Nota: Los ejercicios que tienen (S) son para una "Segunda vuelta" es decir conviene hacerlos una vez que ya se completó la guía haciendo los otros y ya se tiene mas madurez e intuición basica sobre los conceptos. Los que tienen (O) son opcionales por lo cual no se toman en los examenes.

Sumatoria, productoria y concatenatoria de funciones Σ-p.r. Sea Σ un alfabeto finito. Sea $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$, con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Para $x, y \in \omega$ y $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$, definamos

$$\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) + ... + f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

$$\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}).f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha})....f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

En forma similar, cuando $I_f \subseteq \Sigma^*$, definamos

$$\underset{t=x}{\overset{t=y}{\subset}} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x > y \\ f(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) f(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) .... f(y, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

Note que, en virtud de la definicion anterior, el dominio de las funciones

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \qquad \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \qquad \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

es $\omega \times \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$.

Lemma 1 *Sea Σ un alfabeto finito.*

(a) Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces las funciones $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ son Σ-p.r.

(b) Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.

Proof. (a) Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, ..., p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$$

basta con probar que G es Σ-p.r.. Primero note que

$$\begin{array}{rcl} G(0,x,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x>0 \\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x=0 \end{array}\right. \\ G(t+1,x,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x>t+1 \\ G(t,x,\vec{x},\vec{\alpha})+f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x\leq t+1 \end{array}\right. \end{array}$$

O sea que si definimos

$$\begin{array}{rcl} h:\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m & \rightarrow & \omega \\ (x,\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x>0 \\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x=0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g:\omega^3\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m & \rightarrow & \omega \\ (A,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x>t+1 \\ A+f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x\leq t+1 \end{array}\right. \end{array}$$

tenemos que $G=R(h,g)$. Es decir que solo nos falta probar que h y g son Σ-p.r.. Sean

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & \{(x,\vec{x},\vec{\alpha})\in\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m : x>0\} \\ D_2 & = & \{(x,\vec{x},\vec{\alpha})\in\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m : x=0\} \\ H_1 & = & \left\{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha})\in\omega^3\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m : x>t+1\right\} \\ H_2 & = & \left\{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha})\in\omega^3\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m : x\leq t+1\right\}. \end{array}$$

Notese que

$$\begin{array}{rcl} h & = & C_0^{n+1,m}|_{D_1}\cup\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})\right]|_{D_2} \\ g & = & C_0^{n+3,m}|_{H_1}\cup\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A+f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})\right])|_{H_2} \end{array}$$

Ya que f es Σ-p.r. y

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})\right] & = & f\circ\left[C_0^{n+1,m},p_2^{n+1,m},p_3^{n+1,m},...,p_{n+1+m}^{n+1,m}\right] \\ \lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A+f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})\right]) & = & \lambda xy[x+y]\circ\left[p_1^{n+3,m},f\circ\left[Suc\circ p_2^{n+3,m},p_4^{n+3,m},...,p_{n+3+m}^{n+3,m}\right]\right] \end{array}$$

tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ y $\lambda Atx\vec{x}\vec{\alpha}\left[A+f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})\right])$ son Σ-p.r..O sea que solo nos falta ver que los conjuntos D_1,D_2,H_1,H_2 son Σ-p.r.. Veamos que por ejemplo H_1 lo es. Es decir debemos ver que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r.. Ya que f es Σ-p.r. tenemos que $D_f=\omega\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m$ es Σ-p.r., lo cual nos dice que los conjuntos $S_1,...,S_n$, $L_1,...,L_m$ son Σ-p.r. y por lo tanto $R=\omega^3\times S_1\times...\times S_n\times L_1\times...\times L_m$ es Σ-p.r.. Notese que $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}}=(\chi_R^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}}\wedge\lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\left[x>t+1\right])$ por lo cual $\chi_{H_1}^{\omega^{3+n}\times\Sigma^{*m}}$ es Σ-p.r. ya que es la conjuncion de dos predicados Σ-p.r. ■

Nota: Aceptaremos sin prueba (b) y el caso de la productoria en (a). Las pruebas son muy similares a la dada para la sumatoria

Veamos un ejemplo de como se puede aplicar el lema anterior. Sea $F = \lambda y x_1 \left[\sum_{t=0}^{t=y} (x_1)^t \right]$. Es claro que $D_F = \omega^2$. Para ver que F es Σ-p.r. aplicaremos el lema anterior por lo cual es importante encontrar la f adecuada a la cual se le aplicara el lema. Tomemos $f = \lambda t x_1 [(x_1)^t]$. Claramente f es Σ-p.r. por lo cual el lema anterior nos dice que

$$G = \lambda x y x_1 \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, x_1) \right] = \lambda x y x_1 \left[\sum_{t=x}^{t=y} (x_1)^t \right]$$

es Σ-p.r.. Claramente G no es la funcion F pero es en algun sentido "mas amplia" que F ya que tiene una variable mas y se tiene que $F(y, x_1) = G(0, y, x_1)$, para cada $y, x_1 \in \omega$. Es facil ver que

$$F = G \circ \left[C_0^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0} \right]$$

por lo cual F es Σ-p.r..

Haga los siguientes ejercicios aplicando el lema anterior. No caiga en la tentacion de hacerlos aplicando recursion primitiva ya que no se ejercitara en la habilidad de aplicar el lema en forma madura.

Ejercicio 1: Pruebe que la función $\lambda x x_1 \left[\sum\limits_{t=1}^{t=x} Pred(x_1)^t \right]$ es Σ-p.r..

Ejercicio 2: Pruebe que la función

$$\lambda x y \alpha \left[\prod_{t=y+1}^{t=|\alpha|} (t + |\alpha|) \right]$$

es Σ-p.r..

Ejercicio 3: Pruebe que la función

$$\lambda x y z \alpha \beta [\subset_{t=3}^{t=z+5} \alpha^{Pred(z).t} \beta^{Pred(Pred(|\alpha|))}]$$

es Σ-p.r.. (Ojo que aqui el dominio de la f a la cual le debe aplicar el lema es un rectangulo pero f no es Σ´-total)

Cuantificacion acotada de predicados Σ-p.r. con dominio rectangular
Ses $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado, con $S, S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$. Entonces la expresion Booleana

$$(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \, P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

depende de las variables $x, \vec{x}, \vec{\alpha}$ y valdra 1 en una $(1+n+m)$-upla $(x, \vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$ sea igual a 1 para cada $t \in \{u \in \bar{S} : u \leq x\}$; y 0 en caso contrario. Tenemos entonces que el dominio del predicado

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

es $\omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$. En forma analoga se define la forma de interpretar la expresion Booleana

$$(\exists t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Cabe destacar que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

Tambien podemos cuantificar sobre variable alfabetica. Sea $P : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times L \to \omega$ un predicado, con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L, L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{L} \subseteq L$. Entonces la expresion Booleana

$$(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

depende de las variables $x, \vec{x}, \vec{\alpha}$ y valdra 1 en una $(1+n+m)$-upla $(x, \vec{x}, \vec{\alpha})$ cuando $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ sea igual a 1 para cada $\alpha \in \{u \in \bar{L} : |\alpha| \leq x\}$; y 0 en caso contrario. Tenemos entonces que el dominio del predicado

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$$

es $\omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$. En forma analoga se define la forma de interpretar la expresion Booleana

$$(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$$

Cabe destacar que

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$$

Lemma 2 *Sea Σ un alfabeto finito.*

(a) Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S, S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ son predicados Σ-p.r..

(b) Sea $P : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times L \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L, L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$ son predicados Σ-p.r..

OBSERVACION: La cuantificacion no acotada no preserva la propiedad de ser Σ-p.r.. Como veremos mas adelante hay un predicado Σ-p.r., $P : \omega \times L_1 \to \omega$, tal que el predicado $\lambda\alpha\,[(\exists t \in \omega)\ P(t,\alpha)]$ no es Σ-efectivamente computable, por lo cual tampoco es Σ-p.r. (ni siquiera podra ser Σ-recursivo).

Veamos por ejemplo que el predicado $\lambda xy\,[x \text{ divide } y]$ es Σ-p.r.. Sea $P = \lambda t x_1 x_2\,[x_2 = t.x_1]$. Es claro que P es Σ-p.r.. El lema anterior nos dice que $\lambda x x_1 x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ P(t,x_1,x_2)]$ es Σ-p.r.. Notese que x_1 divide x_2 si y solo si hay un $t \leq x_2$ tal que $x_2 = t.x_1$. Esto nos dice que

$$\lambda x_1 x_2\,[x_1 \text{ divide } x_2] = \lambda x_1 x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2}\ P(t,x_1,x_2)]$$

Pero

$$\lambda x_1 x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2}\ P(t,x_1,x_2)] = \lambda x x_1 x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ P(t,x_1,x_2)] \circ \left[p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right]$$

por lo cual $\lambda x_1 x_2\,[x_1 \text{ divide } x_2]$ es Σ-p.r.

La idea fundamental subyacente en la aplicacion anterior es que en muchos casos de predicados obtenidos por cuantificacion a partir de otros predicados, la variable cuantificada tiene una cota natural en terminos de las otras variables y entonces componiendo adecuadamente se lo puede presentar como un caso de cuantificacion acotada

Ejercicio 4: Use que

$$x \text{ es primo sii } x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x}\ t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$$

para probar que $\lambda x\,[x \text{ es primo}]$ es Σ-p.r.

Ejercicio 5: Pruebe que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ-p.r..

Ejercicio 6: Pruebe que $\{\alpha^2 : \alpha \in \Sigma^*\}$ es Σ-p.r..

Ejercicio 7: Pruebe que $\{(x,\alpha,\beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : (\exists t \in \omega)\ \alpha^x = \beta^t\}$ es Σ-p.r..

Ejercicio 8: Dados $x, y \in \omega$, diremos que x e y son *coprimos* cuando 1 sea el unico elemento de ω que divide a ambos. Sea $P = \lambda xy[x \text{ e } y \text{ son coprimos}]$. Pruebe que P es Σ-p.r.

Ejercicio 9: Sea $\Sigma = \{\boxplus, \boxminus\}$. Pruebe que el conjunto

$$\{(x,y,\alpha,\beta) \in \mathbf{N} \times \Sigma^* \times \Sigma^+ : \boxplus\beta\boxplus = \gamma\boxminus\alpha\boxminus\gamma^R, \text{ para algun } \gamma\}$$

es Σ-p.r.. (Por definicion: $\gamma^R = [\gamma]_{|\gamma|}[\gamma]_{|\gamma|-1}...[\gamma]_1$ si $|\gamma| \geq 1$ y $\gamma^R = \varepsilon$ si $\gamma = \varepsilon$)

Ejercicio 10: Pruebe que $\{2^x : x \in \omega \text{ y } x \text{ es impar}\}$ es Σ-p.r.

Ejercicio 11: Sea $\Sigma = \{@, \$\}$. Pruebe que $\{(2^x, @^x, \$) : x \in \omega$ y x es impar$\}$ es Σ-p.r.

Ejercicio 12: Pruebe que $\{(x, \alpha, \beta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : (\exists t \in \mathrm{Im}(pr))\ \alpha^{Pred(Pred(x)).Pred(|\alpha|)} = \beta^t\}$ es Σ-p.r.. (ojo que aqui el predicado al cual debera aplicarle el lema de cuantificacion acotada no es Σ-total)

Como puede notarse, en los ejercicios anteriores se aplica una sola ves el lema de cuantificacion acotada. En los ejercicios que siguen veremos algunos casos en los cuales es necesario anidar cuantificaciones acotadas.

Ejercicio 13: (S) Pruebe que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha$ ocurre en $\beta]$ es Σ-p.r..

Ejercicio 14: (S) Sea $\Sigma = \{@, !\}$. Pruebe que $\{@^t!^l : t \in \mathbf{N}$ y l es impar$\}$ es Σ-p.r..

Ejercicio 15: (S) Pruebe que $\{x \in \mathbf{N} : \exists p, q$ tales que $x = p.q$ y p, q son primos$\}$ es Σ-p.r..

Ejercicio 16: (S) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ. Notese que para cada $\zeta \in (\Gamma \cup Q)^*$ se tiene que

$$\zeta \in Des \text{ si y solo si } (\exists \alpha \in \Gamma^*)(\exists \beta \in Q)(\exists \gamma \in \Gamma^*)\ ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha\beta\gamma)$$

Usaremos notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Notese que

$$\chi_{Des}^{(\Gamma\cup Q)^*} = \lambda\zeta[(\exists \alpha \in \Gamma^*)(\exists \beta \in Q)(\exists \gamma \in \Gamma^*)\ ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha\beta\gamma)]$$

(a) Sea $P_1 = \lambda\zeta\alpha\beta\gamma[[\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha\beta\gamma]$. Encuentre D_{P_1} y pruebe que P_1 es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.

(b) Sea $P_2 = \lambda\zeta\alpha\beta[(\exists \gamma \in \Gamma^*)\ ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha\beta\gamma)]$. Encuentre D_{P_2} y pruebe que P_2 es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.

(c) Sea $P_3 = \lambda\zeta\alpha[(\exists \beta \in Q)(\exists \gamma \in \Gamma^*)\ ([\gamma]_{|\gamma|} \neq B \wedge \zeta = \alpha\beta\gamma)]$. Encuentre D_{P_3} y pruebe que P_3 es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.

(d) Pruebe que $\chi_{Des}^{(\Gamma\cup Q)^*}$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. Concluya que Des es un conjunto $(\Gamma \cup Q)$-p.r.

Minimizacion y funciones Σ-recursivas

Tal como fue explicado en el comienzo de la Guia 5, para obtener la clase de las funciones Σ-recursivas debemos agregar un nuevo constructor a los ya definidos de composicion y recursion primitiva, a saber el constructor de *minimizacion*.

Minimizacion de variable numerica Sea Σ un alfabeto finito y sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado. Dado $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$, cuando exista al menos un $t \in \omega$ tal que $P(t,\vec{x},\vec{\alpha}) = 1$, usaremos $\min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ para denotar al menor de tales $t's$. Notese que la expresion $\min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$-uplas $(\vec{x},\vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un t tal que se da $P(t,\vec{x},\vec{\alpha}) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ no estara definida cuando para cada $t \in \omega$ se de que $(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ no pertenece a D_P o $P(t,\vec{x},\vec{\alpha}) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ no depende de la variable t. Por ejemplo, las expresiones $\min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha})$ y $\min_i P(i,\vec{x},\vec{\alpha})$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$-uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M(P) = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

Notese que

$$\begin{array}{rcl} D_{M(P)} & = & \{(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega)\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\} \\ M(P)(\vec{x},\vec{\alpha}) & = & \min_t P(t,\vec{x},\vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M(P)} \end{array}$$

Diremos que $M(P)$ se obtiene por *minimizacion de variable numerica* a partir de P.

Veamos un ejemplo. Recordemos que dados $x_1, x_2 \in \omega$, con x_1 no nulo, el *cociente de dividir* x_1 *por* x_2 se define como el maximo elemento del conjunto $\{t \in \omega : t.x_2 \leq x_1\}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} Q : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x_1, x_2) & \rightarrow & \text{cociente de dividir } x_1 \text{ por } x_2 \end{array}$$

Sea $P = \lambda t x_1 x_2 \left[x_1 < t.x_2\right]$. Notar que

$$\begin{array}{rcl} D_{M(P)} & = & \{(x_1,x_2) \in \omega^2 : (\exists t \in \omega)\ P(t,x_1,x_2) = 1\} \\ & = & \{(x_1,x_2) : (\exists t \in \omega)\ x_1 < t.x_2\} \\ & = & \omega \times \mathbf{N} \end{array}$$

Ademas si $(x_1, x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$, es facil de probar que

$$\min_t\ x_1 < t.x_2 = Q(x_1,x_2) + 1$$

por lo que $M(P) = Suc \circ Q$. Si quisieramos encontrar un predicado P' tal que $M(P') = Q$, entonces podemos tomar $P' = \lambda t x_1 x_2 \left[x_1 < (t+1).x_2\right]$ y con un poco de concentracion nos daremos cuenta que $M(P') = Q$. De todas maneras hay una forma mas facil de hacerlo y es tomando P' de tal forma que para cada $(x_1,x_2) \in D_Q$ se de que

$$Q(x_1,x_2) = \text{ unico } t \in \omega \text{ tal que } P'(t,x_1,x_2)$$

Por ejemplo se puede tomar $P' = \lambda t x_1 x_2 \,[x_1 \geq t.x_2$ y $x_1 < (t+1).x_2]$ que dicho sea de paso es justo la definicion de cociente dada en la escuela primaria. Dejamos al lector corroborar que $M(P') = Q$, para este ultimo P'.

REGLA U: Si tenemos una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y buscamos un predicado P tal que $f = M(P)$ muchas veces es util tratar de diseñar P de manera que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$ se de que

$$f(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \text{ unico } t \in \omega \text{ tal que } P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})$$

Ejercicio 17: Aplique la REGLA U para encontrar un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1[\text{parte entera de } \sqrt{x_1}]$.

Ejercicio 18: Encuentre un predicado P tal que $M(P) = \lambda x_1 x_2 [x_1 \dot{-} x_2]$. (Aqui es natural hacerlo sin la idea de la REGLA U.)

Ejercicio 19: Diga si el siguiente enunciado es V o F o I. Justifique.

- Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^2 \to \omega$ es un predicado Σ-recursivo, entonces el siguiente procedimiento (con dato de entrada $(x, y) \in \omega^2$) computa la funcion $M(P)$.

  Etapa 1: Hacer $T = 0$ e ir a Etapa 2

  Etapa 2: Si $(T, x, y) \in D_P$ y $P(T, x, y) = 1$, entonces ir a Etapa 4, en caso contrario ir a Etapa 3.

  Etapa 3: Hacer $T = T + 1$ e ir a Etapa 2.

  Etapa 4: Dar T como salida y terminar

Lemma 3 *Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable y D_P es Σ-efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ-efectivamente computable.*

Ejercicio 20: Pruebe el lema anterior

Lamentablemente si quitamos la hipotesis en el lema anterior de que D_P sea Σ-efectivamente computable, el lema resulta falso. Mas adelante veremos un ejemplo. Por el momento el lector puede ejercitar su comprencion del tema convenciendose de que aun teniendo un procedimiento efectivo que compute a un predicado $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$, no es claro como construir un procedimiento efectivo que compute a $M(P)$.

Ejercicio 21: V o F o I. Justifique.

(a) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \to \omega$ un predicado. Si $\vec{x} \in \omega^n$ es tal que existe t en ω que cumple $(t, \vec{x}) \in D_P$, entonces $\vec{x} \in D_{M(P)}$.

(b) Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \to \omega$ un predicado. Entonces $M(P)(\vec{x}) \leq t$

(c) Sea $P : \omega^n \to \omega$ un predicado, con $n \geq 1$. Entonces $D_{M(P)} \subseteq \omega^{n-1}$

(d) Sea Σ un alfabeto finito. Entonces $M(p_1^{1,2}) = C_0^{0,2}$

Definicion de funcion Σ-recursiva Con este nuevo constructor de funciones estamos en condiciones de definir la clase de las funciones Σ-recursivas. Definamos los conjuntos $\mathrm{R}_0^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_1^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_2^\Sigma \subseteq ... \subseteq \mathrm{R}^\Sigma$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{R}_0^\Sigma & = & \mathrm{PR}_0^\Sigma \\
\mathrm{R}_{k+1}^\Sigma & = & \mathrm{R}_k^\Sigma \cup \left\{ f \circ [f_1, ..., f_n] : f, f_1, ..., f_r \in \mathrm{R}_k^\Sigma,\ r \geq 1 \right\} \cup \\
 & & \qquad \left\{ R(f, \mathcal{G}) : f \text{ y cada } \mathcal{G}_a \text{ pertenecen a } \mathrm{R}_k^\Sigma \right\} \cup \\
 & & \qquad\qquad \left\{ R(f, g) : f, g \in \mathrm{R}_k^\Sigma \right\} \cup \\
 & & \qquad\qquad\quad \left\{ M(P) : P \text{ es } \Sigma\text{-total y } P \in \mathrm{R}_k^\Sigma \right\} \\
\mathrm{R}^\Sigma & = & \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{R}_k^\Sigma
\end{array}$$

Una funcion f es llamada Σ-*recursiva* si pertenece a R^Σ. Cabe destacar que aunque $M(P)$ fue definido para predicados no necesariamente Σ-totales, en la definicion de los conjuntos R_k^Σ, nos restringimos al caso en que P es Σ-total.

Notese que $\mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, para cada $k \in \omega$, por lo cual $\mathrm{PR}^\Sigma \subseteq \mathrm{R}^\Sigma$.

Proposition 4 *Si $f \in \mathrm{R}^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.*

Ejercicio 22: Explique con palabras como haria la prueba de la proposicion anterior

Daremos sin prueba el siguiente conceptualmente importante resultado.

Proposition 5 *Sea Σ un alfabeto finito. Entonces no toda funcion Σ-recursiva es Σ-p.r.. Es decir que $\mathrm{PR}^\Sigma \subseteq \mathrm{R}^\Sigma$ y $\mathrm{PR}^\Sigma \neq \mathrm{R}^\Sigma$.*

Este resultado no es facil de probar. Mas adelante veremos ejemplos naturales de funciones Σ-recursivas que no son Σ-p.r.. Otro ejemplo natural es la famosa funcion de Ackermann.

Lema de minimizacion acotada de variable numerica de predicados Σ-p.r. Como veremos mas adelante, no siempre que $P \in \mathrm{R}^\Sigma$, tendremos que $M(P) \in \mathrm{R}^\Sigma$. Sin envargo, el siguiente lema nos garantiza que cuando $P \in \mathrm{PR}^\Sigma$, se da que $M(P) \in \mathrm{R}^\Sigma$ y ademas da condiciones para que $M(P)$ sea Σ-p.r..

Lemma 6 *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces*

(a) $M(P)$ es Σ-recursiva.

(b) Si hay una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ es Σ-p.r..

Proof. (a) Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Note que $\bar{P}$ es Σ-p.r. (por que?). Veremos a continuacion que $M(P) = M(\bar{P})$. Notese que

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega : \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

Esto claramente dice que $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$., por lo cual $M(P) = M(\bar{P})$.

Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ-recursiva. Sea k tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. Ya que $\bar{P}$ es Σ-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma$.

(b) Ya que $M(P) = M(\bar{P})$, basta con probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ-p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

lo cual nos dice que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ \left[f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m} \right]$$

Pero el Lema 2 nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \; \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ lo es.

Sea

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} \; j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

Note que P_1 es Σ-total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que P_1 es Σ-p.r. Ademas notese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ se tiene que

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \text{ si y solo si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) |_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. solo nos resta probar que

$$F = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]$$

lo es. Pero

$$F = \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \circ \left[C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m}\right]$$

y por lo tanto el Lema 1 nos dice que F es Σ-p.r.. ■

OBSERVACION: No siempre que P sea Σ-p.r. tendremos que $M(P)$ lo sera. Notese que si $M(P)$ fuera Σ-p.r., cada ves que P lo sea, entonces tendriamos que $\mathrm{PR}^\Sigma = \mathrm{R}^\Sigma$ (justifique) lo cual contradiria la Proposicion 5. Mas adelante veremos un ejemplo natural de un predicado P el cual es Σ-p.r. pero $M(P)$ no es Σ-p.r.

El lema de minimizacion recien probado es muy util como lo veremos en los siguientes dos lemas.

Lemma 7 *Sea Σ un alfabeto finito. Las siguientes funciones son Σ-p.r.:*

(a) $\begin{array}{rcl} Q : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \textit{cociente de la division de } x \textit{ por } y \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} R : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \textit{resto de la division de } x \textit{ por } y \end{array}$

Proof. (a) Ya vimos anteriormente que $Q = M(P)$, donde $P' = \lambda tx_1x_2\left[x_1 \geq t.x_2 \text{ y } x_1 < (t+1).x_2\right]$. Ya que P' es Σ-p.r. y

$$Q(x_1,x_2) \leq p_1^{2,0}(x_1,x_2), \text{ para cada } (x_1,x_2) \in \omega \times \mathbf{N}$$

(b) del Lema 6 implica que $Q \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

(b) Notese que

$$R = \lambda xy\left[x \dot{-} Q(x,y).y\right]$$

y por lo tanto $R \in \mathrm{PR}^\Sigma$. ■

Ejercicio 23: Dados $x, y \in \omega$ tales que $x \neq 0$ o $y \neq 0$, usaremos $mcd(x,y)$ para denotar el maximo comun divisor de x e y. Note que $M = \lambda xy[mcd(x,y)]$ tiene dominio igual a $\omega^2 - \{(0,0)\}$. Pruebe que M es Σ-p.r.. (Hint use la REGLA U)

Lemma 8 *Sea Σ un alfabeto finito. Entonces la funcion*

$$\begin{array}{rcl} pr:\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n\text{-esimo numero primo} \end{array}$$

es Σ-p.r.

Proof. Para ver que pr es Σ-p.r., veremos que la extension $h:\omega\rightarrow\omega$, dada por $h(0)=0$ y $h(n)=pr(n)$, $n\geq 1$, es Σ-p.r.. Luego $pr=h|_{\mathbf{N}}$ resultara Σ-p.r. por ser la restriccion de una funcion Σ-p.r. a un conjunto Σ-p.r.. Primero note que

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0 \\ h(t+1) & = & \min_i \left(i \text{ es primo} \wedge i>h(t)\right) \end{array}$$

O sea que $h=R\left(C_0^{0,0},g\right)$, donde

$$\begin{array}{rcl} g:\omega\times\omega & \rightarrow & \omega \\ (A,t) & \rightarrow & \min_i \left(i \text{ es primo} \wedge i>A\right) \end{array}$$

Es decir que solo nos resta ver que g es Σ-p.r.. Pero notese que $g=M(P)$, donde $P=\lambda iAt\left[i \text{ es primo} \wedge i>A\right]$. Claramente P es Σ-p.r. por lo cual para poder aplicar (b) del lema anterior debemos encontrar una funcion $f:\omega\times\omega\rightarrow\omega$ tal que

$$M(P)(A,t)\leq f(A,t), \text{ para cada } (A,t)\in\omega^2$$

Aceptaremos sin prueba que

$$\min_i \left(i \text{ es primo} \wedge i>A\right)\leq A!+1, \text{ para cada } A\in\omega$$

Es decir que $f=\lambda At[A!+1]$ cumple lo deseado, lo cual implica que $g=M(P)$ es Σ-p.r. ■

Ejercicio 24: (O) Si tiene ganas y recuerda las propiedades basicas de divisibilidad, intente un rato probar que

$$\min_i \left(i \text{ es primo} \wedge i>A\right)\leq A!+1, \text{ para cada } A\in\omega$$

(Hint: factorice $A!+1$ en producto de primos y vea que alguno debe ser mayor que A.)

Ejercicio 25: Pruebe que $\lambda xi\left[(x)_i\right]$ es Σ-p.r. (Hint: repase el significado de la expresion $(x)_i$ y encuentre entonces el dominio de $\lambda xi\left[(x)_i\right]$ antes de hacer el ejercicio)

Ejercicio 26: Pruebe que la funcion Lt es Σ-p.r.

Ejercicio 27: Sea $C=\{z^2:z\in\omega\}$. Sea $f:C\rightarrow\omega$ dada por $f(x)=\sqrt{x}$, para cada $x\in C$. Pruebe que f es Σ-p.r.

Minimizacion de variable alfabetica Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Recordemos que $\leq$ puede ser naturalmente extendido a un orden total sobre Σ^*. Sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado. Cuando $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es tal que existe al menos un $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$, usaremos $\min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ para denotar al menor $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Notese que la expresion $\min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ esta definida solo para aquellas $(n+m)$-uplas $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para las cuales hay al menos un α tal que se da $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 1$. Dicho de otra forma, $\min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no estara definida cuando para cada $\alpha \in \Sigma^*$ se de que $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no pertenece a D_P o $P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) = 0$. Otro detalle importante a tener en cuenta es que la expresion $\min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ no depende de la variable α. Por ejemplo, las expresiones $\min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)$ y $\min_\beta^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)$ son equivalentes en el sentido que estan definidas en las mismas $(n+m)$-uplas y cuando estan definidas asumen el mismo valor.

Definamos

$$M^\leq(P) = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[\min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$$

Notese que

$$\begin{aligned} D_{M^\leq(P)} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*)\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\} \\ M^\leq(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) &= \min_\alpha^\leq P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^\leq(P)} \end{aligned}$$

Diremos que $M^\leq(P)$ es obtenida por *minimizacion de variable alfabetica* a partir

de P.

Vemos un ejemplo. Sea $\Sigma = \{@, a, b, c, d, e\}$ y sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Sea $Dir = \{\alpha_1 \in \Sigma^* : |\alpha_1|_@ = 1\}$ y definamos $U : Dir \to \Sigma^*$ de la siguiente manera

$$U(\alpha_1) = \text{unico } \alpha \text{ tal que } \alpha @ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1$$

Sea

$$P = \lambda \alpha_1 \alpha [\alpha_1 \in Dir \text{ y } \alpha @ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_{M^\leq(P)} &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : (\exists \alpha \in \Sigma^*)\ P(\alpha_1, \alpha)\} \\ &= \{\alpha_1 \in \Sigma^* : \alpha_1 \in Dir \text{ y } (\exists \alpha \in \Sigma^*)\ \alpha @ \text{ es tramo inicial de } \alpha_1\} \\ &= Dir \end{aligned}$$

y ademas es claro que $M^\leq(P)(\alpha_1) = U(\alpha_1)$, para cada $\alpha_1 \in Dir$, por lo cual $M^\leq(P) = U$.

Lema de minimizacion acotada de variable alfabetica de predicados Σ-p.r. Aceptaremos sin prueba el siguiente resultado. Su prueba es rutinaria y se basa en el Lema 6

Lemma 9 *Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $\leq$ un orden total sobre Σ, sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces*

(a) $M^{\leq}(P)$ es Σ-recursiva.

(b) Si existe una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que

$$\left|M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})\right| = \left|\min_{\alpha}^{\leq} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^{\leq}(P)},$$

entonces $M^{\leq}(P)$ es Σ-p.r..

Ejercicio 28: Pruebe que la funcion U del ejemplo anterior es Σ-p.r.. Por que se elijieron los nombres Dir y U?

Ejercicio 29: Dada una palabra $\alpha \in \Sigma^*$, si hay una palabra ρ tal que $\rho^2 = \alpha$, usaremos $\sqrt{\alpha}$ para denotar a ρ. Notese que la expresion $\sqrt{\alpha}$ tiene sentido o esta definida solo para ciertas palabras. Pruebe que $\lambda\alpha[\sqrt{\alpha}]$ es Σ-p.r..

Ejercicio 30: Sea Σ un alfabeto no vacio y sea $\leq$ un orden total sobre Σ.

(a) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha\,[\alpha_1 = \varepsilon])$

(b) Diga que funcion es $M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha\,\left[\alpha^2 = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_1\right])$

Ejercicio 31: V o F o I, justifique.

(a) Sea Σ un alfabeto no vacio y sea $\leq$ un orden total sobre Σ. Entonces $p_1^{0,2} = M^{\leq}(\lambda\alpha_1\alpha\,[\alpha = \alpha_1])$

(b) Sea $\leq$ un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado, entonces

$$D_{M^{\leq}(P)} = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists \alpha \in \Sigma^*)\ (\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \in D_P\}$$

(c) Sea $\leq$ un orden total sobre Σ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado, entonces

$$\begin{array}{rcl} D_{M^{\leq}(P)} & = & \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \wedge (\forall \beta \in \Sigma^*)_{\beta < \alpha} \neg P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \beta)\} \\ M^{\leq}(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) & = & \alpha \end{array}$$

Ejercicio 32: (S) Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing y supongamos Q es un alfabeto disjunto con Γ. Usaremos la notacion lambda respecto del alfabeto $\Gamma \cup Q$. Sea $\leq$ un orden total sobre $\Gamma \cup Q$.

(a) Sea $P = \lambda\alpha_1\alpha[\alpha \in Q$ y α ocurre en $\alpha_1]$. Encuentre $D_{M^{\leq}(P)}$. Que relacion hay entre la funcion $St : Des \to Q$ y $M^{\leq}(P)$

(b) Encuentre un predicado R (modificando P) tal que $M^{\leq}(R) = St$.

(c) Pruebe que St es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.

Conjuntos Σ-recursivamente enumerables

Ya que la nocion de funcion Σ-recursiva es el modelo matematico Godeliano del concepto de funcion Σ-efectivamente computable, nos podriamos preguntar entonces cual es el modelo matematico Godeliano del concepto de conjunto Σ-efectivamente enumerable. Si prestamos atencion a la definicion de conjunto Σ-efectivamente enumerable, notaremos que depende de la existencia de ciertas funciones Σ-efectivamente computables por lo cual la siguiente definicion cae de maduro:

Diremos que un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado *Σ-recursivamente enumerable* cuando sea vacio o haya una funcion $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que $I_F = S$ y $F_{(i)}$ sea Σ-recursiva, para cada $i \in \{1, ..., n+m\}$.

Deberia entonces quedar claro que si el concepto de funcion Σ-recursiva modeliza correctamente al concepto de funcion Σ-efectivamente computable, entonces el concepto de conjunto Σ-recursivamente enumerable recien definido modeliza correctamente al concepto de conjunto Σ-efectivamente enumerable. Sin envargo para probar algunos de los resultados basicos acerca de los conjuntos Σ-recursivamente enumerables, deberemos esperar a tener probada la equivalencia del paradigma Godeliano con el imperativo.

Conjuntos Σ-recursivos

La version Godeliana del concepto de conjunto Σ-efectivamente computable es facil de dar: un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ sera llamado *Σ-recursivo* cuando la funcion $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ sea Σ-recursiva. Todo conjunto Σ-recursivo es Σ-recursivamente enumerable pero esto lo probaremos mas adelante junto con otros resultados basicos sobre conjuntos Σ-r.e., los cuales se prueban usando el modelo imperativo. Mas adelante daremos un ejemplo natural de un conjunto que es Σ-r.e. pero el cual no es Σ-recursivo.

Ejercicio 33: Sea Σ un alfabeto finito.

(a) Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-r., entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son tambien.

(b) Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-recursivos. Entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ son Σ-recursivos

Independencia del alfabeto

El siguiente resultado es conceptualmente muy importante. Su prueba tiene cierta dificultad tecnica por lo cual la omitiremos.

Theorem 10 *Sean Σ y Γ alfabetos finitos cualesquiera.*

(a) *Supongamos una funcion f es Σ-mixta y Γ-mixta, entonces f es Σ-recursiva (resp. Σ-p.r.) sii f es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.)*

(b) *Supongamos un conjunto S es Σ-mixto y Γ-mixto, entonces S es Σ-recursivo (resp. Σ-r.e., Σ-p.r.) sii S es Γ-recursivo (resp. Γ-r.e., Γ-p.r.)*

Ejercicio 34: (S) Explique con palabras por que no es obvio el resultado anterior

Ejercicio 35: (S) Que hubiera implicado acerca de la completitud del modelo Godeliano el hecho de que no fuera cierto (a) del teorema anterior?