Aproximaciones al valor de e.

1 Aproximación por Monte Carlo

El método de Monte Carlo para el cálculo de integrales en una variable no es muy eficiente, comparado con otros métodos numéricos que convergen más rápidamente al valor de la integral. Pero sí cobra importancia en el caso del cálculo numérico de integrales múltiples. Para calcular la cantidad

$$\theta = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \ldots, x_l)\, dx_1 \ldots dx_l$$

utilizamos el hecho que

$$\theta = E[g(U_1, \ldots, U_l)]$$

con $U_1, \ldots, U_l$ independientes y uniformes en $(0,1)$.

Si

$$\{U_1^1, \ldots, U_l^1\}, \{U_1^2, \ldots, U_l^2\} \ldots \{U_1^N, \ldots, U_l^N\}$$

son N muestras independientes de estas l variables, podemos estimar

$$\theta \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{g(U_1^i, \ldots, U_l^i)}{N}$$

Apliquemos este método para aproximar el valor de el numero de Euler e.

Definición 1 *Supongamos que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son v.a. uniformemente distribuidas en el $(0,1)$, definimos como $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$. y como N a la variable aleatoria dada por*

$$N = \min \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \right\} = \min \{n : S_n > 1\}.$$

Proposición 1 *La variable N cumple que $E[N] = e$.*

Por lo cual, el valor de e puede ser aproximado por Monte Carlo.

$$e \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{\min \{n : S_n^i > 1\}}{N}$$

2 Prueba de $E[N] = e$

Para ver esto, notemos en primer lugar que N es una variable aleatoria discreta, que toma valores enteros no negativos. Más aún, $N \geq 2$, puesto que cada U_j es un número positivo menor que 1. Así, podemos escribir usando la definición de valor esperado, que

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P[N = n].$$

2.1 Cálculo de $P[N = n]$

Para calcular la probabilidad $P[N = n]$, notemos que $N = n$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n-1} U_i \leq 1.$$

Para simplificar la notación, consideraremos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

Ahora bien,

$$S_n > 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad S_{n-1} > 1 \text{ ó } (S_{n-1} \leq 1 \text{ y } S_n > 1),$$

siendo estas dos últimas posibilidades disjuntas. Por lo tanto,

$$P[S_n > 1] = P[S_{n-1} > 1] + P[N = n],$$

de donde obtenemos que

$$P[N = n] = P[S_n > 1] - P[S_{n-1} > 1].$$

2.2 Cálculo de $P[S_n > 1]$

Para este problema, es suficiente encontrar la densidad para S_n, para valores menores que 1.

Proposición 2 *Sea f_n la función de densidad de la variable aleatoria S_n, $n \geq 1$. Entonces*

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \textit{para todo } 0 < x < 1.$$

Probamos esto por inducción.
Para $n = 1$, tenemos que $S_1 = U_1$, y sabemos que su densidad es $I_{(0,1)}(x)$, por lo que la afirmación es cierta en este caso.
Para $n = 2$, tenemos que $S_2 = U_1 + U_2$. Así, S_2 es una v.a. que toma valores en el intervalo $(0, 2)$. Aunque como dijimos, sólo nos interesa conocer la densidad de S_2 para $0 < x < 1$. Sea f_{U_i} la densidad de la v.a. U_i, con $i = 1, 2$. Tenemos que por la fórmula de convolución (ver ejemplo de la pag. 111 de las Notas de Probabilidad de Yohai),

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1}(t) f_{U_2}(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} I_{(0,1)}(t) I_{(0,1)}(x-t)dt = \int_0^x dt = x.$$

por lo que la afirmación es cierta también este caso.

Supongamos ahora que

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

para un cierto n, y para todo $0 < x < 1$, y veamos que la afirmación se cumple para $n + 1$.
Tenemos que $f_{n+1} = f_{S_n + U_{n+1}}$, y utilizando la fórmula de la densidad para suma de variables aleatorias, obtenemos

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{U_{n+1}}(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) I_{(0,1)}(x-t)dt = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{x^n}{n!}.$$

Por lo tanto, la Proposición es válida.

2.3 Cálculo de $E[N]$

Ahora podemos calcular $E[N]$. Tenemos que

$$P[S_n > 1] = 1 - P[S_n \leq 1] = 1 - \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Luego, usando la fórmula de la sección 2.1, tenemos que

$$P[N = n] = \left(1 - \frac{1}{n!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{n-1}{n!}$$

y por lo tanto

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$