GUIA 6 DE LENGUAJES: MINIMIZACION Y FUNCIONES Σ-RECURSIVAS

Tal como fue explicado en el comienzo de la Guia 5, para obtener la clase de las funciones Σ-recursivas debemos agregar un nuevo constructor a los ya definidos de composicion y recursion primitiva, a saber, el constructor de *minimizacion.* Tiene dos casos aunque solo usaremos el primero para la definicion de funcion Σ-recursiva.

Minimizacion de variable numerica. Sea Σ un alfabeto finito y sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado. Dado $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $t \in \omega$ tal que $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$, usaremos $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para denotar al menor de tales $t's$. Notese que la expresion $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$-uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un t tal que se da $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no estara definida cuando para cada $t \in \omega$ se de que $(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no pertenece a D_P o $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ no depende de la variable t. Por ejemplo, las expresiones $\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ y $\min_i P(i, \vec{x}, \vec{\alpha})$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$-uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M(P) = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[\min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

Notese que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega)\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) &= \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)} \end{aligned}$$

Diremos que $M(P)$ se obtiene por *minimizacion de variable numerica* a partir de P.

Veamos un par de ejemplos:

(E1) Tomemos $P = \lambda t x_1 [t^2 = x_1]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega)\ P(t, x_1)\} \\ &= \left\{x_1 \in \omega : (\exists t \in \omega)\ t^2 = x_1\right\} \end{aligned}$$

Es decir el dominio de $M(P)$ es el conjunto de los cuadrados. Ademas para cada $x_1 \in D_{M(P)}$ tenemos que

$$M(P)(x_1) = \min_t P(t, x_1) = \min_t (t^2 = x_1)$$

por lo cual $M(P)(x) = \sqrt{x}$, para cada $x \in D_{M(P)}$.

(E2) Recordemos que dados $x_1, x_2 \in \omega$, con x_2 no nulo, el *cociente de dividir* x_1 *por* x_2 se define como el maximo elemento del conjunto $\{t \in \omega : t.x_2 \leq x_1\}$. Sea

$$\begin{aligned} Q : \omega \times \mathbf{N} &\rightarrow \omega \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \text{cociente de dividir } x_1 \text{ por } x_2 \end{aligned}$$

Sea $P = \lambda tx_1x_2\,[x_1 < t.x_2]$. Notar que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(x_1,x_2) \in \omega^2 : (\exists t \in \omega)\ P(t,x_1,x_2) = 1\} \\ &= \{(x_1,x_2) : (\exists t \in \omega)\ x_1 < t.x_2\} \\ &= \omega \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ademas si $(x_1,x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$, es facil de probar que

$$\min_t\ x_1 < t.x_2 = Q(x_1,x_2) + 1$$

por lo que $M(P) = Suc \circ Q$. Si quisieramos encontrar un predicado P' tal que $M(P') = Q$, entonces podemos tomar $P' = \lambda tx_1x_2\,[x_1 < (t+1).x_2]$ y con un poco de concentracion nos daremos cuenta que $M(P') = Q$. De todas maneras hay una forma mas facil de hacerlo y es tomando P' de tal forma que para cada $(x_1,x_2) \in D_Q$ se de que

$$Q(x_1,x_2) = \text{ unico } t \in \omega \text{ tal que } P'(t,x_1,x_2)$$

Por ejemplo se puede tomar $P' = \lambda tx_1x_2\,[x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2]$ que dicho sea de paso es justo la definicion de cociente dada en la escuela primaria. Dejamos al lector corroborar que $M(P') = Q$, para este ultimo P'.

Tal como lo vimos recien muchas veces que querramos encontrar un predicado P tal que $M(P)$ sea igual a una funcion dada f, sera mas facil encontrar un P el cual cumpla

$$f(\vec{x},\vec{\alpha}) = \text{ unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$$

es decir un predicado P que caracterice al valor que toma f. Enunciamos esto en forma de regla.

REGLA U: Si tiene una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y busca un predicado P tal que $f = M(P)$, intente diseñar P de manera que para cada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_f$ se de que

$$f(\vec{x},\vec{\alpha}) = \text{ unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$$

Ejercicio 1: Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Para cada caso describa la funcion $M(P)$:
- (a) $P = \lambda tx_1[x_1 < t]$
- (b) $P = \lambda tx_1[t < x_1]$
- (c) $P = \lambda t\alpha\beta[\alpha^t = \beta]$
- (d) $P = \lambda t\alpha\beta[\alpha = \beta]$
- (e) $P = \lambda tx_1x_2[x_2 + t = x_1]$
- (f) $P = \lambda t\alpha_1[[\alpha_1]_t = \%]$
- (g) $P = \lambda xy[y < x]$
- (h) $P = \lambda x_1t[x_1 < t]$
- (i) $P = \lambda yx\alpha[[\alpha]_x = \%]$

Ejercicio 2: Sea $E = \lambda x_1[\text{parte entera de } \sqrt{x_1}]$. Note que por notacion lambda $D_E = \omega$. Aplique la REGLA U para encontrar un predicado P tal que $M(P) = E$.

Ejercicio 3: Encuentre un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1x_2[x_1 \dot{-} x_2]$. (Aqui es natural hacerlo sin la idea de la REGLA U.)

Ejercicio 4: Sea $F : \{z^2 : z \in \omega\} \to \omega$ dada por $F(x) = \sqrt{x}$. Encuentre un predicado P tal que $M(P) = F$.

Ejercicio 5: Sea $F : \{(x,y) \in \omega \times \mathbf{N} : y \text{ divide a } x\} \rightarrow \omega$ dada por $F(x,y) = x/y$. Encuentre un predicado P tal que $M(P) = F$.

El siguiente lema nos muestra que en algunos casos el constructor de minimizacion preserva la computabilidad efectiva.

Lema 1. *Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable y D_P es Σ-efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Sea $\mathbb{P}_P$ un procedimiento efectivo que compute a P y sea $\mathbb{P}_{D_P}$ un procedimiento efectivo que compute a $\chi_{D_P}^{\omega\times\omega^n\times\Sigma^{*m}}$. Notese que el siguiente procedimiento efectivo (con dato de entrada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$) computa la funcion $M(P)$.

Etapa 1: Hacer $T = 0$ e ir a Etapa 2

Etapa 2: Correr $\mathbb{P}_{D_P}$ con dato de entrada $(T,\vec{x},\vec{\alpha})$ y guardar la salida en A. Ir a Etapa 3.

Etapa 3: Si $A = 1$ ir a Etapa 4, caso contrario ir a etapa 6.

Etapa 4: Correr $\mathbb{P}_P$ con dato de entrada $(T,\vec{x},\vec{\alpha})$ y guardar la salida en B. Ir a Etapa 5.

Etapa 5: Si $B = 1$, dar como salida T y terminar. Caso contrario ir a Etapa 6.

Etapa 6: Hacer $T = T + 1$ e ir a Etapa 2. ■ Como corolario obtenemos que la

minimizacion de predicados Σ-totales preserva la computabilidad efectiva:

Corolario 2. *Si $P : \omega\times\omega^n\times\Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ-efectivamente computable.*

Lamentablemente si quitamos la hipotesis en el lema anterior de que D_P sea Σ-efectivamente computable, el lema resulta falso. Mas adelante veremos un ejemplo de esto, basado en la Tesis de Church (esta tesis basicamente dice que el modelo Godeliano de la computabilidad efectiva es correcto (Guia 8)).

Ejercicio 6: Intente construir un procedimiento efectivo que que compute a $M(P)$ teniendo un procedimiento efectivo que compute a un predicado $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$. Seguro fallara en sus intentos pero entendera cual es la dificultad subyacente.

Ejercicio 7: (Responder V o F) Si $P : D_P \subseteq \omega\times\omega^2 \rightarrow \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable, entonces el siguiente procedimiento computa a $M(P)$:

Etapa 1: Hacer $T = 0$ e ir a Etapa 2

Etapa 2: Si $(T,x,y) \in D_P$ y $P(T,x,y) = 1$, entonces ir a Etapa 4, en caso contrario ir a Etapa 3.

Etapa 3: Hacer $T = T + 1$ e ir a Etapa 2.

Etapa 4: Dar T como salida y terminar

Ejercicio 8: V o F o I. Justifique.

(a) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado. Si $\vec{x} \in \omega^n$ es tal que existe t en ω que cumple $(t,\vec{x}) \in D_P$, entonces $\vec{x} \in D_{M(P)}$.

(b) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado. Entonces $M(P)(\vec{x}) \leq t$

(c) Sea $P : \omega^n \rightarrow \omega$ un predicado, con $n \geq 1$. Entonces $D_{M(P)} \subseteq \omega^{n-1}$

(d) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $M(p_1^{1,2}) = C_0^{0,2}$

Definicion de funcion Σ-recursiva. Con este nuevo constructor de funciones estamos en condiciones de definir la clase de las funciones Σ-recursivas. Definamos los conjuntos $\mathrm{R}_0^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_1^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_2^\Sigma \subseteq ... \subseteq \mathrm{R}^\Sigma$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{R}_0^\Sigma & = & \mathrm{PR}_0^\Sigma \\ \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma & = & \mathrm{R}_k^\Sigma \cup \left\{f \circ [f_1, ..., f_n] : f, f_1, ..., f_r \in \mathrm{R}_k^\Sigma,\ r \geq 1\right\} \cup \\ & & \left\{R(f, \mathcal{G}) : R(f, \mathcal{G}) \text{ esta definida y } \{f\} \cup \{\mathcal{G}_a : a \in \Sigma\} \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma\right\} \cup \\ & & \left\{R(f, g) : R(f, g) \text{ esta definida y } f, g \in \mathrm{R}_k^\Sigma\right\} \cup \\ & & \left\{M(P) : P \text{ es un predicado } \Sigma\text{-total y } P \in \mathrm{R}_k^\Sigma\right\} \\ \mathrm{R}^\Sigma & = & \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{R}_k^\Sigma \end{array}$$

Una funcion f es llamada Σ-*recursiva* si pertenece a R^Σ. Cabe destacar que aunque $M(P)$ fue definido para predicados no necesariamente Σ-totales, en la definicion de los conjuntos R_k^Σ, nos restringimos al caso en que P es Σ-total. Obviamente esto lo hacemos ya que como se explico antes el constructor de minimizacion no siempre preserva la computabilidad efectiva.

Notese que $\mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, para cada $k \in \omega$, por lo cual $\mathrm{PR}^\Sigma \subseteq \mathrm{R}^\Sigma$. Por supuesto el modelo de Godel seria incorrecto si no fuera cierto el siguiente resultado.

Proposición 3 (Leibniz vence a Godel)**.** *Si $F \in \mathrm{R}^\Sigma$, entonces F es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Por induccion en k probaremos que

Teo_k: Si $F \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces F es Σ-efectivamente computable.

Teo_0 es facil y dejado al lector.

$\mathrm{Teo}_k \Rightarrow \mathrm{Teo}_{k+1}$. Supongamos entonces que $F \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma$ y que vale Teo_k. Veamos que entonces F es Σ-efectivamente computable. Ya que vale Teo_k, podemos suponer que $F \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma - \mathrm{R}_k^\Sigma$. Por la definicion de R_{k+1}^Σ surgen varios casos:

Caso $f \circ [f_1, ..., f_n]$, con $f, f_1, ..., f_r \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, $r \geq 1$. Entonces por un lema del comienzo de la Guia 5 tenemos que F es Σ-efectivamente computable ya que $f, f_1, ..., f_r$ lo son.

Los distintos casos en los que F se obtiene por recursion primitiva a partir de funciones de R_k^Σ se siguen de Teo_k y los respectivos lemas dados en la Guia 5 los cuales prueban que cada uno de los cuatro casos de recursion primitiva preserva la computabilidad efectiva.

Caso $F = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado perteneciente a R_k^Σ. Sigue directamente del corolario anterior y Teo_k. ■

Daremos sin prueba el siguiente conceptualmente importante resultado.

Proposición 4. *Sea Σ un alfabeto finito. Entonces no toda funcion Σ-recursiva es Σ-p.r.. Es decir que $\mathrm{PR}^\Sigma \subseteq \mathrm{R}^\Sigma$ y $\mathrm{PR}^\Sigma \neq \mathrm{R}^\Sigma$.*

Este resultado no es facil de probar. Mas adelante veremos ejemplos naturales de funciones Σ-recursivas que no son Σ-p.r.. Otro ejemplo natural es la famosa funcion de Ackermann.

Lema de minimizacion acotada de variable numerica de predicados Σ-p.r. Como veremos mas adelante, no siempre que $P \in \mathrm{R}^{\Sigma}$, tendremos que $M(P) \in \mathrm{R}^{\Sigma}$. Sin envargo, el siguiente lema nos garantiza que cuando $P \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$, se da que $M(P) \in \mathrm{R}^{\Sigma}$ y ademas da condiciones para que $M(P)$ sea Σ-p.r..

Lema 5 (Lema de minimizacion acotada)**.** *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces*

(a) *$M(P)$ es Σ-recursiva.*

(b) *Si hay una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que*

$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$,

entonces $M(P)$ es Σ-p.r..

Proof. (a) Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Note que $\bar{P}$ es Σ-p.r. (por que?). Veremos a continuacion que $M(P) = M(\bar{P})$. Notese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$., por lo cual $M(P) = M(\bar{P})$.

Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ-recursiva. Sea k tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^{\Sigma}$. Ya que $\bar{P}$ es Σ-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^{\Sigma} \subseteq \mathrm{R}_k^{\Sigma}$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}_{k+1}^{\Sigma}$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^{\Sigma}$.

(b) Ya que $M(P) = M(\bar{P})$, basta con probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ-p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ \left[f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m} \right]$$

Pero el Lema de Cuantificacion acotada probado en la Guia 5 nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo es.

Sea

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} \; j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

Note que P_1 es Σ-total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que P_1 es Σ-p.r. Ademas notese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) |_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. solo nos resta probar que

$$F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ \left[C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m} \right]$$

y por lo tanto el Lema de la Sumatoria probado en la Guia 5 nos dice que F es Σ-p.r.. ■

OBSERVACION: No siempre que P sea Σ-p.r. tendremos que $M(P)$ lo sera. Notese que si $M(P)$ fuera Σ-p.r., cada ves que P lo sea, entonces tendriamos que $\mathrm{PR}^\Sigma = \mathrm{R}^\Sigma$ (justifique) lo cual contradiria la Proposicion 4. Mas adelante veremos un ejemplo natural de un predicado P el cual es Σ-p.r. pero $M(P)$ no es Σ-p.r.

El lema de minimizacion recien probado es muy util como lo veremos a continuacion.

Lema 6. *Sea Σ un alfabeto finito. Las siguientes funciones son Σ-p.r.:*

(a) $$\begin{array}{rcl} Q:\omega\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \textit{cociente de la division de } x \textit{ por } y \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcl} R:\omega\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \textit{resto de la division de } x \textit{ por } y \end{array}$$

Proof. (a) Ya vimos anteriormente que $Q = M(P')$, donde $P' = \lambda t x_1 x_2 \left[x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2\right]$. Ya que P' es Σ-p.r. y

$$Q(x_1,x_2) \leq p_1^{2,0}(x_1,x_2), \text{ para cada } (x_1,x_2) \in \omega\times\mathbf{N}$$

(b) del Lema 5 implica que $Q \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

(b) Notese que

$$R = \lambda xy \left[x \dot{-} Q(x,y).y\right]$$

y por lo tanto $R \in \mathrm{PR}^\Sigma$. ■

Ejercicio 9: Dados $x,y\in\omega$ tales que $x\neq 0$ o $y\neq 0$, usaremos $mcd(x,y)$ para denotar el maximo comun divisor de x e y, es decir el mayor numero que divide a x y divide a y. Note que la funcion $M = \lambda xy[mcd(x,y)]$ tiene dominio igual a $\omega^2 - \{(0,0)\}$. Pruebe que M es Σ-p.r.. (Hint: use la REGLA U).

Ejercicio 10: Dados $x,y\in\mathbf{N}$, usaremos $mcm(x,y)$ para denotar el minimo comun multiplo de x e y, es decir el menor numero no nulo que es multiplo de x y de y. Note que la funcion $G = \lambda xy[mcm(x,y)]$ tiene dominio igual a $\mathbf{N}^2$. Pruebe que G es Σ-p.r..

Ejercicio 11: Sea $F:\{z^2 : z\in\omega\}\rightarrow\omega$ dada por $F(x)=\sqrt{x}$. Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 12: Sea $F:\Sigma^*\times\Sigma^*\rightarrow\omega$ dada por $F(\alpha,\beta)=\max\{|\rho| : \rho \text{ es tramo inicial de } \alpha \text{ y } \beta\}$. Pruebe que F es Σ-p.r..

Lema 7. *Sea Σ un alfabeto finito. Entonces la funcion*

$$\begin{array}{rcl} pr:\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n\textit{-esimo numero primo} \end{array}$$

es Σ-p.r.

Proof. Para ver que pr es Σ-p.r., veremos que la extension $h:\omega\rightarrow\omega$, dada por $h(0)=0$ y $h(n)=pr(n)$, $n\geq 1$, es Σ-p.r.. Luego $pr = h|_{\mathbf{N}}$ resultara Σ-p.r. por ser la restriccion de una funcion Σ-p.r. a un conjunto Σ-p.r.. Primero note que

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(t+1) &= \min_i \left(i \text{ es primo} \wedge i > h(t)\right) \end{aligned}$$

O sea que $h = R\left(C_0^{0,0}, g\right)$, donde

$$\begin{array}{rcl} g : \omega \times \omega & \rightarrow & \omega \\ (A,t) & \rightarrow & \min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \end{array}$$

Es decir que solo nos resta ver que g es Σ-p.r.. Pero notese que $g = M(P)$, donde $P = \lambda i A t\,[i \text{ es primo} \wedge i > A]$. Claramente P es Σ-p.r. por lo cual para poder aplicar (b) del lema anterior debemos encontrar una funcion $f : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ tal que

$$M(P)(A,t) \leq f(A,t), \text{ para cada } (A,t) \in \omega^2$$

Aceptaremos sin prueba que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

Es decir que $f = \lambda A t[A! + 1]$ cumple lo deseado, lo cual implica que $g = M(P)$ es Σ-p.r. ■

Ejercicio 13: (Opcional) Si tiene ganas y recuerda las propiedades basicas de divisibilidad, intente un rato probar que

$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

(Hint: factorice $A! + 1$ en producto de primos y vea que alguno debe ser mayor que A.)

Ejercicio 14: Sea Σ un alfabeto finito.

(a) Pruebe que $\lambda x i\,[(x)_i]$ es Σ-p.r. (Hint: repase el significado de la expresion $(x)_i$ y encuentre entonces el dominio de $\lambda x i\,[(x)_i]$ antes de hacer el ejercicio)

(b) Pruebe que la funcion Lt es Σ-p.r.

Ejercicio 15: Sea $F : \mathbf{N} \rightarrow \omega$ dada por $F(x) = \max\{t \in \omega : t! \leq x\}$. Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 16: Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea $F = \lambda\alpha\beta[\max\{t \in \mathbf{N} : \alpha^t \text{ es tramo inicial de } \beta\}]$.

(a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de F

(b) Pruebe que F es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U).

Ejercicio 17: Sea $F : \Sigma^+ \rightarrow \omega$ dada por $F(\alpha) = \max\{t \in \mathbf{N} : t \leq |\alpha| \text{ y } [\alpha]_1[\alpha]_2...[\alpha]_t \text{ es capicua}\}$. Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 18: Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Sea $f : \Sigma^* \rightarrow \omega$ dada por:

$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \text{ es capicua}\}$$

Pruebe que f es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U). Ojo, puede haber un β capicua que ocurra en α de manera "inextensible" pero que $f(\alpha)$ no sea igual a $|\beta|$.

Minimizacion de variable alfabetica. Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Recordemos que $\leq$ puede ser naturalmente extendido a un orden total sobre Σ^*. Sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado. Cuando $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es tal que existe al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$, usaremos $\min_\alpha^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ para denotar al menor $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Notese que la expresion $\min_\alpha^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$-uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un α tal que se da $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_\alpha^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no estara definida cuando para cada $\alpha \in \Sigma^*$ se de que $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no pertenece a D_P o $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_\alpha^\leq P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)$ no depende de la variable α. Por ejemplo, las expresiones $\min_\alpha^\leq P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)$ y $\min_\beta^\leq P(\vec{x},\vec{\alpha},\beta)$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$-uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M^\leq(P) = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\min_\alpha^\leq P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$$

Notese que

$$D_{M^\leq(P)} = \{(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists\alpha \in \Sigma^*)\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\}$$
$$M^\leq(P)(\vec{x},\vec{\alpha}) = \min_\alpha^\leq P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha), \text{ para cada } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M^\leq(P)}$$

Diremos que $M^\leq(P)$ es obtenida por *minimizacion de variable alfabetica* a partir de P.

Veamos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{@,a,b,c,d,e\}$ y sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea $Dir = \{\alpha_1 \in \Sigma^* : |\alpha_1|_@ = 1\}$ y definamos $U : Dir \to \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$U(\alpha_1) = \text{unico } \alpha \text{ tal que } \alpha@ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1$$

Sea

$$P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha_1 \in Dir \text{ y } \alpha@ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_{M^\leq(P)} &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : (\exists\alpha \in \Sigma^*)\ P(\alpha_1,\alpha)\} \\ &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : \alpha_1 \in Dir \text{ y } (\exists\alpha \in \Sigma^*)\ \alpha@ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1\} \\ &= Dir \end{aligned}$$

y ademas es claro que $M^\leq(P)(\alpha_1) = U(\alpha_1)$, para cada $\alpha_1 \in Dir$, por lo cual $M^\leq(P) = U$.

Como puede notarse para el caso alfabetico tambien tenemos: **REGLA U:** Si tiene una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ y busca un predicado P tal que $f = M^\leq(P)$, intente diseñar P de manera que para cada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_f$ se de que

$$f(\vec{x},\vec{\alpha}) = \text{ unico } \alpha \in \Sigma^* \text{ tal que } P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)$$

Ejercicio 19: V o F o I, justifique.

(a) Sea Σ un alfabeto no vacio y sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Entonces $p_1^{0,2} = M^\leq(\lambda\alpha_1\alpha\,[\alpha = \alpha_1])$

(b) Sea $\leq$ un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^\leq(P)} = \{(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists\alpha \in \Sigma^*)\ (\vec{x},\vec{\alpha},\alpha) \in D_P\}$$

(c) Sea $\leq$ un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^\leq(P)} = \{(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha) \wedge (\forall\beta \in \Sigma^*)_{\beta<\alpha} \neg P(\vec{x},\vec{\alpha},\beta)\}$$
$$M^\leq(P)(\vec{x},\vec{\alpha}) = \alpha$$

Ejercicio 20: Sea Σ un alfabeto no vacio y sea $\leq$ un orden total sobre Σ.

(a) Diga que funcion es $M^\leq(\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha\,[\alpha_1 = \varepsilon])$

(b) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha\left[\alpha^2 = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_1\right])$
(c) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda x_1\alpha_1\alpha\left[\alpha = \alpha_1\right])$
(d) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda x_1\alpha_1\alpha\left[\alpha = \alpha_1 \text{ y } x_1 < 20\right])$
(e) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda xy\alpha\beta\left[y \leq |\beta|\right])$
(f) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha\left[\alpha_1 = \alpha\alpha_2\right])$

Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica de predicados Σ-p.r. Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado. Su prueba es rutinaria y se basa en el Lema 5 (ver el apunte).

Lema 8 (Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica)**.** *Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ, sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces*

(a) *$M^{\leq}(P)$ es Σ-recursiva.*
(b) *Si existe una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que*

$$\left|M^{\leq}(P)(\vec{x},\vec{\alpha})\right| = \left|\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right| \leq f(\vec{x},\vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)},$$

entonces $M^{\leq}(P)$ es Σ-p.r..

Ejercicio 21: Pruebe que la funcion U del ejemplo anterior es Σ-p.r.. Por que se elijieron los nombres Dir y U?

Ejercicio 22: Dada una palabra $\alpha \in \Sigma^*$, si hay una palabra ρ tal que $\rho^2 = \alpha$, usaremos $\sqrt{\alpha}$ para denotar a ρ. Notese que la expresion $\sqrt{\alpha}$ tiene sentido o esta definida solo para ciertas palabras. Pruebe que $\lambda\alpha[\sqrt{\alpha}]$ es Σ-p.r..

Ejercicio 23: Sea $\Sigma = \{@, \%, !, \$\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea

$$F = \lambda\alpha_1[\max\{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1 \text{ y } \alpha \text{ es capicua}\}]$$

(aqui el maximo es tomado respecto del orden total de Σ^* inducido por $\leq$). Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 24: Sea $F : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dada por $F(\alpha) =$ tramo inicial capicua mas largo de α. Pruebe que F es Σ-p.r.. (Hint: use la REGLA U).

Ejercicio 25: Sea $\Sigma = \{@, \bigcirc, \%, \square\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea $L = \{\alpha\beta : \alpha \in \{@, \bigcirc\}^* \text{ y } \beta \in \{\%, \square\}^*\}$. Sea $F : L \to \{\%, \square\}^*$ dada por $F(\alpha\beta) = \beta$, cada vez que $\alpha \in \{@, \bigcirc\}^*$ y $\beta \in \{\%, \square\}^*$.

(a) Explique por que la definicion de F es inambigua
(b) Encuentre un predicado P el cual sea Σ-p.r., cumpla que $D_P = \Sigma^* \times \Sigma^*$ y ademas $F = M^{\leq}(P)$.
(c) Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 26: Sea $\Sigma = \{@, \%, !, \$\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea

$$F = \lambda\beta[\max\{\gamma \in \Sigma^* : \gamma \text{ ocurre en } \beta \text{ y } \gamma \in \{@, \%\}^*]$$

(aqui el maximo es tomado respecto del orden total de Σ^* inducido por $\leq$). Pruebe que F es Σ-p.r..

Ejercicio 27: Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ. Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Sea $\leq$ un orden total sobre $\Gamma \cup Q$.

(a) Sea $P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha \in Q \text{ y } \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1]$. Encuentre $D_{M^{\leq}(P)}$. Que relacion hay entre la funcion $St : Des \to Q$ y $M^{\leq}(P)$
(b) Encuentre un predicado R (modificando P) tal que $M^{\leq}(R) = St$.

(c) Pruebe que St es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.

Conjuntos Σ-recursivamente enumerables. Ya que la nocion de funcion Σ-recursiva es el modelo matematico Godeliano del concepto de funcion Σ-efectivamente computable, nos podriamos preguntar entonces cual es el modelo matematico Godeliano del concepto de conjunto Σ-efectivamente enumerable. Si prestamos atencion a la definicion de conjunto Σ-efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones Σ-efectivamente computables por lo cual la siguiente definicion cae de maduro:

Diremos que un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ-*recursivamente enumerable* cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ-recursiva, para cada $i \in \{1, ..., n+m\}$.

Deberia entonces quedar claro que si el concepto de funcion Σ-recursiva modeliza correctamente al concepto de funcion Σ-efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto Σ-recursivamente enumerable recien definido modeliza correctamente al concepto de conjunto Σ-efectivamente enumerable. Sin envargo para probar algunos de los resultados basicos acerca de los conjuntos Σ-recursivamente enumerables, deberemos esperar a tener probada la equivalencia del paradigma Godeliano con el imperativo.

Conjuntos Σ-recursivos. La version Godeliana del concepto de conjunto Σ-efectivamente computable es facil de dar: un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado Σ-*recursivo* cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ-recursiva. Todo conjunto Σ-recursivo es Σ-recursivamente enumerable pero esto lo probaremos mas adelante junto con otros resultados basicos sobre conjuntos Σ-r.e., los cuales se prueban usando el mparadigma imperativo. Mas adelante daremos un ejemplo natural de un conjunto que es Σ-r.e. pero el cual no es Σ-recursivo.

Ejercicio 28: Sea Σ un alfabeto finito.

(a) Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-r., entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.

(b) Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-recursivos. Entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ-recursivos

Independencia del alfabeto. El siguiente resultado es conceptualmente muy importante. Su prueba tiene cierta dificultad tecnica por lo cual la omitiremos. Se la puede ver en el apunte.

Teorema 9. *Sean Σ y Γ alfabetos finitos cualesquiera.*

(a) *Supongamos una funcion f es Σ-mixta y Γ-mixta, entonces f es Σ-recursiva (resp. Σ-p.r.) sii f es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.)*

(b) *Supongamos un conjunto S es Σ-mixto y Γ-mixto, entonces S es Σ-recursivo (resp. Σ-r.e., Σ-p.r.) sii S es Γ-recursivo (resp. Γ-r.e., Γ-p.r.)*

Ejercicio 29: Explique con palabras por que no es obvio el resultado anterior

Ejercicio 30: Que hubiera implicado acerca de la completitud del modelo Godeliano el hecho de que no fuera cierto (a) del teorema anterior?

Ejercicios de examen

(1) Pruebe que la funcion pr es Σ-p.r.. Puede usar sin demostracion que
$$\min_i (i \text{ es primo} \wedge i > A) \leq A! + 1, \text{ para cada } A \in \omega$$

(2) Dados $x, y \in \omega$ tales que $x \neq 0$ o $y \neq 0$, usaremos $mcd(x, y)$ para denotar el maximo comun divisor de x e y, es decir el mayor numero que divide a x y divide a y. Note que la funcion $M = \lambda xy[mcd(x, y)]$ tiene dominio igual a $\omega^2 - \{(0, 0)\}$. Pruebe que M es Σ-p.r.. (Hint: use la REGLA U).

(3) Sea Σ un alfabeto finito.
   (a) Pruebe que $\lambda xi\,[(x)_i]$ es Σ-p.r. (Hint: repase el significado de la expresion $(x)_i$ y encuentre entonces el dominio de $\lambda xi\,[(x)_i]$ antes de hacer el ejercicio)
   (b) Pruebe que la funcion Lt es Σ-p.r.

(4) Sea $\Sigma = \{@, !, \%, ?\}$. Sea $f : \Sigma^* \to \omega$ dada por:
$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \in \{\%, ?\}^*\}$$
Pruebe que f es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U). Ojo, puede haber un $\beta \in \{\%, ?\}^*$ que ocurra en α de manera “inextensible” pero que $f(\alpha)$ no sea igual a $|\beta|$.

(5) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea $L = \{@\}^* \cup \{!\}^* \cup \{\%\}^*$. Sea $f : \Sigma^* \to \omega$ dada por:
$$f(\alpha) = \max\{|\beta| : \beta \text{ ocurre en } \alpha \text{ y } \beta \in L\}$$
Pruebe que f es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U). Ojo, puede haber un $\beta \in L$ que ocurra en α de manera “inextensible” pero que $f(\alpha)$ no sea igual a $|\beta|$.

(6) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea $F = \lambda\alpha\beta[\max\{t \in \mathbf{N} : \alpha^t \text{ es tramo inicial de } \beta\}]$.
   (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de F
   (b) Pruebe que F es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U).

(7) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea $F = \lambda\beta[\max\{t \in \mathbf{N} : @^t \text{ es tramo inicial de } \beta\}]$.
   (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de F
   (b) Pruebe que F es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U).

(8) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$. Sea $F = \lambda\beta[\max\{t \in \omega : @^t \text{ ocurre en } \beta \text{ y } t \text{ es impar}\}]$.
   (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de F
   (b) Pruebe que F es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U).

(9) Sea $\Sigma = \{@, \bigcirc, \%, \square\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea $L = \{\alpha\beta : \alpha \in \{@, \bigcirc\}^* \text{ y } \beta \in \{\%, \square\}^*\}$. Sea $F : L \to \{\%, \square\}^*$ dada por $F(\alpha\beta) = \beta$, cada vez que $\alpha \in \{@, \bigcirc\}^*$ y $\beta \in \{\%, \square\}^*$.
   (a) Explique por que la definicion de F es inambigua
   (b) Encuentre un predicado P el cual sea Σ-p.r., cumpla que $D_P = \Sigma^* \times \Sigma^*$ y ademas $F = M^{\leq}(P)$.
   (c) Pruebe que F es Σ-p.r..

(10) Sea $\Sigma = \{@, \bigcirc, \%, !, \$\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Diremos que $\alpha \in \Sigma^*$ es un *auto* si $|\alpha|_{\bigcirc} = 2$. Sea $Au = \{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ es un auto}\}$. Obviamente todo auto se escribe univocamente en la forma $\alpha_1\bigcirc\alpha_2\bigcirc\alpha_3$, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{@, \%, !, \$\}^*$.
   (a) Por que usamos el nombre “auto”
   (b) Explique el “univovamente”
   (c) Sea $F : Au \to \Sigma^*$ dada por $F(\alpha_1\bigcirc\alpha_2\bigcirc\alpha_3) = \alpha_2$, cada vez que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{@, \%, !, \$\}^*$. Pruebe que F es Σ-p.r.

(11) Sea $\Sigma = \{@, \%, !, \$\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea
$$F = \lambda\beta[\max\{\gamma \in \Sigma^* : \gamma \text{ ocurre en } \beta \text{ y } \gamma \in \{@, \%\}^*]$$
(aqui el maximo es tomado respecto del orden total de Σ^* inducido por $\leq$). Pruebe que F es Σ-p.r..

(12) Sea $\Sigma = \{@, \%, !, \$\}$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea
$$F = \lambda\alpha\beta[\max\{\rho \in \{\%, !\}^+ : \rho \text{ es tramo inicial de } \alpha \text{ y } \beta\}]$$
(aqui el maximo es tomado respecto del orden total de Σ^* inducido por $\leq$).
  (a) Encuentre (segun manda notacion lambda) el dominio de F
  (b) Pruebe que F es Σ-p.r. (Hint: use la Regla U).

(13) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ. Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Sea $\leq$ un orden total sobre $\Gamma \cup Q$.
  (a) Sea $P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha \in Q \text{ y } \alpha \text{ ocurre en } \alpha_1]$. Encuentre $D_{M^{\leq}(P)}$. Que relacion hay entre la funcion $St : Des \to Q$ y $M^{\leq}(P)$
  (b) Encuentre un predicado R (modificando P) tal que $M^{\leq}(R) = St$.
  (c) Pruebe que St es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.