Definiciones

miércoles, 16 de marzo de 2022 9:26

Grafo:

(V, E) es un grafo si:

V es un conjunto finito

$E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V\}$

Subgrafo:

Sean:

G, H grafos

$G = (W, F)$

$H = (V, E)$

G es un subrafo de $H \Leftrightarrow W \subseteq V \wedge F \subseteq E$

G es un subrafo propio de $H \Leftrightarrow W \subset V \wedge F \subseteq E$

Sea:

G un grafo

$G = (V, E)$

$W \subseteq V$

$$G[W] = (W, \{\{x, y\} \in E : x, y \in W\})$$

Vecinos:

Sea:

G un grafo

$G = (V, E)$

$X, S \subseteq V$

$\Gamma_G(x) = \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$

$\Gamma_G(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma_G(x)$

$d_G(x) = |\Gamma_G(x)|$

$E_S = \{\{x, y\} \in E : x \in S \wedge y \notin S\}$

$\delta_G = \min\{d_G(x) : x \in V\}$

$\Delta_G = \max\{d_G(x) : x \in V\}$

G es regular $\Leftrightarrow \delta_G = \Delta_G$

Caminos:
Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$
$x_1, x_2, \dots, x_r \in V$
$x, y \in V$

$x_1, x_2, \dots, x_r$ es una caminata en $G \Leftrightarrow \langle \forall i \in \mathbb{N}_{<r} : \{x_i, x_{i+1}\} \in E \rangle$
$x_1, x_2, \dots, x_r$ es un camino en $G \Leftrightarrow$ $x_1, x_2, \dots, x_r$ es una caminata en $G \wedge \left\langle \forall i, j \in \{1,2, \dots r\} : x_i \neq x_j \right\rangle$

$x \sim y \Leftrightarrow \langle \exists x_1, x_2, \dots, x_k \in V : x, x_1, x_2, \dots, x_k, y$ es una caminata en $G \rangle$

$x_1, x_2, \dots, x_r$ es un ciclo en $G \Leftrightarrow x_1 = x_r \wedge$ $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$ es un camino en $G \wedge \{x_{r-1}, x_r\} \in E$

($\sim$ es una relación de equivalencia)

(
$[V]_\sim$ denota el conjunto de las clases de equivalencia de V
O sea:
$[V]_\sim = \left\{\{y \in V : x \sim y\} : x \in V\right\}$
)

componentesConexos$(G) = \left\{\{y \in V : x \sim y\} : x \in V\right\}$
G es conexo $\Leftrightarrow$ |componentesConexos$(G)| = 1$

Coloreo:
Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$
$k \in \mathbb{N}$

Un coloreo de G es una función $c : V \to S$ tal que:
S es un conjunto finito

Un coloreo $c : V \to S$ de G es propio si:
$\forall \{x, y\} \in E : c(x) \neq c(y)$

$c : V \to S$ es un coloreo de $|\mathrm{img}(c)|$ colores

$\chi(G) = \min\{k :$ existe un coloreo de G con k colores$\}$

G es bipartito $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$
G es k-critico $\Leftrightarrow \chi(G) = k \wedge \langle \forall H$ subgrafo propio de $G : \chi(H) < k \rangle$

Grafos con nombre propio:

$K_n = (\{1,2,\dots,n\}, \{\{i,j\} : i,j \in \{1,2,\dots,n\}\})$
Si $n \geq 3$:
$C_n = (\{1,2,\dots,n\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{n-1,n\},\{n,1\}\})$

O escritos mas formalmente:
$C_n = (V, E)$
Donde:
$V = \mathbb{N}_{\leq n}$
$E = \{\{i,j\} : i,j \in V\}$
Si $n \geq 3$:
$C_n = (V, E)$
Donde:
$V = \mathbb{N}_{\leq n}$
$E = \{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{N}_{<n}\} \cup \{\{n,1\}\}$

Arboles:
Sea G un grafo:

G es un árbol $\Leftrightarrow G$ es conexo $\wedge \langle \nexists i : C_i$ es un subgrafo de $G \rangle$

Teoremas

miércoles, 16 de marzo de 2022 12:57

Sea:
G, H grafos
$G = (V, E)$
$H = (W, F)$
$n = |V|$
$m = |E|$
$r \in \mathbb{N}$

H es un subgrafo de $G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$
$\chi(G) \leq n$
$\chi(K_r) = r$
$\chi(C_{2r}) = 2$
$\chi(C_{2r+1}) = 3$
$\chi(G) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{E} = \emptyset$
$\chi(G) \geq r \Leftarrow \langle \exists i : K_i \text{ es un subgrafo de } G \rangle$
$\chi(G) \geq 2 \Leftarrow \langle \exists i \in \mathbb{N}_{>1} : C_{2i} \text{ es subgrafo de } G \rangle$
$\chi(G) \geq 3 \Leftarrow \langle \exists i \in \mathbb{N}_{\geq 1} : C_{2i+1} \text{ es subgrafo de } G \rangle$

Sea:
T un árbol
$T = (V, E)$

$\chi(T) \leq 2$

Greedy:
Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$
$x_1, x_2, .., x_n \in V$

$\mathrm{Greedy}_G : [V] \to V \to \mathbb{N}_0$
$\mathrm{Greedy}_G(x_1, x_2, .., x_n)(x_i) = \min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(x_1, x_2, .., x_n)(\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i))\}$

$\mathrm{Greedy}_G(x_1, x_2, .., x_n)$ es un coloreo propio

Cota de Greedy:

Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$
$v \in V$
$c : V \to \mathbb{N}_0$
c un coloreo propio obtenido con greedy

$$c(v) \leq d_G(v)$$
$$|\mathrm{img}(c)| \leq \Delta_G + 1$$

Teorema de Brooks:
Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$
$\forall i \in \mathbb{N} : G \ncong K_i \wedge G \ncong C_{2i+1}$

$$\chi(G) \leq \Delta_G$$

2color:
Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$

$\mathrm{es2color}(G), \mathrm{2coloreo}$

Demostraciones

miércoles, 23 de marzo de 2022 16:49

Cota de Greedy:

Sea:
G un grafo
$G = (V, E)$
$c : V \to \mathbb{N}_0$
c un coloreo propio obtenido con greedy

$$c(x_i) \leq d_G(x_i)$$
$$|\mathrm{img}(c)| \leq \Delta_G + 1$$

Demostración:

Sea $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ el orden de Greedy
(o sea que $c = \mathrm{Greedy_G}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$)

$$c(x_i) \leq d_G(x_i)$$
$\Leftrightarrow$ {Definición Greedy, d}
$$\min\{k \geq 0 : k \notin c(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i))\} \leq |\Gamma(x_i)|$$
$\Leftarrow$ {$|c(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i))| \notin c(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i))$ porque aunque tengan todos colores distintos, igual alcanzan los colores}
$$|c(\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i))| \leq |\Gamma(x_i)|$$
$\Leftarrow$
$$|\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i)| \leq |\Gamma(x_i)|$$
$\Leftarrow$
$$|\Gamma(x_i)| \leq |\Gamma(x_i)|$$
$\Leftrightarrow$
True

$$\chi(G) \leq \Delta_G + 1$$
$\Leftrightarrow$
$$\max\{c(v) : v \in V\} + 1 \leq \max\{d_G(v) : v \in V\} + 1$$
$\Leftrightarrow$
$$\max\{c(v) : v \in V\} \leq \max\{d_G(v) : v \in V\}$$
$\Leftarrow$
$$\langle \forall v \in V : c(v) \leq d_G(v) \rangle$$
$\Leftrightarrow$ {Demostración anterior}
True

Teorema de Brooks:

Sea:
G un grafo conexo

$G = (V, E)$
$\forall i \in \mathbb{N} : G \neq K_i \land G \neq C_{2i+1}$

$\chi(G) \leq \Delta_G$

Demostración:
Sea $n = |V|$

Sea $x \in V$ tal que $d(x) = \delta_G$

Sea $x_1, x_2, \dots, x_n$ el orden en el que se van agregando los vértices al hacer BFS empezando desde x
Por ende $x_1 = x$

Si se corre un coloreo greedy con el orden $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$, cada vértice x_i salvo x_1 se colrea con a lo sumo $d_G(x_i) - 1$, ya que si o si hay un vécino que todavía no fue coloreado (el que lo agrego al hacer BFS), y por ende, hay a los sumo $d_G(x_i) - 1$ colores entre los vecinos

O sea, todos los vértices salvo x se colorean con Δ_G colores

Sea c el colreo devuelto por Greedy

Divido en casos ahora:

Caso G es irregular:

x tambien se colorea con un color menor igual a $\Delta_G - 1$, porque $d(x) = \delta_G$, y por ende se colorea con a lo sumo $d_G(x)$, pero al ser G irregular, $d_G(x) = \delta_G < \Delta_G$

Caso G es regular:
Notar que si o si $\Delta_G \geq 2$ ya que:
$\Delta_G = 0$ no puede ser, porque tendría que ser vacío o K_1, que no es por hipótesis
$\Delta_G = 1$ no puede ser, porque tendría que ser $G = K_2$, que no es por hipótesis

Divido en casos:
Caso $\Delta_G = 2$
Como G es regular, tiene que ser un ciclo, por hipótesis un ciclo impar no es, así que tiene que ser un cilco par
$\Rightarrow \chi(G) = 2 = \Delta_G$

Caso $\Delta_G \geq 3$
Sea:
$Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{\Delta_G - 1}\} = \Gamma_G(x)$

Caso $\exists i, j : c(y_i) = c(y_j)$
En este caso tiene que haber algún color libre menor que $\Delta_G - 1$, y por ende se puede colrear x con ese color

Caso $\nexists i,j : c(y_i) = c(y_j)$

Supongamos sin perdida de generalidad que $c(y_i) = i$

Sea:

$H = G[V - \{x\}]$

$H_{i,j} = H[\{z \in V : c(z) = i \lor c(z) = j\}]$

$CC_{i,j} = H\left[\{z \in H_{i,j} : d(y_i, z) < \infty\}\right]$ (o sea, la componente conexa de $H_{i,j}$ que tiene a y_i)

Notar que puedo intercambiar los colores i y j en $CC_{i,j}$ y el coloreo seguiría siendo propio, ya que todos los vecinos de $CC_{i,j}$ de fuera de $CC_{i,j}$ tienen colores distintos de i y j

Divido en casos:

Caso $\exists i,j :\ CC_{i,j} \neq CC_{j,i}$

En este caso, se puede intercambiar los colores de $CC_{j,i}$, y entonces no queda el color j en Y, por lo que se puede colorear x con j

Caso $\nexists i,j :\ CC_{i,j} \neq CC_{j,i}$

$\Rightarrow \forall i,j : CC_{i,j} = CC_{j,i}$

Hay varias cosas que notar:

1 $y_j \in CC_{i,j}$

Ya que $y_j \in CC_{j,i}$ y $CC_{i,j} = CC_{j,i}$

2 $\exists i,j :\ CC_{i,j} \neq \{y_i, y_j\}$

Demostración por contradicción, suponiendo que $\forall i,j :\ CC_{i,j} = \{y_i, y_j\}$

$\forall i,j :\ CC_{i,j} = \{y_i, y_j\}$

$\Rightarrow$

$\forall i,j : y_i y_j \in E$

$\Rightarrow$ {Los elemnetos de Y está todos conectados entre si, y ademas todos conectados a x}

$G[Y \cup \{x\}] = K_{\Delta_G+1}$

$\Rightarrow$

$\forall i : d_{G[Y\cup\{x\}]}(y_i) = \Delta_G$

$\Rightarrow$ {Ninguno de los elementos puede tener vecinos en G fuera de $G[Y \cup \{x\}]$, ya que solo tienen Δ_G vecinos}

$G[Y \cup \{x\}] = G$

Pero teníamos que $G[Y \cup \{x\}] = K_{\Delta_G+1}$, y por hipótesis G no es completo, así que eso es una contradicción

Divido en casos:

Caso $\exists i,j : \left\langle \exists\, w \in CC_{i,j} : \, d_{CC_{i,j}}(y_i, w) \geq 3 \right\rangle$

Sean i, j que satisfacen el $\exists$

Sea $w \in CC_{i,j}$ el elemento con $d_{CC_{i,j}}(y_i, w) \geq 3$ mas cercano a y_i
($w \neq y_i$ porque y_i tiene un solo vecino de color j)

Hay un solo camino de y_i a w, porque si el camino se bifurcara, habría un elemento mas cercano con $d_{CC_{i,j}}(y_i, w) \geq 3$

$d_{CC_{i,j}}(w) \geq 3$

$\Rightarrow$

w tiene dos (o mas) vecinos con el mismo color

$\Rightarrow$ $\{c(w)$ no está, y ademas hay al menos una mas que no está$\}$

$\Gamma_G(w)$ tiene menos de $\Delta_G - 2$ colores

Entonces puedo pintar a w con un nuevo color, y de esa forma "separo" a y_i de y_j, por lo que ahora $CC_{i,j} \neq CC_{j,i}$ (caso ya probado)

Caso $\nexists i,j : \left\langle \exists\, w \in CC_{i,j} : \, d_{CC_{i,j}}(y_i, w) \geq 3 \right\rangle$

Esto significa que para todo i, j los $CC_{i,j}$ es un camino entre y_i e y_j (ya que y_i e y_j tienen un solo vecino dentro de $CC_{i,j}$, y todos los demás elementos tienen 2 como máximo, pero 1 solo no puede ser, porque haría que y_i e y_j queden separados

Sean i, j tal que $CC_{i,j} \neq \{y_i, y_j\}$ (existen por 2)

Sea $y_k \in Y - \{y_i, y_j\}$ (existe porque como $\Delta_G \geq 3$, x tiene al menos 3 vecinos)

Divido en casos:

Caso $CC_{i,j} \cap CC_{i,k} \neq \{y_i\}$

y_i está si o si en ambas, así que esto significa que hay algún otro elemento
Sea $u \in CC_{i,j} \cap CC_{i,k} - \{y_i\}$

3 $c(u) = i$

Esto es cierto porque: $u \in CC_{i,j} \Rightarrow c(u) \in \{i, j\}$ y $u \in CC_{i,k} \Rightarrow c(u) \in \{i, k\}$
Por ende $c(u) \in \{i, j\} \cap \{i, k\} \Rightarrow c(u) = i$

4 Los vecinos de u en $CC_{i,j}$ tienen color j

Porque los elementos de $CC_{i,j}$ tiene color i o j, y u ya tiene el color j

5 Los vecinos de u en $CC_{i,k}$ tienen color k

Por el mismo motivo que 4

Esto significa que en $\Gamma(u)$ hay 2 colores que se repiten al menos 2 veces

$\Rightarrow$ En $\Gamma(u)$ hay como máximo $d_G(u) - 2$ colores, que es igual a $\Delta_G - 2$ colores

Así que se le puede asignar a u un color que no es ni i ni j, separando a y_i de y_j
Al hacer eso, $CC_{i,j} \neq CC_{j,i}$, que es un caso ya probado

Caso $CC_{i,j} \cap CC_{i,k} = \{y_i\}$

Sea
c′ el coloreo que resulta de intercambiar los colores i y k en $CC_{i,k}$
$CC'_{i,j}$ la componentes conexas de colores i, j del nuevo grafo (para cualquier i, j)

En realidad, $CC'_{i,k} = CC_{i,k}$, por que solo cambian los colores, pero los otros CC si pueden cambiar

Si $CC'_{j,k} \neq CC'_{k,j} \vee CC'_{i,j} \neq CC'_{j,i} \vee$ algúna tiene un vértice con mas de 2 vecinos, entonces es un caso ya probado

Si no:
Sea:
v el vecino de y_i en $CC_{i,j}$

① $c'(v) = j$
Ya que $c(v) = j$ por ser veino de y_i en $CC_{i,j}$, y el color j no cambia

② Los colores en $CC_{i,j} - \{y_i\}$ no cambian
Esto porque $CC_{i,j} \cap CC_{i,k} = \{y_i\}$, y los colores solo cambian en $CC_{i,k}$

③ $v \in CC'_{i,j}$
Esto porque $v \in CC_{i,j} - \{y_i\}$, y los colores de ese conjunto no cambían, entonces queda una cadena desde y_j hasta v

④ $v \in CC'_{j,k}$
Ya que es vecino de y_i, que ahora tiene color k

Por ③ y ④ $v \in CC'_{i,j} \cap CC'_{j,k}$, que es un caso ya probado

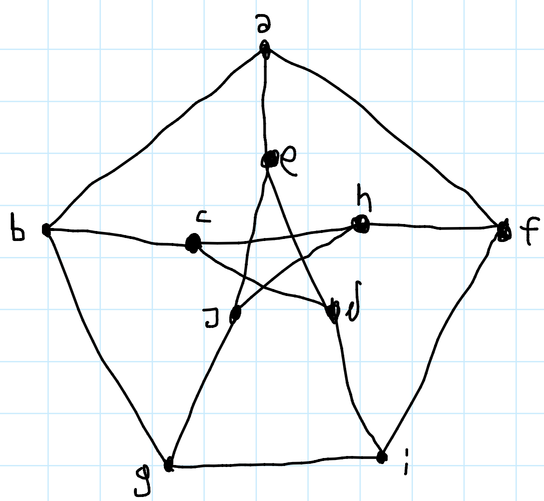
1)

miércoles, 16 de marzo de 2022 10:56

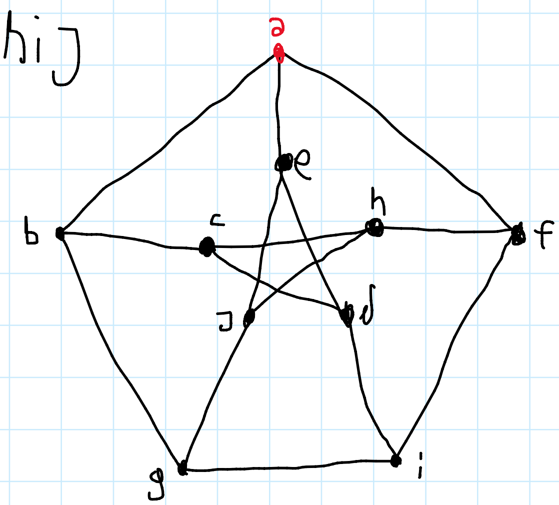
(1) El grafo de Petersen viene dado por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

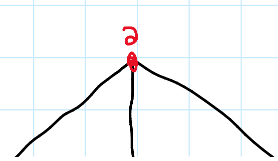
a) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden afcegdbhij.
b) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden alfabetico.
c) Calcular el numero cromatico del grafo de Petersen.



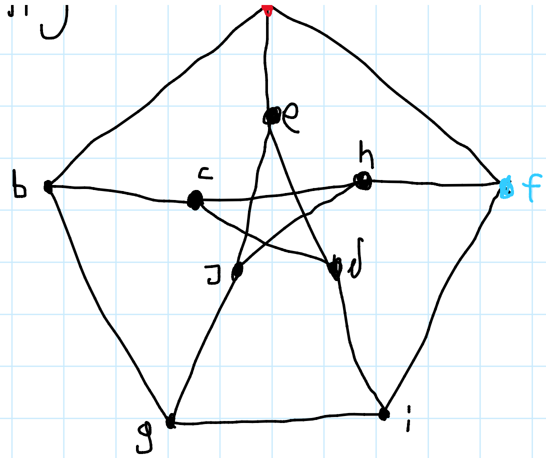
a) afcegdbhij



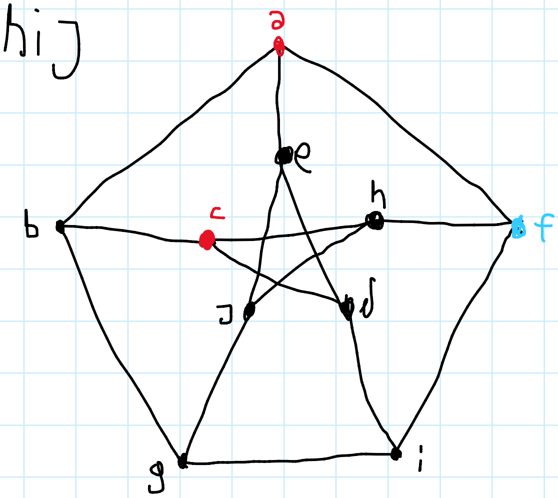
afcegdbhij



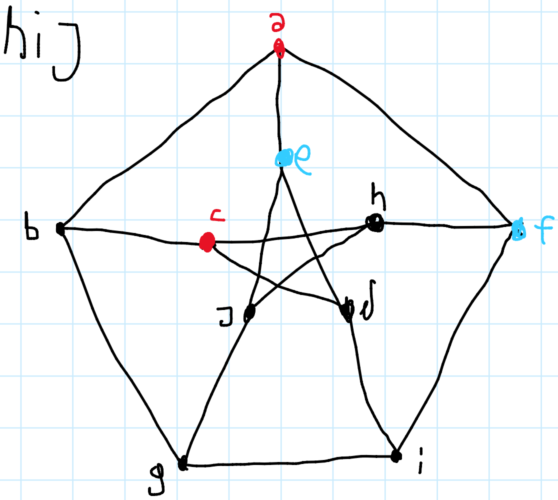
afcegdbhij



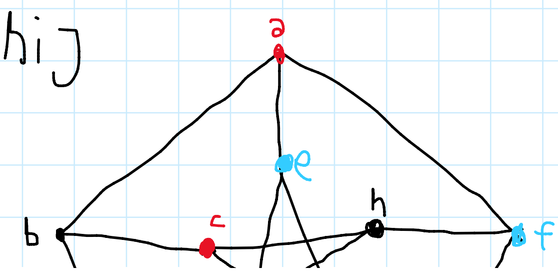
afcegdbhij

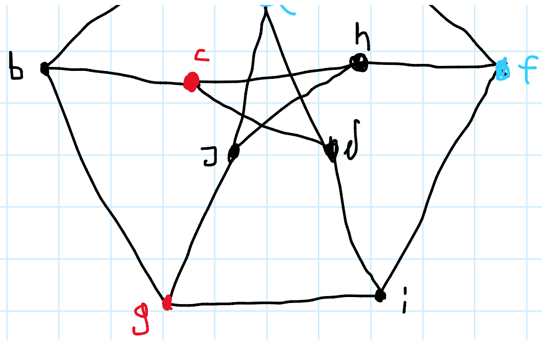


afcegdbhij

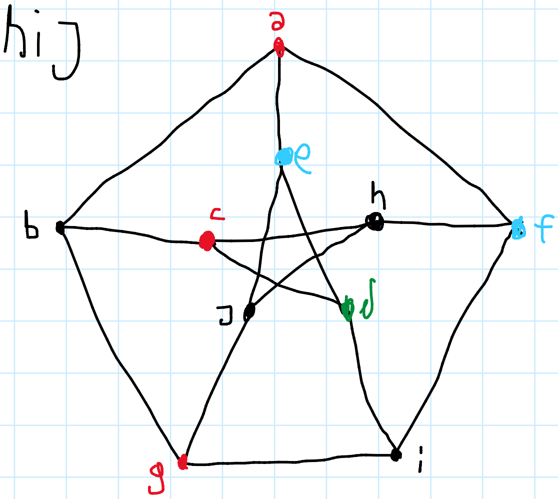


afcegdbhij

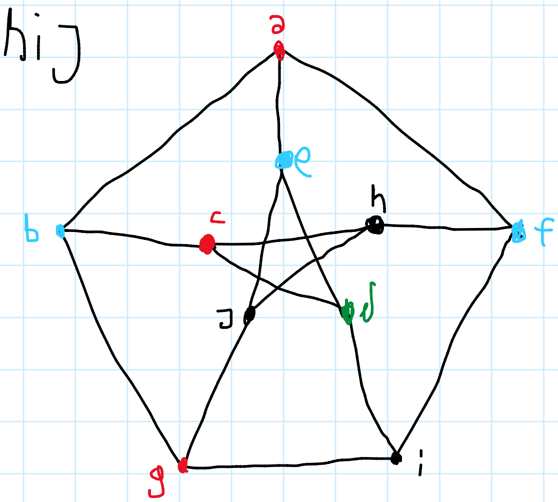




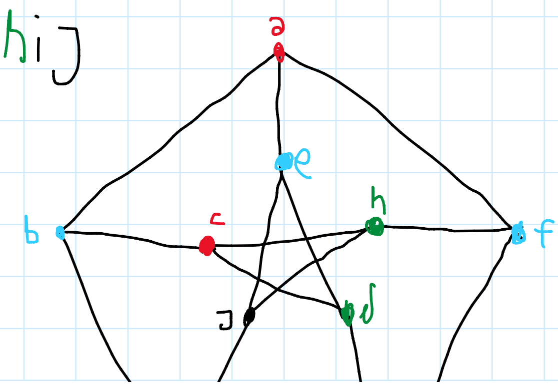
afcegdbhij

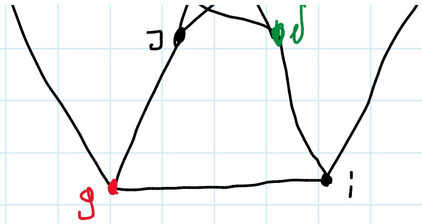


afcegdbhij

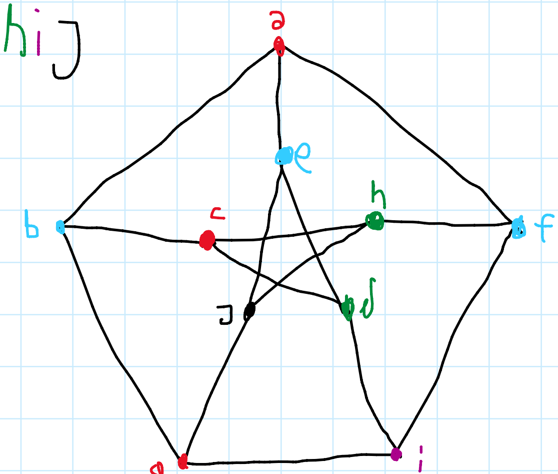


afcegdbhij



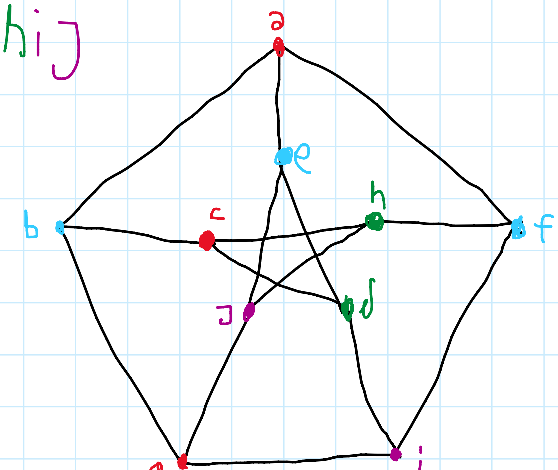


a f c e g d b h i j



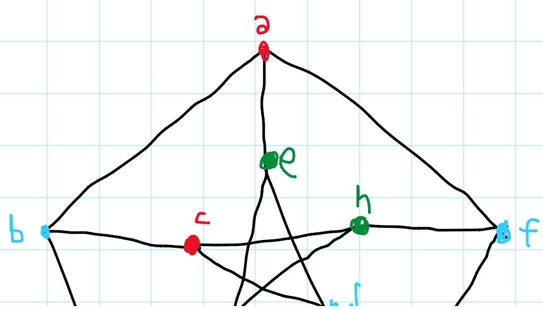
a f c e g d b h i j

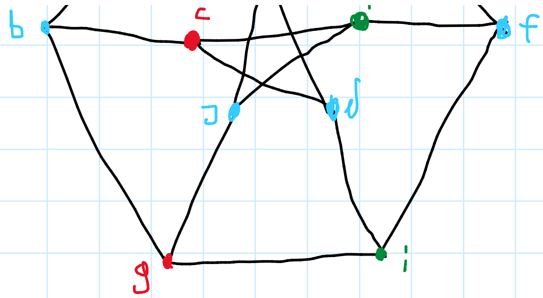
● = 0
● = 1
● = 2
● = 3



b) a b c d e f g h i j

● = 0
● = 1
● = 2





c) $\chi(G) \leq 3$ por el coloreo de b

$\chi(G) \geq 3$ por que tiene un cirlo impar (a b c h f a)

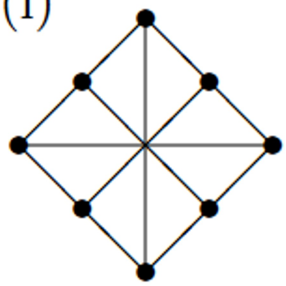
$\Rightarrow \chi(G) = 3$

2)

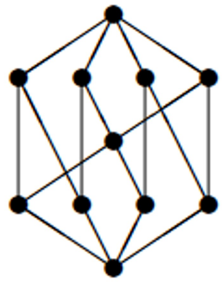
miércoles, 16 de marzo de 2022 13:17

(2) Hallar el número cromático de los siguientes grafos.

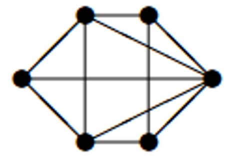
(i)



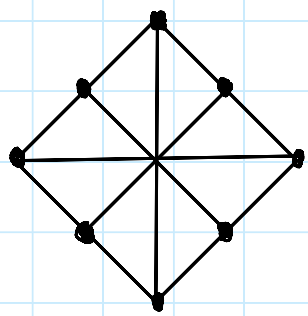
(ii)



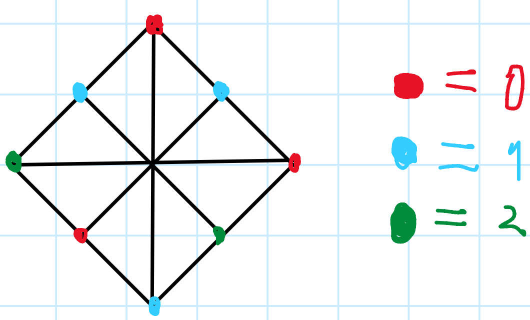
(iii)



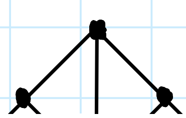
i)

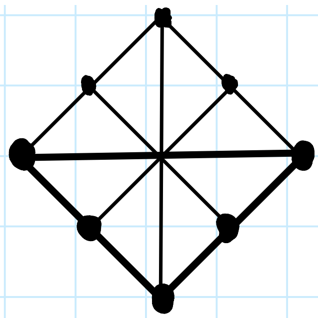


$\chi(i) \leq 3$ por el siguiente coloreo



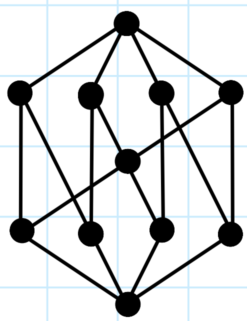
$\chi(i) \geq 3$ por que tiene un cirlo impar:



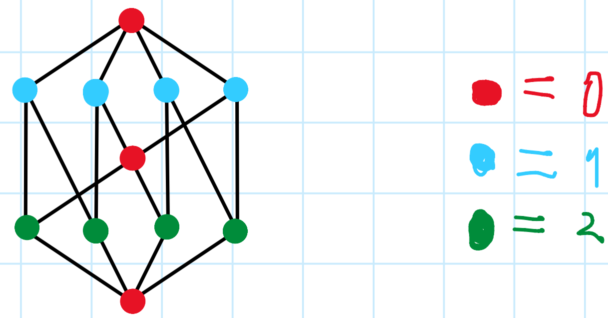


$\Rightarrow \ \chi(i) = 3$

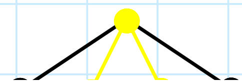
ii)

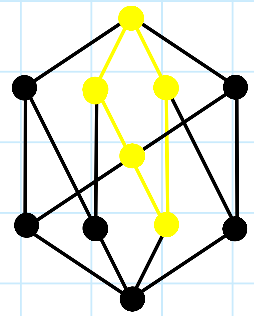


$\chi(ii) \leq 3$ por el siguiente coloreo



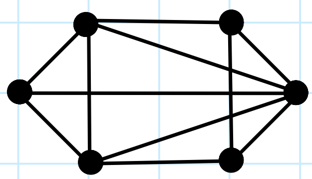
$\chi(ii) \geq 3$ por que tiene un ciclo impar:



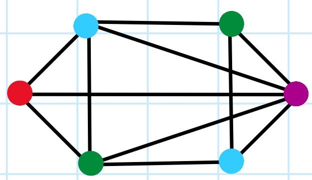


$\Rightarrow \chi(ii) = 3$

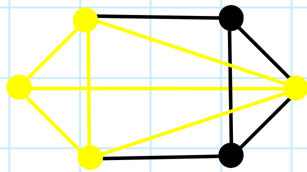
iii)



$\chi(iii) \leq 4$ por la siguiente coloración



$\chi(iii) \geq 4$ por que contiene a K_4:



$\Rightarrow \chi(\text{iii}) = 4$

3) 🛠️

miércoles, 16 de marzo de 2022 13:20

(3) Para $r \geq 2$, el grafo M_r se obtiene del grafo C_{2r} agregando las aristas que unen vértices opuestos. (i.e., i con $r+i$ para $i = 1, 2, ..., r$). Un ejemplo se puede ver en el ejercicio anterior, item (i), donde se tiene M_4. Calcular $\chi(M_r)$. (Deberá distinguir entre los casos r impar, $r = 2$ y r par > 2).

$M_r = (V, E)$

Donde:

$V = \{1,2, \dots, 2r\}$

$E = \{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{N}_{<2r}\} \cup \{\{2r, i\}\} \cup \{\{i, i+r\} : i \in \mathbb{N}_{\leq r}\}$

Caso $r = 2$:

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$

Esto es:

$M_2 = K_4$

Por teorema:

$\chi(K_4) = 4$

$\Rightarrow$

$\chi(M_2) = 4$

Caso r par:

$V = \{1,2, \dots, 2r\}$

$E = \{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{N}_{<2r}\} \cup \{\{2r, i\}\} \cup \{\{i, i+r\} : i \in \mathbb{N}_{\leq r}\}$

Sea:

$c : V \to \{0,1,2\}$

$$c(x) = \begin{cases} x \leq r \to r \bmod 2 \\ r+1 < x < 2r \to (r+1) \bmod 2 \\ x = r+1 \vee x = 2r \to 2 \end{cases}$$

c es un coloreo propio

$\Leftrightarrow$ {Definición coloreo propio}

$\forall \{x, y\} \in E : c(x) \neq c(y)$

Divido en casos de E:

Caso $\{i, i+1\}$:

$c(i) \neq c(i+1)$

$\Leftrightarrow$ {En los tres casos de c da distinto}

True

r impar

$V = \{1,2,\dots,2r\}$

$E = \left\{\{i,i+1\} : i \in \mathbb{N}_{<2r}\right\} \cup \left\{\{2r,i\}\right\} \cup \left\{\{i,i+r\} : i \in \mathbb{N}_{\leq r}\right\}$

$c : V \to \{0,1\}$

$c(x) = x \bmod 2$

c

$\forall \{x,y\} \in E : c(x) \neq c(y)$

E

$\{i,i+1\}$

$c(i) \neq c(i+1)$

$i \bmod 2 \neq (i+1) \bmod 2$

$0 \neq 1$

True

$\{2r,1\}$

$c(2r) \neq c(1)$

$0 \neq 1$

True

$\{i,i+r\}$

$c(i) \neq c(i+r)$

$i \bmod 2 \neq (i+r) \bmod 2$

r

$0 \neq 1$

True

4)

miércoles, 16 de marzo de 2022 14:22

(4) Dar el algoritmo MAS RÁPIDO POSIBLE que resuelva el siguiente problema:

Input: (T, n, m), donde T es un árbol, n es el número de vertices y m es el número de lados.

Output: $\chi(G)$

Sea:
T un árbol
$T = (V, E)$
$n = |V|$
$m = |E|$

$$\chi arbol(T, n, m) = \begin{cases} n = 0 \rightarrow 0 \\ n \neq 0 \wedge m = 0 \rightarrow 1 \\ \text{si no} \rightarrow 2 \end{cases}$$

Teorema:
$\chi(T) = \chi arbol(T, n, m)$

Encuentro una coloración:

Uso árboles definidos recursivamente:

árbol V = vacío | rec V [V]

Demostración por casos:
Si $n = 0$:
En este caso:
$V = \emptyset$

Por ende:
$E = \emptyset$
$G = (\emptyset, \emptyset)$

Por ende existe $c : \emptyset \rightarrow \emptyset$ que da una coloración trivialmente impropia de grado 0

Si $n \neq 0 \wedge m = 0$:

En este caso:
$G = (V, \emptyset)$

Existe la coloración:

$v : V \to \{1\}$
$c(x) = 1$

Esta coloración es impropia, demostración:

c es una coloración impropia
$\Leftrightarrow \{E = \emptyset\}$
$\langle \forall \{x, y\} \in \emptyset : c(x) \neq c(y) \rangle$
$\Leftrightarrow$ {Rango vacío}
True

Caso contrario: $(n \neq 0 \wedge m \neq 0)$

Defino:

$\text{profundidad} : V \to \text{árbol}\ [V] \to \mathbb{N}$
$\text{profundidad}\ \_\ \text{vacío} = \infty$

$$\text{profundidad}\ x\ (\text{rec}\ y\ [\,]) = \begin{cases} x = y \to 0 \\ \text{si no} \to \infty \end{cases}$$

$$\text{profundidad}\ x\ (\text{rec}\ y\ \text{ts}) = \begin{cases} x = y \to 0 \\ \text{si no} \to 1 + \min\{\text{profundidad}\ x\ t : t \in ts\} \end{cases}$$

$c_T : V \to \{0,1\}$

$$c_T(x) = \begin{cases} \text{profundidad}\ x\ T \text{ es par} \to 0 \\ \text{profundidad}\ x\ T \text{ es impar} \to 1 \end{cases}$$

$|\{0,1\}| = 2$
$\Rightarrow$
$\chi(T) \geq 2$

K_2 es un subgrafo de T
$\Rightarrow$
$\chi(T) \leq 2$

$$\chi(T) \leq 2 \wedge \chi(T) \geq 2$$

$\Rightarrow$

$$\chi(T) = 2$$

$\Rightarrow$

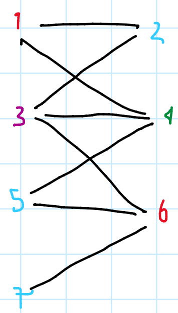
$$\chi(T) = \chi arbol(T, n, m)$$

(5) En el teórico vimos un ejemplo de un grafo bipartito con n vertices de forma tal que Greedy usa $n/2$ colores. (con n par).

a) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde Greedy use $(n+1)/2$ colores (con n impar).

b) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde Greedy use $(n+2)/2$ colores (con n par).

a)

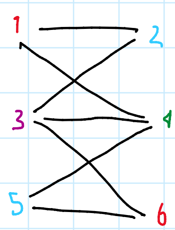


1 6 5 4 2 3 7

$n = 7$

colores: $4 = (7+1)/2$

b)



1 6 5 4 2 3 7

$n = 6$

colores: $4 = (6+2)/3$

Para n general:

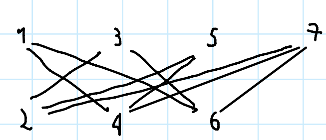
a) n impar

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, \dots, n\}$

$E = \{\{x, y\} : x, y \in V : x \text{ es par} \wedge y \text{ es impar} \wedge (x < y \vee y < x - 1)\}$

$n = 7$



Es bipartito con el coloreo:

$c : V \to \{0, 1\}$
$c(x) = x \bmod 2$

(Por que los pares nunca están conectados entre si, y lo mismo para los impares)

Pero Greedy con el orden numérico da $\frac{n+1}{2}$, ya que da la siguiente coloración:
$c : V \to \left\{1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\right\}$
$c(x) = \left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil$

Demostración:
Sea $x \in V$:

$$c(x) = \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(x)$$
$\Leftrightarrow$
$$\text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(x) = \left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil$$

Pruebo esto por inducción en x:

Caso base para x impar:

$$\begin{aligned}
& \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(1) \\
= \;& \min\{k > 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(\emptyset \cap \Gamma(1))\} \\
= \;& \min\{k > 0 : k \notin \emptyset\} \\
= \;& 1 \\
= \;& \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil
\end{aligned}$$

Caso base para x par:

$$\begin{aligned}
& \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(2) \\
= \;& \min\{k > 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(\{1\} \cap \Gamma(2))\} \\
= \{1 \notin \Gamma(2)\} \;& \min\{k > 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(\emptyset)\} \\
= \;& \min\{k > 0 : k \notin \emptyset\} \\
= \;& 1 \\
= \;& \left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil
\end{aligned}$$

Caso inductivo para x impar:

$$\begin{aligned}
& \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(x) \\
= \;& \min\{k \geq 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1{,}2, \dots, n)(\{1{,}2, \dots, x-1\} \cap \Gamma(x))\}
\end{aligned}$$

$= \{x \text{ es impar}\}$

$$\min\{k \geq 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \{2,4,\ldots,x-1\})\}$$

$=$

$$\min\{k \geq 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{2,4,\ldots,x-1\})\}$$

$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$

$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\left\lceil\frac{x-1}{2}\right\rceil\right\}\right\}$$

$= \{x \text{ es impar}\}$

$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\frac{x-1}{2}\right\}\right\}$$

$=$

$$\frac{x-1}{2} + 1$$

$=$

$$\frac{x+1}{2}$$

$= \{x \text{ es impar}\}$

$$\left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil$$

Caso inductivo para x par:

$$\text{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(x)$$

$=$

$$\min\{k \geq 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \Gamma(x)\})$$

$= \{x \text{ es par}\}$

$$\min\{k \geq 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \{1,3,\ldots,x-3\})\}$$

$=$

$$\min\{k \geq 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,3,\ldots,x-3\})\}$$

$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$

$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\left\lceil\frac{x-3}{2}\right\rceil\right\}\right\}$$

$= \{x \text{ es par}\}$

$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\frac{x}{2}-1\right\}\right\}$$

$=$

$$\frac{x}{2} - 1 + 1$$

$=$

$$\frac{x}{2}$$

$= \{x \text{ es par}\}$

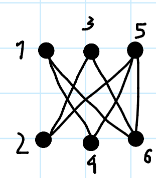
$$\left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil$$

$$\frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

b)
n par
$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, \ldots, n\}$

$E = \big\{\{x,y\} : x, y \in V : x \text{ es par} \wedge y \text{ es impar} \wedge (x < y \vee y < x-1)\big\} \cup \big\{\{n-1, n\}\big\}$



Es bipartito con el coloreo:

$c : V \to \{0, 1\}$
$c(x) = x \bmod 2$

(Por que los pares nunca están conectados entre si, y lo mismo para los impares)

Pero Greedy con el orden numérico da $\frac{n+2}{2}$, ya que da la siguiente coloración:

$c : V \to \left\{1, 2, \dots, \frac{n+2}{2}\right\}$

$$c(x) = \begin{cases} x = n \to \dfrac{n+2}{2} \\ \text{si no} \to \left\lceil \dfrac{x}{2} \right\rceil \end{cases}$$

Demostración:
Sea $x \in V$:

$$\text{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(x) = c(x)$$

Pruebo esto por inducción en x:

Caso base para x impar:

$$\text{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(1)$$
$$=$$
$$\min\{k > 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(\emptyset \cap \Gamma(1))\}$$
$$=$$
$$\min\{k > 0 : k \notin \emptyset\}$$
$$=$$
$$1$$
$$=$$
$$\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil$$
$$=$$
$$c(1)$$

Caso base para x par:

$$\text{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(2)$$
$$=$$
$$\min\{k > 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(\{1\} \cap \Gamma(2))\}$$
$$= \{1 \notin \Gamma(2)\}$$
$$\min\{k > 0 : k \notin \text{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(\emptyset)\}$$
$$=$$
$$\min\{k > 0 : k \notin \emptyset\}$$
$$=$$
$$1$$
$$=$$
$$\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil$$
$$=$$
$$c(2)$$

Caso inductivo para x impar:

$$\mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(x)$$
$=$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \Gamma(x))\}$$
$= \{x \text{ es impar}\}$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \{2,4,\ldots,x-1\})\}$$
$=$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{2,4,\ldots,x-1\})\}$$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\left\lceil\frac{x-1}{2}\right\rceil\right\}\right\}$$
$= \{x \text{ es impar}\}$
$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\frac{x-1}{2}\right\}\right\}$$
$=$
$$\frac{x-1}{2}+1$$
$=$
$$\frac{x+1}{2}$$
$= \{x \text{ es impar}\}$
$$\left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil$$
$= \{x \text{ es impar} \Rightarrow x \neq n\}$
$$c(x)$$

Caso inductivo para x par, $x < n$:

$$\mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(x)$$
$=$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \Gamma(x))\}$$
$= \{x \text{ es par}\}$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,2,\ldots,x-1\} \cap \{1,3,\ldots,x-3\})\}$$
$=$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\ldots,n)(\{1,3,\ldots,x-3\})\}$$
$= \{\text{Hipótesis inductiva}\}$
$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\left\lceil\frac{x-3}{2}\right\rceil\right\}\right\}$$
$= \{x \text{ es par}\}$
$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\ldots,\frac{x}{2}-1\right\}\right\}$$
$=$
$$\frac{x}{2}-1+1$$
$=$
$$\frac{x}{2}$$
$= \{x \text{ es par}\}$
$$\left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil$$
$= \{x < n \Rightarrow x \neq n\}$
$$c(x)$$

Caso $x = n$:

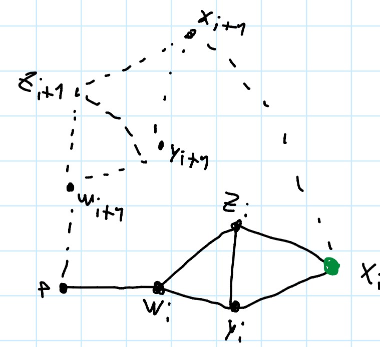
$$\mathrm{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(n)$$
$=$
$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\dots,n)\left(\{1,2,\dots,n-1\} \cap \Gamma(n)\right)\right\}$$
$=$
$$\min\{k \geq 0 : k \notin \mathrm{Greedy}_G(1,2,\dots,n)(\{1,3,\dots,n-1\})\}$$
$=$ {Hipótesis inductiva}
$$\min\left\{k \geq 0 : k \notin \left\{1,2,\dots,\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right\}\right\}$$
$=$
$$1+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$$
$=$
$$1+\frac{n}{2}$$
$=$
$$\frac{n+2}{2}$$
$=$
$$c(n)$$

6)

viernes, 18 de marzo de 2022 7:31

(6) Dado r natural, sea G el grafo formado por vertices $\{x_i, y_i, z_i, w_i : i = 0, 1, 2, ..., 2r\} \cup \{p\}$ y lados: $\{x_i x_{(i+1)\mathrm{mod} 2r+1} : i = 0, ..., 2r\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i p : i = 0, ..., 2r\}$. Es decir, es un C_{2r+1} con unos triangulos de vertices x_i, y_i, z_i mas otros triangulos y_i, z_i, w_i mas los lados $w_i p$. Probar que $\chi(G) = 4$.

$G = (V, E)$
$V = \{x_i, y_i, z_i, w_i : i \in \{0, 1, \dots, 2r\}\} \cup \{p\}$
$E = \{x_i x_{(i+1) \bmod (2r+1)}, x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i p : i \in \{0, 1, \dots, 2r\}\}$



$\chi(G) \leq 4$ por el siguiente colcoreo:

$c : V \to \{0, 1, 2\}$

$c(x_i) = \begin{cases} i = 2r \to 2 \\ \text{si no} \to i \bmod 2 \end{cases}$

$c(y_i) = \begin{cases} i = 2r \to 1 \\ \text{si no} \to 1 - (i \bmod 2) \end{cases}$

$c(z_i) = \begin{cases} i = 2r \to 0 \\ \text{si no} \to 2 \end{cases}$

$c(w_i) = \begin{cases} i = 2r \to 2 \\ \text{si no} \to i \bmod 2 \end{cases}$

$c(p) = 3$

$\chi(G) \geq 4$, demostración por contradiccón:

$\chi(G) < 4$

$\Rightarrow$ {Existen cilos impares (como $x_i z_i y_i$) $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$}

$\chi(G) = 3$

$\Rightarrow$ {$x_0 x_1 \dots x_{2r}$ forman un ciclo impar}

$\langle \exists i, j, k \in \{0,1, \dots, 2r\} : c(x_i) = 0 \wedge c(x_j) = 1 \wedge c(x_k) = 2 \rangle$

Trabajo dentro del $\exists$:

$c(x_i) = 0 \wedge c(x_j) = 1 \wedge c(x_k) = 2$

$\Rightarrow \{c(x_a) \neq c(y_a), c(z_a) \wedge c(y_a) \neq c(z_a) \wedge c(w_a) \neq c(y_a), c(z_a) \Rightarrow c(x_a) = c(w_a)\}$

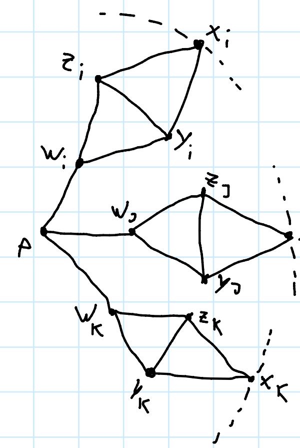
$c(w_i) = 0 \wedge c(w_j) = 1 \wedge c(w_k) = 2$

$\Rightarrow \{c(p) \neq c(w_i), c(w_j), c(w_k)\}$

$c(p) \neq 0,1,2$

$\Rightarrow \{\chi(G) = 3\}$

False



$\Rightarrow \chi(G) = 4$

7)

viernes, 18 de marzo de 2022 18:08

(7) Dado n natural, sea G_n el grafo cuyos vertices son los números $1, 2, ..., n$ y cuyos lados son los $\{i, j\}$ tales que $mcd(i, j) = 1$. Calcular $\chi(G_{100})$.

$G_n = (V, E)$

$V = \{1,2,\dots,n\}$

$E = \big\{\{i,j\} : i,j \in V : \mathrm{mcd}(i,j) = 1\big\}$

$\chi(G_n) \leq |\mathbb{P}_{\leq n}| + 1$

($\mathbb{P}$ son los primros)

Demostración:

Sean:

$\mathrm{prims}(x) =$ conjunto de primos que componen a x

$c : V \to \{0\} \cup \mathbb{P}_{\leq n}$

$c(1) = 0$

$c(x) = \min\big(\mathrm{prims}(x)\big)$

Demostración de que el coloreo es propio:

Sean x, y con color p:

Demuestro que no pueden estar conectados:

x, y tiene color p

$\Rightarrow$

$p | x, y$

$\Rightarrow$

$\mathrm{mcd}(x, y) = p$

$\Rightarrow$

$\mathrm{mcd}(x, y) \neq 1$

$\chi(G_n) \geq |\mathbb{P}_{\leq n}| + 1$

Porque todos los primos y el 0 están conectados entre si formando un $K_{|\mathbb{P}_{\leq n}|+1}$

$$\Rightarrow \chi(G_n) = |\mathbb{P}_{\leq n}| + 1$$
$$\Rightarrow \chi(G_{100}) = |\mathbb{P}_{\leq 100}| + 1$$
$$= 26$$

8)

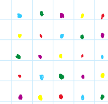
viernes, 18 de marzo de 2022 15:32

(8) El "queen graph" Q_n es el grafo cuyos vertices son los n^2 casilleros de un tablero cuadrado con n filas y n columnas. Dos vertices son vecinos si poniendo una reina de ajedrez en cada uno de los casilleros las reinas se atacan mutuamente. (es decir, si los casilleros estan en una misma fila, columna o diagonal, donde diagonal no es necesariamente una de las diagonales principales). Probar que si n es coprimo con 6, entonces $\chi(G) = n$.

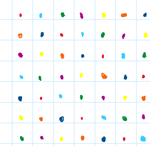
$Q_n = (V, E)$
$V = \{1, \ldots, n\}^2$
$E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V : (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \wedge (x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2 \vee x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \vee x_1 - y_1 = x_2 - y_2)\}$

n es coprimo con 6 $\Rightarrow \chi(Q_n) = n$

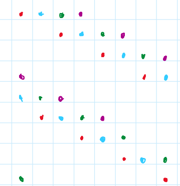
n = 5



n = 7



n = 9



Demostración suponiendo el antecedente:

Coloreo:
$c : E \to \{0, 1, \ldots n-1\}$
$c(x, y) = (x + 2y) \bmod n$

Pruebo que es propio:

Sean:
$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$
Talque:
$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$
$c(x_1, y_1) = c(x_2, y_2)$

Demostración auxiliar ①:
$c(x_1, y_1) = c(x_2, y_2)$
$\Leftrightarrow$
$x_1 + 2y_1 \equiv x_2 + 2y_2 \mod n$
$\Leftrightarrow$
$2y_1 - 2y_2 \equiv x_2 - x_1 \mod n$
$\Leftrightarrow$
$2(y_1 - y_2) \equiv x_2 - x_1 \mod n$

Pruebo $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \notin E$ por contradición:

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E$
$\Rightarrow \{(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)\}$
$x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2 \vee x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \vee x_1 - y_1 = x_2 - y_2$

Divido en casos:

Caso $x_1 = x_2$:

$x_1 = x_2$
$\Rightarrow$ {Uso esto en ①, un lado del $\equiv$ se vuelve 0}
$2(y_1 - y_2) \equiv 0 \mod n$
$\Leftrightarrow \{0 \leq y_1, y_2 < n \wedge y_1 \neq y_2 \Rightarrow 0 < y_1 - y_2 < n \Rightarrow 0 < 2(y_1 - y_2) < 2n\}$
$2(y_1 - y_2) = n$
$\Leftrightarrow$ {Es imposible porque n es impar y $2(y_1 - y_2)$ es par}
False

Caso $y_1 = y_2$:

$y_1 = y_2$
$\Rightarrow$ {Uso esto en ①, un lado del $\equiv$ se vuelve 0}
$0 \equiv x_2 - x_1 \mod n$
$\Leftrightarrow$ {Es imposible porque $0 \leq x_1, x_2 < n$ (y ambos son distintos)}
False

Caso $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$
$\Rightarrow$
$y_1 = x_1 + y_2 - x_2 \wedge x_2 = x_1 + y_2 - y_1$
$\Rightarrow$ {Uso esto en ①}
$2(x_1 + y_2 - x_2 - y_2) \equiv x_2 - x_1 \mod n \quad \wedge \quad 2(y_1 - y_2) \equiv x_1 + y_2 - y_1 - x_1 \mod n$
$\Leftrightarrow$
$2(x_1 - x_2) \equiv -(x_1 - x_2) \mod n \quad \wedge \quad 2(y_1 - y_2) \equiv -(y_1 - y_2) \mod n$
$\Leftrightarrow$
$3(x_1 - x_2) \equiv 0 \mod n \quad \wedge \quad 3(y_1 - y_2) \equiv 0 \mod n$
$\Rightarrow$ {n no es múltiplo de 3}
$x_1 - x_2 \equiv 0 \mod n \quad \wedge \quad y_1 - y_2 \equiv 0 \mod n$
$\Leftrightarrow$ {Es imposible porque $0 \leq x_1, x_2 < n$ (y ambos son distintos). Idem para los y}
False

Caso $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$:

$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$
$\Leftrightarrow$
$x_1 - x_2 = y_1 - y_2$
$\Rightarrow$ {Uso esto en ①}
$2(x_1 - x_2) \equiv x_2 - x_1 \mod n \quad \wedge \quad 2(y_1 - y_2) \equiv y_2 - y_1 \mod n$
$\Leftrightarrow$
$3(x_1 - x_2) \equiv 0 \mod n \quad \wedge \quad 3(y_1 - y_2) \equiv 0 \mod n$
$\Rightarrow$ {n no es multiplo de 3}
$x_1 - x_2 \equiv 0 \mod n \quad \wedge \quad y_1 - y_2 \equiv 0 \mod n$
$\Leftrightarrow$ {Es imposible porque $0 \leq x_1, x_2 < n$ (y ambos son distintos). Idem para los y}
False

9)

viernes, 18 de marzo de 2022 17:42

(9) Decidir si lo siguientes son verdaderos o falsos. Probar los que sean verdadero (si hay alguno) y dar un contraejemplo para los falsos. (si hay alguno). Para todos los casos, sea G un grafo coloreado POR GREEDY a partir del color 0, en algún orden, con t colores y sean V_i los vertices coloreados con i.

a) Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc hasta V_{t-1}, en ese orden entonces corriendo Greedy con este nuevo orden obtenemos de vuelta exactamente t colores.

b) Supongamos $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc, hasta V_{t-3} luego los de V_{t-1} y al final los vértices de V_{t-2}, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente t colores.

c)Supongamos $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc hasta V_{t-4} luego los de V_{t-2}, luego los de V_{t-3} y al final los vértices de V_{t-1}, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente t colores.

a)

a) Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc hasta V_{t-1}, en ese orden entonces corriendo Greedy con este nuevo orden obtenemos de vuelta exactamente t colores.

Sea:

$G = (V, E)$ un grafo

$V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$

$c = \text{greedy}_G(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

$t = |c(V)|$ (t es la cantidad de colores del coloreo)

$V_i = \{x \in V : c(x) = i\}$

$\{x'_{0,0}, x'_{0,1}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}\} = V_0$

$\{x'_{1,0}, x'_{1,1}, \dots, x'_{1,|V_1|-1}\} = V_1$

$\vdots$

$\{x'_{t-1,0}, x'_{t-1,1}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1}\} = V_{t-1}$

$c' = \text{greedy}_G(x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1})$

$t' = |c'(V)|$

$t = t'$

Demostración:

$t = t'$

$\Leftrightarrow$

$|c(V)| = |c'(V)|$

$\Leftarrow$

$c = c'$

$\Leftrightarrow$

$\langle \forall x \in V : c(x) = c'(x) \rangle$

Trabajo sin el $\forall$:

$c(x) = c'(x)$

Prueba por inducción de x en la lista $x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1}$:

Caso base para $x \in V_0$:
(O sea para $x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}$)

$c(x'_{0,j})$
$= \{c' = \text{greedy}_G(x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1})$ definición greedy$\}$
$\min\left\{k \geq 0 : k \notin c'\left(\{x'_{0,1}, \dots, x'_{0,j-1}\} \cap \Gamma(x'_{0,j})\right)\right\}$
$= \{c$ es un coloreo propio $\wedge\, x_{0,1}, \dots, x_{0,j} \in V_0 \Rightarrow x_{0,1}, \dots, x_{0,j-1} \notin \Gamma(x'_{0,j})\}$
$\min\{k \geq 0 : k \notin c'(\emptyset)\}$
$=$
$\min\{k \geq 0 : k \notin \emptyset\}$
$=$
0
$= \{x_{0,j} \in V_0\}$
$c(x_{0,j})$

Caso inductivo suponiendo que vale para $V_0, V_1, \dots, V_{i-1}$:

$c(x'_{i,j})$
$= \{c' = \text{greedy}_G(x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1})$ definición greedy$\}$
$\min\left\{k \geq 0 : k \notin c'\left(\{x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{i-1,0}, \dots, x'_{i-1,|V_{i-1}|-1}, x'_{i,0}, \dots, x'_{i,j-1}\} \cap \Gamma(x'_{i,j})\right)\right\}$
$= \{c$ es un coloreo propio $\wedge\, x_{i,1}, \dots, x_{i,j} \in V_i \Rightarrow x_{i,1}, \dots, x_{i,j-1} \notin \Gamma(x'_{i,j})$
c es el resultado de greedy
$\Rightarrow V_0 \cap \Gamma(x'_{i,j}) \neq \emptyset, V_1 \cap \Gamma(x'_{i,j}) \neq \emptyset, \dots, V_{i-1} \cap \Gamma(x'_{i,j}) \neq \emptyset$
$\}$
$\min\{k \geq 0 : k \notin \{1,2, \dots, i-1\}\}$
$=$
i
$= \{x'_{i,j} \in V_i\}$
$c(x_{i,j})$

b)
b) Supongamos $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc, hasta V_{t-3} luego los de V_{t-1} y al final los vértices de V_{t-2}, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente t colores.

Sea:
$G = (V, E)$ un grafo
$V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$
$c = \text{greedy}_G(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

$t = |c(V)|$ (t es la cantidad de colores del coloreo)

$V_i = \{x \in V : c(x) = i\}$

$\{x'_{0,0}, x'_{0,1}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}\} = V_0$
$\{x'_{1,0}, x'_{1,1}, \dots, x'_{1,|V_1|-1}\} = V_1$
$\vdots$
$\{x'_{t-1,0}, x'_{t-1,1}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1}\} = V_{t-1}$

$c' = \text{greedy}_G(x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-3,0}, \dots, x'_{t-3,|V_{t-3}|-1}, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1}, x'_{t-2,0}, \dots, x'_{t-2,|V_{t-2}|-1})$
$t' = |c'(V)|$

$$t = t'$$

Demostración:

$$t = t'$$
$\Leftrightarrow$
$$|c(V)| = |c'(V)|$$

Por la inducción realizada en a, $x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-3,0}, \dots, x'_{t-3,|V_{t-3}|-1}$ se colorean igual
Veo ahora que para $t-1$ da $t-2$ y biseversa (respetando que el maximo es $t-1$)

Lo pruebo para los $t-1$ y después para los $t-2$:

$c(x_{t-1,j})$
$= \{c' = \text{greedy}_G(\dots)$, definición greedy$\}$
$\min\left\{k \geq 0 : k \notin c'\left(\{x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-3,0}, \dots, x'_{t-3,|V_{t-3}|-1}, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,j-1}\} \cap N(x_{t-1,j})\right)\right\}$
$= \{c$ es un coloreo propio $\wedge\, x_{t-1,1}, \dots, x_{t-1,j} \in V_{t-1} \Rightarrow x_{t-1,1}, \dots, x_{t-1,j-1} \notin N(x_{t-1,j})$
c es el resultado de greedy
$\Rightarrow V_0 \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset, V_1 \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset, \dots, V_{t-3} \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset$
Uso inducción de a
$\}$
$\min\{k \geq 0 : k \notin \{1,2, \dots, t-3\}\}$
$=$
$t-2$

Para los $t-2$:

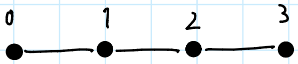
$c(x_{t-2,j})$
$= \{c' = \text{greedy}_G(\dots)$, definición greedy$\}$
$\min\left\{k \geq 0 : k \notin c'\left(\{x'_{0,0}, \dots, x'_{0,|V_0|-1}, \dots, x'_{t-3,0}, \dots, x'_{t-3,|V_{t-3}|-1}, x'_{t-1,0}, \dots, x'_{t-1,|V_{t-1}|-1}, x'_{t-2,0}, \dots, x'_{t-2,j-1}\} \cap N(x_{t-2,j})\right)\right\}$
$= \{c$ es un coloreo propio $\wedge\, x_{t-2,1}, \dots, x_{t-2,j} \in V_{t-2} \Rightarrow x_{t-2,1}, \dots, x_{t-2,j-2} \notin N(x_{t-1,j})$
c es el resultado de greedy
$\Rightarrow V_0 \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset, V_1 \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset, \dots, V_{t-3} \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset, V_{t-1} \cap N(x_{t-1,j}) \neq \emptyset$
Uso inducción de a, y caso para los $t-1$:
$\}$
$\min\{k \geq 0 : k \notin \{1,2, \dots, t-3, t-2\}\}$
$=$
$t-1$

c)

c)Supongamos $t \geq 3$. Si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_0 luego los de V_1, etc hasta V_{t-4} luego los de V_{t-2}, luego los de V_{t-3} y al final los vértices de V_{t-1}, entonces corriendo Greedy con este nuevo orden Greedy colorea a G con exactamente t colores.

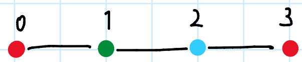
Es falso, contraejemplo:

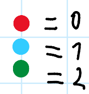
Grafo



orden: 0 3 2 1

Coloreo:

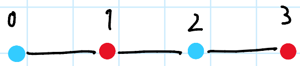




$V_0 = \{0, 3\}$, $V_1 = \{2\}$, $V_2 = \{1\}$

Nuevo orden: 1 2 0 3

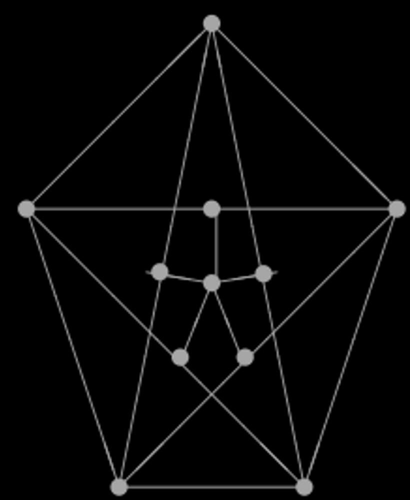
Nuevo coloreo:

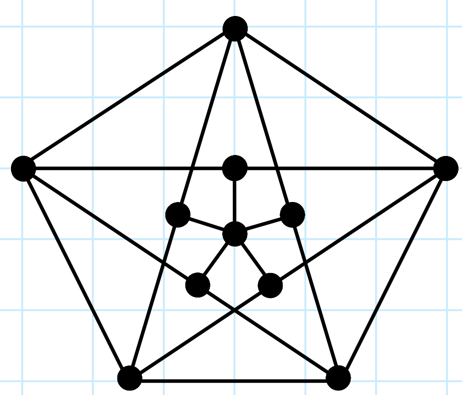


10)

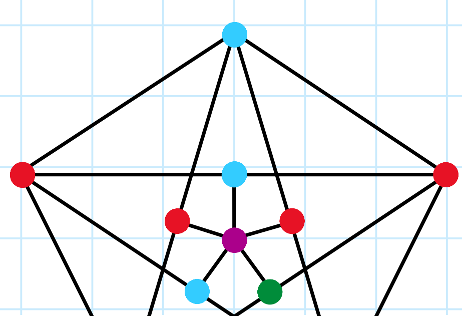
sábado, 19 de marzo de 2022 18:57

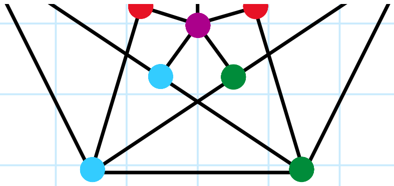
(10) Probar que el número cromático del siguiente grafo es 4.





$\chi(G) \leq 4$ por el siguiente coloreo





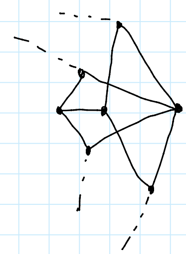
Probada versión mas general en 11

11)

viernes, 18 de marzo de 2022 19:08

(11) Similar al anterior pero ahora con un C_7:
El grafo G tiene vertices $x_i, i = 0, ..., 6$ con lados $\{x_i x_{(i+1)\text{mod}7}\}_{i=0,...,6}$ (i.e., un C_7) y ademas vértices $y_i, i = 0, ..., 6$ con lados $\{y_i x_{(i\pm1)\text{mod}7}\}_{i=0,...,6}$ y un vértice extra p con lados py_i, $i = 0, ..., 6$.

Sea:
$r \in \mathbb{N}_{>0}$
$G = (V, E)$
$V = \{p, x_0, x_1, \dots, x_{2r}, y_0, y_1, \dots y_{2r}\}$
$E = \left\{x_i x_{(i+1) \bmod (2r+1)}, y_i x_{(i\pm1) \bmod (2r+1)}, py_i : i \in \{0,1, \dots 2r\}\right\}$



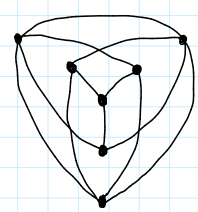
$\chi(G) \leq 4$ por el siguiente coloreo:
$c : V \to \{0, 1, 2, 3\}$
$c(x_i) = \begin{cases} i = 2r \to 2 \\ \text{si no} \to i \bmod 2 \end{cases}$
$c(y_i) = \begin{cases} i = 2r \to 2 \\ \text{si no} \to i \bmod 2 \end{cases}$
$c(p) = 3$

$\chi(G) \geq 4$, demostración por contradicción:

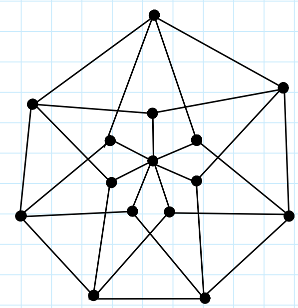
$\chi(G) < 3$
$\Leftrightarrow$ {Tiene ciclos impares}
$\chi(G) = 3$
$\Rightarrow$ {$x_0, x_1, \dots, x_{2r}, x_0$ forman un ciclo impar
$\Rightarrow$ Hay 3 elementos de distinto color que tienen colores distintos a ambos lados *
}
$\exists i, j, k \in \{0,1, \dots, 2r\} : c(x_i), c(x_j), c(x_k) = 0,1,2$
$\wedge \langle \forall t \in \{i, j, k\} : c(x_t) \neq c(x_{t+1}) \neq c(x_{t-1}) \neq c(x_t) \rangle$
(Defino que si x se indexa por un numero invalido, se hace modulo automáticamente)
$\Rightarrow$ {Trabajo dentro del $\exists$:
$c(x_i), c(x_j), c(x_k) = 0,1,2$
$\wedge \langle \forall t \in \{i, j, k\} : c(x_t) \neq c(x_{t+1}) \neq c(x_{t-1}) \neq c(x_t) \rangle$
$\Rightarrow$ {$c(x_{t+1}) \neq c(x_{t-1}) \Rightarrow c(x_{t+1}) \neq c(y_t) \neq c(x_{t-1})$
$\Rightarrow c(y_t) = c(x_t)$ (porque hay solo 3 colores)
}
$c(x_i), c(x_j), c(x_k) = 0,1,2$
$\wedge \langle \forall t \in \{i, j, k\} : c(y_t) = c(x_t) \rangle$
$\Rightarrow$
$c(y), c(y_j), c(y_k) = 0,1,2$
}
$\exists i, j, k \in \{0,1, \dots, 2r\} : c(y_i), c(y_j), c(y_k) = 0,1,2$
$\Rightarrow$ {Los y están conectados con p, así que no queda color para p}
False

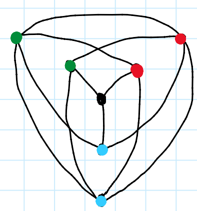
$\Rightarrow \chi(G) = 4$

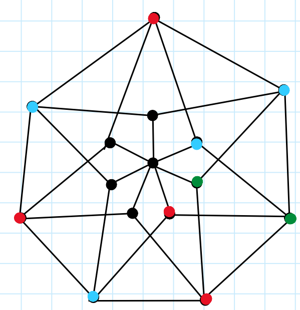
n = 3



n = 7







* Demostración extra:
Sea:
$G = C_{2i+1}$ con vertices $x_0, x_1, \dots, x_{2i}$
$c : \{x_0, x_1, \dots, x_{2i}\} \to \{0,1,2\}$ un coloreo propio de G (existe porque $X(C_{2i+1}) = 3$)

$\exists i, j, k \in \{0,1, \dots, 2i\} : c(x_i), c(x_j), c(x_k) = 0,1,2$
$\wedge \langle \forall t \in \{i, j, k\} : c(x_{t+1}) \neq c(x_{t-1}) \rangle$

Demostración por contradicción:
Pruebo solo que se llega a una contradicción si no existe k, pero es análogo para i y j

Supongamos que para algún $t \in \{i, j, k\}$ no vale el termino del $\forall$:

$\nexists k \in \{0,1, \dots, 2i\} : c(x_k) = 2 : \; cc(x_{k+1}) \neq c(x_{k-1})$
$\Leftrightarrow$
$\forall k \in \{0,1, \dots, 2i\} : c(x_k) = 2 : c(x_{k+1}) = c(x_{k-1})$

$\Rightarrow$ { Sea:

$c' : \{x_0, x_1, \dots, x_{2i}\} \to \{0,1\}$

$c'(x_i) = \begin{cases} c(x_i) \neq 2 \to c(x_i) \\ \text{si no} \to 1 - c(x_{k+1}) \end{cases}$

c' es propio, ya que $c'(x_i) \neq c'(x_{i+1})$:
Pruebo esto por casos:

Caso $c(x_i), c(x_{i+1}) \neq 2$:
$c'(x_i) \neq c'(x_{i+1})$
$\Leftrightarrow$
$c(x_i) \neq c(x_{i+1})$
$\Leftrightarrow$ {c es coloreo propio}
True

Caso $c(x_i) = 2 \wedge c(x_{i+1}) \neq 2$:
$c'(x_i) \neq c'(x_{i+1})$
$\Leftrightarrow$
$1 - c(x_{i+1}) \neq c(x_{i+1})$
$\Leftrightarrow$ {$c(x_{i+1}) \in \{0,1\}$}
True

Caso $c(x_i) \neq 2 \wedge c(x_{i+1}) = 2$:
$c'(x_i) \neq c'(x_{i+1})$
$\Leftrightarrow$
$c(x_i) \neq 1 - c(x_{i+1+1})$
$\Leftrightarrow$
$c(x_i) \neq 1 - c(x_{i+2})$
$\Leftrightarrow$ {Por el $\forall$: $c(x_{i+1}) = 2 \Rightarrow c(x_{i+2}) = c(x_i)$}
$c(x_i) \neq 1 - c(x_i)$
$\Leftrightarrow$ {$c(x_{i+1}) \in \{0,1\}$}
True

}

c' es un coloreo propio de G
$\Rightarrow$
$\chi(G) \leq 2$
$\Leftrightarrow$ {G es un ciclo impar $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$}
False

12)

domingo, 20 de marzo de 2022 12:25

(12) Sea G un grafo tal que $\chi(H) < \chi(G)$ para todo subgrafo H propio de G. (un grafo asi se llama k-crítico, si $\chi(G) = k$). Probar que $\chi(G) \leq \delta + 1$.

Sea:
G un grafo k-critico
$G = (V, E)$

$$\chi(G) \leq \delta_G + 1$$

Demostración:

G un grafo k-critico
$\Rightarrow$ {Demostración extra}
$\langle \forall v \in V : \chi(G[V - \{v\}]) = k - 1 \rangle$
$\Rightarrow$ {Caso particular}
$\langle \forall v \in V : d_G(v) = \delta_G : \ \chi(G[V - \{v\}]) = k - 1 \rangle$

Trabajo dentro del $\forall$:
Sea c_1 un coloreo que justifica $\chi(G[V - \{v\}]) = k - 1$
$c_1 : V - \{v\} \rightarrow \{0, 1, \ldots, k - 2\}$

Extiendo c_1 para encontrar un coloreo de G

$$c_2(x) = \begin{cases} x \neq v \rightarrow c_1(x) \\ x = v \rightarrow \min\{i \in \mathbb{N}_{\cup 0} : i \notin c_1(\Gamma_G(v))\} \end{cases}$$

Está claro que:
(1) c_2 es un coloreo propio, porque c_1 lo es, y por que la definición de $c_2(v)$ garantiza que sea distinto que sus vecinos

(4) $c_2(v) = k - 1$
Demostración:
No puede ser $c_2(v) > k - 1$ porque $k - 1 \notin \operatorname{Img}(c_1) \Rightarrow k - 1 \notin c_1(\Gamma_G(v))$
No puede ser $c_2(v) < k - 1$ porque c_2 sería un coloreo propio de $k - 1$ colores, pero por hipótesis $\chi(G) = k$

Trabajo con esto último:

$c_2(v) = k - 1$

$\Rightarrow$ {$c_2(v) \leq \delta_G$ porque $|\Gamma_G(v)| = \delta_G$ (y por como está definido c_2) (el coloreo empieza en 0)}

$k - 1 \leq \delta_G$

$\Leftrightarrow$

$k \leq \delta_G + 1$

$\Leftrightarrow$

$\chi(G) \leq \delta_G + 1$

Demostración extra:

Sea:

G un grafo k-critico

$G = (V, E)$

$\langle \forall v \in V : \chi(G[V - \{v\}]) = k - 1 \rangle$

Demostración por contradicción:

$\langle \exists v \in V : \chi(G[V - \{v\}]) \neq k - 1 \rangle$

$\Leftrightarrow$ {$>$ no puede ser por la definición de k critico}

$\langle \exists v \in V : \chi(G[V - \{v\}]) < k - 1 \rangle$

Trabajo sin el $\exists$, con un v:

Trabajo sin el $\forall$:

Sea:

$t = \chi(G[V - \{v\}])$

$c_1 : V - \{v\} \rightarrow \{0, 1, \ldots, t - 1\}$

c_1 un coloreo propio de H

(Notar que $t < k - 1$)

$c_2 : V \rightarrow \{0, 1, \ldots, t\}$

$$c_2(x) = \begin{cases} x = v \rightarrow t \\ \text{si no} \rightarrow c_1(x) \end{cases}$$

Esta claro que c_2 es un coloreo propio de G, porque c_1 lo es de H, trabajo con eso:

c_2 es un coloreo propio

$\Rightarrow$

$\chi(G) \leq t$

$\Rightarrow \{t < k - 1\}$

$\chi(G) < k - 1$

$\Rightarrow \{G \text{ es } k\text{-critico} \Rightarrow \chi(G) = k\}$

False

13)

miércoles, 23 de marzo de 2022 11:44

(13) Dar un algoritmo polinomial que resuelva el siguiente problema:
Input: Un grafo G que se garantiza que es conexo no regular con $\Delta \leq 3$.
Output: $\chi(G)$ y un coloreo propio con $\chi(G)$ colores.
(nota: para probar que es polinomial debe probar su complejidad).

$$\text{algoritmo}(G) = \begin{cases} |V| = 0 \to (0, c : \emptyset \to \emptyset) \\ |V| = 1 \to (1, (\lambda x \to 0)) \\ \text{es2color}(G) \to (2, \text{2coloreo}(G)) \\ \text{si no} \to (3, \text{Greedy}_G(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)) \end{cases}$$

$(V, E) = G$

$x = \text{get}\{x \in V : d_G(x) < \Delta_G\}$ (Tiene que haber alguno porque G no es regular)

$\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \text{DFS}_G(x)$

Es polinomial porque todas las guardas y todos los casos son polinomiales

En los primeros 3 casos es claramente correcto
En el cuarto caso:
Es 3 porque para G irregular, $\chi(G) \leq \Delta_G \leq 3$ y los otros casos ya chequean que $\chi(G) > 2$
Greedy da bien por que es el mismo coloreo que prueba el teorema de Brooks