Modelos y Simulación 2020 Prof. Grisel Britos

Práctico 6

Ej 4 Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión de v.a. con $U_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

Sea: $N = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\}$ (1)

a)

. En el ejercicio 6 Práctico 3 se pide calcular $E(N)$.

. En el archivo "Aproximaciones_e.pdf" se calcula la función de probabilidad de masa de E y se prueba $E(N)=e$.

. Luego, como propone el Método de Monte Carlo, para m suficientemente grande, si $N_1, \dots, N_m$ son como en (1) y $n_1, \dots, n_m$ son observaciones de ellas, i.e. $n_1 = N_1(\omega), n_2 = N_2(\omega), \dots, n_m = N_m(\omega)$, entonces:

$$e = E(N) \approx \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} N_i(\omega) = \overline{N}_m(\omega)$$

Por lo tanto, e se puede aproximar por la media muestral $\overline{N}_m$

b) . $Var(\overline{N}) = ?$

Por lo visto en "Aproximaciones de e",

$$P(N=n) = \frac{n-1}{n!}$$

. Ahora, $Var(\overline{N}) = Var\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} N_i\right) = \frac{1}{m^2} Var\left(\sum N_i\right) \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n} Var(N_i) \overset{\text{i. dist.}}{=} \frac{1}{m} Var(N_1)$

. $Var(N_1) = Var(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \overbrace{E(N^2)}^{=?} - e^2$

. $E(N^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\cancel{2}} \cdot \frac{n-1}{\cancel{n!}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,\cancel{(n-1)}}{\cancel{(n-1)}!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2)}{m!} =$ ($n-2=m$)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cancel{m}}{\cancel{m!}} + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!} + 2 \cdot e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} + 2e = e + 2e = 3e$$

($m-1=k$)

$\therefore$ $Var(\overline{N}) = \frac{1}{m}(3e - e^2)$ valor constante y conocido.

. Estimador de máxima verosimilitud de $Var(\overline{N})$:

Observar: . La distribución de N no tiene parámetros desconocidos.

. Si $Var(g(\underline{X})) = c$ con c constante, entonces

$\widehat{Var(g(\underline{X}))} = \hat{c} = c$. Es decir, el EMV de una cte c, es la variable aleatoria que vale constantemente c.

Luego, $\widehat{Var(\bar{N})} = \widehat{\frac{1}{m}(3e-e^2)} = \frac{1}{m}(3e-e^2)$

↳ pues es una constante.

$\therefore$ el EMV de $Var(\bar{N})$ es la variable constante $\frac{1}{m}(3e-e^2)$

c). Aquí primero hay que simular 1000 veces $\bar{N}$ y calcular la varianza muestral:

$$S^2 = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}(N_i - \bar{N}_{1000})^2$$

(Observación: otra forma de reescribir S^2 es: $S^2 = \left(\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} N_i^2\right) - (\bar{N}_{1000})^2$

. Para calcular un IC del 95% con 1000 simulaciones usar:

$$IC : \left[\bar{N}_{1000} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{1000}} \, ; \, \bar{N}_{1000} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{1000}} \right]$$