Definiciones

domingo, 3 de abril de 2022 10:54

Camino aumentante:
Sea:
(V, E, c) un network
$s, t \in V$
$y, z \in V$
f un flujo
$x_0, x_1, \dots, x_r \in V$

$$z \text{ es un } f\text{FF vécino de } x \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{xz} \in E \land f(\overrightarrow{xz}) < c(\overrightarrow{xz})\right) \lor \left(\overrightarrow{zx} \in E \land f(\overrightarrow{zx}) > 0\right)$$

$$d_f(x,z) = \begin{cases} x = z & \rightarrow & 0 \\ \text{si no} & \rightarrow & \min\{|X| : X \text{ es un camino } f\text{-aumentante de } x \text{ a } z\} \end{cases}$$

$$d_f(x) = d_f(s,x)$$
$$b_f(x) = d_f(x,t)$$

$$x_0, x_1, \dots, x_r \text{ es un } f\text{-camino aumentante} \Leftrightarrow$$
$$x_0 = s \land x_r = t \land \langle \forall i \in \{0,1,\dots,r-1\} : x_i \text{ es un } f\text{FF vécino de } x_{i+1} \rangle$$

Sub-network:
Sean:
N, M networks
$N = (V, E, c)$
$N' = (V', E', c')$
$s, t \in V, V'$

$$N' \text{ es subnetwork de } N \Leftrightarrow$$
$$V' \subseteq V \land E' \subseteq E \land \langle \forall e \in E' : c'(e) \leq c(e) \rangle$$

Demostraciones

sábado, 9 de abril de 2022 17:27

Flujo de sub-network:
Sea:
N, M networks
$N = (V, E, c)$
N' un subnetwork de N
$s, t \in V, V'$
f' un flujo en N'

$f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
$$f(e) = \begin{cases} e \in E' \to f'(e) \\ \text{si no} \to 0 \end{cases}$$

f es un flujo en N

Demostración:
Tengo que probar que respeta las capasidades y que mantiene la flujocidad.
Respeta las capasidades:

$$\langle \forall e \in E : f(e) \leq c(e) \rangle$$

Divido en casos:

Caso $e \in E'$:

$f(e)$
= {Definición f}
$f'(e)$
≤ {f' es un flujo}
$c'(e)$
≤ {Sub-network}
$c(e)$

Caso $e \notin E'$:

$f(e)$
= {Definición f}
0
≤ {c es función de costos}
$c(e)$

Mantiene la flujocidad:

$$\left\langle \forall x \in V : \mathrm{in}_f(x) = \mathrm{out}_f(x) \right\rangle$$

Divido en casos de x:

Caso $x \in V'$

$\mathrm{in}_f(x) = \mathrm{out}_f(x)$
⇔
$$\sum_{y \in V : \overrightarrow{yx} \in E} f(\overrightarrow{yx}) = \sum_{y \in V : \overrightarrow{xy} \in E} f(\overrightarrow{xy})$$
⇔ {Casos de f}

$$\sum_{y \in V' : \overrightarrow{yx} \in E'} f(\overrightarrow{yx}) + \sum_{y \in V : \overrightarrow{yx} \in E-E'} f(\overrightarrow{yx}) = \sum_{y \in V' : \overrightarrow{xy} \in E'} f(\overrightarrow{xy}) + \sum_{y \in V : \overrightarrow{xy} \in E-E'} f(\overrightarrow{xy})$$

$\Leftrightarrow$ {Definición de f en cada caso}

$$\sum_{y \in V' : \overrightarrow{yx} \in E'} f'(\overrightarrow{yx}) + \sum_{y \in V : \overrightarrow{yx} \in E-E'} 0 = \sum_{y \in V' : \overrightarrow{xy} \in E'} f'(\overrightarrow{xy}) + \sum_{y \in V : \overrightarrow{xy} \in E-E'} 0$$

$\Leftrightarrow$ {Definición in_f}

$$\text{in}_{f'}(x) + 0 = \text{out}_{f'}(x) + 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{in}_{f'}(x) = \text{out}_{f'}(x)$$

$=$ {f' mantiene la flujocidad}

True

Caso $x \notin V'$:

$$\text{in}_f(x) = \text{out}_f(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{y \in V : \overrightarrow{yx} \in E} f(\overrightarrow{yx}) = \sum_{y \in V : \overrightarrow{xy} \in E} f(\overrightarrow{xy})$$

$\Leftrightarrow$ {$x \notin V' \Rightarrow \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{xy} \notin E'$, definición f}

$$\sum_{y \in V : \overrightarrow{yx} \in E} 0 = \sum_{y \in V : \overrightarrow{xy} \in E} 0$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = 0$$

$\Leftrightarrow$

True

Ford-Fulkerson mantiene la flujosidad (y aumenta el valor en ε):

Sea:

Sea

$N = (V, E, c)$ un network

$s, t \in V$

f un flujo de s a t

$X = x_1, x_2, \dots, x_r$ un f-camino aumentante

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E \to c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \\ \quad\quad \text{si no} \to f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \end{cases}$$

$\varepsilon \leftarrow \min\{\varepsilon_i : i \in \{0,1,\dots,r-1\}\}$

$$f'(\overrightarrow{zy}) = \begin{cases} \overrightarrow{zy} \in X & \to & f(\overrightarrow{zy}) + \varepsilon \\ \overrightarrow{yz} \in X & \to & f(\overrightarrow{zy}) - \varepsilon \\ \text{si no} & \to & f(\overrightarrow{zy}) \end{cases}$$

f' es un flujo de s a t

$v(f') = v(f) + \varepsilon$

Demostraciones:

f' es un flujo de s a t:

Voy probando algunas cosas intermedias

① $\forall \overrightarrow{zy} \in E : f'(\overrightarrow{zy}) \le c(\overrightarrow{zy})$

Demostración por casos:

Caso $\overrightarrow{zy} \in X$ (entonces $\overrightarrow{zy} = \overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ para algún i):

$f'(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$
$= \{$Definición de f' en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon$
$\leq \{\varepsilon$ es menor que todo slos $\varepsilon_i\}$
$f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon_i$
$= \{$Definición de ε_i en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$
$=$
$c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}})$

Caso $\overrightarrow{yz} \in X$:

$f'(\overrightarrow{zy})$
$= \{$Definición de f' en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{zy}) - \varepsilon$
$\leq \{$Al ser f un flujo, $\varepsilon \geq 0\}$
$f(\overrightarrow{zy})$
$\leq \{f$ es un flujo$\}$
$c(\overrightarrow{zy})$

Caso contrario:

$f'(\overrightarrow{zy})$
$= \{$Definición de f' en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{zy})$
$\leq \{f$ es un flujo$\}$
$c(\overrightarrow{zy})$

2 $\forall \overrightarrow{zy} \in E : 0 \leq f'(\overrightarrow{zy})$

Demostración por casos:

Caso $\overrightarrow{zy} \in X$

$f'(\overrightarrow{zy})$
$= \{$Definición de f' en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{zy}) + \varepsilon$
$\geq \{$Al ser f un flujo, $\varepsilon \geq 0\}$
$f(\overrightarrow{zy})$
$\geq \{f$ es un flujo$\}$
0

Caso $\overrightarrow{yz} \in X$ (y por ende $\overrightarrow{zy} = \overrightarrow{x_{i+1} x_i}$ para algún i):

$f'(\overrightarrow{x_{i+1} x_i})$
$= \{$Definición de f' en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon$
$\geq \{\varepsilon$ es menor que todo slos $\varepsilon_i\}$
$f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon_i$
$= \{$Definición ε_i en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i})$
$=$
0

Caso contrario:

$f'(\overrightarrow{zy})$
$= \{$Definición de f' en este caso$\}$
$f(\overrightarrow{zy})$
$\leq \{f$ es un flujo$\}$
0

3 $\forall z \in V - \{s, t\} : \mathrm{in}_{f'}(z) = \mathrm{out}_{f'}(z)$

Demostración trabajando sin el $\forall$:

Divido en casos:

Caso $z \notin X$:

$$\text{in}_{f'}(z) = \text{out}_{f'}(z)$$

$\Leftrightarrow$ {Definición in, out}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap V \times \{z\}} f'(e) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{z\} \times V} f'(e)$$

$\Leftrightarrow$ {$z \notin X \Rightarrow$ los elementos de $V \times \{z\}$ y $\{z\} \times V$ tampoco están en X}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap V \times \{z\}} f(e) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{z\} \times V} f(e)$$

$\Leftrightarrow$ {Definición in, out}

$$\text{in}_{f}(z) = \text{out}_{f}(z)$$

$\Leftrightarrow$ {f es flujo}

True

Caso $z \in X$:

En este caso $z = x_i$, y ademas, como $z \neq s, t$, hay lados $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ y $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ en X

Divido en casos de si son forward o backward:

Caso $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}, \overrightarrow{x_ix_{i+1}} \in E$ (ambos fordward):

$$\text{in}_{f'}(x_i) = \text{out}_{f'}(x_i)$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{e \,\in\, E \cap V \times \{x_i\}} f'(e) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times V} f'(e)$$

$\Leftrightarrow$ {Separo la suma de $\overrightarrow{x_{i+1}x_i}$ y $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ (teniendo en cuanta que ambos son fordward)}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap (V - \{x_{i-1}\}) \times \{x_i\}} f'(e) + f'(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times (V - \{x_{i+1}\})} f'(e) + f'(\overrightarrow{x_ix_{i+1}})$$

$\Leftrightarrow$ {Definición f' en los distintos casos}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap (V - \{x_{i-1}\}) \times \{x_i\}} f(e) + f(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \varepsilon = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times (V - \{x_{i+1}\})} f(e) + f(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) + \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ {Resto ε en ambos lados, y vuelvo a meter a la sumatoria}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap V \times \{x_i\}} f(e) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times V} f(e)$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{in}_{f}(x_i) = \text{out}_{f}(x_i)$$

$\Leftrightarrow$ {f es flujo}

True

Caso $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}, \overrightarrow{x_ix_{i+1}} \notin E$ (ambos backward):

$$\text{in}_{f'}(x_i) = \text{out}_{f'}(x_i)$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{e \,\in\, E \cap V \times \{x_i\}} f'(e) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times V} f'(e)$$

$\Leftrightarrow$ {Separo la suma de $\overrightarrow{x_{i+1}x_i}$ y $\overrightarrow{x_ix_{i+1}}$ (teniendo en cuanta que ambos son backward)}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap (V - \{x_{i+1}\}) \times \{x_i\}} f'(e) + f'(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times (V - \{x_{i-1}\})} f'(e) + f'(\overrightarrow{x_{i-1}x_i})$$

$\Leftrightarrow$ {Definición f' en los distintos casos}

$$\sum_{e \,\in\, E \cap (V - \{x_{i+1}\}) \times \{x_i\}} f(e) + f(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) - \varepsilon = \sum_{e \,\in\, E \cap \{x_i\} \times (V - \{x_{i-1}\})} f(e) + f(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) - \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ {Sumo ε en ambos lados, y vuelvo a meter a la sumatoria}

$$\sum_{e \in E \cap V \times \{x_i\}} f(e) = \sum_{e \in E \cap \{x_i\} \times V} f(e)$$

$\Leftrightarrow$

$\text{in}_f(x_i) = \text{out}_f(x_i)$

$\Leftrightarrow$ {f es flujo}

True

Caso $\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \in E \wedge \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \notin E$ (fordward y backward):

$\text{in}_{f'}(x_i) = \text{out}_{f'}(x_i)$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{e \in E \cap V \times \{x_i\}} f'(e) = \sum_{e \in E \cap \{x_i\} \times V} f'(e)$$

$\Leftrightarrow$ {Separo la suma de $\overrightarrow{x_{i+1}x_i}$ y $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ (teniendo en cuanta que uno es fordward y el otro backward)}

$$\sum_{e \in E \cap (V - \{x_{i-1}, x_{i+1}\}) \times \{x_i\}} f'(e) + f'(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + f'(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = \sum_{e \in E \cap \{x_i\} \times V} f'(e)$$

$\Leftrightarrow$ {Definición f' en los distintos casos}

$$\sum_{e \in E \cap (V - \{x_{i-1}, x_{i+1}\}) \times \{x_i\}} f(e) + f(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \varepsilon + f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - \varepsilon = \sum_{e \in E \cap \{x_i\} \times V} f(e)$$

$\Leftrightarrow$ {Cancelo ε y vuelvo a meter a la sumatoria}

$$\sum_{e \in E \cap V \times \{x_i\}} f(e) = \sum_{e \in E \cap \{x_i\} \times V} f(e)$$

$\Leftrightarrow$

$\text{in}_f(x_i) = \text{out}_f(x_i)$

$\Leftrightarrow$ {f es flujo}

True

El último caso es análogo a este

④ $\text{out}_{f'}(s) \geq \text{in}_{f'}(s)$

Similar a la prueba de in = out en los otros vértices

Por ①, ②, ③ y ④ y por la definición de flujo, está probado que f' es flujo

$v(f') = v(f) + \varepsilon$:

$v(f')$

$=$

$\text{out}_{f'}(s) - \text{in}_{f'}(s)$

$=$

$$\sum_{e \in E \cap \{s\} \cap V} f'(e) - \sum_{e \in E \cap V \cap \{s\}} f'(e)$$

$=$ {Salvo para sx_2, en el resto de casos, cada ves que haya un $e \in X$ en el out, también va a haber uno en el in y se van a cancelar}

$$\varepsilon + \sum_{e \in E \cap \{s\} \cap V} f(e) - \sum_{e \in E \cap V \cap \{s\}} f(e)$$

$=$

$\text{out}_f(s) - \text{in}_f(s) + \varepsilon$

$=$

$v(f) + \varepsilon$

Max Flow Min Cut:

Sea
$N = (V, E, c)$ un network
$s, t \in V$
f un flujo de s a t

Son equivalentes:

Ⓐ f es maximal
Ⓑ $\nexists X$ camino : X es un camino f-aumentante
Ⓒ $\exists S$ corte de N : $\text{cap}(s) = v(f)$

Pruebo Ⓐ ⇒ Ⓑ ⇒ Ⓒ ⇒ Ⓐ

Ⓐ⇒Ⓑ:

f es maximal ⇒ $\nexists X$ camino : X es un camino f-aumentante

Demostración suponiendo el antecedente y por contradicción
Es decir, supongo f es maximal, y supongo $\exists X$ camino : X es un camino f-aumentante

Sea:
$\varepsilon =$ "el epsilon que se calcula en For-Fulkerson"
$f' = f$ sumando ε en los lados forward y restandolo en los backward

Por teorema f' es flujo y $v(f') = v(f) + \varepsilon$
$\Rightarrow v(f') > v(f)$
Esto contradice que f sea maximal

Ⓑ ⇒ Ⓒ ⟨$\nexists X$ camino : X es un camino f-aumentante⟩ ⇒ ⟨$\exists S$ corte de N : $\text{cap}(S) = v(f)$⟩
Demostración suponiendo el antecedente:

Sea:
$S = \{x \in V :$ hay un camino f-aumentante de s a $x\}$

Pruebo que S cumple la condición del $\exists$:

$\text{cap}(S) = v(f)$
$\Leftrightarrow$ {Definición cap}
$c(S, \bar{S}) = v(f)$
$\Leftrightarrow$ {antecedente $\Rightarrow t \notin S \Rightarrow v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$}
$c(S, \bar{S}) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$
$\Leftrightarrow$

$$\sum_{e \in E \cap S \times \bar{S}} c(e) = \sum_{e \in E \cap S \times \bar{S}} f(e) - \sum_{e \in E \cap \bar{S} \times S} f(e)$$

$\Leftarrow$

$$\sum_{e \in E \cap S \times \bar{S}} c(e) = \sum_{e \in E \cap S \times \bar{S}} f(e) \wedge \sum_{e \in E \cap \bar{S} \times S} f(e) = 0$$

$\Leftarrow$

$\langle \forall e \in E \cap S \times \bar{S} : c(e) = f(e) \rangle \wedge \langle \forall e \in E \cap \bar{S} \times S : f(e) = 0 \rangle$

Pruebo cada una de estos $\forall$ por separado:

$\langle \forall e \in E \cap S \times \bar{S} : c(e) = f(e) \rangle$

Demostración por contradicción suponiendo que hay un $e \in E \cap S \times \bar{S}$ que no lo cumple:
Sea $e = \overrightarrow{xy}$

$c(\overrightarrow{xy}) \neq f(\overrightarrow{xy})$
$\Rightarrow$ {f es flujo}
$c(\overrightarrow{xy}) > f(\overrightarrow{xy})$
$\Rightarrow$ {Sea X un camino f-aumentante de s a x (existe porque $x \in S$)}
Xy es un camino f-aumentante de s a y
$\Leftrightarrow$ {Por el rango del $\forall$: $y \notin S \Rightarrow \nexists$camino f-aumentante de s a y}
False

$\langle \forall e \in E \cap \bar{S} \times S : f(e) = 0 \rangle$
Demostración por contradicción suponiendo que hay un $e \in E \cap S \times \bar{S}$ que no lo cumple:
Sea $e = \overrightarrow{xy}$

$f(\overrightarrow{xy}) \neq 0$
$\Rightarrow$ {f es flujo}
$f(\overrightarrow{xy}) > 0$
$\Rightarrow$ {Sea X un camino f-aumentante de s a x (existe porque $x \in S$) (notar que $\overrightarrow{xy}$ es un lado backward)}
Xy es un camino f-aumentante de s a y
$\Leftrightarrow$ {Por el rango del $\forall$: $y \notin S \Rightarrow \nexists$camino f-aumentante de s a y}
False

© ⇒ Ⓐ $\langle \exists S$ corte de $N : \mathrm{cap}(S) = v(f) \rangle \Rightarrow f$ es maximal
Demostración suponiendo el antecedente
Sea S el corte del $\exists$:

f es maximal
$\Leftrightarrow$
$\forall g$ flujo $: v(g) \leq v(f)$
$\Leftrightarrow$
$\forall g$ flujo $: v(g) \leq \mathrm{cap}(S)$
$\Leftrightarrow$ {Por teorema el valor de un flujo es $\leq$ que la capasidad de un corte}
True

Distancias entre FF vecinos:
Sea:
Sea:
(V, E, c) un network
$s, t \in V$
$y, z \in V$
f un flujo
$\mathrm{FF}_f = \{\overrightarrow{xz} : x, z \in V : (\overrightarrow{xz} \in E \wedge f(\overrightarrow{xz}) < c(\overrightarrow{xz})) \vee (\overrightarrow{zx} \in E \wedge f(\overrightarrow{zx}) > 0)\}$

$\overrightarrow{xz} \in \mathrm{FF}_f \Rightarrow d_f(z) \leq d_f(x) + 1$

Demostración suponiendo el antecedente y dividiendo en casos:

Caso $\nexists X : X$ es un camino f-aumentante entre s y x:

$d_f(z) \leq d_f(x) + 1$
$\Leftrightarrow$ {No hay camino de s a $x \Rightarrow d_f(x) = \infty$}
$d_f(z) \leq \infty$
$\Leftrightarrow$ {Esto es cierto porque $d_f(z) \in \mathbb{N}_{0,\infty}$}
True

Caso contrario (si existe al menos un camino):

Sea P un camino de s a x de longitud mínima:
(es decir $|P| = d_f(x)$)

$$d_f(z) \leq d_f(x) + 1$$

$\Leftarrow$ {$|P|$ es el mínimo para $d_f(x)$, busco alguno para $d_f(z)$ que cumpla el $<$

Está claro que Pz es un camino f-aumentante porque P lo es y $\overrightarrow{xz} \in \mathrm{FF}_f$

}

$$|Pz| \leq |P| + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$|P| + 1 \leq |P| + 1$$

$\Leftrightarrow$

True

Complejidad de Edmonds-Karp:

Sea:
(V, E, c) un network
$s, t \in V$
$n = |V|$
$m = |E|$

La complejidad de Edmons-Karp es $\mathrm{O}(nm^2)$

Demostración:
Sea:
f_k el flujo de la iteración k
$\mathrm{FF}_f = \left\{\overrightarrow{xz} : x, z \in V : \left(\overrightarrow{xz} \in E \land f(\overrightarrow{xz}) < c(\overrightarrow{xz})\right) \lor \left(\overrightarrow{zx} \in E \land f(\overrightarrow{zx}) > 0\right)\right\}$
$\mathrm{FFC}_k = \left\{xz : \left(\overrightarrow{xz} \notin \mathrm{FF}_{f_k} \land \overrightarrow{xz} \in \mathrm{FF}_{f_{k+1}}\right) \lor \left(\overrightarrow{zx} \notin \mathrm{FF}_{f_k} \land \overrightarrow{zx} \in \mathrm{FF}_{f_{k+1}}\right)\right\}$

Primero pruebo algunas cosas nesesarias:

Sea $x \in V$

$$\forall x \in V : \ d_{f_k}(x) \leq d_{f_{k+1}}(x)$$
$$\forall x \in V : \ b_{f_k}(x) \leq b_{f_{k+1}}(x)$$

Demostración (lo pruebo usando d, pero todos los pasos que hago valen ambien para b con cambios triviales):

$$\forall x \in V : \ d_{f_k}(x) \leq d_{f_{k+1}}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\nexists x \in V : \ d_{f_k}(x) > d_{f_{k+1}}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{x \in V : \ d_{f_k}(x) > d_{f_{k+1}}(x)\right\} = \emptyset$$

Sea:
$A = \left\{x \in V : \ d_{f_k}(x) > d_{f_{k+1}}(x)\right\}$

Demuestro que $A = \emptyset$ por contradicción (supiniendo $A \neq \emptyset$):

Sea:
$y \in A$ tal que $d_{f_{k+1}}(y) = \min\left\{d_{f_{k+1}}(x) : x \in A\right\}$
Y un camino f_{k+1}-aumentante de s a y con $|Y| = d_{f_{k+1}}(y)$

(y existe por lo que estoy suponiendo, e Y existe porque es el camino que minimiza)

Notar que $d_{f_{k+1}}(y) < \infty$ ya que:

$y \in A$

$\Rightarrow d_{f_{k+1}}(y) < d_{f_k}(y)$

$\Rightarrow \{d_{f_k}(y) \leq \infty\}$

$d_{f_{k+1}}(y) < \infty$

Notar que $y \neq s$ ya que:

$s \notin A$

$\Leftarrow d_{f_k}(s) = d_{f_{k+1}}(s)$

Sea z el elemento anterior a y en Y

Z el camino Y sin y

Pruebo varias cosas sobre y y z:

1 $d_{f_{k+1}}(y) = d_{f_{k+1}}(z) + 1$

Demostración:

$d_{f_{k+1}}(y) = d_{f_{k+1}}(z) + 1$

$\Leftarrow$ {Y es de logitud mínima a y, y por ende Z tiene que ser de logitud mínima a Z}

$|Y| = |Z| + 1$

$\Leftarrow$

$Y = Zy$

$\Leftarrow$ {Esto es cierto por como está definico Z}

True

2 $d_{f_{k+1}}(z) \geq d_{f_k}(z)$

Demostración:

Por definición de y:

y minimza $d_{f_{k+1}}$ en A

$\Rightarrow$ {z tiene menor $d_{f_{k+1}}$ que y}

$z \notin A$

$\Rightarrow$ {Definición de A}

$d_{f_{k+1}}(z) \geq d_{f_k}(z)$

3 $d_{f_k}(y) > d_{f_k}(z) + 1$

Demostración:

$d_{f_k}(y)$

$>$ {$y \in A \Rightarrow d_{f_k}(y) > d_{f_{k+1}}(y)$}

$d_{f_{k+1}}(y)$

$=$ {1}

$d_{f_{k+1}}(z) + 1$

$\geq$ {2}

$d_{f_k}(z) + 1$

4 $\overrightarrow{zy} \notin \mathrm{FF}_{f_k}$

Demostración por contradicción (o sea, supongo $\overrightarrow{zy} \in \mathrm{FF}_{f_k}$):

a $d_{f_k}(y) \leq d_{f_k}(z)$

Esto es cierto por la demostración anterior (y porque $\overrightarrow{zy} \in \mathrm{FF}_{f_k}$)

Esto contradice a 3

Por ende, queda demostrado $\overrightarrow{zy} \notin \mathrm{FF}_{f_k}$

5 $\overrightarrow{zy} \in \mathrm{FF}_{f_{k+1}}$

Ya que por definición de z, $\overrightarrow{zy}$ forma parte del camino Y

6 $d_{f_k}(y) = d_{f_k}(z) + 1$

Ya que como los caminos que se elijen la iteración i son caminos que están en FF_{f_i}, para que $\overrightarrow{zy} \notin \mathrm{FF}_{f_k} \wedge \overrightarrow{zy} \in \mathrm{FF}_{f_{k+1}}$,

en la iteración k se tiene que haber usado $\overrightarrow{zy}$ o $\overrightarrow{yz}$.
$\overrightarrow{zy}$ no se puede haber usado porque $\overrightarrow{zy} \notin \mathrm{FF}_{f_k}$, eso significa que se tiene que haber usado $\overrightarrow{yz}$
Por ende, por que se usan caminos mas cortos, la distancia mínima a y tiene que ser la distancia a z

③ y ⑥ son una contradicción, por ende y no puede existir, lo que significa que $A = \emptyset$

Queda probado $\forall x \in V : \ d_{f_k}(x) \leq d_{f_{k+1}}(x)$

Pruebo también:
Sea $l > k$

$xy \in \mathrm{FFC}_k \land xy$ se usa en el paso $l \Rightarrow d_{f_k}(t) + 2 \leq d_{f_l}(t)$

Demostración suponiendo el antecedente:
$xy \in \mathrm{FFC}_k$ significa que $\overrightarrow{xy}$ o $\overrightarrow{yx}$ se tiene que haber usado en el paso k (porque cambió el valor del flujo en ese lado)
Supongamos que en el paso k se eligió como $\overrightarrow{xy}$ (si se elije como $\overrightarrow{yx}$ todo vale intercambiando x e y):

① $d_{f_k}(x) + 1 = d_{f_k}(y)$
Esto porque al ser Edmons-Karp, el camino que se eligió es de logitud mínima

② $d_{f_l}(x) = d_{f_l}(y) + 1$
Esto porque para que xy se usé en el paso l, se tiene que usar como $\overrightarrow{yx}$, ya que después del paso k, el $\overrightarrow{xy}$ no quedó disponible. (Y al usarse, un camino mas corto pasa por $\overrightarrow{yx}$)

③ Análogamente, para b:
$b_{f_k}(y) = b_{f_k}(x) + 1$
$b_{f_l}(y) + 1 = b_{f_l}(x)$

Ahora pruebo lo que quiero probar ($d_{f_k}(t) + 2 \leq d_{f_l}(t)$):

$d_{f_l}(t)$
$=$
$d_{f_l}(x) + b_{f_l}(x)$
$= \{②\}$
$d_{f_l}(y) + 1 + b_{f_l}(x)$
$\geq$ {Teorema de las distancias ($l > k$)}
$d_{f_k}(y) + 1 + b_{f_k}(x)$
$= \{①\}$
$d_{f_k}(x) + 1 + 1 + b_{f_k}(x)$
$=$
$d_{f_k}(x) + b_{f_k}(x) + 2$
$=$
$d_{f_k}(t) + 2$

Con esto hago la prueba de la complejidad:

① $d_{f_*}(t) \in \{0,1,2,\dots,n-1,\infty\}$
Esto es cierto, ya que al haber n nodos, tiene que pasar por alguna proporción de esos nodos. Si $s = t$ entonces es 0, y si no hay ningún camino es ∞

② $|\{k : xy \in \mathrm{FFC}_k\}| \leq \frac{n}{2}$
Esto por que cuando xy entra en FFC_k, la distancia a t tiene que aumentar en 2 para que pueda volver a entrar en un FFC_l, y como por ① la distancia a t puede ser a lo sumo n valores (cuando es ∞ el algoritmo se acaba) del 0 al $n-1$, puede entrar en el FFC a lo sumo la mitad de las veces

Finalmente, como en Edmons-Karp, en cada iteración k hay al menos un lado en FFC_k (en cada iteración se satura un lado), luego, como hay m lados, y cada uno puede estar en a lo sumo $\frac{n}{2}$ FFCs, entonces, puede haber a lo sumo $m\frac{n}{2}$ iteraciones. Cada iteración en $O(m)$, ya que esa es la complejidad de encontrar el camino mas corto con BFS, la complejidad total es:

$$O\left(m\frac{n}{2}m\right) = O(nm^2)$$

Teoremas

domingo, 3 de abril de 2022 10:54

Max Flow Min Cut:

Sea

$N = (V, E, c)$ un network

$s, t \in V$

f un flujo de s a t

Son equivalentes:

f es maximal

$\nexists X$ camino : X es un camino f-aumentante

$\exists S$ corte de N : $\text{cap}(s) = v(f)$

Distancias entre FF vecinos:

Sea:

Sea:

(V, E, c) un network

$s, t \in V$

$y, z \in V$

f un flujo

z es un fFF vécino de $x \Rightarrow d_f(z) \leq d_f(x) + 1$

z es un fFF vécino de $x \Rightarrow b_f(z) + 1 \leq b_f(x)$

Algoritmo de Ford-Fulkerson:

Input:

(V, E, c) un network

$s, t \in V$

Output:

$f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Algoritmo:

$f(e) \leftarrow 0$

while hay un camino f-aumentante de s a t

$p \leftarrow$ camino f-aumentante de s a t

$x_0, x_1, \dots, x_r \leftarrow p$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E \to c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \\ \text{si no} \to f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \end{cases}$$

$\varepsilon \leftarrow \min\{\varepsilon_i : i \in \{0,1, \dots, r-1\}\}$

for $x_i x_{i+1} \in p$
  if $\overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E$
    $f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \leftarrow f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \varepsilon$
  else
    $f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \leftarrow f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) - \varepsilon$

Si Ford-Fulkerson termina devuelve un flujo maximal
Usando los caminos aumentantes mas cortos termina en $O(|V||E|^2)$ (esto se llama Edmonds-Karp)

Ford-Fulkerson mantiene la flujosidad (y aumenta el valor en ε):
Sea:
Sea
$N = (V, E, c)$ un network
$s, t \in V$
f un flujo de s a t
$X = x_1, x_2, \dots, x_r$ un f-camino aumentante

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \in E \to c(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - f(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) \\ \text{si no} \to f(\overrightarrow{x_{i+1} x_i}) \end{cases}$$

$\varepsilon \leftarrow \min\{\varepsilon_i : i \in \{0,1,\dots,r-1\}\}$

$$f'(\overrightarrow{zy}) = \begin{cases} \overrightarrow{zy} \in X & \to & f(\overrightarrow{zy}) + \varepsilon \\ \overrightarrow{yz} \in X & \to & f(\overrightarrow{zy}) - \varepsilon \\ \text{si no} & \to & f(\overrightarrow{zy}) \end{cases}$$

f' es un flujo de s a t
$v(f') = v(f) + \varepsilon$

1i)

martes, 5 de abril de 2022 11:54

I):En cada uno de los siguientes networks, (los numeros indican las capacidades), hallar un flujo maximal de s a t y un corte minimal. Luego de realizar los calculos, chequear que el valor del flujo sea igual a la capacidad del corte.

i): sa:20 se:10 sg:10 sj:10 ab:20 ah:10 bt:20 cd:30 di:10 ef:10 ek:5 ft:10 gk:10 gm:5 hj:5 hn:8 if:5 im:5 jq:10 kt:10 qb:10 mp:10 nc:10 pt:10

Flows de la iteración

	C		1º	2º	3º	4º	5º (final)
sa	20	0	20	20	20	20	20
se	10	0	0	10	10	10	10
sg	10	0	0	0	10	10	10
sj	10	0	0	0	0	5	8
ab	20	0	20	20	20	15	12
ah	10	0	0	0	0	5	8
bt	20	0	20	20	20	20	20
cd	30	0	0	0	0	5	8
di	10	0	0	0	0	5	8
ef	10	0	0	10	10	10	7
ek	5	0	0	0	0	0	3
ft	10	0	0	10	10	10	10
gk	10	0	0	0	10	10	7
gm	5	0	0	0	0	0	3
hj	5	0	0	0	0	0	0
hn	8	0	0	0	0	5	8
if	5	0	0	0	0	0	8
im	5	0	0	0	0	5	5
jq	10	0	0	0	0	5	8
kt	10	0	0	0	10	10	10
qb	10	0	0	0	0	5	8
mp	10	0	0	0	0	5	8

qb	10	0	0	0	0	5	8
mp	10	0	0	0	0	5	8
nc	10	0	0	0	0	5	8
pt	10	0	0	0	0	5	8

Primer camino aumentante

~~s~~	~~a~~	~~e~~	~~g~~	~~j~~	~~b~~	~~h~~	f	k	m	q	t
	s	s	s	s	a	a	e	e	g	j	b
	20	10	10	10	20	10	10	5	5	10	20

El camino es:

s a b t

Con capacidad de 20

Segundo camino aumentante

~~s~~	~~e~~	~~g~~	~~j~~	~~f~~	k	m	h	q	t
	s	s	s	e	e	g	j	a	f
	10	10	10	10	5	5	5	10	10

Queda el camino:

s e f t

Con capacidad de 10

Tercer camino aumentante

~~s~~	~~g~~	~~j~~	~~k~~	m	h	q	e	t
	s	s	g	g	j	j	k	k
	10	10	10	10	5	10	5	10

Queda el camino

s g k t

con capasidad de 10

Cuarto camino aumentante

~~s~~	~~j~~	~~q~~	~~b~~	~~a~~	~~h~~	~~n~~	~~c~~	~~d~~	~~i~~	~~f~~	~~m~~	~~p~~	t
	s	j	q	b^-	a	h	n	c	d	i	i	m	p
	10	10	10	10	10	8	8	8	8	5	5	5	5

Camino: s j q $\overleftarrow{b}$ a h n c d i m p t

con capasidad 5

Quinto camino aumentante

~~s~~	~~j~~	~~q~~	~~b~~	~~a~~	~~h~~	~~n~~	~~c~~	~~d~~	~~i~~	~~f~~	~~e~~	~~k~~	~~g~~	~~m~~	~~p~~	t
	s	j	q	b^-	a	h	n	c	d	i	f^-	e	k^-	g	m	p
	5	5	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Camino: s j q $\overleftarrow{b}$ a h n c d i $\overleftarrow{f}$ e $\overleftarrow{k}$ g m p t

capasidad: 3

Sexto camino aumentante:

~~s~~	~~j~~	~~q~~	~~b~~	~~d~~	~~h~~
	s	j	q	b	d
	2	2	2	2	2

No hay

Corte minimal: $S = \{s, j, q, b, d, h\}$

Calculo el valor de f:

$$
\begin{aligned}
v(f) &= out_f(s) \\
&= f(\vec{sd}) + f(\vec{se}) + f(\vec{sg}) + f(\vec{sj}) \\
&= 20 + 10 + 10 + 8 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

Calculo la capacidad de S:

$$
\begin{aligned}
cap(S) &= c(S, \bar{S}) \\
&= \sum_{\vec{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\vec{xy}) \\
&= c(\vec{se}) + c(\vec{sg}) + c(\vec{bt}) + c(\vec{hn}) \\
&= 10 + 10 + 20 + 8 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

$v(f) = cap(S)$

$\Rightarrow$ f es maximal

1ii)

viernes, 15 de abril de 2022 18:41

ii) **ii)**: sA 10 sC 10 sG 100 AB 10 AE 15 AR 100 Bt 10 CD 10 CL 100 DB 20 EF 10 EL: 7 Ft 20 GH 64 HI 63 IJ 62 JK 61 KE 60 LM 59 MN 58 NO 57 OP 56 PQ 55 Qt 54 RD 53

		Verciones	del	flujo	
	C	1º	2º	3º	4º
sA	10	10	10	10	10
sC	10	0	10	10	10
sG	100	0	0	7	17
AB	10	10	0	0	0
AE	15	0	10	10	0
AR	100	0	0	0	10
Bt	10	10	10	10	10
CD	10	0	10	10	0
CL	100	0	0	0	10
DB	20	0	0	0	0
EF	10	0	10	10	10
EL	7	0	0	7	7
Ft	20	0	10	10	10
GH	64	0	0	7	17
HI	63	0	0	7	17
IJ	62	0	0	7	17
JK	61	0	0	7	17
KE	60	0	0	7	17
LM	59	0	0	7	17
MN	58	0	0	7	17
NO	57	0	0	7	17
OP	56	0	0	7	17
PQ	55	0	0	7	17
Qt	54	0	0	7	17
RD	53	0	0	0	10

Primer camino:

~~S~~	~~A~~	~~C~~	~~G~~	~~B~~	E	R	D	L	H	T
	S	S	S	A	A	A	C	C	G	B
	10	10	100	10	10	10	10	10	64	10

Queda: S A B T

Con capasidad 10

Segundo camino:

~~S~~	~~C~~	~~G~~	~~D~~	~~L~~	~~H~~	~~B~~	~~M~~	~~I~~	~~A~~	~~N~~	~~J~~	~~E~~	~~R~~	~~O~~	~~K~~	~~F~~	L	P	T
	S	S	C	C	G	D	L	H	B⁻	M	I	A	A	N	J	E	E	O	F
	10	100	10	10	64	10	10	63	10	10	62	10	10	10	61	10	7	10	10

Queda: S C D B A E F T

Con capasidad 10

Tercer camino:

~~S~~	~~G~~	~~H~~	~~I~~	~~J~~	~~K~~	~~E~~	~~L~~	~~A~~	~~M~~	~~B~~	~~N~~	~~O~~	~~P~~	~~Q~~	T
	S	G	H	I	J	K	E	E⁻	L	A	M	N	O	P	Q
	100	64	63	62	61	60	7	10	7	10	7	7	7	7	7

Camino: S G H I J K E L M N O P Q T

Capasidad: 7

Cuarto camino:

~~S~~	~~G~~	~~H~~	~~I~~	~~J~~	~~K~~	~~E~~	~~A~~	~~B~~	~~R~~	~~D~~	~~C~~	~~L~~	~~M~~	~~N~~	~~O~~	~~P~~	~~Q~~	T
	S	G	H	I	J	K	E⁻	A	A	R	D⁻	C	L	M	N	O	P	Q
	93	57	56	55	54	53	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

S	G	H	I	J	K	E^-	A	A	R	D^-	C	L	M	N	O	P	Q
93	57	56	55	54	53	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Camino: $S\,G\,H\,I\,J\,K\,\overleftarrow{E}\,A\,R\,\overleftarrow{D}\,C\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,t$

capasidad: 10

Quinto camino:

$\cancel{S}\ \cancel{G}\ \cancel{H}\ \cancel{I}\ \cancel{J}\ \cancel{K}\ \cancel{E}$

S	G	H	I	J	K
83	47	46	45	44	43

No hay mas caminos

corte minimal: $S = \{s, G, H, I, J, K, E\}$

Calculo el valor de f:

$$v(f) = out_f(s)$$

$$= f(\overrightarrow{sA}) + f(\overrightarrow{sC}) + f(\overrightarrow{sG})$$

$$= 10 + 10 + 17$$

$$= 37$$

Calculo la capasidad del corte:

$$cap(S) = c(S, \bar{S}) \qquad S = \{s, G, H, I, J, K, E\}$$

$$= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\overrightarrow{xy})$$

$$= c(\overrightarrow{sA}) + c(\overrightarrow{sC}) + c(\overrightarrow{EF}) + c(\overrightarrow{EL})$$

$= 10 + 10 + 10 + 7$

$= 37$

$v(f) = cap(S)$

$\Rightarrow$ f es flujo maximal y S corte minimal

1iii)

viernes, 15 de abril de 2022 18:42

iii)

iii): $(s,a):5,\quad (s,c):9,\quad (s,f):5,\quad (s,j):10,\quad (a,b):5,\quad (a,i):4$
$(b,t):5,\quad (c,i):10,\quad (c,k):4,\quad (d,e):10,\quad (d,n):5,\quad (e,\ell):10$
$(f,b):4\quad (f,h):5,\quad (g,t):10,\quad (h,t):5,\quad (h,k):5,\quad (i,d):10,$
$(j,h):10,\quad (k,m):4,\quad (\ell,g):10,\quad (m,n):7,\quad (m,g):4,\quad (n,t):10$

Iteraciones del flujo

	c		1º	2º	3º	4º	5º	6º	f (final)
s a	5	~~0~~	5						5
s c	9	~~0~~			~~5~~	9			9
s f	5	~~0~~		5					5
s j	10	~~0~~					~~4~~	5	5
a b	5	~~0~~	~~5~~					4	4
a i	4	~~0~~						1	1
b t	5	~~0~~	5						5
c i	10	~~0~~			~~5~~		9		9
c k	4	~~0~~				~~4~~	0		0
d e	10	~~0~~					~~4~~	5	5
d n	5	~~0~~			5				5
e l	10	~~0~~					~~4~~	5	5
f b	4	~~0~~						1	1
f h	5	~~0~~		~~5~~				4	4
g t	10	~~0~~					~~4~~	5	5
h t	5	~~0~~		5					5
h k	5	~~0~~					4		4
i d	10	~~0~~			~~5~~		~~9~~	10	10

id	10	~~0~~	~~5~~		~~9~~	10	10
jh	10	~~0~~			~~4~~	5	5
km	4	~~0~~		4			4
lg	10	~~0~~			~~4~~	5	5
mn	7	~~0~~		4			4
mg	4	0					0
nt	10	~~0~~	~~5~~	9			9

Primer camino:

~~s~~	~~a~~	~~c~~	~~f~~	~~g~~	b	i	k	h	t
	s	s	s	s	a	a	c	f	b
	5	9	5	10	5	10	4	5	5

Camino: s a b t

capacidad: 5

Segundo camino:

~~s~~	~~c~~	~~f~~	~~g~~	~~i~~	~~k~~	~~b~~	h	d	m	a	t
	s	s	s	c	c	f	f	i	k	b	h
	9	5	10	9	4	4	5	9	4	4	5

camino: s f h t

capacidad : 5

Tercer camino:

s	c	j	i	k	h	d	m	f	e	n	g	b	l	t
	s	s	c	c	j	i	k	$\bar{h}$	d	d	m	f	e	n
	9	10	9	4	10	9	4	5	9	5	4	4	9	5

camino : s c i d n t

capasidad: 5

Cuarto camino:

s	c	j	i	k	h	d	m	f	e	n	g	t
	s	s	c	c	j	i	k	$\bar{h}$	d	m	m	n
	4	10	5	4	10	5	4	5	5	4	4	4

Camino: s c k m n t

capacidad: 4

Quinto camino:

s	j	h	k	f	c	b	i	a	d	e	l	g	t
	s	j	h	$\bar{h}$	$\bar{k}$	f	c	$\bar{b}$	i	d	e	l	g

s	a	h	$\bar{h}$	$\bar{k}$	f	c	$\bar{b}$	i	d	e	l	g
10	10	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Camino: s a h $\overleftarrow{k c}$ i d e l g t

capacidad: 5

Sexto camino:

~~s~~	~~a~~	k	~~k~~	~~f~~	~~b~~	~~a~~	~~i~~	~~d~~	~~c~~	~~e~~	~~l~~	g	t
	s	a	h	$\bar{h}$	f	$\bar{b}$	a	i	$\bar{i}$	d	e	l	g
	6	6	1	5	4	4	4	1	4	1	1	1	1

Camino: s a $\overleftarrow{h f}$ $\overleftarrow{b a}$ i d e l g t

capacidad: 1

Septimo camino:

~~s~~	~~a~~	~~h~~	~~k~~	~~f~~	~~b~~	~~a~~	~~i~~	~~c~~
	s	a	h	$\bar{h}$	f	$\bar{b}$	a	$\bar{i}$
	5	5	1	4	3	3	3	3

No hay mas caminos

Corte minimal: $S = \{s, a, h, k, f, b, a, i, c\}$

calculo el valor del flujo:

$$v(f) = out_f(s)$$

$$= f(\overrightarrow{sa}) + f(\overrightarrow{sc}) + f(\overrightarrow{sf}) + f(\overrightarrow{sj})$$

$$= 5 + 9 + 5 + 5$$

$$= 24$$

calculo la capacidad del corte:

$$cap(S) = c(S, \bar{S})$$

$$= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\overrightarrow{xy})$$

$$= c(\overrightarrow{ht}) + c(\overrightarrow{km}) + c(\overrightarrow{bt}) + c(\overrightarrow{id})$$

$$= 5 + 4 + 5 + 10$$

$$= 24$$

$$v(f) = cap(S)$$

$\Rightarrow$ f es maximal y S es minimal

1iv)

viernes, 15 de abril de 2022 18:43

iv): $sa : 20 \quad sj : 10 \quad ab : 20 \quad ah : 10 \quad bc : 20 \quad cd : 30 \quad de : 10 \quad dg : 10 \quad di : 10$
$ef : 10 \quad ek : 5 \quad ft : 10 \quad gk : 10 \quad gm : 5 \quad hj : 5 \quad hn : 4 \quad if : 5 \quad im : 5$
$j\ell : 10 \quad kt : 10 \quad \ell b : 5 \quad mt : 10 \quad nc : 10$

	c	versiones de f	f final
sa	20	~~0~~ ~~10~~ 20	20
sj	10	~~0~~ 4	4
ab	20	~~0~~ ~~10~~ ~~20~~ 16	16
ah	10	~~0~~ 4	4
bc	20	~~0~~ ~~10~~ 20	20
cd	30	~~0~~ ~~10~~ ~~20~~ 24	24
de	10	~~0~~ 10	10
dg	10	~~0~~ 10	10
di	10	~~0~~ 4	4
ef	10	~~0~~ 10	10
ek	5	0	0
ft	10	~~0~~ 10	10
gk	10	~~0~~ 10	10
gm	5	0	0
hj	5	0	0
hn	4	~~0~~ 4	4
if	5	0	0
im	5	~~0~~ 4	4
jl	10	~~0~~ 4	4
kt	10	~~0~~ 10	10
lb	5	~~0~~ 4	4
mt	10	~~0~~ 4	4
nc	10	~~0~~ 4	4

Primer camino:

~~s~~	~~a~~	~~j~~	~~b~~	~~h~~	~~l~~	~~c~~	~~n~~	~~d~~	~~e~~	~~g~~	~~i~~	f	k	m	t
	s	s	a	a	j	b	h	c	d	d	d	e	e	g	f
	20	10	20	10	10	20	4	20	10	10	10	10	10	5	10

camino: s a b c d e f t

$\varepsilon = 10$

Segundo camino:

~~s~~	~~a~~	~~j~~	~~b~~	~~h~~	~~l~~	~~c~~	~~n~~	~~d~~	~~g~~	k	m	t
	s	s	a	a	j	b	h	c	d	g	g	k
	10	10	10	10	10	10	5	10	10	10	5	10

camino: s a b c d g k t

$\varepsilon = 10$

Tercer camino

~~s~~	~~j~~	~~l~~	~~b~~	~~a~~	~~h~~	~~n~~	~~c~~	~~d~~	~~i~~	~~f~~	m	e	t
	s	j	l	b⁻	a	h	n	c	d	i	i	f⁻	m
	10	10	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4

camino: s j l b a h n c d i m t

$\varepsilon = 4$

Cuarto camino:

$\cancel{s}$ $\cancel{j}$ $\cancel{l}$ $\cancel{b}$ $\cancel{a}$ $\cancel{h}$

s	j	l	b	a
6	6	1	1	1

No hay mas caminos

Corte minimal:

$$S = \{s, j, l, b, a, h\}$$

$$v(f) = out_f(s)$$
$$= f(\overrightarrow{sa}) + f(\overrightarrow{sj})$$
$$= 20 + 4$$
$$= 24$$

$$cap(S) = c(S, \bar{S})$$
$$= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\overrightarrow{xy})$$
$$= c(bc) + c(hn)$$
$$= 20 + 4$$
$$= 24$$

$$v(f) = cap(S)$$

$v(f) = cap(S)$

$\Rightarrow f$ es un flujo maximal

1v)

viernes, 15 de abril de 2022 18:43

v): $sa:10$ $sg:10$ $si:10$ $ab:10$ $ak:5$ $bc:10$ $cd:30$ $de:20$ $dj:10$
$ef:20$ $eh:10$ $ft:20$ $gk:10$ $gm:5$ $hj:5$ $hn:4$
$ib:5$ $im:5$ $j\ell:10$ $kc:10$ $\ell f:5$ $mc:10$ $nt:10$

	c	Iteraciones d f				f final
sa	10	~~0~~	10			10
sg	10	~~0~~		10		10
si	10	~~0~~			4	4
ab	10	~~0~~	10			10
ak	5	0				0
bc	10	~~0~~	10			10
cd	30	~~0~~	~~10~~	~~20~~	24	24
de	20	~~0~~	~~10~~	20		20
dj	10	~~0~~			4	4
ef	20	~~0~~	~~10~~	~~20~~	16	16
eh	10	~~0~~			4	4
ft	20	~~0~~	~~10~~	20		20
gk	10	~~0~~		10		10
gm	5	0				0
hj	5	0				0
hn	4	~~0~~			4	4
ib	5	0				0
im	5	~~0~~			4	4
jl	10	~~0~~			4	4
kc	10	~~0~~		10		10
lf	5	~~0~~			4	4
mc	10	~~0~~			4	4
nt	10	~~0~~			4	4

Primer camino:

~~s~~	~~a~~	~~g~~	~~i~~	~~b~~	~~k~~	~~m~~	~~c~~	~~d~~	~~e~~	~~j~~	f	h	l	t
	s	s	s	a	a	g	b	c	d	d	e	e	j	f
	10	10	10	10	10	5	10	10	10	10	10	10	10	10

camino: s a b c d e f t

$\varepsilon = 10$

Segundo camino:

~~s~~	~~g~~	~~i~~	~~k~~	~~m~~	~~b~~	~~c~~	~~a~~	~~d~~	~~l~~	~~e~~	~~j~~	f	h	l	t
	s	s	g	g	i	k	b⁻	c	c⁻	d	d	e	e	j	f
	10	10	10	5	5	10	5	10	10	10	10	10	10	10	10

camino: s g k c d e f t

$\varepsilon = 10$

Tercer camino:

~~s~~	~~i~~	~~b~~	~~m~~	~~a~~	~~c~~	~~k~~	~~d~~	~~g~~	~~j~~	~~l~~	~~f~~	~~e~~	~~h~~	n	t
	s	i	i	b⁻	m	a	c	k⁻	d	j	l	f⁻	e	h	n
	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4

camino: s i m c d j l f $\overleftarrow{e}$ h n t

$\varepsilon = 4$

Cuarto camino:

~~s~~	~~i~~	~~b~~	~~m~~	~~a~~	~~c~~	~~k~~	~~d~~	~~g~~	~~j~~	~~l~~	~~f~~	~~e~~	~~h~~
	s	i	i	b^-	m	a	c	k^-	d	j	l	f^-	e
	6	5	1	5	1	5	1	5	1	1	1	1	1

No hay mas caminos

corte minimal:

$$S = \{s, i, b, m, a, c, k, d, g, j, l, f, e, h\}$$

$$v(f) = out_f(s)$$

$$= f(\overrightarrow{sa}) + f(\overrightarrow{sg}) + f(\overrightarrow{si})$$

$$= 10 + 10 + 4$$

$$= 24$$

$$S = \{s, i, b, m, a, c, k, d, g, j, l, f, e, h\}$$

$$cap(S) = c(S, \overline{S})$$

$$= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \overline{S} \, E} c(\overrightarrow{xy})$$

$$= c(\overrightarrow{ft}) + c(\overrightarrow{hn})$$

$$= 20 + 4$$

$$= 24$$

$$v(f) = cap(S)$$

$\Rightarrow$ f es maximal

$\Rightarrow$ f es maximal

1vi)

viernes, 15 de abril de 2022 18:43

vi): sa 11 sc 9 sf 5 sj 11 ab 11 ac 3 an 7 bt 11 ci 10 ck 3 de 10 eg 10 fb 5 fh 10 gt 17 ht 5
id 10 jh 10 jk 3 kb 3 nm 3 mt 3

		versiones de f						
	c	1	2	3	4	5	6	F
sa	11	~~0~~	11					11
sc	9	~~0~~			9			9
sf	5	~~0~~		5				5
sj	11	~~0~~				~~3~~	4	4
ab	11	~~0~~	~~11~~			~~8~~	7	
ac	3	~~0~~					1	
an	7	~~0~~				3		
bt	11	~~0~~	11					
ci	10	~~0~~			~~9~~		10	
ck	3	0						
de	10	~~0~~			~~9~~		10	
eg	10	~~0~~			~~9~~		10	
fb	5	~~0~~					1	
fh	10	~~0~~		~~5~~			4	
gt	17	~~0~~			~~9~~		10	
ht	5	~~0~~		5				
id	10	~~0~~			~~9~~		1	
jh	10	~~0~~					1	
jk	3	~~0~~				3		
kb	3	~~0~~				3		
nm	3	~~0~~				3		
[illegible]	3	~~0~~				3		

nm	3	~~0~~	3
mt	3	~~0~~	3

1º camino:

~~s~~	~~a~~	~~c~~	~~f~~	~~g~~	b	n	i	k	h	t
	s	s	s	s	a	a	c	c	s	b
	11	9	5	11	11	7	9	3	5	11

camino: s a b t

$\varepsilon = 11$

2º camino:

~~s~~	~~c~~	~~f~~	~~g~~	~~i~~	~~k~~	~~b~~	h	d	a	t
	s	s	s	c	c	f	f	i	b	h
	9	5	11	9	3	5	5	9	5	5

camino: s f h t

$\varepsilon = 5$

3º camino:

~~s~~	~~c~~	~~g~~	~~i~~	~~k~~	~~h~~	~~d~~	~~b~~	~~f~~	~~e~~	~~a~~	g	n	t
	s	s	c	c	g	i	k	h	d	b	e	a	g
	9	11	9	3	10	9	3	5	9	3	9	3	9

camino: s c i d e g t

$\varepsilon = 9$

4º camino:

~~s~~	~~j~~	~~h~~	~~k~~	~~f~~	~~b~~	~~a~~	~~c~~	~~n~~	~~i~~	m	d	t
	s	j	j	h^-	k	b^-	a	a	c	n	i	m
	11	10	3	5	3	3	3	3	2	3	1	3

camino: s j k $\overleftarrow{b}$ a n m t

$\varepsilon = 3$

5º camino:

~~s~~	~~j~~	~~h~~	~~f~~	~~b~~	~~a~~	~~k~~	~~c~~	~~n~~	~~J~~	~~i~~	~~d~~	~~e~~	g	t
	s	j	h^-	f	b	b^-	a	a	k^-	c	i	d	e	g
	8	8	5	5	5	3	3	5	3	3	1	1	1	1

camino: s j $\overleftarrow{h}$ f $\overleftarrow{b}$ a c i d e g t

$\varepsilon = 1$

6º camino:

~~s~~	~~j~~	~~h~~	~~f~~	~~b~~	~~a~~	~~k~~	~~c~~	~~n~~
	s	j	h^-	f	b^-	b^-	a	a

7 3 3 3 3 3 2 3

No hay mas caminos

corte minimal

$S = \{s, j, h, f, b, a, k, c, n\}$

$v(f) = out_f(s)$

$= f(\overrightarrow{sa}) + f(\overrightarrow{sc}) + f(\overrightarrow{sf}) + f(\overrightarrow{sj})$

$= 11 + 9 + 5 + 4$

$= 29$

$cap(S) = c(S, \bar{S})$

$= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\overrightarrow{xy})$

$= c(\overrightarrow{ht}) + c(\overrightarrow{bt}) + c(\overrightarrow{ci}) + c(\overrightarrow{nm})$

$= 5 + 11 + 10 + 3$

$= 29$

$v(f) = cap(S)$

$\Rightarrow f$ es maximal

1vii)

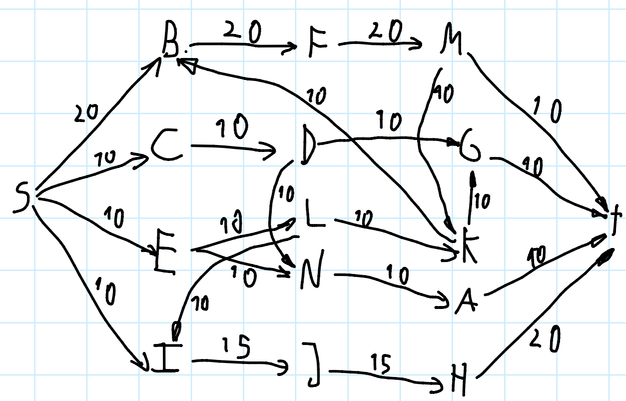
sábado, 16 de abril de 2022 12:09

vii): sB: 20 sC: 10 sE: 10 sI:10 At:10 BF: 20 CD:10 DG:10 DN: 10 EL: 10 EN: 10 FM: 20 Gt: 10 Ht: 20 IJ: 15 JH: 15 KB: 10 KG: 10 LI: 10 LK: 10 Mt: 10 MK:10 NA: 10

Iteraciones de f

	c		1º	2º	3º	4º	5º
sB	20	~~0~~	~~10~~				15
sC	10	~~0~~		10			
sE	10	~~0~~			10		
sI	10	~~0~~				10	
At	10	~~0~~			10		
BF	20	~~0~~	~~10~~				15
CD	10	~~0~~		10			
DG	10	~~0~~		~~10~~			5
DN	10	~~0~~					5
EL	10	0					5
EN	10	~~0~~			~~10~~		5
FM	20	~~0~~	~~10~~				15
Gt	10	~~0~~		10			
Ht	20	~~0~~				~~10~~	15
IJ	15	~~0~~				~~10~~	15
JH	15	~~0~~				~~10~~	15
KB	10	0					
KG	10						5
LI	10	~~0~~					5
LK	10	0					
Mt	10	~~0~~	10				
MK	10	0					5
NA	10	~~0~~			10		

s B F M K



1º camino:

~~S~~	~~B~~	~~C~~	~~E~~	~~I~~	~~F~~	~~D~~	~~L~~	~~N~~	~~J~~	M	G	I	K	A	H	t
	S	S	S	S	B	C	E	E	I	F	D	L	L	N	J	M
	20	10	10	10	20	10	10	10	10	20	10	10	10	10	10	10

camino: sBFMt
$\varepsilon = 10$

2º camino:

~~S~~	~~B~~	~~C~~	~~E~~	~~I~~	~~F~~	~~D~~	~~L~~	~~N~~	~~J~~	~~M~~	G	I	K	A	H	t
	S	S	S	S	B	C	E	E	I	F	D	L	L	N	J	G
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

camino: sCDGt
$\varepsilon = 10$

3º camino:

~~S~~	~~B~~	~~E~~	~~I~~	~~F~~	~~L~~	~~N~~	~~J~~	~~M~~	~~K~~	A	H	G	t
	S	S	S	B	E	E	I	F	L	N	J	K	A
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

camino: sENAt
$\varepsilon = 10$

4º camino:

~~S~~	~~B~~	~~I~~	~~F~~	~~J~~	~~M~~	H	K	t
	S	S	B	I	F	J	M	H
	10	10	10	10	10	10	10	10

camino: sIJHt
$\varepsilon = 10$

5º camino:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cancel{S}\cancel{B} & \cancel{F} & \cancel{M} & \cancel{K} & \cancel{G} & \cancel{D} & \cancel{N} & \cancel{C} & \cancel{E} & \cancel{L} & \cancel{I} & \cancel{J} & H & t \\
S\ B & F & M & K & G^- & D & D^- & N^- & E & L & I & J & H & \\
10\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 5 & 5 & 5 &
\end{array}
$$

camino: $sBFMK\overleftarrow{G}DN\overleftarrow{E}LIJHt$

$\varepsilon = 5$

6º camino:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\cancel{S} & \cancel{B} & \cancel{F} & \cancel{M} & \cancel{K} & \cancel{G} & \cancel{D} & \cancel{N} & \cancel{C} & \cancel{E} & \cancel{L} & \cancel{I} \\
S & B & F & M & K & G^- & D & D^- & N^- & E & L & \\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 &
\end{array}
$$

corte minimal: $S = \{s, B, F, M, K, G, D, N, C, E, L, I\}$

$$
\begin{aligned}
cap(S) &= c(S, \bar{S}) \\
&= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\overrightarrow{xy}) \\
&= c(\overrightarrow{Mt}) + c(\overrightarrow{Gt}) + c(\overrightarrow{NA}) + c(\overrightarrow{IJ}) \\
&= 10 + 10 + 10 + 15 \\
&= 45
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(f) &= out_f(s) \\
&= f(\overrightarrow{sB}) + f(\overrightarrow{sC}) + f(\overrightarrow{sE}) + f(\overrightarrow{sI}) \\
&= 15 + 10 + 10 + 10
\end{aligned}
$$

$= 45$

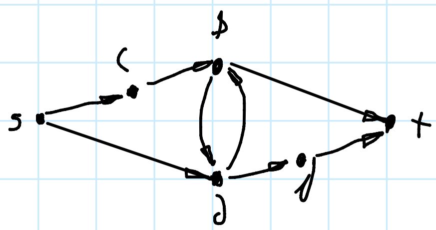
$v(f) = cap(S)$

$\Rightarrow$ f es maximal

2)

miércoles, 6 de abril de 2022 17:45

II):Dar un network de ejemplo en el cual existan lados (p, q) y (q, p) simultaneamente y tal que al correr Edmonds-Karp haciendo la busqueda en $\Gamma^+(x)$ primero y $\Gamma^-(x)$ despues se obtenga un flujo maximal distinto que hacerlo al reves. (obvio que el valor del flujo maximal sera el mismo).



s a	1
s c	1
a b	1
a d	1
b a	1
b t	1
c b	1
d t	1

Buscando en Γ^+ primero

	c	iteraciones de f		
s a	1	$\cancel{0}$	1	
s c	1	$\cancel{0}$		1
a b	1	$\cancel{0}$	1	
a d	1	$\cancel{0}$		1
b a	1	$\cancel{0}$		1
b t	1	$\cancel{0}$	1	

[illegible]	1	~~0~~		1
b t	1	~~0~~	1	
c b	1	~~0~~		1
d t	1	~~0~~		1

Primer camino.

~~s~~	~~a~~	~~c~~	b	d	t
	s	s	a	a	b
	1	1	1	1	1

Camino: s a b t

$\varepsilon = 1$

Segundo camino:

~~s~~	~~c~~	~~b~~	~~a~~	d	t
	s	c	b	a	d
	1	1	1	1	1

Camino: s c b a d t

$\varepsilon = 1$

Tercer camino:

~~s~~

No hay mas caminos

$v(f) = out_f(s)$

$= f(\vec{sa}) + f(\vec{sc})$

$= 1 + 1$

$= 2$

$cap(S) = c(S, \bar{S})$

$= \sum_{\vec{xy} \in S \times \bar{S} \cap E} c(\vec{xy})$

$= c(\vec{sa}) + c(\vec{sc})$

$= 1 + 1$

$= 2$

$v(f) = cap(S)$

$\Rightarrow$ f es maximal

Buscando en Γ^- primero

c iteraciones de f

sa	1	$\cancel{0}$	1	
sc	1	$\cancel{0}$		1
ab	1	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	0

[illegible]	1	$\cancel{0}$		[illegible]
a b	1	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	0
a d	1	$\cancel{0}$		1
b a	1	0		
b t	1	$\cancel{0}$	1	
c b	1	$\cancel{0}$		1
d t	1	$\cancel{0}$		2

Primer camino.

$\cancel{s}$	$\cancel{a}$	$\cancel{c}$	b	d	t
	s	s	a	a	b
	1	1	1	1	1

camino: s a b t

$\varepsilon = 1$

Segundo camino:

$\cancel{s}$	$\cancel{c}$	$\cancel{b}$	$\cancel{a}$	d	t
	s	c	$\bar{b}$	a	d
	1	1	1	1	1

camino: s c $\overleftarrow{b}$ a d t

$\varepsilon = 1$

Tercer camino:

$\cancel{s}$

No hay mas caminos

$$v(f) = out_f(s)$$
$$= f(\overrightarrow{sa}) + f(\overrightarrow{sc})$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

$$cap(S) = c(S, \overline{S})$$
$$= \sum_{\overrightarrow{xy} \in S \times \overline{S} \cap E} c(\overrightarrow{xy})$$
$$= c(\overrightarrow{sa}) + c(\overrightarrow{sc})$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

$$v(f) = cap(S)$$

$\Rightarrow$ f es maximal

3)

viernes, 8 de abril de 2022 7:41

III):Suponga que tiene un grafo (no dirigido) que representa la red telefonica de un pais. Cada lado tiene una capacidad asociada, que es la mayor cantidad de llamadas que ese lado puede soportar, en cualquier direccion. (Asi, por ejemplo, si el lado pq tiene capacidad 10, puede llevar 10 llamadas de p a q, o 3 de p a q y 7 de q a xp, etc, pero no pueden ir 5 de p a q y 6 de q a p). Se desea calcular cual es el número maximo de llamadas que el network puede acarrear entre las localidades s y t. Elabore un algoritmo para resolver este caso. (Ayuda: ejercicio anterior)

Input:
G un grafo
$G = (V, E)$
$c : E \to \mathbb{R}_{>0}$
$s, t \in G$

Transformación en un network:
$N = (V, E', c')$
$E' = \{\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yx} : \{x, y\} \in E\}$
$c' : E' \to \mathbb{R}_{>0}$
$c'(\overrightarrow{xy}) = c(\{x, y\})$

Lo resuelvo con un Edmon-Karp en el que en el BFS elijo primero los lados backwards y después los forwards, obteniendo un $f' : E' \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Esto garantiza que $f'(\overrightarrow{xy}) = 0 \vee f'(\overrightarrow{yx}) = 0$, ya que cuando se está aplicando Edmon-Karp, si $f'(\overrightarrow{xy}) > 0$ y se tiene que ir de y a x, se agrega $\overrightarrow{xy}$ como lado backwards en lugar de $\overrightarrow{yx}$, y por ende se le resta a $f'(\overrightarrow{xy})$. Solo si $f'(\overrightarrow{xy}) = 0$ se le puede sumar a $f'(\overrightarrow{yx})$
Luego, a cada $\{x, y\} \in E$ le asigno $f(\{x, y\}) = \max\{f'(\overrightarrow{xy}), f'(\overrightarrow{yx})\}$

4) (Hay formas mucho mejores de hacerlo)

viernes, 8 de abril de 2022 7:42

IV):Dado un network N con vertices s, t, definir:

$A = \{a : \exists f$ flujo en N de s a t tal que $a = v(f)\}$.

Probar que A es un intervalo cerrado.

Sea:
N un network
$N = (V, E, c)$
$s, t \in N$

$A = \{a \in \mathbb{R} : \langle \exists f \text{ flujo en } N \text{ de } s \text{ a } t : a = v(f) \rangle\}$

A es un intervalo cerrado

Demostración:

A es un intervalo cerrado

$\Leftarrow$

$A = [0, v(\text{maxflow})]$

$\Leftrightarrow$

$A \subseteq [0, v(\text{maxflow})] \wedge A \supseteq [0, v(\text{maxflow})]$

$\Leftrightarrow \{A \subseteq [0, v(\text{maxflow})]$ es cierto porque todos los flujos tienen valor entre 0 y $v(\text{maxflow})\}$

$[0, v(\text{maxflow})] \subseteq \text{A}$

$\Leftrightarrow$

$\langle \forall a \in [0, v(\text{maxflow})] : a \in A \rangle$

$\Leftrightarrow$ {Definición A}

$\langle \forall a \in [0, v(\text{maxflow})] : \langle \exists f \text{ flujo en } N \text{ de } s \text{ a } t : a = v(f) \rangle \rangle$

Trabajo sin el $\forall$:

$\langle \exists f \text{ flujo en } N \text{ de } s \text{ a } t : a = v(f) \rangle$

Sea:

$F : (\mathbb{R}_{\geq 0}, \text{flujos en } N \text{ de } s \text{ a } t) \to \text{flujos en } N \text{ de } s \text{ a } t$

$$F(b, g) = \begin{cases} b = 0 & \to & g \\ \text{si no} & \to & F(b - \min\{b, \varepsilon\}, g') \end{cases}$$

donde

$x_0 x_1 \ldots x_r =$ un camino de g-valor no nulo en N

ε el valor de $x_0 x_1 \ldots x_r$

$g' : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$g'(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = g(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) - \min\{b, \varepsilon\}$

$g'(\overrightarrow{yz}) = g(\overrightarrow{yz})$

Un f es $F(v(\text{maxflow}) - a, \text{maxflow})$ (para cualquier maxflow)

Para demostrarlo tengo que demostrar que $F(v(\text{maxflow}) - a, \text{maxflow})$ existe (es decir, que la recursión termina), y que $v(F(v(\text{maxflow}) - a, \text{maxflow})) = a$.

La recursión termina:

Notar que:

$x_0 x_1 \ldots x_r$ existe siempre que que $v(g) > 0$

$b \in [0, v(g)] \Rightarrow b - \min\{b, \varepsilon\} \in [0, v(g)]$ ya que $\min\{b, \varepsilon\} \in [0, b]$

Esto implica que si en la llamada inicial $b \in [0, v(g)]$, la recursión siempre se va acercando a 0, por lo tanto, en algún momento llega a 0 (no puede pasar que se acerque a 0 sin llegar porque el network es finito)

La llamada inicial es con $v(f) - a$ que si está en $[0, v(f)]$ porque $a \in [0, v(f)]$

$v\big(F(v(f) - a, \text{maxflow})\big) = a$:

Notar que $v(g') = v(g) - \min\{b, \varepsilon\}$, por lo que en cada llamada recursiva b disminulle lo mismo que $v(g)$, y por ende cuando b llega a 0, $v(g)$ va a haber disminuido tanto como lo que valia el b original.

Para el caso de $v\big(F(v(\text{maxflow}) - a, \text{maxflow})\big)$ entonces va a quedar en $v(\text{maxflow}) - (v(\text{maxflow}) - a) = a$