otro lado de M.

Caso 1: $v_{jr} = u_{ij}$ entonces el lado $a_{ij}b_{ij}u_{ij}$ de E_0 no puede estar en M

Por lo que probamos antes, entonces quiere decir que para este i todos los j se cumple que $a_{ij} \in E_1$. Por definición de b entonces se cumple que $b_i = 1 \Longrightarrow x_i(b) = 1$

Luego como $v_{jr} = u_{ij} \overset{\text{Def } E_3}{\Longrightarrow} l_{jr} = x_i$

$\Longrightarrow l_{jr}(b) = 1 \Longrightarrow D_j(b) = 1$

Caso 2: $v_{jr} = u_{ij}$ entonces el lado $a_{i(j+1)}b_{ij}w_{ij}$ no puede estar en M , y por lo que vimos antes esto junto con la definición de b tenemos que $b_i = 0$

Como $v_{jr} = w_{ij} \overset{\text{Def } E_3}{\Longrightarrow} l_{jr} = \overline{x_i}$

$\implies l_{jr}(b) = \overline{x_i}(b) = 1 - x_i(b) = 1 - 0 = 1$

Otra vez $D_j = 1$

Como se cumple en ambos casos tenemos que

$\therefore \quad 1 \le j \le m \implies D_j = 1$

$\implies B(b) = 1$

$\therefore \quad B$ es satisfacible.

Vuelta: $(\impliedby)$

Hipotesis: B es satisfacible.

$\implies \ \exists\ b \mid B(b) = 1 \implies D_j(b) = 1\ \forall\ j$

$\implies \ \exists\ r \mid l_{jr}(b) = 1$ para cada j.

Sean los r_j dichos r.

Sean los lados de un matching $M \quad F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$ de tal forma que $F_i \subseteq E_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$

$F_0 = \{a_{ij}b_{ij}u_{ij} \in E_0 \mid b_i = 0\ \wedge\ j = 1, \dots, m\}$

$F_1 = \{a_{i(j+1)}b_{ij}w_{ij} \in E_1 \mid b_i = 1\ \wedge\ j = 1, \dots, m\}$

$F_3 = \{v_{jr_j}s_jt_j \in E_3 \mid j = 1, \dots, m\}$

Observemos que los lados de F_0 son disjuntos con cada lado de F_1 y viceversa, pues b_i no puede ser 0 y 1 al mismo tiempo.

Probemos que a su vez son disjuntos con los lados de F_3.

Supongamos que no es así. Entonces $\exists\ j \mid v_{jr_j}$ aparece en algun lado de M en F_0 o F_1

Veamos entonces a l_{jr_j}

Caso 1: $l_{jr_j} = x_i$ para algun i

$\implies v_{jr_j} = u_{ij}$

Esto descarta que aparezca en F_1 ya que este no tiene lados u. Entonces debe aparecer en F_0

Pero por definición de r_j tenemos $l_{jr_j}(b) = 1$ y $l_{jr_j} = x_i$ debemos tener que $x_i(b) = b_i = 1$

Lo cual descarta que v_{jr_j} aparezca en algún lado de F_0

Absurdo ya que concluimos que debe aparecer en alguno de los dos conjuntos.

Caso 2: $l_{jr_j} = \overline{x_i}$ para algun i

Es un análisis análogo: $\implies v_{jr_j} = w_{ij}$

Descarta que aparezca en F_0 ya que este no tiene lados con vértice w

Entonces aparece en $F_1 \implies b_i = 1$

Pero $1 = l_{jr_j}(b) = \overline{x_i}(b) = 1 - x_i(b) = 1 - b_i = 1 - 1 = 0$

$\therefore \quad 1 = 0 \quad$ Absurdo.

Entonces hasta ahora tenemos un matching, aunque todavía no es perfecto. Algunos vértices todavia no están.

Sea $N = N_1 \cup N_2$ con:

$N_1 = \{u_{ij} \mid \text{no están cubiertos por los lados } F_0, F_1, F_3\}$

$N_2 = \{w_{ij} \mid \text{no están cubiertos por los lados } F_0, F_1, F_3\}$

Veamos la cardinalidad de N

Supongamos que hay p indices i tal que $b_i = 0$ y q indices i tal que $b_i = 1$

$\implies p + q = n$

Entonces en F_0 hay pm u_{ij} y en F_1 hay qm w_{ij}

Por lo tanto el total de u_{ij} o w_{ij} que aparecen en F_0 o F_1 es $pm + qm = nm$

Y para cada j en F_3, tenemos a v_{jr_j} que es u_{ij} o bien w_{ij} para algún i.

Eso suma m vértices más.

Entonces el total de u_{ij} o w_{ij} que aparecen en F_0, F_1, F_3 es $nm + m = m(n+1)$

El total de u_{ij} es nm, igual que el total de w_{ij}, entonces en conjunto son $2nm$

Por lo tanto la cardinalidad de N es la siguiente:

$|N| = 2nm - m(n+1) = 2mn - mn - m = nm - m = m(n-1)$

Sea entonces $f : \{1, \dots, m(n-1)\} \to N$ una **biyección** entre los elementos de N y el conjunto $\{1, \dots, m(n-1)\}$

Definimos:

$F_2 = \{g_k h_k f(k)\}$

Por definición de N, estos lados son disjuntos de los anteriores pues $f(k) \in N$ y los g_k, h_k solo aparecen en lados de E_2

Luego como f es biyectiva, cada vértice de N aparece *una sola vez* como un $f(k)$ y como todo lado que no estaba cubierto está en N, ahora todos los vértices quedan cubiertos entre

F_0, F_1, F_2 y F_3

Luego M es un matching perfecto.

Eso prueba la vuelta:

$\therefore$ M es un matching perfecto $\iff$ B es satisfacible

Luego por definición de reducción polinomial:

3SAT $\leq_P$ Casamiento 3D

$\therefore$ Casamiento 3D es NP-compltо.

$\square$