Momento Lineal e Impulso

Segunda Ley de Newton: (para m constante)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

llamamos Momento Lineal de la partícula:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Y en términos del Momento Lineal, la segunda ley de Newton queda: $\vec{F}_{Neta} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Se define al Impulso, $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_N dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt} dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo, es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese tiempo.

CUIDADO: es una relación vectorial

Conservación del Momento Lineal

Si la fuerza externa Neta sobre un sistema es cero, el momento lineal del sistema es constante

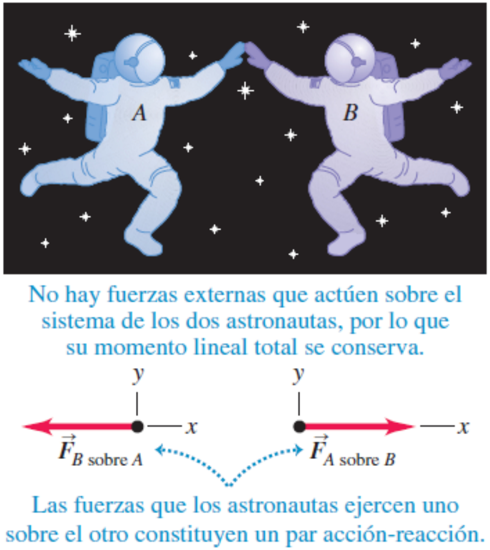


Figura 1: La suma de la cantidad de movimiento de los astronautas es constante. $\vec{P}_T = \vec{P}_A + \vec{P}_B$

Conservación del Momento Lineal y choques

Choques: interacción vigorosa entre cuerpos, con duración relativamente corta. (antes y después del choque son dos instantes muy cercanos)

Si las fuerzas de interacción son mucho mayores que la externas podemos tratar al sistema como aislado. $\Rightarrow \vec{P}_T = Cte$

Choques elásticos e inelásticos

Si la fuerza entre las partes del sistema son conservativas $\Rightarrow$ se conserva la energía mecánica $\Rightarrow$ Choque elástico . (bolas de billar)

Si la energía cinética total del sistema después del choque es menor a la inicial $\Rightarrow$ choque inelástico. (plastilina contra caja, deformación. Autos: deformación, calor)

Si después del choque las partes quedan unidas en un sólo cuerpo $\Rightarrow$ choque totalmente inelástico. (bala incrustada en bloque)

Sistema aislado $\Rightarrow$ se conserva $\vec{P}_T$. El mismo antes y después del choque. Sea elástico o no.

Si es elástico $\Rightarrow$ además se conserva la energía.

Choques

Simulador

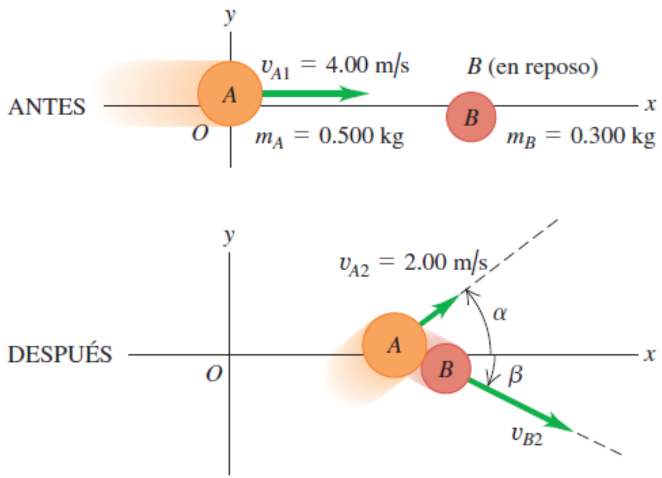


Figura 2: Después del choque tenemos demasiadas incógnitas, para resolver completamente el problema necesitaremos informacón extra de la situación final.

Choque totalmente inelástico

En estos choques el sistema pierde energía cinética. Simulador

Dos móviles, A y B antes del choque viajan con velocidades $\vec{v}_{A1}$ y $\vec{v}_{B1}$ respectivamente. Después del choque quedan unidos y viajan con una velocidad en común, ¿Cuánto vale esa velocidad $\vec{v}_2$?

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2$$

Ejemplo simple: Sea $\vec{v}_{A1} = v_{A1x}\hat{i}$, y $\vec{v}_{B1} = 0$. En ese caso obtenemos:

$$\vec{v}_2 = v_{2x}\hat{i} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}\hat{i}$$

¿ Qué pasó con la Energía cinética?

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1x}^2 + 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{2x}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

Se pierde energía:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} < 1$$

Choque elástico

En el momento del choque puede almacenarse energía potencial elástica (deformación) que se recu[era al momento de finalizar el contacto entre las partes del sistema. La energía se conserva.

Imponemos conservación de $\vec{P}$, (ecuación vectorial) y de la energía (escalar):

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \quad (1)$$

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} m_A (v_{A1x}^2 + v_{A1y}^2) + \frac{1}{2} m_B (v_{B1x}^2 + v_{B1y}^2) = \frac{1}{2} m_A (v_{A2x}^2 + v_{A2y}^2) + \frac{1}{2} m_B (v_{B2x}^2 + v_{B2y}^2) \quad (3)$$

ejemplo simple, 1D y B inicialmente en reposo: $\vec{v}_{B1} = \vec{0}$. Las ecuaciones (1, 2, 3) se simplifican en:

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$
$$\frac{1}{2} m_A v_{A1x}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2x}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2x}^2$$

Como tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas podemos despejar v_{A2x} y $m_B v_{B2x}$ en función de los datos iniciales:

Choque elástico

$$m_A v_{A1x} - m_A v_{A2x} = m_B v_{B2x} = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} m_A v_{A1x}^2 - \cancel{\frac{1}{2}} m_A v_{A2x}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_B v_{B2x}^2 = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})(v_{A1x} + v_{A2x})$$

dividiendo entre ellas y luego sustituyendo en las anteriores:

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$$

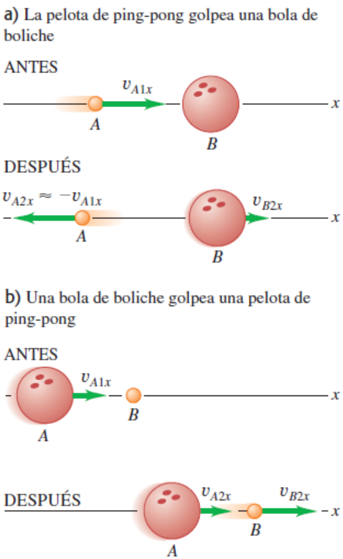
$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$\hookrightarrow \qquad v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

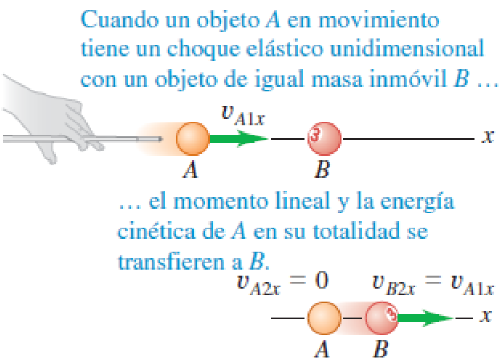
$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

Analicemos éste resultado para los casos $m_A \ll m_B$; $m_A \gg m_B$; $m_A = m_B$

Choques elásticos



(a) $m_A \ll m_B$; $m_A \gg m_B$



(b) $m_A = m_B$

Figura 3: El resultado de varios choques elásticos.

Coeficiente de restitución

Representa una medida del grado de conservación de la energía cinética en un choque.

Es el cociente entre las velocidades relativas de los cuerpos antes y después del choque.

$$c_R = -\frac{v_{A2} - v_{B2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

El signo menos es porque los cuerpos se acercan antes del choque y se alejan después.

El coeficiente de restitución presenta valores que van entre 0 y 1 $\Rightarrow 0 \leq c_R \leq 1$.

- $c_R = 1$ representa un choque elástico. La velocidad relativa tiene la misma magnitud antes y después del choque.
- $c_R = 0$ representa un choque completamente plástico. Los cuerpos quedan pegados, se mueven juntos.
- En la mayoría de los choques reales el coeficiente es menor a 1, lo que supone una deformación inelástica de los cuerpos sometidos a la colisión.

Ejemplo choque

Un disco viaja con velocidad $\vec{V}$ y choca contra otro disco que tiene un clavo que lo fija a la mesa. El sistema formado por ambos discos, ¿es aislado? ¿existen fuerzas externas? ¿Puedo considerar que se conserva $\vec{P}$ en la colisión?

Figura 4: Choque con disco clavado a la mesa.

Centro de masa

Sea un sistema constituído por varias partículas de masas m_1, m_2 $\cdots$, m_n cada una con posición (x_1, y_1), (x_2, y_2) $\cdots$ (x_n, y_n).

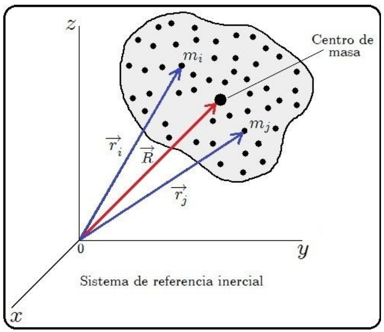
El centro de masa representa una posición media, ponderada con la masa, de las partículas del sistema.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{4}$$

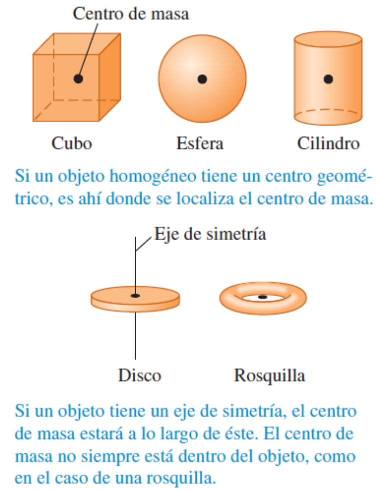
así podemos también expresar sus componentes:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Centro de masa



(a) El CM de un sistema de partículas.



(b) CM de objetos continuos simétricos

Figura 5: El Centro de Masa.

El CM no necesariamente se encuentra donde hay masa, (rosquilla).

¿Dónde se encuentra el CM de un cubo con la mitad izquierda hecha de madera ($\rho = 0{,}5$ gr/cm^3) y la mitad derecha de plomo ($\rho = 11{,}3$ gr/cm^3)?

Movimiento del Centro de masa

Para encontrar la Velocidad del centro de masa, derivemos la ecuación (4) respecto al tiempo:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{5}$$

llamemos M a la masa total del sistema de partículas: $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ entonces obtenemos:

$$M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n \tag{6}$$

Pero el lado derecho es la definición del momento lineal total del sistema $\vec{P}$, por lo tanto encontramos que:

$$M\vec{V}_{CM} = \vec{P}.$$

En un sistema de partículas con fuerza externa neta nula, se conserva $\vec{P}$, por lo tanto la velocidad del CM es constante!

Cuando actúan fuerzas externas sobre un sistema de partículas, la velocidad del CM no será constante. Derivando (6) obtenemos:

Aceleración del Centro de masa

$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots + m_n\vec{a}_n = \sum \vec{F}^1 + \sum \vec{F}^2 + \cdots + \sum \vec{F}^n$$

$$\sum \vec{F}^i = \sum \vec{F}^i_{ext} + \sum \vec{F}^i_{int}$$

$$\text{acción y reacción } \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i_{int} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}^i_{ext} + \vec{0}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Cuando fuerzas externas actúan sobre un cuerpo o conjunto de partículas, el CM se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en $\vec{r}_{CM}$, y sobre ella actuara una fuerza neta igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Ésto nos ha permitido hasta ahora, representar el movimiento de los objetos como partículas.

Simulador y Newton-cradle