En este documento daremos la prueba (mas o menos) que dimos en el 2024 de que 3COLOR es NP completo.

Para probar eso, sabiendo que 3SAT es NP completo, demostraremos que 3SAT se reduce polinomialmente a 3COLOR.

Es decir, debemos, dada una instancia de 3SAT, es decir, una expresion booleana B en CNF con exactamente 3 literales por disjuncion, crear polinomialmente una instancia de 3COLOR, es decir, un grafo G, tal que B es satisfacible si y solo si G se puede colorear con 3 colores.

(si en el final en vez de hacer esto construyen una B a partir de un G tienen 0 puntos en el ejercicio).

Sean $x_1, ..., x_n$ las variables de B y sean D_j disjunciones cada una con tres literales tales que

$$B = D_1 \wedge D_2 \wedge .... \wedge D_m$$

Como cada D_j tiene 3 literales, sean ℓ_{jr}, $r = 1, 2, 3$ los 3 literales de D_j. Es decir, $D_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$.

Construiremos ahora G.

Observacion: G debe ser construido en forma polinomial a partir de B. Por lo tanto no podemos intentar hacer trampa y decir algo como "si B es satisfacible tomo G un triangulo y si no tomo G un K_4"porque DECIDIR si B es o no satisfacible no es polinomial. (al menos, en 2024 no conocemos ningún algoritmo polinomial que lo pueda resolver).

Primero daremos los vértices de G.

Tendremos para cada $i = 1, 2, ..., n$ dos vertices u_i, w_i.

Ademas, para cada $j = 1, .., m$ tendremos 6 vertices $a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, e_{j1}, e_{j2}, e_{j3}$.

Finalmente, dos vertices especiales, que llamare el CAPITAN y el AVISPON. (en clase al AVISPON lo llame t pero luego me di cuenta que era mejor llamarlo AVISPON).

Estos nombres estan elegidos para que sea mas facil luego recordar su funcionamiento en el grafo, y para facilitar recordar la prueba de una de las implicaciones.

Observemos que la construccion de los vertices es directa a partir de solamente saber n y m y es polinomial.

Ahora daremos los lados.

Para poder definir los lados, debemos definir una función v del conjunto de literales $\{x_1, .., x_n, \neg x_1, ..., \neg x_n\}$ en el conjunto $\{u_1, w_1, ..., u_n, w_n\}$ de la siguiente forma:

$$v(x_i) = u_i \qquad v(\neg x_i) = w_i$$

Es decir, v de un literal es u_i si el literal es la i-esima variable, y w_i si el literal es la i-esima negación de una variable.

Entonces definimos los siguientes lados:

1. Triangulos $\{a_{j1}a_{j2}, a_{j2}a_{j3}, a_{j1}a_{j3}\}$, $j = 1, .., m$.
2. Unir bases con extremos: $a_{jr}e_{jr}$, $j = 1, .., m$, $r = 1, 2, 3$. (nota: los triangulos anteriores mas estos ultimos lados se llaman las "garras"porque al dibujarlos parecen unas garras).
3. Unir extremos con el CAPITAN: CAPITANe_{jr}, $j = 1, .., m$, $r = 1, 2, 3$.
4. Triangulos basados en el avispon: AVISPONu_i,AVISPONw_i,u_iw_i, $i = 1, ..., n$.
5. (CAPITAN)(AVISPON) es otro lado.
6. Lados $e_{jr}v(\ell_{jr})$, $j = 1, .., m$, $r = 1, 2, 3$.

Los primeros 4 tipos de lados dependen solo de n y m, son los ultimos lados los que capturan la "estructura"de B.

Esta claro que la construcción es polinomial, porque solo leemos quienes son n, m y los literales ℓ_{jr} para construir G y el número de vertices y lados es lineal en estos números.

Como G tiene triangulos, sabemos que $\chi(G) \geq 3$. Demostremos entonces que B es satisfacible si y solo si $X(G) = 3$.

.

$$B \text{ es satisfacible} \Rightarrow X(G) = 3:$$

Como B es satisfacible, existe $\vec{b}$ un vector de bits tal que $B(\vec{b}) = 1$.

Colorearemos G a partir de $\vec{b}$, y cada vez que coloreemos un vértices o conjunto de vértices debemos asegurarnos que el coloreo sigue siendo propio.

Para empezar, definimos:

Color del CAPITAN: ESCARLATA

Color del AVISPON: VERDE

Esto deberia ayudar a acordarse de esta parte de la prueba.

Entonces el lado (CAPITAN)(AVISPON) no crea problemas porque sus extremos tienen colores distintos.

Luego definimos

Color de u_i=ESCARLATA si $b_i = 1$ y NEGRO si $b_i = 0$.

Color de w_i=ESCARLATA si $b_i = 0$ y NEGRO si $b_i = 1$.

Entonces cada triangulo AVISPONu_i,AVISPONw_i,u_iw_i tienen los colores VERDE,ESCARLATA y NEGRO en algún orden, asi que no crea problemas.

Todavia no usamos que $B(\vec{b}) = 1$. Esa propiedad implica que $D_j(\vec{b}) = 1$ para todo j, y como D_j es una disjunción eso implica que:

$$\forall j \in \{1, .., m\} \exists r_j \in \{1, 2, 3\} : \ell_{jr_j}(\vec{b}) = 1$$

(si hay mas de un "r_j"elejimos uno solo)

Entonces coloreamos, para cada $j = 1, .., m$:

Color de a_{jr_j}: VERDE

Color de a_{jk} para $k \neq r_j$: Uno NEGRO y el otro ESCARLATA.

De esta forma los triangulos $a_{j1}a_{j2}, a_{j2}a_{j3}, a_{j1}a_{j3}$ no crean problemas porque sus vertices tienen los tres colores distintos.

Luego coloreamos los extremos:

Color de e_{jr_j}: NEGRO

Color de e_{jk} para $k \neq r_j$: VERDE

Entonces los lados $a_{jr_j}e_{jr_j}$ no crean problemas porque uno de sus extremos es VERDE y el otro NEGRO.

Y para $k \neq r_j$, los lados $a_{jk}e_{jk}$ no crean problemas porque uno de sus extremos es NEGRO o ESCARLATA y el otro VERDE.

Ademas los lados CAPITANe_{jk} ($k = 1, 2, 3$) no crean problemas porque el color del CAPITAN es ESCARLATA y el de los e_{jk} es NEGRO o VERDE.

Los lados $e_{jk}v(\ell_{jk})$ para $k \neq r_j$ no crean problemas porque el color de e_{jk} es VERDE para esos k, mientras que el color de $v(\ell_{jk})$, que será un u_i o w_i, va a ser NEGRO o ESCARLATA..

Finalmente, quedan los lados $e_{jr_j}v(\ell_{jr_j})$. El color de e_{jr_j} es NEGRO asi que aca podria haber algún problema. Lo que debemos probar para evitar el problema es que el color de $v(\ell_{jr_j})$ es ESCARLATA.

Para probar esto, debemos analizar que tipo de literal es ℓ_{jr_j}:

1. Si ℓ_{jr_j} es una variable:

   Entonces existe i tal que $\ell_{jr_j} = x_i$.

   $\ell_{jr_j} = x_i$ implica por definición de v que $v(\ell_{jr_j}) = u_i$. (*)

   Pero tambien, $\ell_{jr_j} = x_i$ implica que: $\ell_{jr_j}(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i$.

   Como $1 = \ell_{jr_j}(\vec{b})$, concluimos que $b_i = 1$.

   Esto implica que el Color de u_i es ESCARLATA. (**)

   Por lo tanto (*) y (**) nos dicen que, efectivamete, el color de $v(\ell_{jr_j})$ es ESCARLATA como queriamos.

2. Si ℓ_{jr_j} es la negación de una variable:

   Entonces existe i tal que $\ell_{jr_j} = \neg x_i$.

   Por lo tanto $v(\ell_{jr_j}) = w_i$, asi que queremos probar que el color de w_i es ESCARLATA.

   Tenemos: $1 = \ell_{jr_j}(\vec{b}) = (\neg x_i)(\vec{b}) = 1 - b_i$.

   De lo cual concluimos que $b_i = 0$. Esto, por definición del coloreo, implica que el color de w_i es ESCARLATA, como queriamos.

Fin $\Rightarrow$.

B es satisfacible $\Leftarrow X(G) = 3$:

Sea c un coloreo propio con 3 colores de G.

Definimos un vector de bits $\vec{b}$ como:

$b_i = 1$ si $c(u_i) = c$(CAPITAN) y $b_i = 0$ si no.

Para demostrar que $B(\vec{b})$ es necesario y suficiente ver que $D_j(b) = 1$ para todo j.

Fijemos entonces un j en $\{1, 2, .., m\}$.

1. Como tenemos el triangulo $\{a_{j1}a_{j2}, a_{j2}a_{j3}, a_{j1}a_{j3}\}$, y c es un coloreo propio con 3 colores, entonces los 3 colores deben aparecer en los vertices de ese triangulo.

   Por lo tanto, existe $r \in \{1, 2, 3\}$ tal que $c(a_{jr}) = c$(AVISPON).

2. Como $a_{jr}e_{jr}$ es un lado, $c(e_{jr}) \neq c(a_{jr})$, por lo tanto por [1], concluimos que $c(e_{jr}) \neq c$(AVISPON).

3. Como CAPITANe_{jr} es un lado, concluimos que $c(e_{jr}) \neq c$(CAPITAN).

4. Los items [2] y [3] nos dicen que el color de e_{jr} debe ser igual al "tercer"color, es decir, el color que no es igual ni al color del AVISPON ni al color del CAPITAN. (y, como (CAPITAN)(AVISPON) es un lado, sabemos que el color del CAPITAN y el color del AVISPON son distintos, asi que efectivamente, e_{jr} debe tener el tercer color.

5. Como $e_{jr}v(\ell_{jr})$ es un lado, entonces $c(v(\ell_{jr})) \neq c(e_{jr})$. Es decir, por el item [4], el color de $v(\ell_{jr})$ NO ES el tercer color.

6. Como AVISPON$v(\ell_{jr})$ es un lado, entonces $c(v(\ell_{jr})) \neq c(\text{AVISPON})$.

7. items [5] y [6] implican que $c(v(\ell_{jr})) = c(\text{CAPITAN})$.

A partir del item [7] veamos de probar que $D_j(\vec{b}) = 1$.
Para ello, otra vez, tenemos que analizar que clase de literal es ℓ_{jr}.
.- Si ℓ_{jr} es una variable:
Entonces existe i con $\ell_{jr} = x_i$. Por lo tanto $v(\ell_{jr}) = u_i$.
Entonces [7] implica que $c(u_i) = c(\text{CAPITAN})$, y esto, por definición de $\vec{b}$ implica que $b_i = 1$.
Entonces $\ell_{jr}(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1$ lo cual implica $D_j(\vec{b}) = 1$ como queriamos.
.- Si ℓ_{jr} es la negación de una variable:
Entonces existe i con $\ell_{jr} = \neg x_i$. Por lo tanto $v(\ell_{jr}) = w_i$.
Entonces [7] implica que $c(w_i) = c(\text{CAPITAN})$.
Como $u_i w_i$ es un lado, el color de u_i debe ser distinto del color de w_i.
Por lo tanto lo anterior implica que: $c(u_i) \neq c(\text{CAPITAN})$.
Esto, por definición de $\vec{b}$ implica que $b_i = 0$.
Entonces:

$$\ell_{jr}(\vec{b}) = \neg x_i(\vec{b}) = 1 - b_i = 1 - 0 = 1$$

lo cual otra vez implica $D_j(\vec{b}) = 1$ como queriamos.
Fin