Definiciones:

martes, 17 de mayo de 2022 20:02

Definición de matching:

Sean:

G, M grafos

$(V, E) = G$

$(W, F) = M$

M es un matching de G

$\Leftrightarrow M$ es subgrafo de $G \wedge \forall x \in W : d_M(x) = 1$

M es un matching maximal de G

$\Leftrightarrow M$ es un matching de $G \wedge \nexists N = (W', F')$ matching de $G : |W'| > |V'|$

M es un matching perfecto de G

$\Leftrightarrow M$ es un matching de $G \wedge V = W$

Sea:

G un grafo bipartito con componentes X, Y

M un subgrafo de G

$(V, E) = G$

$(W, F) = M$

M es un matching completo sobre X de G

$\Leftrightarrow M$ es un matching de $G \wedge X \subseteq W$

Teoremas

viernes, 20 de mayo de 2022 14:22

Matchings en grafos bipartitos:
Sea:
G un grafo bipartito con componentes X, Y
M un grafo

$$G \text{ tiene un matching perfecto} \Rightarrow |X| = |Y|$$
$$G \text{ tiene un matching completo sobre } X \Rightarrow |X| \leq |Y|$$
$$G \text{ tiene un matching perfecto} \Leftrightarrow \forall S \subseteq X : |S| \leq |\Gamma(S)|$$
$$|X| = |Y| \Rightarrow \forall N \text{ matching completo sobre } X : N \text{ es un matching perfecto de } G$$

Teorema de Hall:
Sea:
G un grafo bipartito con componentes X, Y

$$G \text{ tiene un matching completo sobre } X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X : |S| \leq |\Gamma(S)|$$

Teorema de Kőnig:
Sea G un grafo bipartiro regular no vacío

$$G \text{ tiene un matching perfecto}$$

Matching como flujo maximal:
Sea:
G un grafo bipartito con componentes X, Y con $|X| = |Y|$
$G = (X \cup Y, E)$

Sea:
N un network
$N = (V, E', c)$
$V = \{s, t\} \cup X \cup Y$
$E' = \{\overrightarrow{xy} \in X \times Y : xy \in E\} \cup \{\overrightarrow{sx} : x \in X\} \cup \left\{\overrightarrow{yt} : y \in Y\right\}$
$c : E' \to \mathbb{R}$
$c(e) = 1$

f un flujo maximal entero de s a t en N
$M = (X \cup Y, \{xy \in E : f(\overrightarrow{xy}) = 1\})$

M es un matching perfecto de G

Demostraciones:

viernes, 20 de mayo de 2022 14:46

Teorema de Hall:

Sea:
G un grafo bipartito con componentes X, Y

$$G \text{ tiene un matching completo sobre } X \Leftrightarrow \forall S \subseteq X : |S| \leq |\Gamma(S)|$$

Demostración:

Ida ($\Rightarrow$):

Es trivialmente cierto, ya que si no se cumpliera el $\forall$, entonces habría un $S \subseteq X$ para el cual no alzanzarían los elementos de Y

Vuelta ($\Leftarrow$):

Pruebo la contra-reciproca:
G no tiene un matching perefcto sobre $X \Rightarrow \exists S \subseteq X : |S| > |\Gamma(S)|$

Como G no tiene un matching perfecto, al aplicar Edmons-Karp en el network asociado, se obtiene un C corte mínimal

Sean:
$S = C \cap X$
$T = C \cap Y$
O sea, S son los elementos de X que Edmons-Karp agrega, T los de Y que agrega

S_0 los elementos de X que no tienen matching al principio de la iteración final de Edmons-Karp que acaba devolviendo C
$S_1, S_2, \dots, S_k$ los conjuntos de los nuevos elementos de X que va agregando cada paso (dentro de la iteración final)
$T_1, T_2, \dots, T_k$ los conjuntos de los nuevos elementos de Y que va agregando cada paso (dentro de la iteración final)

Entonces por como funciona el algoritmo:
$S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$
$T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$

Ademas $|S_i| = |T_i|$ porque cada X puede estar recibiendo a 0 o 1 elementos de Y, si para alguno de los S_i fuera 0, se podría llegar a t, pero eso no pasa, porque estamos en la iteración que devuelve el C

Entonces:

$|\Gamma(S)|$
$= \{$El algoritmo no encontró mas elementos de Y ademas de los de $T\}$
$|T|$
$=$
$|T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k|$
$= \{$Los T_i son disjuntos$\}$
$|T_1| + |T_2| + \cdots + |T_k|$
$=$
$|S_1| + |S_2| + \cdots + |S_k|$
$= \{$Los S_i son disjuntos$\}$
$|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k|$
$=$
$|S - S_0|$
$< \{S_0 \neq \emptyset$ porque si no ya se hubiera encontrado un matching perfecto$\}$
$|S|$

Queda probado que S satisface la condición del $\exists$

Teorema de Kőnig:
Sea G un grafo bipartiro regular no vacío

G tiene un matching perfecto

Demostración:
Sea:
$(V, E) = G$
X e Y las partes del bipartitismo de V

Para $S \subseteq V$: $E_S = \{zw \in E : z \in S\}$

Voy probando varias cosas:

1 $S \subseteq X \vee S \subseteq Y \Rightarrow |E_S| = \Delta_G |S|$
Demostración suponiendo el antecedente:

$|E_S|$
$=$
$|\{zw \in E : z \in S\}|$
$= \{$Como $S \subseteq X \vee S \subseteq Y$, los zw son únicos para cada $z\}$

$$\sum_{z \in S} |\{zw \in E\}|$$
$=$
$$\sum_{z \in S} |\Gamma(z)|$$
$= \{G \text{ es regular}\}$
$$\Delta_G |S|$$

② $|X| = |Y|$

Demostración:

Notar que $E_X = E$ y $E_Y = E$, trabajo con eso:

$$E_X = E_Y$$
$\Rightarrow$
$$|E_X| = |E_Y|$$
$\Rightarrow$ {①}
$$\Delta_G |X| = \Delta_G |Y|$$
$\Rightarrow$ {$\Delta_G \neq 0$ por que el grafo es no vacío}
$$|X| = |Y|$$

③ $S \subseteq X \vee S \subseteq Y \Rightarrow |S| \leq |\Gamma(S)|$

Demostración:

$$|S| \leq |\Gamma(S)|$$
$\Leftrightarrow$ {$\Delta_G \geq 1$ por que el grafo es no vacío}
$$|S|\Delta_G \leq |\Gamma(S)|\Delta_G$$
$\Leftrightarrow$ {①}
$$|E_S| \leq \left|E_{\Gamma(S)}\right|$$
$\Leftarrow$
$$E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$$
$\Leftrightarrow$ {Esto es trivialmente cierto}

Por ③, se cumple la condición de Hall para cualquier subconjunto tanto de X como de Y, por lo tanto tiene que habe un matching completo sobre X y sobre Y, y por ende tiene que haber un matching perfecto

1)

viernes, 20 de mayo de 2022 14:49

I): Sea G el grafo dado por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	e	d	d	a	a
i	c	d	e	f	g	f	i	h	h
j			g				j		
			h						

Probar que G es bipartito. ¿ Existe un matching perfecto en G?

G es bipartiro divido en:
$\{a, c, e, g, h\}, \{b, d, f, j, i\}$

	b	d	f	j	i
a	1			1	1
c	1	1			
e		1	1		
g		1	1		
h		1		1	1

Existe el matching perfecto con lados:
$\{aj, cb, ed, gf, hi\}$

2a) (sin algoritmo)

viernes, 20 de mayo de 2022 17:42

		1	2	3	4	5	6	7
	A	0	1	1	0	0	0	1
	B	0	1	0	1	0	1	1
	C	0	1	0	0	0	0	0
$a)$	D	1	1	0	0	0	1	0
	E	1	1	0	0	1	1	0
	F	0	0	0	1	0	0	0
	G	0	1	0	0	0	1	0

	1	2	3	4	5	6	7
A		1	1				1
B		1		1		1	1
C		1					
D	1	1				1	
E	1	1			1	1	
F				1			
G		1				1	

Primer matching:

	1	2	3	4	5	6	7	
A		1	1				1	2
B		1		1		1	1	4
C		1						s
D	1	1				1		
E	1	1			1	1		
F				1				s
G		1				1		
		C		F				

	1	2	3	4	5	6	7	
A	0	1	1	0	0	0	1	
B	0	1	0	1	0	1	1	
C	0	1	0	0	0	0	0	2
D	1	1	0	0	0	1	0	
E	1	1	0	0	1	1	0	
F	0	0	0	1	0	0	0	
G	0	1	0	0	0	1	0	
		C						
		A					A	

	1	2	3	4	5	6	7	
A	0	1	1	0	0	0	1	
B	0	1	0	1	0	1	1	~~2~~ ~~6~~ 7
C	0	1	0	0	0	0	0	
D	1	1	0	0	0	1	0	
E	1	1	0	0	1	1	0	
F	0	0	0	1	0	0	0	4
G	0	1	0	0	0	1	0	~~2~~
		~~B~~		F		~~B~~ B		
		~~G~~						

1: C no tiene a donde ir

2: C no tiene a donde ir

	1	2	3	4	5	6	7
A	0	1	1	0	0	0	1
B	0	1	0	1	0	1	1
C	0	1	0	0	0	0	0
D	1	1	0	0	0	1	0
E	1	1	0	0	1	1	0
F	0	0	0	1	0	0	0
G	0	1	0	0	0	1	0

2b) (sin algoritmo)

lunes, 23 de mayo de 2022 12:56

b)

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	0	1	1	0	0	0
B	1	0	0	1	0	0	1	0
C	1	0	1	0	1	1	0	0
D	0	1	0	0	0	0	0	0
E	0	1	0	0	1	0	0	1
F	1	0	0	0	0	1	1	0
G	1	0	1	0	0	0	1	0
H	1	1	0	1	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A	1	1		1	1				~~2~~$_1$, 4
B	1			1			1		7
C	1		1		1	1			5
D		1							
E		1			1			1	8
F	1					1	1		
G	1		1				1		3
H	1	1		1					1
	H	H		H					
		~~A~~$_1$		A	A				
	~~B~~						B		
	~~G~~		G						
	~~C~~				C	C			
		~~E~~						E	

1: D no tiene donde ir

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1		1	1			
B	1			1			1	
C	1		1		1	1		
D		1						
E		1			1			1

D		1						
E		1			1			1
F	1					1	1	
G	1		1				1	
H	1	1		1				

2c)

lunes, 23 de mayo de 2022 14:40

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	1	1	0	1	0	1
B	1	1	1	0	1	0	0	1
C	0	1	0	1	0	0	1	1
D	1	1	1	1	1	1	1	0
E	1	0	0	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1	0	0	1
G	1	1	1	1	0	1	0	1
H	1	0	0	0	1	1	0	0

Primera iteración:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A			1	1		1		1	
B	~~1~~	1	1		1			1	~~1~~ $_H$
C		~~1~~		1			1	1	~~2~~ $_B$
D	1	1	1	1	1	1	1		
E	1			1	1	1	1	1	
F	1	1	1	1	1			1	
G	1	1	1	1		1		1	
H	1				1	1			~~*~~
	~~H~~	~~B_1~~	B_1	C_2	H	H	C_2	B_1	

Camino: H 1 B 2 C 7

2º iteración

	1	2	3	4	5	6	7	8
A			1	1		1		1
B	1	1	1		1			1
C		1		1			1	1
D	1	1	1	1	1	1	1	
E	1			1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1			1
G	1	1	1	1		1		1
H	1				1	1		

El matching ya es perfecto

2d)

miércoles, 25 de mayo de 2022 9:22

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	1	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	0	1	1	1
C	1	0	0	0	1	0	0	1
D	0	0	0	0	0	0	0	1
E	1	1	1	0	0	0	0	0
F	0	1	1	0	0	1	1	0
G	0	0	0	1	1	0	0	0
H	0	1	1	0	0	0	1	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A		~~1~~	1		1		1		2_H
B						1	1	1	
C	1				1			1	
D								1	8_H
E	1	1	1						3_H
F		1	1			1	1		7_H
G				1	1				
H		1	1				1	1	~~*~~
		~~H~~	~~H~~		A_2		~~H~~	~~H~~	

camino: H 2 A 5