Movimiento Circular

Movimiento circular

El movimiento circular es un caso particular de un movimiento en el plano. La trayectoria es una circunferencia, o parte de ella, y puede ser descripta en coordenadas cartesianas por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, mientras que en coordenadas polares por $\rho = R$ y $\theta = \theta(t)$.

$$\vec{r}(t) = R.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right] \longrightarrow \vec{v}(t) = R.\left[-sen(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} + \cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}(t) = R.\frac{d\theta}{dt}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}(t) = R.\omega.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]$$

Derivando el vector velocidad para obtener el vector aceleración del cuerpo

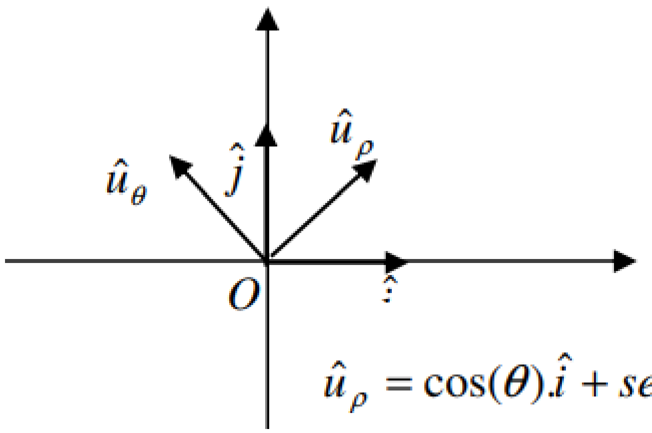
$$\vec{a}(t) = R.\frac{d\omega}{dt}.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right] + R.\omega.\left[-\cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} - sen(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j}\right]$$

la derivada respecto al tiempo de la velocidad angular es la aceleración angular $\gamma = \dfrac{d\omega}{dt}$

y podemos escribir el vector aceleración como

$$\vec{a}(t) = \underbrace{R.\gamma.\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]}_{a_t} - \underbrace{R.\omega^2.\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]}_{a_n}$$

Ahora describiremos el movimiento circular utilizando coordenadas polares. Los versores en coordenadas polares son $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$.



$$\hat{u}_\rho = \cos(\theta).\hat{i} + sen(\theta).\hat{j}$$
$$\hat{u}_\theta = -sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}$$

El vector posición escrito en coordenadas polares es $\vec{r}(t) = \rho(t).\hat{u}_\rho$, y en el caso particular del movimiento circular resulta $\vec{r}(t) = R.\hat{u}_\rho$. Para calcular la velocidad debemos derivar el vector posición respecto del tiempo. Hasta ahora habíamos derivado vectores cuyas componentes están escritos en coordenadas cartesianas, donde los versores son constantes en módulo y dirección y por lo tanto su derivada respecto al tiempo es cero. Sin embargo en un sistema de coordenadas polares los versores modifican su dirección cuando cambia la posición del cuerpo cuyo movimiento describimos. Esto implica que los versores $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$ son funciones del tiempo y hay que tenerlo en cuenta cuando efectuemos la derivada.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\hat{u}_\rho) = R.\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} \longrightarrow \vec{v} = R.\omega.\hat{u}_\theta$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} &= -sen(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{i} + \cos(\theta).\frac{d\theta}{dt}.\hat{j} \\ \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} &= \omega.\left[-sen(\theta).\hat{i} + \cos(\theta).\hat{j}\right] \\ \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} &= \omega.\hat{u}_\theta \end{aligned}\right.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R.\omega.\hat{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = R.\frac{d\omega}{dt}.\hat{u}_\theta + R.\omega.\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = R.\gamma.\hat{u}_\theta - R.\omega^2.\hat{u}_\rho \longleftrightarrow \vec{a}(t) = R.\gamma.\overbrace{\left[-sen(\theta(t)).\hat{i} + \cos(\theta(t)).\hat{j}\right]}^{\hat{u}_\theta} - R.\omega^2.\overbrace{\left[\cos(\theta(t)).\hat{i} + sen(\theta(t)).\hat{j}\right]}^{\hat{u}_\rho}$$