

Guia 6 de lenguajes: Minimizacion y funciones Σ -recursivas

November 3, 2024

Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los exámenes.

Tal como fue explicado en el comienzo de la Guia 5, para obtener la clase de las funciones Σ -recursivas debemos agregar un nuevo constructor a los ya definidos de composicion y recursion primitiva, a saber el constructor de *minimizacion*.

Minimizacion de variable numerica

Sea Σ un alfabeto finito y sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado. Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $t \in \omega$ tal que $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$, usaremos $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para denotar al menor de tales t 's. Notese que la expresion $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$ -uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un t tal que se da $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no estara definida cuando para cada $t \in \omega$ se de que $(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no pertenece a D_P o $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no depende de la variable t . Por ejemplo, las expresiones $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ y $\min_i P(i, \vec{x}, \vec{\alpha})$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$ -uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

Notese que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) &= \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)} \end{aligned}$$

Diremos que $M(P)$ se obtiene por *minimizacion de variable numerica* a partir de P .

Veamos un par de ejemplos:

(E1) Tomemos $P = \lambda t x_1 [t^2 = x_1]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega) P(t, x_1)\} \\ &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega) t^2 = x_1\} \end{aligned}$$

Es decir el dominio de $M(P)$ es el conjunto de los cuadrados. Ademas para cada $x_1 \in D_{M(P)}$ tenemos que

$$M(P)(x_1) = \min_t P(t, x_1) = \min_t (t^2 = x_1)$$

por lo cual $M(P)(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \in D_{M(P)}$.

(E2) Recordemos que dados $x_1, x_2 \in \omega$, con x_2 no nulo, el *cociente de dividir* x_1 por x_2 se define como el maximo elemento del conjunto $\{t \in \omega : t.x_2 \leq x_1\}$. Sea

$$\begin{aligned} Q : \omega \times \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \text{cociente de dividir } x_1 \text{ por } x_2 \end{aligned}$$

Sea $P = \lambda t x_1 x_2 [x_1 < t.x_2]$. Notar que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(x_1, x_2) \in \omega^2 : (\exists t \in \omega) P(t, x_1, x_2) = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) : (\exists t \in \omega) x_1 < t.x_2\} \\ &= \omega \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ademas si $(x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$, es facil de probar que

$$\min_t x_1 < t.x_2 = Q(x_1, x_2) + 1$$

por lo que $M(P) = \text{Suc} \circ Q$. Si quisieramos encontrar un predicado P' tal que $M(P') = Q$, entonces podemos tomar $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 < (t+1).x_2]$ y con un poco de concentracion nos daremos cuenta que $M(P') = Q$. De todas maneras hay una forma mas facil de hacerlo y es tomando P' de tal forma que para cada $(x_1, x_2) \in D_Q$ se de que

$$Q(x_1, x_2) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P'(t, x_1, x_2)$$

Por ejemplo se puede tomar $P' = \lambda t x_1 x_2 [x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$ que dicho sea de paso es justo la definicion de cociente dada en la escuela primaria. Dejamos al lector corroborar que $M(P') = Q$, para este ultimo P' .

REGLA U: Si tenemos una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y buscamos un predicado P tal que $f = M(P)$ muchas veces es util tratar de diseñar P de manera que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$ se de que

$$f(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Ejercicio 1: Sea $P = \lambda tx_1[x_1 < t]$. Describa la funcion $M(P)$

Ejercicio 2: Sea $P = \lambda tx_1x_2[x_2 + t = x_1]$. Describa la funcion $M(P)$

Ejercicio 3: Sea $\Sigma = \{ @, !, \blacksquare \}$. Sea $P = \lambda t\alpha_1[[\alpha_1]_t = \blacksquare]$. Describa la funcion $M(P)$

Ejercicio 4: Aplique la REGLA U para encontrar un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1[\text{parte entera de } \sqrt{x_1}]$.

Ejercicio 5: Encuentre un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1x_2[x_1 \dot{-} x_2]$. (Aqui es natural hacerlo sin la idea de la REGLA U.)

Ejercicio 6: Elija V o F para el siguiente enunciado. Justifique.

- Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^2 \rightarrow \omega$ es un predicado Σ -recursivo, entonces el siguiente procedimiento (con dato de entrada $(x, y) \in \omega^2$) computa la funcion $M(P)$.

Etapa 1: Hacer $T = 0$ e ir a Etapa 2

Etapa 2: Si $(T, x, y) \in D_P$ y $P(T, x, y) = 1$, entonces ir a Etapa 4, en caso contrario ir a Etapa 3.

Etapa 3: Hacer $T = T + 1$ e ir a Etapa 2.

Etapa 4: Dar T como salida y terminar

Lemma 1 Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es un predicado Σ -efectivamente computable y D_P es Σ -efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 7: Pruebe el lema anterior

Lamentablemente si quitamos la hipotesis en el lema anterior de que D_P sea Σ -efectivamente computable, el lema resulta falso. Mas adelante veremos un ejemplo. Por el momento el lector puede ejercitar su comprension del tema convenciendose de que aun teniendo un procedimiento efectivo que compute a un predicado $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, no es claro como construir un procedimiento efectivo que compute a $M(P)$.

Ejercicio 8: V o F o I. Justifique.

- (a) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado. Si $\vec{x} \in \omega^n$ es tal que existe t en ω que cumple $(t, \vec{x}) \in D_P$, entonces $\vec{x} \in D_{M(P)}$.
- (b) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado. Entonces $M(P)(\vec{x}) \leq t$
- (c) Sea $P : \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado, con $n \geq 1$. Entonces $D_{M(P)} \subseteq \omega^{n-1}$
- (d) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $M(p_1^{1,2}) = C_0^{0,2}$

Definicion de funcion Σ -recursiva

Con este nuevo constructor de funciones estamos en condiciones de definir la clase de las funciones Σ -recursivas. Definamos los conjuntos $R_0^\Sigma \subseteq R_1^\Sigma \subseteq R_2^\Sigma \subseteq \dots \subseteq R^\Sigma$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R_0^\Sigma &= PR_0^\Sigma \\ R_{k+1}^\Sigma &= R_k^\Sigma \cup \left\{ f \circ [f_1, \dots, f_n] : f, f_1, \dots, f_n \in R_k^\Sigma, n \geq 1 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ R(f, \mathcal{G}) : R(f, \mathcal{G}) \text{ esta definida y } \{f\} \cup \{\mathcal{G}_a : a \in \Sigma\} \subseteq R_k^\Sigma \right\} \cup \\ &\quad \left\{ R(f, g) : R(f, g) \text{ esta definida y } f, g \in R_k^\Sigma \right\} \cup \\ &\quad \left\{ M(P) : P \text{ es un predicado } \Sigma\text{-total y } P \in R_k^\Sigma \right\} \\ R^\Sigma &= \bigcup_{k \geq 0} R_k^\Sigma \end{aligned}$$

Una funcion f es llamada Σ -recursiva si pertenece a R^Σ . Cabe destacar que aunque $M(P)$ fue definido para predicados no necesariamente Σ -totales, en la definicion de los conjuntos R_k^Σ , nos restringimos al caso en que P es Σ -total.

Notese que $PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$, para cada $k \in \omega$, por lo cual $PR^\Sigma \subseteq R^\Sigma$.

Proposition 2 Si $f \in R^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable.

Ejercicio 9: Pruebe la proposicion anterior

Daremos sin prueba el siguiente conceptualmente importante resultado.

Proposition 3 Sea Σ un alfabeto finito. Entonces no toda funcion Σ -recursiva es Σ -p.r.. Es decir que $PR^\Sigma \subseteq R^\Sigma$ y $PR^\Sigma \neq R^\Sigma$.

Este resultado no es facil de probar. Mas adelante veremos ejemplos naturales de funciones Σ -recursivas que no son Σ -p.r.. Otro ejemplo natural es la famosa funcion de Ackermann.

Lema de minimizacion acotada de variable numerica de predicados Σ -p.r.

Como veremos mas adelante, no siempre que $P \in R^\Sigma$, tendremos que $M(P) \in R^\Sigma$. Sin embargo, el siguiente lema nos garantiza que cuando $P \in PR^\Sigma$, se da que $M(P) \in R^\Sigma$ y ademas da condiciones para que $M(P)$ sea Σ -p.r..

Lemma 4 Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces

(a) $M(P)$ es Σ -recursiva.

(b) Si hay una funcion Σ -p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ es Σ -p.r..

Proof. (a) Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1, m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Note que \bar{P} es Σ -p.r. (por que?). Veremos a continuacion que $M(P) = M(\bar{P})$. Notese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, por lo cual $M(P) = M(\bar{P})$.

Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ -recursiva. Sea k tal que $\bar{P} \in \text{PR}_k^\Sigma$. Ya que \bar{P} es Σ -total y $\bar{P} \in \text{PR}_k^\Sigma \subseteq \text{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \text{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \text{R}^\Sigma$.

(b) Ya que $M(P) = M(\bar{P})$, basta con probar que $M(\bar{P})$ es Σ -p.r. Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ -p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] \circ [f, p_1^{n, m}, \dots, p_{n+m}^{n, m}]$$

Pero el lema de cuantificacion acotada de predicados Σ -p.r. probado en la Guia 5 nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo es.

Sea

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

Note que P_1 es Σ -total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que P_1 es Σ -p.r. Ademas notese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) |_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ -p.r. solo nos resta probar que

$$F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^y t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ [C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}]$$

y por lo tanto el lema de productoria de predicados Σ -p.r. probado en la Guia 5 nos dice que F es Σ -p.r.. ■

OBSERVACION: No siempre que P sea Σ -p.r. tendremos que $M(P)$ lo sera. Notese que si $M(P)$ fuera Σ -p.r., cada ves que P lo sea, entonces tendríamos que $\text{PR}^\Sigma = \text{R}^\Sigma$ (justifique) lo cual contradiría la Proposicion 3. Mas adelante veremos un ejemplo natural de un predicado P el cual es Σ -p.r. pero $M(P)$ no es Σ -p.r.

El lema de minimizacion recién probado es muy util como lo veremos en los siguientes dos lemas.

Lemma 5 Sea Σ un alfabeto finito. Las siguientes funciones son Σ -p.r.:

- (a) $Q : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $(x, y) \rightarrow$ cociente de la division de x por y
- (b) $R : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $(x, y) \rightarrow$ resto de la division de x por y

Proof. (a) Ya vimos anteriormente que $Q = M(P)$, donde $P' = \lambda tx_1 x_2 [x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$. Ya que P' es Σ -p.r. y

$$Q(x_1, x_2) \leq p_1^{2,0}(x_1, x_2), \text{ para cada } (x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$$

(b) del Lema 4 implica que $Q \in \text{PR}^\Sigma$.

(b) Notese que

$$R = \lambda xy [x \dot{-} Q(x, y).y]$$

y por lo tanto $R \in \text{PR}^\Sigma$. ■

Ejercicio 10: Dados $x, y \in \omega$ tales que $x \neq 0$ o $y \neq 0$, usaremos $\text{mcd}(x, y)$ para denotar el maximo comun divisor de x e y , es decir el mayor numero que divide a x y divide a y . Note que $M = \lambda xy [\text{mcd}(x, y)]$ tiene dominio igual a $\omega^2 - \{(0, 0)\}$. Pruebe que M es Σ -p.r.. (Hint: use la REGLA U)

Ejercicio 11: Dados $x, y \in \mathbf{N}$, usaremos $\text{mcm}(x, y)$ para denotar el minimo comun multiplo de x e y , es decir el menor numero no nulo que es multiplo de x y de y . Note que $G = \lambda xy [\text{mcm}(x, y)]$ tiene dominio igual a \mathbf{N}^2 . Pruebe que G es Σ -p.r..

Lemma 6 Sea Σ un alfabeto finito. Entonces la funcion

$$\begin{aligned} pr : \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ n &\rightarrow n\text{-esimo numero primo} \end{aligned}$$

es Σ -p.r.

Proof. Para ver que pr es Σ -p.r., veremos que la extension $h : \omega \rightarrow \omega$, dada por $h(0) = 0$ y $h(n) = pr(n)$, $n \geq 1$, es Σ -p.r.. Luego $pr = h|_{\mathbf{N}}$ resultara Σ -p.r. por ser la restriccion de una funcion Σ -p.r. a un conjunto Σ -p.r.. Primero note que

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(t+1) &= \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > h(t)) \end{aligned}$$

O sea que $h = R(C_0^{0,0}, g)$, donde

$$\begin{aligned} g : \omega \times \omega &\rightarrow \omega \\ (A, t) &\rightarrow \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \end{aligned}$$

Es decir que solo nos resta ver que g es Σ -p.r.. Pero notese que $g = M(P)$, donde $P = \lambda i At [i \text{ es primo} \wedge i > A]$. Claramente P es Σ -p.r. por lo cual para poder aplicar (b) del lema anterior debemos encontrar una funcion $f : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ tal que

$$M(P)(A, t) \leq f(A, t), \text{ para cada } (A, t) \in \omega^2$$

Aceptaremos sin prueba que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

Es decir que $f = \lambda At [A! + 1]$ cumple lo deseado, lo cual implica que $g = M(P)$ es Σ -p.r. ■

Ejercicio 12: (O) Si tiene ganas y recuerda las propiedades basicas de divisibilidad, intente un rato probar que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

(Hint: factorice $A! + 1$ en producto de primos y vea que alguno debe ser mayor que A .)

Ejercicio 13: Pruebe que $\lambda xi [(x)_i]$ es Σ -p.r. (Hint: repase el significado de la expresion $(x)_i$ y encuentre entonces el dominio de $\lambda xi [(x)_i]$ antes de hacer el ejercicio)

Ejercicio 14: Pruebe que la funcion Lt es Σ -p.r.

Ejercicio 15: Sea $C = \{z^2 : z \in \omega\}$. Sea $f : C \rightarrow \omega$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \in C$. Pruebe que f es Σ -p.r.

Ejercicio 16: Sea $\Sigma = \{ @, ! \}$. Sea $f : \Sigma^* \rightarrow \omega$ dada por:

$$f(\alpha) = \max\{ |\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \text{ es capicua} \}$$

Pruebe que f es Σ -p.r. (Hint: use la Regla U)

Minimizacion de variable alfabetica

Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea \leq un orden total sobre Σ . Recordemos que \leq puede ser naturalmente extendido a un orden total sobre Σ^* . Sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado. Cuando $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es tal que existe al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$, usaremos $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ para denotar al menor $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Notese que la expresion $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$ -uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un α tal que se da $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no estara definida cuando para cada $\alpha \in \Sigma^*$ se da que $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no pertenece a D_P o $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no depende de la variable α . Por ejemplo, las expresiones $\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ y $\min_{\beta}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$ -uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M^{\leq}(P) = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$$

Notese que

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{ (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)}$$

Diremos que $M^{\leq}(P)$ es obtenida por *minimizacion de variable alfabetica* a partir de P .

Vemos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{ @, a, b, c, d, e \}$ y sea \leq un orden total sobre Σ . Sea $Dir = \{ \alpha_1 \in \Sigma^* : |\alpha_1|_{@} = 1 \}$ y definamos $U : Dir \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$U(\alpha_1) = \text{unico } \alpha \text{ tal que } \alpha@ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1$$

Sea

$$P = \lambda \alpha_1 \alpha [\alpha_1 \in Dir \text{ y } \alpha@ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_{M^{\leq}(P)} &= \{ \alpha_1 \in \Sigma^* : (\exists \alpha \in \Sigma^*) P(\alpha_1, \alpha) \} \\ &= \{ \alpha_1 \in \Sigma^* : \alpha_1 \in Dir \text{ y } (\exists \alpha \in \Sigma^*) \alpha@ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1 \} \\ &= Dir \end{aligned}$$

y ademas es claro que $M^{\leq}(P)(\alpha_1) = U(\alpha_1)$, para cada $\alpha_1 \in Dir$, por lo cual $M^{\leq}(P) = U$.

Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica de predicados Σ -p.r.

Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado. Su prueba es rutinaria y se basa en el Lema 4

Lemma 7 *Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea \leq un orden total sobre Σ , sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces*

(a) $M^{\leq}(P)$ es Σ -recursiva.

(b) Si existe una funcion Σ -p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que

$$|M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = |\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)},$$

entonces $M^{\leq}(P)$ es Σ -p.r..

Ejercicio 17: Pruebe que la funcion U del ejemplo anterior es Σ -p.r.. Por que se eligieron los nombres Dir y U ?

Ejercicio 18: Dada una palabra $\alpha \in \Sigma^*$, si hay una palabra ρ tal que $\rho^2 = \alpha$, usaremos $\sqrt{\alpha}$ para denotar a ρ . Note que la expresion $\sqrt{\alpha}$ tiene sentido o esta definida solo para ciertas palabras. Pruebe que $\lambda\alpha[\sqrt{\alpha}]$ es Σ -p.r..

Ejercicio 19: Sea Σ un alfabeto no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ .

(a) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha[\alpha_1 = \varepsilon])$

(b) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha[\alpha^2 = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_1])$

Ejercicio 20: V o F o I, justifique.

(a) Sea Σ un alfabeto no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ . Entonces $p_1^{0,2} = M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha[\alpha = \alpha_1])$

(b) Sea \leq un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*) (\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \in D_P\}$$

(c) Sea \leq un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \wedge (\forall \beta \in \Sigma^*)_{\beta < \alpha} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)\}$$

$$M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \alpha$$

Ejercicio 21: Sea Σ un alfabeto no vacio y sea \leq un orden total sobre Σ . Sea $P = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha[\alpha_1\alpha = \alpha_2]$. Describa la funcion $M^{\leq}(P)$.

Ejercicio 22: (S) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ . Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Sea \leq un orden total sobre $\Gamma \cup Q$.

- (a) Sea $P = \lambda \alpha_1 \alpha [\alpha \in Q \text{ y } \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1]$. Encuentre $D_{M \leq (P)}$. Que relacion hay entre la funcion $St : Des \rightarrow Q$ y $M \leq (P)$
- (b) Encuentre un predicado R (modificando P) tal que $M \leq (R) = St$.
- (c) Pruebe que St es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.

Conjuntos Σ -recursivamente enumerables

Ya que la nocion de funcion Σ -recursiva es el modelo matematico Godeliano del concepto de funcion Σ -efectivamente computable, nos podriamos preguntar entonces cual es el modelo matematico Godeliano del concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable. Si prestamos atencion a la definicion de conjunto Σ -efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones Σ -efectivamente computables por lo cual la siguiente definicion cae de maduro:

Diremos que un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -recursivamente enumerable cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ -recursiva, para cada $i \in \{1, \dots, n+m\}$.

Deberia entonces quedar claro que si el concepto de funcion Σ -recursiva modeliza correctamente al concepto de funcion Σ -efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto Σ -recursivamente enumerable recién definido modeliza correctamente al concepto de conjunto Σ -efectivamente enumerable. Sin envargo para probar algunos de los resultados basicos acerca de los conjuntos Σ -recursivamente enumerables, deberemos esperar a tener probada la equivalencia del paradigma Godeliano con el imperativo.

Conjuntos Σ -recursivos

La version Godeliana del concepto de conjunto Σ -efectivamente computable es facil de dar: un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ -recursivo cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ -recursiva. Todo conjunto Σ -recursivo es Σ -recursivamente enumerable pero esto lo probaremos mas adelante junto con otros resultados basicos sobre conjuntos Σ -r.e., los cuales se prueban usando el modelo imperativo. Mas adelante daremos un ejemplo natural de un conjunto que es Σ -r.e. pero el cual no es Σ -recursivo.

Ejercicio 23: Sea Σ un alfabeto finito.

- (a) Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -r., entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.

- (b) Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -recursivos. Entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ -recursivos

Independencia del alfabeto

El siguiente resultado es conceptualmente muy importante. Su prueba tiene cierta dificultad técnica por lo cual la omitiremos.

Theorem 8 Sean Σ y Γ alfabetos finitos cualesquiera.

- (a) Supongamos una función f es Σ -mixta y Γ -mixta, entonces f es Σ -recursiva (resp. Σ -p.r.) sii f es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.)
- (b) Supongamos un conjunto S es Σ -mixto y Γ -mixto, entonces S es Σ -recursivo (resp. Σ -r.e., Σ -p.r.) sii S es Γ -recursivo (resp. Γ -r.e., Γ -p.r.)

Ejercicio 24: (S) Explique con palabras por qué no es obvio el resultado anterior

Ejercicio 25: (S) Que hubiera implicado acerca de la completitud del modelo Godeliano el hecho de que no fuera cierto (a) del teorema anterior?