

# Modelos y Simulación

## Resolución Ejercicio 2-a - Práctico 3

Grisel Britos

El juego es el siguiente:

Se simula  $U \sim U(0, 1)$ . Si  $U < \frac{1}{2}$ , se simulan  $W_i \sim U(0, 1)$  con  $i = 1, 2$  y se define  $X = W_1 + W_2$ . Si  $U \geq \frac{1}{2}$ , se simulan  $W_i \sim U(0, 1)$  con  $i = 1, 2, 3$  y se define  $X = W_1 + W_2 + W_3$ .

Se gana el juego si  $X \geq 1$ .

Queremos calcular la probabilidad de ganar, es decir,  $P(X \geq 1) = ?$ .

Usando el teorema de probabilidad total, esta probabilidad se puede plantear de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(X \geq 1 | X = W_1 + W_2) \cdot P(X = W_1 + W_2) + P(X \geq 1 | X = W_1 + W_2 + W_3) \cdot P(X = W_1 + W_2 + W_3) \\ &= P(W_1 + W_2 \geq 1) \cdot P(U < 1/2) + P(W_1 + W_2 + W_3 \geq 1) \cdot P(U \geq 1/2) \\ &= (1 - F_{W_1+W_2}(1)) \cdot F_U(1/2) + (1 - F_{W_1+W_2+W_3}(1)) \cdot (1 - F_U(1/2)) \end{aligned}$$

Luego, nos interesa conocer  $F_U(1/2)$ ,  $F_{W_1+W_2}(1)$ ,  $F_{W_1+W_2+W_3}(1)$ .

- $F_U$  ya la conocemos porque es la función de distribución acumulada de una variable que distribuye uniforme. Es decir,  $F_U(x) = x$  cuando  $x \in (0, 1)$ . Entonces como  $1/2 \in (0, 1)$ ,  $F_U(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ .
- $F_{W_1+W_2}(1) = \int_{-\infty}^1 f_{W_1+W_2}(x) dx$ . Es decir, nos interesa conocer  $f_{W_1+W_2}(x)$  cuando  $-\infty < x \leq 1$ . Como  $W_1, W_2$  son independientes, calcular  $f_{W_1+W_2}$  es equivalente a realizar la convolución de las densidades marginales  $f_{W_1}$  y  $f_{W_2}$ .

Luego,

$$f_{W_1+W_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_1}(t) f_{W_2}(x-t) dt$$

Aquí hay que destacar que para que  $f_{W_1+W_2}(x) > 0$ , debe ocurrir que  $f_{W_1}(t) > 0$  y  $f_{W_2}(x-t) > 0$ ; y esto ocurre si y sólo si  $t > 0$  y  $x-t > 0$ , es decir,  $0 < t$  y  $t < x$ .

- Si  $x \leq 0$ , entonces  $t < x \leq 0$  y  $f_{W_1}(t) = 0$ . Luego,  $f_{W_1+W_2}(x) = 0$
- Si  $0 < x \leq 1$ , entonces  $0 < t < x$  y resulta  $f_{W_1}(t) = 1$  y  $f_{W_2}(x-t) = 1$ . Luego

$$f_{W_1+W_2}(x) = \int_0^x 1 dt = x.$$

Por lo tanto,  $F_{W_1+W_2}(1) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$ .

- Análogamente,  $F_{W_1+W_2+W_3}(1) = \int_{-\infty}^1 f_{W_1+W_2+W_3}(x) dx$ . Es decir, nos interesa conocer  $f_{W_1+W_2+W_3}(x)$  cuando  $-\infty < x \leq 1$ .

Como  $W_1, W_2, W_3$  son independientes, calcular  $f_{(W_1+W_2)+W_3}$  es equivalente a realizar la convolución de las densidades marginales  $f_{W_1+W_2}$  y  $f_{W_3}$ .

Luego,

$$f_{(W_1+W_2)+W_3}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_1+W_2}(t) f_{W_3}(x-t) dt$$

Aquí hay que destacar que para que  $f_{W_1+W_2+W_3}(x) > 0$ , debe ocurrir que  $f_{W_1+W_2}(t) > 0$  y  $f_{W_3}(x-t) > 0$ ; y esto ocurre si y sólo si  $t > 0$  y  $x-t > 0$ , es decir,  $0 < t$  y  $t < x$ .

- Si  $x \leq 0$ , entonces  $t < x \leq 0$  y  $f_{W_1+W_2}(t) = 0$ . Luego,  $f_{W_1+W_2+W_3}(x) = 0$
- Si  $0 < x \leq 1$ , entonces  $0 < t < x$  y resulta  $f_{W_1+W_2}(t) = t$  y  $f_{W_2}(x-t) = 1$ . Luego

$$f_{W_1+W_2+W_3}(x) = \int_0^x t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Por lo tanto,  $f_{W_1+W_2+W_3}(1) = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \left. \frac{x^3}{6} \right|_0^1 = \frac{1^3}{6} = \frac{1}{6}$ .

Finalmente, la probabilidad que queremos calcular es

$$P(X \geq 1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$