

Definiciones

sábado, 28 de mayo de 2022 18:44

Matching minimizador del máximo y de la suma:

Sea:

$$|X| = |Y|$$

$$X \cap Y = \emptyset$$

$$c : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$G = (X \cup Y, E, c)$ un grafo bipartito con pesos con componentes X e Y

M un matching perfecto de G

M minimiza el máximo

$$\Leftrightarrow \nexists M' \text{ matching perfecto de } G : \max\{c(e) : e \in M'\} < \max\{c(e) : e \in M\}$$

M minimiza la suma

$$\Leftrightarrow \nexists M' \text{ matching perfecto de } G : \sum_{e \in M'} c(e) < \sum_{e \in M} c(e)$$

Teoremas:

sábado, 28 de mayo de 2022 18:53

Algoritmo de Gross:

Sea:

$$|X| = |Y|$$

$$X \cap Y = \emptyset$$

$$c : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$G = (X \cup Y, E, c)$ un grafo bipartito con pesos con componentes X e Y
 $\mu \in \mathbb{N}$

$(X \cup Y, \{e \in E : c(e) \leq \mu\})$ tiene un matching perfecto

$\wedge (X \cup Y, \{e \in E : c(e) \leq \max\{i \in \text{img}(c) : i < \mu\}\})$ no tiene un matching perfecto
 \Rightarrow el matching perfecto de $(X \cup Y, \{e \in E : c(e) \leq \mu\})$ minimiza el máximo

Algoritmo Húngaro:

Sea:

$$|X| = |Y|$$

$$X \cap Y = \emptyset$$

$$c : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$G = (X \cup Y, E, c)$ un grafo bipartito con pesos

$$a \in \mathbb{R}$$

$$x \in X$$

M un matching perfecto de G

$$c' : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c(x', y) \neq \begin{cases} x' = x & \rightarrow (x, y) \notin a \\ \text{si no} & \rightarrow (x', y) \end{cases}$$

M minimiza la suma de $G \Leftrightarrow M$ minimiza la suma de $(X \cup Y, E, c')$

1a)

miércoles, 25 de mayo de 2022 10:17

I): Las siguientes matrices representan el costo de asignar los trabajos I, II, \dots , etc a los trabajadores A, B, \dots , etc. de una empresa X . El costo lo pagarán los trabajadores. Hallar un matching que minimice el mayor costo que deba pagar un trabajador.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	$VIII$
A	1	2	5	5	3	8	2	9
B	9	8	8	9	8	8	1	3
C	3	1	5	8	9	6	5	8
D	9	1	7	9	3	8	8	5
E	8	9	2	4	8	5	9	9
F	9	8	3	8	8	9	8	1
G	5	4	8	9	1	8	9	8
H	8	8	9	1	8	3	1	1

	I	II	III	IV	V	VI	VII	$VIII$	IX
A	9	8	8	5	6	6	8	6	8
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	9
D	8	7	4	5	5	5	4	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5	7
G	10	7	9	7	7	5	8	8	8
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7
I	8	5	7	5	5	3	7	7	7

Cotas:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	min
A	1	2	5	5	3	8	2	9	1	
B	9	8	8	9	8	8	1	3	1	
C	3	1	5	8	9	6	5	8	1	
D	9	1	7	9	3	8	8	5	1	
E	8	9	2	4	8	5	9	9	2	
F	9	8	3	8	8	9	8	1	1	
G	5	4	8	9	1	8	9	8	1	
H	8	8	9	1	8	3	1	1	1	

min 1 1 2 1 1 3 1 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	5	5	3	8	2	9	1
B	9	8	8	9	8	8	1	3	1
C	3	1	5	8	9	6	5	8	1
D	9	1	7	9	3	8	8	5	1
E	8	9	2	4	8	5	9	9	2
F	9	8	3	8	8	9	8	1	1
G	5	4	8	9	1	8	9	8	1
H	8	8	9	1	8	3	1	1	1

La columna 6 tiene mínimo 3 $\Rightarrow 3 \leq \text{umbra}l$ El primer matching tiene máximo 9 $\Rightarrow 9 \geq \text{umbra}l$ $\Rightarrow \text{valor} \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Veo si hay de 6:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	2	5	5	3	2	16	
B						13		
C	3	1	5	6	5	26		
D	1		3			5	56	
E	0	4	5					
F	3			1				
G	5	4	1			*		
H		1	3	1	1			

G 2 C 6

Si hay de 6

Veo si hay de 4:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	2	3	2	16			
B				13	7A			
C	3	1				26		
D	1		3			56		
E	0	4	5					
F	3			3F				
G	4	1			18	*		

columnas:
G 2 C 7 A 7 B 8 F 3 E 6

G	④	1	*
H	①	3	1 1
C	②	E ₃	E ₃
B	③	E ₃	A ₁
D	⑤	E ₃	B ₄

Si hay de 4

Veo si hay de 3:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	①	2		3	2			
B				①				
C	①				⑤			
D	1		③			⑥		
E	②							
F	3				①			
G				1			*	
H	①			3	1	1		

No hay de 3

⇒ El mejor umbral es 4

1b)

miércoles, 25 de mayo de 2022

9:37

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>	<i>IX</i>
<i>A</i>	9	8	8	5	6	6	8	6	8
<i>B</i>	5	6	7	4	2	3	6	5	6
<i>C</i>	5	5	5	2	2	3	4	3	9
<i>D</i>	8	7	4	5	5	5	4	6	4
<i>E</i>	8	5	8	6	5	3	7	7	7
<i>F</i>	8	7	7	4	5	5	7	5	7
<i>G</i>	10	7	9	7	7	5	8	8	8
<i>H</i>	7	7	7	4	5	5	7	5	7
<i>I</i>	8	5	7	5	5	3	7	7	7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	min
<i>A</i>	9	8	8	5	6	6	8	6	8	5
<i>B</i>	5	6	7	4	2	3	6	5	6	2
<i>C</i>	5	5	5	2	2	3	4	3	9	2
<i>D</i>	8	7	4	5	5	5	4	6	4	4
<i>E</i>	8	5	8	6	5	3	7	7	7	3
<i>F</i>	8	7	7	4	5	5	7	5	7	4
<i>G</i>	10	7	9	7	7	5	8	8	8	5
<i>H</i>	7	7	7	4	5	5	7	5	7	4
<i>I</i>	8	5	7	5	5	3	7	7	7	3

min 5 5 4 2 2 3 4 3 4

La fila 6 tiene como minimo un 5 $\Rightarrow 5 \leq \text{umbra}l$ El matching diagonal tiene maximo 9 $\Rightarrow 9 \geq \text{umbra}l$ $\Rightarrow \text{umbra}l \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Busco de 7: (busco un matching sin pesos con los ≤ 7)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A				5	6	6	6	4	6	camino:
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6	G 5 E 9
C	5	5	5	2	2	3	4	3	2	
D	7	4	5	5	5	4	6	4		
E	5	6	5	3	7	7	7	5	6	
F	7	7	4	5	5	7	5	7	6	
G	7	7	7	7	5			*		
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7	
I	5	7	5	5	3	7	7	7		
J	8	6	6	6	6	C ₂	A ₉	E ₅		

Encontrando matching de 7

Busco de 6

1º Iteración:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A				5	6	6	6	9	1	camino:
B	5	6	4	2	3	6	5	6		I 2 C 7
C	5	5	5	2	2	3	4	3	2	
D	4	5	5	5	4	6	4			
E	5	6	5	3				5	I	
F		4	5	5		5		6	6	
G				5				*		
H		4	5	5		5				
I	5		5	5			*			

H		9	5	5	5	
I	5	5	5	3		*
C ₂	I	C ₂	X	X	8	C ₂ A ₁

2º Iteración:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		5	6	6	6	6	4	F	
B	5	6	4	2	3	6	5	6	
C	5	5	5	2	2	3	4	3	
D		4	5	5	5	4	6	4	
E	5	6	5	3			5	F	
F		4	5	5		5	6	G	
G				5				*	
H		4	5	5		5	8	F	
I	5	5	5	3			2	E	
E ₅		F ₆	F ₆	G		F ₆			

No se puede llegar a un umbral de 6

⇒ El mejor matching es de umbral 7

2)

miércoles, 25 de mayo de 2022 11:44

II): Para completar un cierto proyecto se deben realizar ciertos trabajos I, II, \dots , etc. Hay 7 trabajadores que pueden hacer los trabajos, pero por motivos de política interna no se quiere que ningún trabajador realice mas de un trabajo. La siguiente matriz representa el tiempo en días de asignar los trabajos I, II, \dots , etc a los trabajadores A, B, \dots , etc. Los trabajos se pueden realizar en paralelo, i.e., no dependen uno de otro.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
A	31	42	7	4	11	2	7
B	2	5	31	3	10	768	768
C	6	10	31	768	11	5	1
D	2	2	3	9	10	4	99
E	4	4	2	6	3	10	7
F	3	10	8	4	5	99	31
G	31	42	10	768	6	2	3

Encontrar un matching que minimice el tiempo para completar el proyecto y dar ese tiempo.

	1	2	3	4	5	6	7	\min
A	31	42	7	4	11	2	7	2
B	2	5	31	3	10	768	768	2
C	6	10	31	768	11	5	1	1
D	2	2	3	9	10	4	99	2
E	4	1	2	6	3	10	7	2
F	3	10	8	4	5	99	31	3
G	31	42	10	768	6	2	3	2

$\min 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1$

La fila F tiene mínimo 3 $\Rightarrow 3 \leq \text{umbra}$

El primer matching tiene máximo 99 $\Rightarrow 99 \geq \text{umbra}$

Los umbrales posibles son pesos

$$\Rightarrow \text{umbra} \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 31, 42, 99\}$$

Veo si hay de 8:

	1	2	3	4	5	6	7
A			7	4	2	7	
B	2	5	3				
C	6			5	1		
D	2	2	3		4		
E	4	1	2	6	3	7	
F	3			4	5		
G				6	2	3	

Si hay de 8

Veo si hay de 5:

	1	2	3	4	5	6	7
A			4		2		
B	2	5	3				
C				5	1		
D	2	2	3		4		
E	4	1	2	3			
F	3			4	5		
G				2	3		

Si hay de 5

Veo si hay de 4:

	1	2	3	4	5	6	7
A				4	2	4	
B	2			3		1	
C					1	7	6
D	2	2	3		4		
E	4	1	2		3		
F	3			4		*	
G				—	2	3	6
	f		f		A	G	6

No hay de 4

⇒ El mejor umbral es 5

3)

miércoles, 25 de mayo de 2022 13:44

III): Para completar un cierto proyecto se deben realizar ciertos trabajos I, II, \dots , etc. los cuales son dependientes: antes de poder hacer I hay que hacer II , antes de hacer II hay que hacer III , etc. Hay 8 trabajadores que pueden hacer los trabajos, pero por motivos de política interna no se quiere que ningún trabajador realice mas de un trabajo. La siguiente matriz representa el tiempo en días de asignar los trabajos I, II, \dots , etc a los trabajadores A, B, \dots , etc. Encontrar un matching que minimice el tiempo para completar el proyecto y dar ese tiempo.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	$VIII$
A	1	2	5	5	3	8	2	9
B	9	8	8	9	8	8	1	9
C	3	1	5	8	9	6	5	9
D	1	9	7	9	3	8	8	9
E	8	9	2	4	8	5	9	9
F	9	8	3	8	8	9	8	9
G	5	4	8	9	1	8	9	9
H	8	8	4	8	8	8	3	9

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	2	5	5	3	8	2	9
B	9	8	8	9	8	8	1	9
C	3	1	5	8	9	6	5	9
D	1	9	7	9	3	8	8	9
E	8	9	2	4	8	5	9	9
F	9	8	3	8	8	9	8	9
G	5	4	8	9	1	8	9	9
H	8	8	4	8	8	8	3	9

Primer a iteración:

Resto el mínimo de cada fila

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	4	4	2	7	1	8
B	8	7	7	8	7	7	0	8
C	2	0	4	7	8	5	4	8
D	0	8	6	8	2	7	7	8
E	6	7	0	2	6	3	7	7
F	6	5	0	5	5	6	5	6
G	4	3	7	8	0	7	8	8
H	5	5	1	5	5	5	0	6

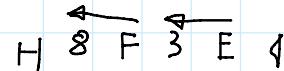
Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	4	2	2	4	1	2
B	8	7	7	6	7	4	0	2
C	2	0	4	5	8	2	4	2
D	0	8	6	6	2	4	7	2
E	6	7	0	0	6	0	7	1
F	6	5	0	3	5	3	5	0
G	4	3	7	6	0	4	8	2
H	5	5	1	3	5	2	0	0

Busco matching entre los 0's:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0							
B			0					
C	0							
D	0			*	*			
E	0	0	0					
F	0	0		0	0			
G		0						
H	0	0	0	*				
	0	F	E	E	H	H		

1º camino:



No hay mas caminos

No hay matching

$$S = \{A, D\}$$

$$\Gamma(S) = \{1\}$$

$$m = \min \{ |e| : e \in S \times \overline{\Gamma(S)} \}$$

$$= 1$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	4	2	2	4	1	2
B	8	7	7	6	7	4	0	2
C	2	0	4	5	8	2	4	2
D	0	8	6	6	2	4	7	2
E	6	7	0	0	6	0	7	1
F	6	5	0	3	5	3	5	0
G	4	3	7	6	0	4	8	2
H	5	5	1	3	5	2	0	0

$S \times \overline{\Gamma(S)}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	4	2	2	4	1	2
B	8	7	7	6	7	4	0	2
C	2	0	4	5	8	2	4	2
D	0	8	6	6	2	4	7	2

0 resto m

0 sumo m

C	2	0	4	5	8	2	4	2
D	0	8	6	6	2	4	7	2
E	6	7	0	0	6	0	7	1
F	6	5	0	3	5	3	5	0
G	4	3	7	6	0	4	8	2
H	5	5	1	3	5	2	0	0

0 sum 0 m



	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	3	1	1	3	0	2
B	9	7	+	6	7	4	0	2
C	3	0	4	5	8	2	4	2
D	0	7	5	5	1	3	6	1
E	7	7	0	0	6	0	7	1
F	7	5	0	3	5	3	5	0
G	5	3	7	6	0	4	8	2
H	6	5	1	3	5	2	0	0

Busco matching entre los 0:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0			0	0		
B					0			
C		0						
D	0							
E		0	0		0			
F		0			0	0		
G				0				
H					0	0	*	

D	A ₁	F ₈	E ₃	E ₃	H	H		
D	A ₁			A ₁				

1º camino: H 8 F 3 E 4

No hay matching

$$S = \{A, B, C, D\}$$

$$r(S) = \{1, 2, 7\}$$

$$m = \min \{ c(e) : e \in S \times \overline{\Gamma(S)} \}$$

$\equiv 1$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	3	1	1	3	0	2
B	9	7	+	6	+	4	0	2
C	3	0	4	5	8	2	4	2
D	0	7	5	5	1	3	6	1
E	+	7	0	0	6	0	7	1
F	7	5	0	3	5	3	5	0
G	5	3	7	6	0	4	8	2
H	6	5	7	3	5	2	0	0

$S \times \overline{\Gamma(S)}$

0 resto m

0 sumo m



	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	2	0	0	2	0	1
B	9	7	6	5	6	3	0	1
C	3	0	3	4	7	1	4	1
D	0	7	4	4	0	2	6	0
E	8	8	0	0	6	0	8	1
F	8	6	0	3	5	3	0	0
G	6	4	7	6	0	4	9	2
H	7	6	1	3	5	2	1	0

Busco matching en los Os:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	0	0	0	10	4_E
B						0		
C	0						2_A	
D	0			0	0	0	5_G	
E	0	0	0	0	0	0	3_F	3_F
F	0				0	0	9_H	9_H
G			0				*	
H				0			*	*

~~D₅ A₁ F₃ A₄ B E₃ A₁, H~~

~~F₈ E₃ E₃ H~~

1º camino:

G → 5 → D → 1 → A → 4

2º camino:

H → 8 → F → 3 → E → 6

Quedan ese machine, que serian:

A1, B7, C2, D1, E6, F3, G5, H8

Con costo de la suma:

$$5 + 7 + 1 + 7 + 5 + 3 + 1 + 9$$

$$= 26$$

4a)

sábado, 28 de mayo de 2022 12:41

	I	II	III	IV	V	VI	VII
A	8	5	4	6	8	6	5
B	4	4	6	6	8	6	5
C	8	6	9	9	8	9	9
D	5	5	9	8	9	9	8
E	4	4	8	9	4	4	8
F	8	9	9	5	8	9	6
G	8	5	8	9	9	6	6

	1	2	3	4	5	6	7
A	8	5	4	6	8	6	5
B	4	4	6	6	8	6	5
C	8	6	9	9	8	9	9
D	5	5	9	8	9	9	8
E	4	4	8	9	4	4	8
F	8	9	9	5	8	9	6
G	8	5	8	9	9	6	6

Resto el mínimo en cada fila

	1	2	3	4	5	6	7
A	4	1	0	2	4	2	1
B	0	0	2	2	9	2	1
C	2	0	3	3	2	3	3
D	0	0	4	3	4	4	3
E	0	0	4	5	0	0	4
F	3	4	4	0	4	5	1
G	3	0	3	1	1	2	2

Resto el mínimo en cada columna

	1	2	3	4	5	6	7
A	4	1	0	2	4	2	0
B	0	0	2	2	4	2	0
C	2	0	3	3	2	3	2
D	0	0	4	3	4	4	2
E	0	0	4	5	0	0	3
F	3	4	4	0	4	5	0
G	3	0	3	4	4	2	1

Busco un matching con los 0's:

	1	2	3	4	5	6	7	
A			0		0			
B	0	0			0	1		
C	0					2		
D	0	0					*	
E	0	0		0	0			
F			0			0		
G	0						*	*
	D	D			B,			
			G					

1º corriendo:

D 1 B 7

No hay matching

$$S = \{C, G\}$$

$$r(S) = \{2\}$$

$$m = \min \{ r(e) : e \in S \times \overline{r(S)} \}$$

$$= 1$$

	1	2	3	4	5	6	7
A	4	7	0	2	4	2	0
B	0	0	2	2	4	2	0
C	2	0	3	3	2	3	2
D	0	0	4	3	4	4	2
E	0	0	4	5	0	0	3
F	3	4	4	0	4	5	0
G	3	0	3	9	4	2	1

$S \times \overline{F(S)}$

0 sumo m

0 resto m

	1	2	3	4	5	6	7
A	4	2	0	2	4	2	0
B	0	1	2	2	4	2	0
C	1	0	2	2	1	2	1
D	0	1	4	3	4	4	2
E	0	1	4	5	0	0	3
F	3	4	4	0	4	5	0
G	2	0	2	3	3	1	0

Sigo buscando el matching en los 0s:

	1	2	3	4	5	6	7
A			0		0		
B	0				0		x _G
C		0					x _G
D	0						x _B
E	0			0	0		
F			0			0	
G	0					0	*

~~B~~ ~~C~~

~~G~~

No hay matching

$$S = \{B, C, D, G\}$$

$$r(S) = \{1, 2, 7\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in \{S \times \overline{r(S)}\}$$

= 1

	1	2	3	4	5	6	7
A	4	2	0	2	4	2	0
B	0	1	2	2	4	2	0
C	1	0	2	2	1	2	1
D	0	1	4	3	4	4	2
E	0	1	4	5	0	0	3
F	3	4	4	0	4	5	0
G	2	0	2	3	3	1	0

$S \times \overline{r(S)}$

0 sumo m

0 resto m

	1	2	3	4	5	6	7
A	5	3	0	2	4	2	1
B	0	1	1	1	3	1	0
C	1	0	1	1	0	1	1
D	0	1	3	2	3	3	2
E	1	2	4	5	0	0	4
F	4	5	4	0	4	5	1
G	2	0	1	2	2	0	0

siglo buscando el matching de Os:

190 Buscando el matching de us.

	1	2	3	4	5	6	7
A			0				
B	0						0
C		0		0			
D	0						
E			0	0			
F			0				
G	0			0	0		

Quedo un matchin perfecto

4b)

sábado, 28 de mayo de 2022 15:25

	I	II	III	IV	V	VI	VII
A	7	4	6	9	1	9	4
B	8	5	9	2	7	5	4
C	7	2	3	3	7	3	6
D	4	4	6	1	3	2	7
E	5	5	7	3	5	5	1
F	7	6	6	4	1	3	9
G	7	4	7	6	3	2	9

Resto el mínimo de cada fila

	1	2	3	4	5	6	7
A	6	3	5	8	0	8	3
B	6	3	7	0	5	3	2
C	5	0	1	1	5	1	4
D	3	3	5	0	2	1	7
E	4	4	6	2	4	4	0
F	6	5	5	3	0	2	8
G	5	2	5	4	1	0	7

Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	5	6	7
A	3	3	4	8	0	8	3
B	3	3	6	0	5	3	2
C	2	0	0	1	5	1	4
D	0	3	4	0	2	1	7
E	1	4	5	2	4	4	0
F	3	5	4	3	0	2	8
G	2	2	4	4	1	0	7

Busco un matching de 0s:

	1	2	3	4	5	6	7	
A					0			5 F
B				0				
C	0	0						
D	0			0				
E						0		
F				0			*	
G					0			
							F	

No hay matching

$$S = \{A, F\}$$

$$r(S) = \{G\}$$

$$\begin{aligned} m &= \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Luego de restar \downarrow sumar

	1	2	3	4	5	6	7	
A	1	1	2	6	0	6	1	$S \times \overline{r(S)}$
B	3	3	6	0	7	3	2	
C	2	0	0	1	7	1	4	0 \sum_0 m
D	0	3	4	0	4	1	7	
E	1	4	5	2	6	4	0	0 resto m
F	1	3	2	1	0	0	6	
G	2	4	4	3	0	7		

Si yo buscojo matching de os:

	1	2	3	4	5	6	7	
A					0			5_E
B					0			
C		0	0					
D	0			0				
E						0		
F					0	0		*
G						0		6_E
							E E	

No hay matching

$$S = \{A, F, G\}$$

$$r(S) = \{5, 6\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ = 1$$

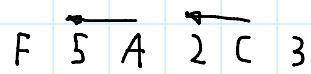
Luego de sumar y restar:

	1	2	3	4	5	6	7	
A	0	0	1	5	0	6	0	
B	3	3	6	0	2	4	2	
C	2	0	0	1	8	2	4	
D	0	3	4	0	5	2	7	
E	1	4	5	2	7	5	0	
F	0	2	1	0	0	0	5	
G	1	1	3	3	3	0	7	

Sigo buscando matching de Os.

	1	2	3	4	5	6	7	
A	0	0			0	0		5F
B				0				4F
C		0	0					2A
D	0				0			1F
E						0		7A
F	0			0	0	0		*
G						0		6F

1º caminho:



Quedó un matching

4c)

sábado, 28 de mayo de 2022 16:28

	I	II	III	IV
A	7	8	10	9
c) B	2	6	9	5
C	8	19	19	15
D	1	11	12	9

	1	2	3	4
A	7	8	10	9
B	2	6	9	5
C	8	19	19	15
D	1	11	12	9

Resto el mínimo de cada fila

	1	2	3	4
A	0	1	3	2
B	0	4	7	3
C	0	11	11	7
D	0	10	11	8

Resto el mínimo de cada columna:

	1	2	3	4	$S \times \overline{F(S)}$
A	0	0	0	0	
B	0	3	4	1	0 sumo m
C	0	10	8	5	
D	0	9	8	6	0 resto m

Busco un matching de 0s:

	1	2	3	4
A	0	0	0	1
B	0	*	*	X
C	0	*	*	
D	0	*	*	
	B	A ₁	A ₁	A ₁
		X		

1º domino:

B $\overbrace{1}^A$ 2

No hay matching

$$S = \{B, C, D\}$$

$$r(S) = \{1\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\}$$

$$= 1$$

Despues de sumar y restar:

	1	2	3	4	$S \times \overline{r(S)}$
A	1	0	0	0	0
B	0	2	3	0	0
C	0	9	7	4	0
D	0	8	7	5	0

sumo m

resto m

Sigo buscando un matching de 0s:

	1	2	3	4
A	0	0	0	
B	0	0	1	
C	0	*	1	
D	0	*	*	
X				
D				

1º camino: C $\xrightarrow{P_1}$ B 4

No hay matching

$$S = \{C, D\}$$

$$r(S) = \{1\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ = 1$$

Despues de sumar y restar:

	1	2	3	4	$S \times \overline{r(S)}$
A	5	0	0	0	
B	4	2	3	0	0
C	0	5	3	0	sumo m
D	0	4	3	1	resto m

Sigo buscando un matching de 3

	1	2	3	4
A	0	0	0	
R				4

A	0	0	
B	0	4c	
C	0	0	1d
D	0		*
			5f

No hay matching

$$S = \{B, C, D\}$$

$$r(S) = \{1, 4\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ = 2$$

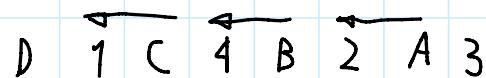
Despues de sumar y restar:

	1	2	3	4
A	7	0	0	2
B	4	0	1	0
C	0	3	1	0
D	0	2	1	1

Sigo buscando matching de Os:

	1	2	3	4
A	0	0	2	
B	0	0	4c	
C	0	0	1d	
D	0		*	

comiendo:



C	0	0	X ₀
D	0		*
	X ₁	A ₂	C ₁

Quedo un matching de costo

$$70 + 6 + 75 + 1$$

$$= 32$$

4d)

sábado, 28 de mayo de 2022 16:52

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>	<i>VIII</i>
<i>A</i>	1	2	3	3	1	8	4	2
<i>B</i>	1	4	6	3	9	3	7	1
<i>C</i>	3	4	3	2	1	2	2	6
<i>d)</i> <i>D</i>	3	2	4	4	8	6	2	7
<i>E</i>	3	3	1	2	3	3	5	3
<i>F</i>	1	6	6	8	5	2	4	7
<i>G</i>	1	8	1	6	2	7	4	6
<i>H</i>	6	6	2	7	8	5	9	2

	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>A</i>	1	2	3	3	1	8	4	2
<i>B</i>	1	4	6	3	9	3	7	1
<i>C</i>	3	4	3	2	1	2	2	6
<i>D</i>	3	2	1	4	8	6	2	7
<i>E</i>	3	3	1	2	3	3	5	3
<i>F</i>	1	6	6	8	5	2	4	7
<i>G</i>	1	8	1	6	2	7	1	6
<i>H</i>	6	6	2	7	8	5	9	2

Resto el mínimo de cada fila:

	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>A</i>	0	1	2	2	0	7	3	1
<i>B</i>	0	3	5	2	8	2	6	0
<i>C</i>	2	3	2	1	0	1	1	5
<i>D</i>	1	0	2	2	6	1	0	5
<i>E</i>	2	2	0	1	2	2	1	2
<i>F</i>	0	5	5	7	4	1	3	6
<i>G</i>	0	7	0	5	1	6	3	5
<i>H</i>	4	4	0	5	6	3	7	0

 (-7) (-1) (-1) (-2) (-1) (-1) (-7) (-2)

Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	2	1	0	6	3	7
B	0	3	5	1	8	1	6	0
C	2	3	2	0	0	0	1	5
D	1	0	2	1	6	3	0	5
E	2	2	0	0	2	1	4	2
F	0	5	5	6	4	0	3	6
G	0	7	0	1	1	5	3	5
H	4	4	0	1	6	2	7	0

(-1) (-1)

Busco un matching entre los 0:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0			0				
B	0				0			
C			0	0	0			
D	0					0		
E		0	0	0				
F	0				0			
G	0		0					
H	0				0			

	G	G	E	A		H		
	B	H	E	S	C	H		

1º Camino:

G 1 A 5

No hay más caminos

$$S = \{A, B, C, E, F, G, H\}$$

$$\Gamma(S) = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{\Gamma(S)}\}$$

$$= 1$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	2	1	0	6	3	7
B	0	3	5	1	8	1	6	0
C	2	3	2	0	0	0	1	5
D	1	0	2	1	6	3	0	5
E	2	2	0	0	2	1	4	2
F	0	5	5	6	4	0	3	6
G	0	7	0	1	1	5	3	5
H	4	4	0	1	6	2	7	0

$S \times \overline{\Gamma(S)}$

0 sch 0 m

0 resto m

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	2	1	0	6	2	7
B	0	2	5	1	8	1	5	0
C	2	2	2	0	0	0	0	5
D	2	0	3	2	7	4	0	6
E	2	1	0	0	2	1	3	2
F	0	4	5	6	4	0	2	6
G	0	6	0	1	1	5	2	5
H	4	3	0	1	6	2	6	0

Siguiendo buscando un matching entre los 0s:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0		0				
B	0				0			8
C		0	0	0	0	0		4
D	0		0	0		0		
E		0	0					3
F	0			0				
G	0	0						1
H		0			0			*

1º camino:

H 3 E 1 C 7

Con esto queremos el matching

5)

sábado, 28 de mayo de 2022 17:15

Dentro de los que mimizan el máximo, el que minimiza la suma

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
A	9	8	8	5	6	6	8	6	8
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	9
D	8	7	4	5	5	5	4	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5	7
G	11	8	10	8	8	6	9	9	9
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7
I	9	6	8	6	6	4	8	8	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	9	8	8	5	6	6	8	6	8
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	9
D	8	7	4	5	5	5	9	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5	7
G	11	8	10	8	8	6	9	9	9
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7
I	9	6	8	6	6	4	8	8	8

Busco el umbral mínimo

El mínimo de la fila A es 6

$$\Rightarrow \text{umbral} \geq 6$$

El matching diagonal tiene máximo 9

$$\Rightarrow \text{umbral} \leq 9$$

$$\Rightarrow \text{umbral} \in \{6, 7, 8, 9\}$$

Pruebo con umbral 7:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			5	6	6	6		
0	5	6	7	4	2	3	6	5



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A						5	6	6		4F
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6	1C
C	5	5	5	2	2	3	4	3		2F
D	7	4	5	5	5	4	6	4	3C	3F
E	5	6	5	3	7	7	7	5	I	5F
F	7	7	4	5	5	7	5	7	6G	6G
G						6			*	*
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7C	7F
I	6	6	6	4					*	1F
S2	I	C	I	I	S	S	A4	E5		
F6										

1º camino: I → A → 8

2º camino: G ← F ← 9

Si hay matching con hubo 7

Pruebo con hubo 6:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A						5	6	6		4F
B	5	6		4	2	3	6	5	6	1C
C	5	5	5	2	2	3	4	3		2F
D	4	5	5	5	4	6	4	3C		
E	5	6	5	3				5	5F	
F	4	5	5			5		6G	6G	
G						6		*	*	
H	4	5	5			5			8F	
I	6	6	6	4				*	2E	
S2	I	C	I	I	S	A4				
F5	F6	F6	F6	F6	F6	F6				

1º camino: I → 2C → 7

No hay matching con umbral 6

Busco el que minimice la suma con umbral 7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(Donde no hay más irá ∞)
A						5	6	6	6	
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6	
C	5	5	5	2	2	3	4	3		

D	7	4	5	5	5	9	6	4
E	5	6	5	3	7	7	7	
F	7	7	4	5	5	7	5	7
G						6		
H	7	7	7	4	5	5	7	5
I	6	6	6	4				

Resto el mínimo de cada fila:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			0	1	1		1		
B	3	4	5	2	0	1	4	3	4
C	3	3	3	0	0	1	2	1	
D	3	0	1	1	1	0	2	0	
E	2	3	2	0	4	4	4		
F	3	3	0	1	1	3	1	3	
G						0			
H	3	3	3	0	1	1	3	1	3
I	2	2	2	0					

Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			0	1	1		0		
B	0	2	5	2	0	1	4	2	4
C	0	1	3	0	0	1	2	0	
D	1	0	1	1	1	0	1	0	
E	0		3	2	0	4	3	4	
F	1	3	0	1	1	3	0	3	
G						0			
H	0	1	3	0	1	1	3	0	3
I	0		2	2	0				

Sx $\overline{r(s)}$

0 suma m

0 resto m

Busco un matching de 0s:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A			0			0		4	H	
B	0		0			0		1	H	
C	0			0	0		0		5	B
D		0				0	0	0		
E	0		0			n		2	n	

D	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0
A	X	X	X	X	X	X	X	X
B	X	X	X	X	X	X	X	X
C	X	X	X	X	X	X	X	X

No hay matching

$$S = \{A, B, C, E, F, G, H, I\}$$

$$r(S) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$$

$$\begin{aligned} m &= \min \{cc(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Despues de sumar y restar:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0	1	1	0					
B	0	2	3	2	0	1	2	2	2
C	0	1	1	0	0	1	0	0	
D	2	0	2	2	2	0	2	0	
E	0	0	3	2	0	2	3	2	
F	1	1	0	1	1	1	0	1	
G	0	0	0	0	0	0	0	0	
H	0	1	1	0	1	1	1	0	1
I	0	0	2	2	0				

$$S \times \overline{r(S)}$$

0 sumo m

0 resto m

Sigo buscando un matching de Os:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0				0				
B	0	0		0					
C	0	0	0	0	0	0			
D	0	0			0	0			
E	0			0					
F		0			0				
G			0						

1º camino: H 1 B 5 C 7

F	0	0	0	8H
G	0	0	6I	6I
H	0	0	*	*
I	0	0	*	*
	H T	H B ₁ T	(5) H	
	T	T		

No hay matching

$$S = \{E, G, I\}$$

$$r(S) = \{2, 6\}$$

$$m = 2$$

Sumo y resto:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		0	1	3	0				
B	0	4	3	2	0	3	2	2	2
C	0	3	1	0	0	3	0	0	
D	4	0	2	2	4	0	2	0	
E	0		1	0	0	0	1	0	
F	3	1	0	1	3	1	0	1	
G					0				
H	0	3	1	0	1	3	1	0	1
I	0		0	0	0				

Sigo buscando un matching de 1s:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		0				0		4I	
B	0			0				5I	
C	0		0	0	0	0		7F	
D		0			0	0	0		
E	0		0	0	0	0	0	2I	
F			0			0		8A	
G				0				6I	
H	0			0		0		1B	
I	0		0	0	0			*	
	B/5	I	T	X	X	E ₁	A ₄	E ₂	

comino:

I 2 E 9

~~I 0 0 0 *~~
~~B5 I T X T E1 A4 E2~~

Si hay matching:

Questor el matching:
 $\{A4, B5, C7, D3, E9, F8, G6, H1, I2\}$

con umbral 7

y con suma:

$$5 + 2 + 4 + 9 + 7 + 5 + 6 + 7 + 6 \\ = 46$$

VI): El ejercicio V es un ejemplo de dada una matriz de costos, asignar los trabajos de forma de minimizar la suma de los costos de entre todos los matchings que minimicen el mayor costo. Hacer esto con la matriz del ejercicio IV c) y comparar con el costo que obtuvo antes.

	1	2	3	4
A	7	8	10	9
B	2	6	9	5
C	8	19	19	15
D	1	11	12	9

Primero busco el umbral mínimo

La columna 3 tiene mínimo 9 $\Rightarrow \text{umbral} \geq 9$

Los umbrales posibles son candidatos

$$\Rightarrow \text{umbral} \in \{9, 10, 11, 12, 15, 19\}$$

Pruebo con umbral = 11

	1	2	3	4
A	7	8	10	9 1c
B	2	6	9	5 2A
C	8		*	
D	1	11	9	

camino: C $\overleftarrow{1} A$ 3

~~C $\overrightarrow{1} A_1$ A $\overrightarrow{1} A_1$~~

Si hay matching con umbral = 11

Pruebo con umbral = 9

	1	2	3	4
A	7	8	9 1c	
B	2	6	9 2A	
C	8		*	
D	1	9	4 4A	

camino: C $\overleftarrow{1} A \overleftarrow{2} B$ 3

~~C $\overrightarrow{1} A_1 B$ A $\overrightarrow{1} A_1$~~

Si hay matching con $|umbra| = 9$

9 es el mínimo umbral posible

\Rightarrow

$$|umbra| \geq 9$$

Ahora minimizar la suma con $|umbra| = 9$

	1	2	3	4	(en los vacíos irá ∞)
A	7	8	9		
B	2	6	9	5	
C	8				
D	1		9		

Resto el mínimo de cada fila

	1	2	3	4
A	0	1	2	
B	0	4	7	3
C	0			
D	0		9	

Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	$s \times r(s)$
A	0	0	0		
B	0	3	0	1	0 sumo m
C	0				
D	0		6		0 resto m

Busco un matching de 0s:

	1	2	3	4	
A	0	0	0	1	
B	0		0		
C	0		*	1	
D	0		*	*	
					1º camino: C → A → 2

No hay más caminos

$$S = \{C, D\}$$

$$r(S) = \{1\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ = 6$$

Suma y resto

	1	2	3	4
A	6	0	0	
B	6	3	0	1
C	0			
D	0		0	

Sigo buscando un matching de 0s

	1	2	3	4
A	0			0
B		0		
C	0			
D	0		0	

Si hay matching

Queda el matching:

$$\{A_2, B_3, C_1, D_1\}$$

$$(con umbral = 9)$$

y con suma:

$$8 + 9 + 8 + 9 = 34$$

La suma es mayor que el of

7)

domingo, 29 de mayo de 2022 11:33

VII): Ahora, pensar en el problema dual del anterior: de entre todos los matchings que minimizan la suma, hallar uno que minimize el mayor costo. Desarrolle un algoritmo para resolver este problema y aplicarlo en la matriz del ejercicio V.

Aplico el húngaro para encontrar la suma, después hago como gross, pero aplicando el húngaro en cada paso

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	8	8	5	6	6	8	6	8
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	9
D	8	7	4	5	5	5	9	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5	7
G	11	8	10	8	8	6	9	9	9
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7
I	9	6	8	6	6	4	8	8	8

Resto el mínimo de cada fila

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	3	3	0	1	1	3	1	3
B	3	4	5	2	0	1	4	3	4
C	3	3	3	0	0	1	2	1	7
D	4	3	0	1	1	1	0	2	0
E	5	2	5	3	2	0	1	4	4
F	4	3	3	0	1	1	3	1	3
G	5	2	4	2	2	0	3	3	3
H	3	3	3	0	1	1	3	1	3
I	5	2	4	2	2	0	4	4	4

Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	3	0	1	1	3	0	3
B	0	2	5	2	0	1	4	2	4
C	0	1	3	0	0	1	2	0	7
D	1	1	0	1	1	1	0	1	0
E	2	0	5	3	2	0	1	3	1
F	1	1	3	0	1	1	3	0	3
G	2	0	4	2	2	0	3	2	3

$S \times F(S)$

O resto m

O sumo m

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F	1	1	3	0	1	1	3	0	3
G	2	0	4	2	2	0	3	2	3
H	0	1	3	0	1	1	3	0	3
I	2	0	4	2	2	0	4	3	4

Buscando un matching entre los Os

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			0			0		4	H
B	0				0			1	H
C	0			0	0		0	5	B
D		0				0	0		
E		0			0			2	I
F				0		0	0	8	H
G	0				0			6	I
H	0			0		0		*	
I	0			0		0		*	

No hay matching

$$S = \{A, B, C, E, F, G, H, I\}$$

$$r(S) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$$

$$m = \min \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\} \\ = 2$$

Despues de sumar y restar:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	0	1	1	1	0	1
B	0	2	3	2	0	1	2	2	2
C	0	1	1	0	0	1	0	0	5
D	3	3	0	3	3	3	0	3	0
E	2	0	3	3	2	0	2	3	2
F	1	1	1	0	1	1	1	0	1
G	2	0	2	2	2	0	7	2	1
H	0	1	1	0	1	1	1	0	1
I	2	0	2	2	2	0	2	3	2

$$S \times \overline{r(S)}$$

0 resto m

0 sumo m

Siguiendo buscando un matching de Os:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				0			0		4H
B	0				0				1H
C	0		0	0	0		0		5B
D		0				0	0		
E	0				0				2I 2I
F		0				0			8H
G	0			0					6I 6I
H	0			0			0		*
I	0				0				* *
	H	I	H	B	I	C	5	H	
	I		I						

1º domino: H ~~T~~ B ~~S~~ C F

No hay matching

$$S = \{E, G, I\}$$

$$T(S) = \{2, 6\}$$

$$m = 1$$

Submo y resto:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	2	1	0	1	2	1	0	1
B	0	3	3	2	0	2	2	2	2
C	0	2	1	0	0	2	0	0	5
D	3	1	0	3	3	1	0	3	0
E	1	0	2	2	1	0	1	2	1
F	1	2	1	0	1	2	1	0	1
G	1	0	1	1	1	0	0	1	0
H	0	2	1	0	1	2	1	0	1
I	1	0	1	1	1	0	1	2	1

Sigo buscando un matching de Os:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				0			0		
B	0				0				
C	0		0	0	0		0		7G
D		0				0	0		
E	0				0				2I

domino: I ~~G~~ G 9

D	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0
X	X	X	X	X	X	X	X	X

Encontrar um matching

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	8	8	5	6	6	8	6	8
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	9
D	9	7	4	5	5	5	9	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5	7
G	11	8	10	8	8	6	9	9	9
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7
I	9	6	8	6	6	4	8	8	8

$$\text{sum} = 5 + 2 + 4 + 9 + 5 + 5 + 9 + 7 + 4$$

$$= 45$$

$$\max_{ij} = 9$$

Logo fijo G tiene mínimo 6

$$\Rightarrow v_{mbal} \in \{6, 7, 8, 9\}$$

Proveo con umbral 8:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	8	5	6	6	8	6	8	
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	
D	9	7	4	5	5	5	9	6	4

C	5	5	5	2	2	3	4	3
D	8	7	4	5	5	5	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5
G	8	8	8	6				
H	7	7	7	4	5	5	7	5
I	6	8	6	6	4	8	8	8

Resto el mínimo de cada fila:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	3	0	1	1	3	1	3	
B	3	4	5	2	0	1	4	3	4
C	3	3	3	0	0	1	2	1	
D	4	3	0	1	1	1	0	2	0
E	5	2	5	3	2	0	4	4	4
F	4	3	3	0	1	1	3	1	3
G	2	2	2	0					
H	3	3	3	0	1	1	3	1	3
I	2	4	2	2	0	4	4	4	

Resto el mínimo de cada columna

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	(3)	0	1	1	(3)	0	(3)	
B	0	2	(5)	2	0	1	(4)	2	(4)
C	0	1	(3)	0	0	1	(2)	0	(2)
D	1	1	0	1	1	1	0	1	0
E	2	0	(5)	3	2	0	(4)	3	(4)
F	1	1	(3)	0	1	1	(3)	0	(3)
G	0		2	2	0				
H	0	1	(3)	0	1	1	(3)	0	(3)
I	0	(4)	2	2	0	(4)	3	(4)	

$$S \times \overline{P(S)}$$

Busco un matching de 0s:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			0			0	✓H		No hay matching
B	0			0			✓H		
C	0			0	0	0	✓B		$S = \{A, B, C, E, F, G, H, I\}$
D			0			0	0		
E	0			0			✓E		$P(S) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
F				0			✓F		

E	0	0	0	2G	$r(s) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
F	0	0	0	8H	
G	0	0	0	*	$m = \min \{l(e) : e \in S \times \overline{r(s)}\}$
H	0	0	0	*	
I	0	0	0	6G	= 2
	H B	H B ₁ G	H		

Resto m en s y suma m en r(s)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	0	1	1	1	0	1	
B	0	2	3	2	0	1	2	2	2
C	0	1	1	0	0	1	0	0	
D	3	3	0	3	3	3	0	3	0
E	0	0	3	3	2	0	2	3	2
F	1	1	1	0	1	1	1	0	1
G	0	0	2	2	0	0			
H	0	1	1	0	1	1	1	0	1
I	0	0	2	2	2	0	2	3	2

Sigo buscando un matching de los

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		0			0		4H		
B	0		0		0		1H		
C	0		0	0	0		5G		
D		0			0	0			
E	0			0			2G	2G	
F			0		0	0	8H		
G	0			0			*	*	
H	0		0		0		*		
I	0		0		0		6G	6G	
	H B	H B ₁ G	B G						

7º columnas: H 1 B 5 C F

No hay matching

$$S = \{E, G, I\}$$

$$r(S) = \{2, 6\}$$

$$m = 2$$

Resto m en s y suma m en r(s)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	0	1	1	1	0	1	
B	0	2	3	2	0	1	2	2	2

A	1	1	0	1	1	1	0	1
B	0	2	3	2	0	1	2	2
C	0	1	1	0	0	1	0	0
D	3	3	0	3	3	0	3	0
E	0	0	1	1	0	0	0	1
F	1	1	1	0	1	1	1	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	1	1	0	1	1	1	0
I	0	0	0	0	0	0	1	0

Siglo busando matching de 0s:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			0			0		4	
B	0			0				5	
C	0		0	0	0	0			7
D		0				0		0	3
E	0	0		0	0	0	0	2	
F					0				8
G	0		0	0	0			*	
H	0					0			1
I	0	0	0	0	0	0	0	6	

1º columnas:
G 2 E 9

~~15 6 7 6 0 6 8 2 A 9 E 2~~

Encontrado un matching:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	8	8	5	6	6	8	6	8
B	5	6	7	4	2	3	6	5	6
C	5	5	5	2	2	3	4	3	9
D	9	7	4	5	5	5	9	6	4
E	8	5	8	6	5	3	7	7	7
F	8	7	7	4	5	5	7	5	7
G	11	8	10	8	8	6	9	9	9
H	7	7	7	4	5	5	7	5	7
I	9	6	8	6	6	4	8	8	8

$$\text{sum} = 5 + 2 + 4 + 4 + 7 + 5 + 8 + 7 + 1$$

$$= 46$$

$$v_{mbf} = 8$$

La suma es menor que para umbral 9

⇒ El que minimiza el máximo de los que minimizan la suma
es el de umbral 9

8)

miércoles, 1 de junio de 2022 9:56

VIII): ¿Cuál es la complejidad del algoritmo que resuelve el problema de minimizar la suma de entre todos los matchings que minimizan el máximo? (como en el V).

$O(\text{gross}) + O(\text{hungaro})$

9) 🤔

miércoles, 1 de junio de 2022 9:57

IX): ¿Cuál es la complejidad del algoritmo que resuelve el problema de minimizar el máximo de entre todos los matchings que minimizan la suma ? (el del ej VII).

$O(\text{hungaro}) * O(\text{gross})$

10)

miércoles, 1 de junio de 2022 9:57

X): Probar que un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ con $|X| = |Y| = 11$ y $|E| = 111$ tiene un matching perfecto.

Sea:

$G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito con componentes X e Y

$$|X| = 11$$

$$|Y| = 11$$

$$|E| = 111$$

G tiene un matching perfecto

Demostración:

Sea:

$$\bar{E} = \{xy : x \in X \wedge y \in Y \wedge xy \notin E\}$$

G tiene un matching perfecto

\Leftrightarrow {Teorema de Hall}

$$\forall S \subseteq X : |S| \leq |\Gamma(S)|$$

Demuestro esto por el absurdo:

Supongamos $S \subseteq X$ y $|S| > |\Gamma(S)|$

Pruebo algunas cosas intermedias:

① $|\bar{E}| = 10$

Demostración:

$$|\bar{E}|$$

=

$$|X||Y| - |E|$$

=

$$11 \cdot 11 - 111$$

=

$$10$$

② $\forall x \in S, y \in \overline{\Gamma(S)} : xy \in \bar{E}$

Esto es claramente cierto, porque si xy estaría en E , entonces y estaría en $\Gamma(S)$

$$\textcircled{3} |S| |\overline{\Gamma(S)}| \leq 10$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & |S| |\overline{\Gamma(S)}| \\ = & |\{xy : x \in S \wedge y \in \overline{\Gamma(S)}\}| \\ \leq \textcircled{2} & |\bar{E}| \end{aligned}$$

$$|S| > |\Gamma(S)|$$

$$\Rightarrow \textcircled{3}$$

$$\frac{10}{|\Gamma(S)|} > |\Gamma(S)|$$

\Rightarrow

$$10 > |\Gamma(S)| |\overline{\Gamma(S)}|$$

\Leftrightarrow

$$10 > |\Gamma(S)|(11 - |\Gamma(S)|)$$

\Leftrightarrow

$$10 > |\Gamma(S)| 11 - |\Gamma(S)|^2$$

\Leftrightarrow

$$10 - |\Gamma(S)| 11 + |\Gamma(S)|^2 > 0$$

$\Leftrightarrow \{ \text{Calculo las raíces del polinomio:}$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{11 \pm 9}{2}$$

$$x = 10 \vee x = 1$$

}

$$|\Gamma(S)| \leq 1 \vee |\Gamma(S)| \geq 10$$

$\Leftrightarrow \{ \Gamma(S) \subseteq Y \Rightarrow |\Gamma(S)| \leq 11 \}$

$$|\Gamma(S)| = 0 \vee |\Gamma(S)| = 1 \vee |\Gamma(S)| = 10 \vee |\Gamma(S)| = 11$$

Demuestro cada caso por separado:

Caso $|\Gamma(S)| = 0$:

En este caso $|\overline{\Gamma(S)}| = 11$, por ende, por $\textcircled{3}$

$$|S| \cdot 11 \leq 10$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |S| \leq \frac{10}{11} \\ &\Leftrightarrow |S| = 0 \end{aligned}$$

Pero $|S| > |\Gamma(S)| = 0$, por ende esto es una contradicción

Caso $|\Gamma(S)| = 1$:

En este caso $|\overline{\Gamma(S)}| = 10$, por ende, por ③

$$|S| \cdot 10 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow |S| \leq 1$$

Pero $|S| > |\Gamma(S)| = 1$, por ende esto es una contradicción

Caso $|\Gamma(S)| = 10$:

En este caso $|\overline{\Gamma(S)}| = 1$, por ende, por ③

$$|S| \cdot 1 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow |S| \leq 10$$

Pero $|S| > |\Gamma(S)| = 10$, por ende esto es una contradicción

Caso $|\Gamma(S)| = 11$:

$$\begin{aligned} &|\Gamma(S)| = 11 \\ \Rightarrow &\{|S| > |\Gamma(S)|\} \\ &|S| > 11 \\ \Rightarrow &\{S \subseteq X\} \\ &|X| > 11 \\ \Leftrightarrow &11 > 11 \end{aligned}$$

Esto es una clara contradicción

11a)

domingo, 5 de junio de 2022 12:23

	I	II	III	IV	V	VI	VII
A	8	1	7	3	9	3	1
B	5	7	3	4	8	7	1
C	8	4	8	8	8	8	7
D	1	1	7	9	8	4	8
E	7	7	8	8	7	7	9
F	8	7	7	1	9	8	3
G	8	1	8	7	8	4	3

Maximizar la suma

	1	2	3	4	5	6	7
A	8	1	+	3	9	3	1
B	5	+	3	4	8	+	1
C	8	4	8	8	8	8	7
D	1	1	+	9	8	1	8
E	+	+	8	8	+	+	9
F	8	+	7	1	9	8	3
G	8	1	8	+	8	4	3

El máximo es 9

suma 9 - máximo en cada fila:

	1	2	3	4	5	6	7
A	8	1	+	3	9	3	1
B	6	8	4	5	9	8	2
C	9	5	9	9	9	9	8
D	1	1	+	9	8	1	8
E	+	+	8	8	+	+	9
F	8	+	7	1	9	8	3

6 9 2 9 8 9 5 4

Sumo 9 - máximo en cada columna:

	1	2	3	4	5	6	7
A	8	2	7	3	9	3	1
B	6	9	4	5	9	8	2
C	9	6	9	9	9	9	8
D	1	2	7	9	8	1	8
E	7	8	8	8	7	7	9
F	8	8	7	1	9	8	3
G	9	3	9	8	9	5	4

$$S \times \overline{r(S)}$$

Busco un matching de 9s:

	1	2	3	4	5	6	7
A				9			
B		9			9		
C	9		9	9	9	9	
D			9				
E					9		
F					9	*	
G	9		9		9	*	

No hay matching

$$S = \{A, F\}$$

$$r(S) = \{5\}$$

$$m = 9 - m \times \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\}$$

$$= 9 - 8 = 1$$

Sumo m es 5 y resto m en r(S)

	1	2	3	4	5	6	7
A	9	3	8	4	9	1	2

B	6	9	4	5	8	8	2
C	9	6	9	9	8	9	8
D	1	2	7	9	7	1	8
E	7	8	8	8	6	7	9
F	9	9	8	2	9	9	1
G	9	3	9	8	8	5	4

Sigo buscando un matching de 9s:

	1	2	3	4	5	6	7
A	9			9		5_F	comiendo:
B		9				2_F	F 6
C	9		9	9	9	1_F	
D			9				
E					9		
F	9	9		9	9	*	
G	9		9				
	x	x		x	F		

Quedo el matching:

	1	2	3	4	5	6	7
A	8	1	7	3	9	3	1
B	5	7	3	4	8	7	1
C	8	4	8	8	8	7	
D	1	1	7	9	8	1	8
E	7	7	8	8	7	7	9
F	8	7	7	1	9	8	3
G	9	1	8	7	8	4	3

con sumj:

$$9 + 7 + 8 + 9 + 9 + 8 + 8 = 58$$

11b)

domingo, 5 de junio de 2022 16:49

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>
<i>A</i>	1	5	1	4	5	4	5
<i>B</i>	6	1	4	5	1	1	5
<i>b)</i> <i>C</i>	1	5	6	6	1	6	9
<i>D</i>	5	5	9	5	6	5	1
<i>E</i>	1	1	1	6	1	1	5
<i>F</i>	1	9	9	5	5	6	4
<i>G</i>	1	5	1	9	6	5	4

Maximizar suma

1	2	3	4	5	6	7	
<i>A</i>	1	5	1	4	5	4	5
<i>B</i>	6	1	4	5	1	1	5
<i>C</i>	1	5	6	6	1	6	9
<i>D</i>	5	5	9	5	6	5	1
<i>E</i>	1	1	1	6	1	1	5
<i>F</i>	1	9	9	5	5	6	4
<i>G</i>	1	5	1	9	6	5	4

El máximo es 9

Sumo 9-máximo en cada fila

1	2	3	4	5	6	7	
<i>A</i>	5	9	5	8	9	8	9
<i>B</i>	9	4	7	8	4	4	8
<i>C</i>	1	5	6	6	1	6	9
<i>D</i>	5	5	9	5	6	5	1
<i>E</i>	4	4	4	9	4	4	8
-	-	-	0	-	-	-	1

E	4	4	4	9	4	4	8
F	1	9	9	5	5	6	4
G	1	5	1	9	6	5	4

Sumo 9-máximo en cada columna

	1	2	3	4	5	6	7
A	5	9	5	8	9	9	9
B	9	4	7	8	4	5	8
C	1	5	6	6	1	7	9
D	5	5	9	5	6	6	1
E	4	4	4	9	4	5	8
F	1	9	9	5	5	7	4
G	1	5	1	9	6	6	4

$$O \quad S \times \overline{r(S)}$$

Busco un matching de 9s:

	1	2	3	4	5	6	7
A		∅		∅	9	9	2F
B		∅					
C					∅		
D			∅			3F	
E				∅		4G	AG
F			∅	9		*	
G				9		*	*
					A ₁	A ₂	A ₂
							∅

1º camino: F $\xrightarrow{9} A \xrightarrow{5}$

No hay más caminos

$$S = \{E, G\}$$

$$r(S) = \{9\}$$

$$m = \max \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\}$$

$$= 9$$

Sumo 9-m en S y lo resto en r(S)

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$$

A	5	9	5	7	9	9	9
B	9	4	7	7	4	5	8
C	1	5	6	5	1	7	9
D	5	5	9	4	6	6	1
E	5	5	5	9	5	6	9
F	1	9	9	4	5	7	4
G	2	6	2	9	7	7	5

$\circlearrowleft S \times \overline{r(S)}$

Sigo buscando un matching de g_S :

	1	2	3	4	5	6	7	
A		9		9	9	9		No hay caminos
B	9							
C				9	7			$S = \{C, E, G\}$
D			9					
E				9	7			$r(S) = \{9, 7\}$
F	9	9						
G			9		*			$m = \max \{c(e) : e \in S \times \overline{r(S)}\}$
				8		7		= 7

Sumo g_m en S y lo resto en $r(S)$

	1	2	3	4	5	6	7
A	5	9	5	5	9	9	9
B	9	4	7	5	4	5	8
C	3	7	8	5	3	9	9
D	5	5	9	2	6	6	1
E	7	7	7	9	7	8	9
F	1	9	9	2	5	7	4
G	4	8	4	9	9	9	5

Sigo buscando matching de g_S :

Sigo buscando matching de 9s:

	1	2	3	4	5	6	7		
A	9			9	9	9	56		
B	9							2º camino:	66
C					9	9			
D		9							
E			9			9	46		
F	9	9							
G				9	9	9		*	
				8	6	6			

Queda el matching:

A5, B1, C7, D3, E4, F2, G6

(oh súper):

$$5 + 6 + 9 + 9 + 6 + 9 + 5 = 49$$

11c)

lunes, 6 de junio de 2022 9:39

Maximizar la suma

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
A	9	8	7	7	3	6	1	8
B	9	6	4	7	2	5	8	3
C	7	6	7	8	3	7	7	4
c) D	7	8	6	6	6	4	7	8
E	5	5	3	7	5	5	9	5
F	3	4	4	6	9	7	1	8
G	3	6	3	4	7	8	1	4
H	4	4	7	8	6	9	2	7

El máximo es 9

Sumo 9-máximo en cada fila

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	9	8	7	7	3	6	1	8
B	9	6	4	7	2	5	8	3
C	8	7	8	9	4	8	8	5
D	8	9	7	7	7	5	8	9
E	5	5	3	7	5	5	9	5
F	3	4	4	6	9	7	1	8
G	4	7	4	5	8	9	2	5
H	4	4	7	8	6	9	2	7

Sumo 9-máximo en cada columna

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	9	8	7	3	6	1	8	0
B	9	6	5	7	2	5	8	3
C	8	7	9	9	4	8	8	5
D	8	9	8	7	7	5	8	9
E	5	5	4	7	5	5	9	5
F	3	4	5	6	9	7	1	8
G	4	7	5	5	8	9	2	5
H	4	4	8	8	6	9	2	7

SxP(S)

$$G \quad 4 \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} 9 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Busco un matching de 9s:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	9							
B	9							
C		9	9					
D		9					9	
E				9				
F			9					
G				9				
H					9		*	
	8					A		

✗
*

No hay caminos

$$S = \{A, B, G, H\}$$

$$r(S) = \{1, 6\}$$

$$m = 9 - m \Delta \times \{C(e) : e \in S \times \overline{F(S)}\}$$

$$= 9 - 8 = 1$$

Sumo m es S y lo resto en r(S)

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	9	9	9	8	4	6	2	9
B	9	7	6	8	3	5	9	4
C	7	7	9	9	4	7	8	5
D	4	9	8	7	7	4	8	9
E	4	5	4	7	5	4	9	5
F	2	4	5	6	9	6	1	8
G	4	8	6	6	9	9	3	6
H	4	5	9	9	7	9	3	8

Sigo buscando un matching de 9s:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	9	9	9				9	1_B
B	9						9	*
C		9	9					
D		9					9	2_A

1º camino: H 3

2º camino: B 1 A 8

C	(2)	9		3_H	3_A	2^+ (idmno : B 1 A 8
D	(9)		9		2_A	
E			(9)		$\frac{7}{8}$	
F		(9)				
G		9	(9)			
H	9	9	9	*		
B	A	H	H	B		
B	A, A ₁		B	A ₁		

Ques of matching

A 8, B 7, C 3, D 2, E 7, F 5, G 6, H 4

(on sum)

$$8 + 9 + 7 + 8 + 9 + 9 + 8 + 8 = 66$$

12a)

Junes, 6 de junio de 2022 11:45

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>
<i>A</i>	8	1	7	3	9	3	1
<i>B</i>	5	7	3	4	8	7	1
<i>C</i>	8	4	8	8	8	8	7
<i>D</i>	1	1	7	9	8	4	8
<i>E</i>	7	7	8	8	7	7	9
<i>F</i>	8	7	7	1	9	8	3
<i>G</i>	8	1	8	7	8	4	3

Maximizar el mínimo

1	2	3	4	5	6	7	
<i>A</i>	8	1	+	3	9	3	1
<i>B</i>	5	+	3	4	8	+	1
<i>C</i>	8	4	8	8	8	+	
<i>D</i>	1	1	+	9	8	1	8
<i>E</i>	+	+	8	8	+	+	9
<i>F</i>	8	+	+	1	9	8	3
<i>G</i>	8	1	8	+	8	4	3

El matching diagonal tiene máximo 3 $\Rightarrow \text{umbra}| \geq 3$

La columna 2 tiene máximo 7 $\Rightarrow \text{umbra}| \leq 7$

Los umbrales son candidatos

$$\Rightarrow \text{umbra}| \in \{3, 4, 5, 7\}$$

Pruebo con umbral = 9:

	1	2	3	4	5	6	7	
A	8	+	9				16	
B	5	7	3	4	8	+	20	
C	8	4	8	8	8	+	36	
D		7	9	8	1	8	46	
E	+	7	8	8	7	+	9	56
F	8	7	7		9	8		66
G	8		8	7	8	4	*	
H	5	5	8	8	8	8	3	

(dmin): $\overbrace{G \ 3}^{\leftarrow} \ C \ 7$

Si hay matching con umbral = 9

Pruebo con umbral = 7:

	1	2	3	4	5	6	7	
A	8	+	9				16	
B		7		8	+		20	
C	8		8	8	8	+	36	
D		7	9	8		8	46	
E	+	7	8	8	7	+	9	56
F	8	7	7		9	8	3	66
G	8		8	7	8		*	
H	5	5	8	8	8	8	3	

(dmin): $\overbrace{G \ 3}^{\leftarrow} \ C \ 7$

7 es lo máximo que podía ser el umbral,

así que ese ese matching maximiza el mínimo