TASAS DE RIESGO

EJERCICIOS 11 - PRÁCTICO 4 2022

OSCAR BUSTOS - PATRICIA KISBYE - A.G. FLESIA.

1. Tasas de riesgo

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X=j)=p_j$ con $j=1,2,\ldots$. Sea:

$$\lambda_n = P(X=n|X>n-1) = \frac{p_n}{1-\sum_{j=1}^{n-1} p_j}\ ,\ \ n=1,2,\ldots$$

Las cantidades λ_n, son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n-1$, muera en el tiempo n.

Veamos que $p_1=\lambda_1$ y que

$$p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n. \tag{1}$$

1.1. Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos el principio de inducción. Para $n=1$, notemos que

$$p_1 = P(X=1) = P(X=1,\ X>0) = P(X=1\mid X>0)\cdot P(X>0).$$

Como $P(X>0)=1$, entonces resulta:

$$p_1 = P(X=1\mid X>0) = \lambda_1.$$

Para $n=2$, de manera análoga vemos que

$$p_2 = P(X=2) = P(X=2,\ X>1) = P(X=2\mid X>1)\cdot P(X>1) = \lambda_2\cdot(1-p_1).$$

Dado que $p_1=\lambda_1$, resulta

$$p_2 = \lambda_2\cdot(1-\lambda_1).$$

Supongamos entonces que (1) se cumple para cierto $n\in\mathbb{N}$. Entonces, para p_{n+1} tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X=n+1) = P(X=n+1\mid X>n)\cdot P(X>n) \\ &= \lambda_{n+1}\cdot(1-\sum_{j=0}^{n} p_n) \\ &= \lambda_{n+1}\cdot(1-p_1-p_2-\cdots-p_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora bien, por hipótesis inductiva tenemos que

$$p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n, \tag{3}$$

pero por definición también es cierto que

$$p_n = P(X=n\mid X>n-1)\cdot P(X>n-1) = \lambda_n\cdot(1-p_1-p_2-\cdots-p_{n-1}). \tag{4}$$

Luego de (3) y (4) resulta que

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1}) = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{n-1}. \tag{5}$$

Volviendo a (2), tenemos que

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (1-p_1-p_2-\cdots-p_n)\cdot\lambda_{n+1} \\
&= (1-p_1-p_2-\cdots-p_{n-1})\cdot\lambda_{n+1} - p_n\lambda_{n+1} \\
&= (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\cdot\lambda_{n+1} - p_n\lambda_{n+1} \qquad \text{por (5)} \\
&= (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\cdot\lambda_{n+1} - (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n\lambda_{n+1} \qquad \text{por H.I.} \\
&= (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})(1-\lambda_n)\cdot\lambda_{n+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n \geq 1$ se cumple que

$$p_n = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_{n-1})\lambda_n,$$