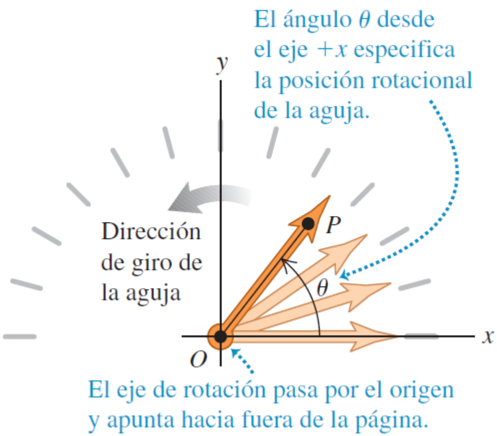
Cinemática del sólido rígido

modelo de cuerpo rígido: forma y tamaño definidos e inmutables. Las fuerzas actuando sobre ellos no pueden deformarlos (estirarlos, torcerlos, aplastarlos).

Ya definimos las variables rotacionales: θ; ω y α y su relación con las traslacionales: l, v, a.



Relación entre las ecuaciones de rotación con α constante y traslación con a constante (MRUV)

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Cinemática del sólido rígido

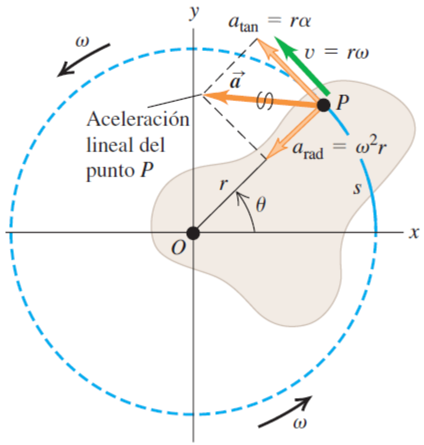


Figura 1: El punto P describe un círculo de radio r. La aceleración centrípeta cambia la dirección de viaje y la tangencial la rapidez.

Los vectores aceleración y velocidad angulares salen del plano de la hoja, apuntando hacia usted, según la regla de la mano derecha.

simulador rotación

Velocidad máxima en la bicicleta

La cadena no desliza ni se estira, por lo tanto se mueve con la misma rapidez tangencial en ambas ruedas dentadas. (dientes iguales y equidistantes en ambas ruedas)

$$v = \omega_f r_f = \omega_t r_t \Rightarrow \frac{\omega_t}{\omega_f} = \frac{r_f}{r_t}$$
$$\frac{2\pi r_f}{N_f} = \frac{2\pi r_t}{N_t} \Rightarrow \frac{\omega_t}{\omega_f} = \frac{r_f}{r_t} = \frac{N_f}{N_t}$$

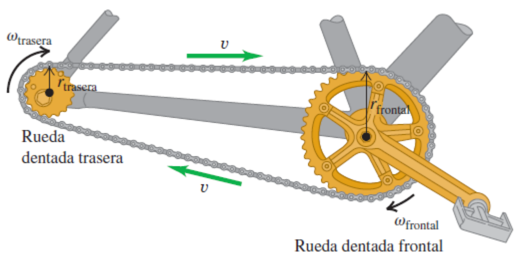


Figura 2: Engranes de la bicicleta.

Para una dada velocidad de pedaleo ω_f, obtendremos la máxima rapidez angular ω_t de la rueda trasera cuando N_f máximo y N_t mínimo.

Energía en movimiento rotacional

En la rotación alrededor de un eje fijo, cada parte del cuerpo se mueve con una velocidad tangencial diferente, v_i, lo que es común es la velocidad angular, $v_i = \omega r_i$ (r_i es distancia perpendicular al eje, es igual al radio del círculo que describe al girar alrededor del eje). Pero tenemos definida la energía cinética de cada partícula como $k_i = 1/2\, m_i v_i^2$.

La energía total del cuerpo rígido será: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$

Momento de inercia I del cuerpo para este eje de rotación: $I = \sum_i m_i r_i^2$

El momento de inercia depende tanto del eje de giro elegido como de la distribución de masa del cuerpo alrededor del eje.

La energía cinética de rotación queda: $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Ya vimos que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo. Cuanto mayor sea I, más difícil será ponerlo a girar.

Momento de inercia I de un cuerpo formado por 3 partículas

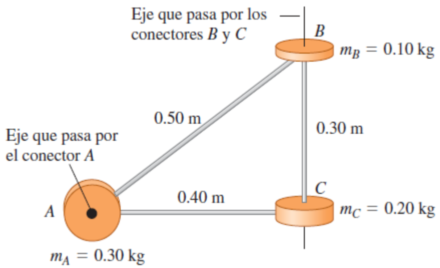


Figura 3: I cambia al cambiar el eje de rotación.

Eje que pasa por A: $r_A = 0$; $r_B = 0{,}5$m; $r_c = 0{,}4$m.

$$I_A = m_B r_B^2 + m_C r_C^2 = 0{,}057 \text{ kg m}^2$$

Eje que pasa por B y C: $r_A = 0{,}4$m; $r_B = 0$; $r_c = 0$.

$$I_B C = m_A r_A^2 = 0{,}048 \text{ kg m}^2$$

Distintos momentos de inercia

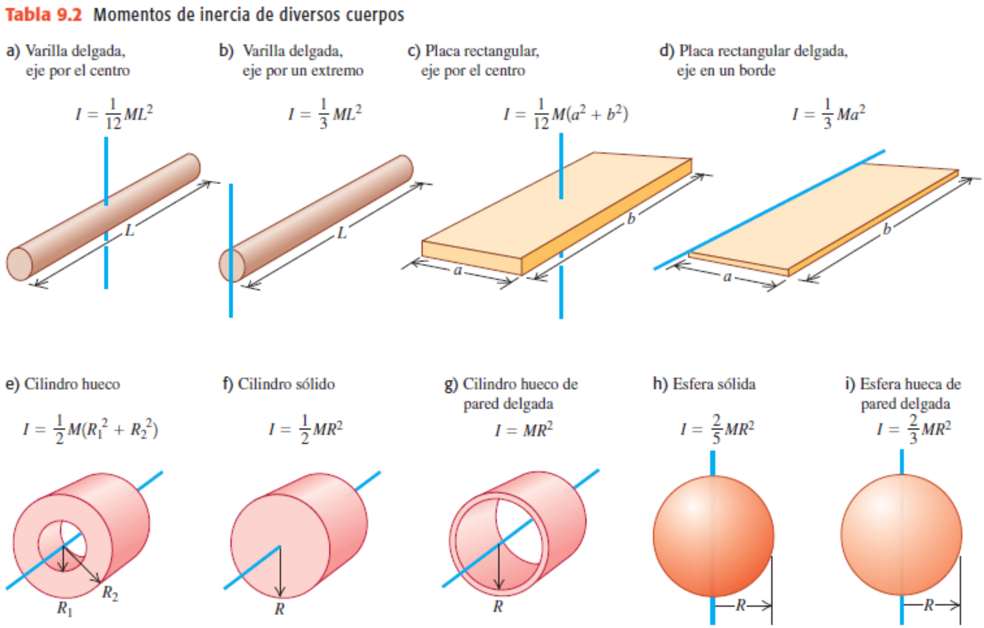


Figura 4: I cambia al cambiar el eje de rotación y la distribución de masas.

Cable que se desenrolla

Cable flexible y ligero que no se estira ni resbala enrollado inicialmente en el cilindro que puede girar sin fricción. Inicialmente el sistema está en reposo y se tira con la fuerza F constante hasta desenrollar 2m de cable. Averiguar ¿Cuáles son ω_f y la velocidad final del cable?.

9.17 Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).

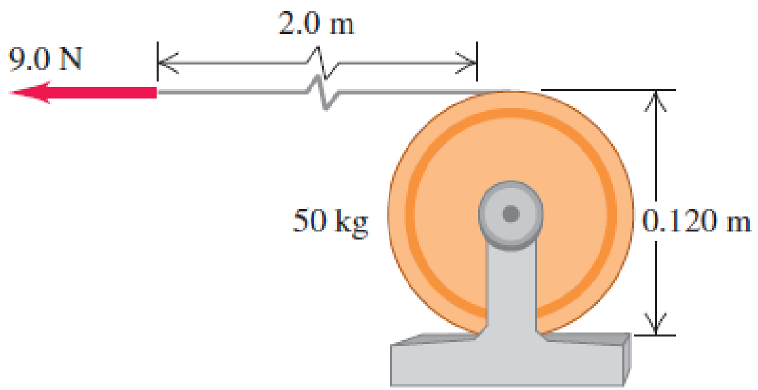


Figura 5: $\omega_i = 0$. ¿Cuáles son ω_f y la velocidad final del cable?.

$$W = F.\Delta x \qquad K_i = 0 \qquad K_f = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} I\omega^2 = F.\Delta x \qquad v = \omega R$$

Energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido

recordemos que U_g para una partícula puntual de masa m está definida como $U_g = mgy$, donde y es la altura de la partícula respecto del piso.

¿ Y para un cuerpo extendido, que tiene partes mas arriba que otras?

Veamos que resulta $U = Mgy_{CM}$.

Para cada porción del cuerpo de masa m_i y posición y_i tenemos la energía potencial $U_i = m_i g y_i$. Sumando para todas las partículas resulta:

$$\begin{aligned} U_g &= (m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n)g \\ y_{CM} &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \\ My_{CM} &= m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n \\ U_g &= My_{CM}g \end{aligned}$$

La energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido se calcula con la masa total en la posición de su centro de masa.

9.18 Nuestro esquema para este problema.

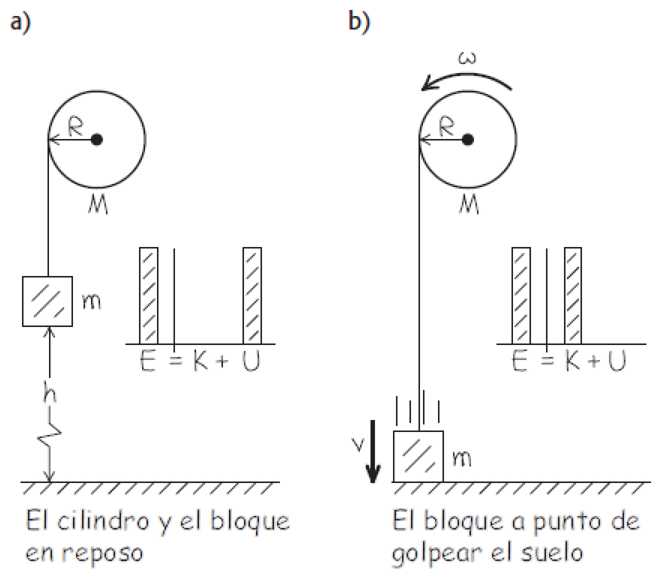
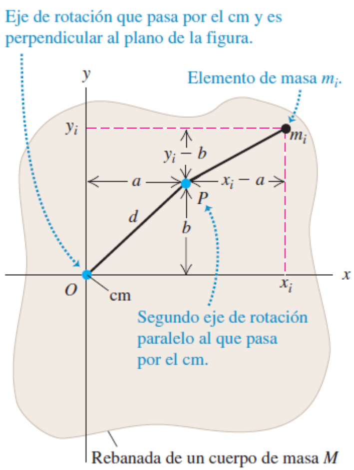


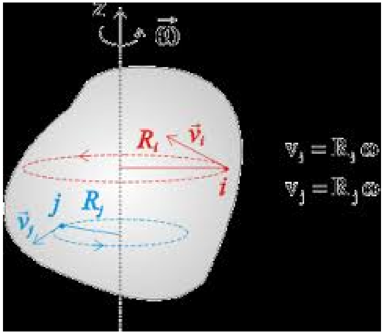
Figura 6: ¿Cuánto valen ω y la velocidad final del cubo justo antes de tocar el piso?.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

Elegimos un eje de rotación que pasa por el CM, tomamos origen O en el CM y elegimos z como la dirección del eje de rotación.



(a) rebanada en z_i.



(b) Eje que pasa por el CM

Figura 7: Cálculo del momento de inercia alrededor de un eje paralelo a uno que pasa por el CM.

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

Conociendo el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el CM, podemos calcular el momento de inercia alrededor de cualquier eje a distancia d paralelo al anterior que pase por el punto P como:

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

Sean los dos ejes alineados con z y tomemos origen de coordenadas en el CM. La distancia entre los ejes es d tal que $d^2 = a^2 + b^2$ el momento de inercia de una rebanada cualquiera en z_i será :

$$I_{CM}^{z_i} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \qquad I_P^{z_i} = \sum m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

como no interviene z_i, podemos sumar todas las rebanadas.

$$I_P = \sum m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

$$I_P = \underbrace{\sum m_i(x_i^2 + y_i^2)}_{I_{CM}} - 2a \underbrace{\sum m_i x_i}_{x_{CM}=0} - 2b \underbrace{\sum m_i y_i}_{y_{CM}=0} + \underbrace{\sum m_i}_{M} \underbrace{(a^2 + b^2)}_{d^2}$$

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

Dinámica rotacional

A diferencia de una partícula puntual, sobre un cuerpo extenso podemos apreciar rotaciones. Veamos cómo las fuerzas aplicadas producen estas rotaciones:

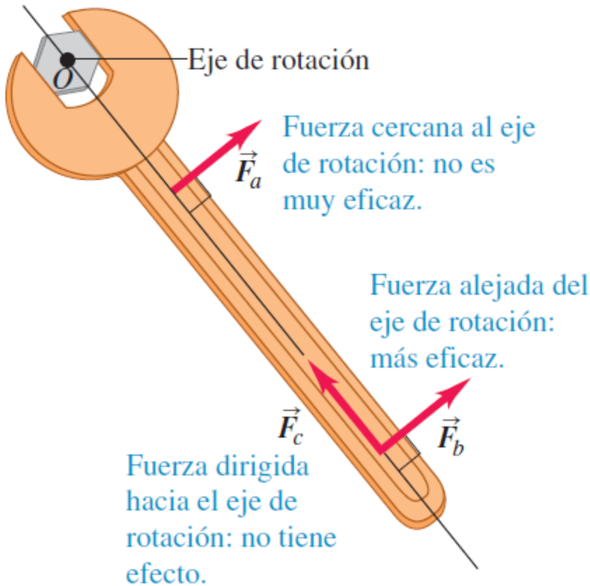


Figura 8: Torque de una fuerza o momento de fuerza.

Torque o momento de fuerza

La tendencia de una fuerza a causar rotación alrededor de un punto O, depende de su magnitud, F, y también del brazo de palanca, l (distancia perpendicular entre el punto O y la línea de acción de la fuerza). Definimos la magnitud del torque o momento: $\tau = F \cdot l$. Vectorialmente:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \tau = F \cdot l = rFsin(\phi) = F_{tan}r$$

$\vec{r}$ vector que apunta desde O al punto de acción de la fuerza. $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$, regla de la mano derecha.

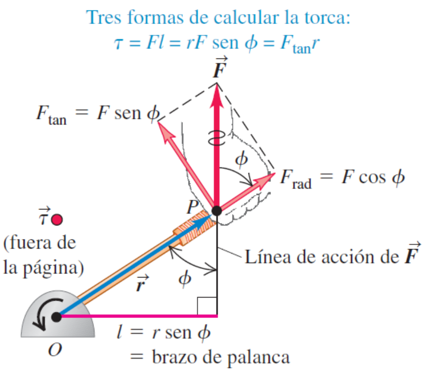


Figura 9: Torque de una fuerza o momento de fuerza.

Torque y aceleración angular

El análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido:

$$\sum \tau = I\alpha$$

donde $\sum \tau$ es la suma de todos los torques alrededor del eje de rotación sobre todas las partículas que forman el cuerpo rígido; I es el momento de inercia alrededor de ese eje de rotación; y α es la aceleración angular, que es la misma para todas las partículas que componen un rígido.

En principio los torques sobre cada partícula del rígido tienen fuerzas externas e internas. Pero las fuerzas internas entre partículas (acción reacción) tienen brazos de palanca iguales y por lo tanto $\sum \tau_{int} = 0$, por lo tanto sólo los torques de las fuerzas externas son responsables de la aceleración angular del cuerpo rígido.

El torque de la fuerza peso que actúa sobre cada partícula del sólido puede demostrarse (si g es constante a lo largo de todo el cuerpo) que se obtiene el resultado correcto calculando el torque del peso total concentrado en el centro de masa.

Ejemplo

¿Cómo se relaciona el movimiento traslacional del bloque m con el rotacional del cilindro M?

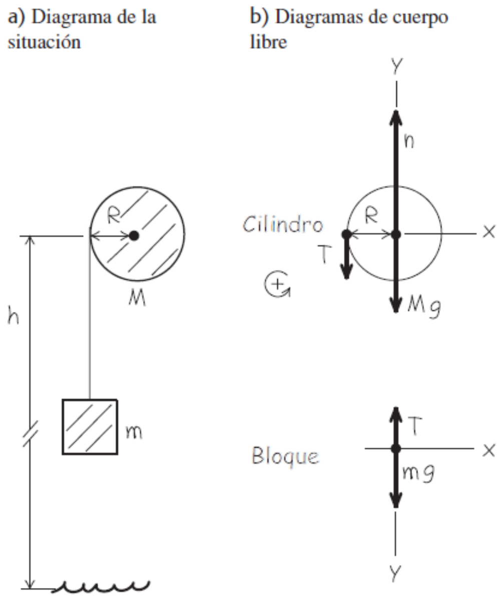


Figura 10: conectando traslación y rotación.

Ejemplo

sobre el bloque m aplicamos Newton: (notar que en el grafico elige para el bloque y positivo hacia abajo)

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow mg - T = ma_y$$

El cilindro no se traslada, sólo rota alrededor del eje z:

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow RT = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

El peso y la normal ejercen la fuerza sobre el eje de rotación $\Rightarrow$ su momento es cero.

Incógnitas: a_y; T y α_z. Pero tenemos dos ecuaciones. Nos falta una relación importante, la rotación de M no es independiente de la traslación de m.

$$a_y = R\alpha_z$$

Ahora podemos resolver:

$$T = \frac{1}{2}M\underbrace{R\alpha_z}_{a_y} \qquad mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

Traslación y rotación combinadas

El movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combiación de movimiento traslacional del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

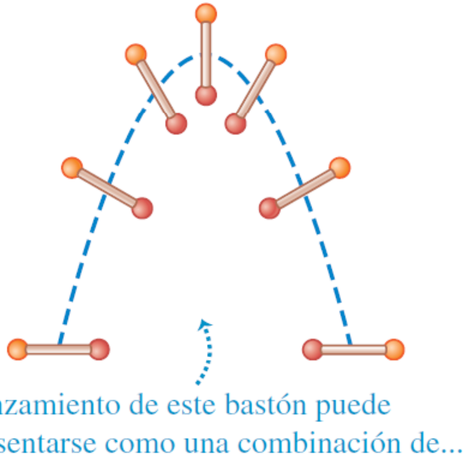


Figura 11: Traslación y rotación combinadas.

La energía cinética del rígido será:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

Rodar sin resbalar

Caso importante de traslación y rotación combinadas: movimiento de una rueda

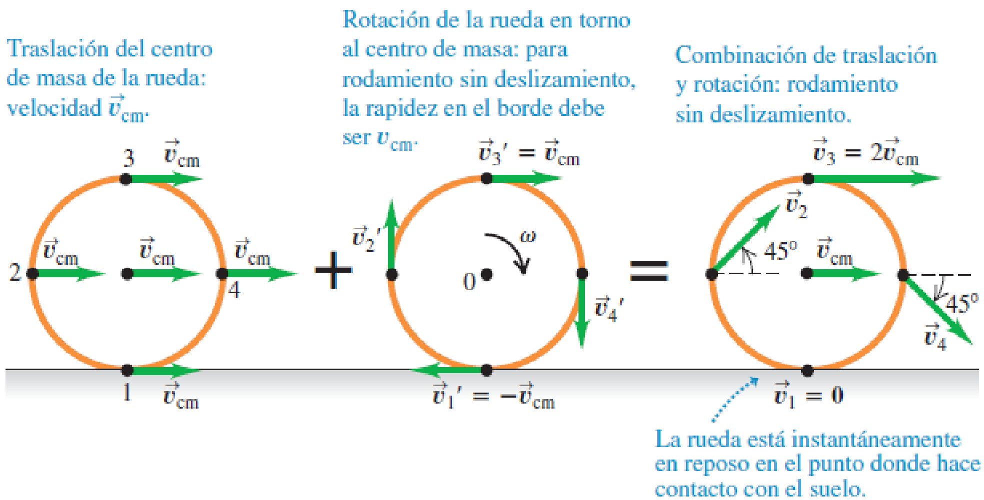


Figura 12: Rodar sin delizar, el punto de contacto con el piso tiene velocidad CERO!.

condición de rodadura: $\Rightarrow v_{cm} = \omega R$

Rodar sin resbalar

Como el punto de contacto con el piso debe tener velocidad instantanea igual a cero visto desde un sistema inercial tierra, $\vec{v}_1 = 0$. Como desde tierra el CM se mueve con $\vec{v}_{cm}$, la velocidad del punto 1 visto desde el centro de masa debe ser: $\vec{v}_1{}' = -\vec{v}_{cm}$.

Pero visto desde el CM, el punto 1 está rodando con velocidad angular ω, por lo tanto: $v_1' = \omega R$.

$$\hookrightarrow v_{cm} = \omega R$$

Desde el CM veo al punto 1 rotar con ω, y desde 1 veo al CM rotar con la misma ω. Como instantaneamente el punto 1 está quieto, $\vec{v}_1 = 0$, podemos pensar a la rueda con rotación pura alrededor del punto 1:

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 \qquad I_1 = \underbrace{I \text{ por un eje paralelo al del CM que pasa por el punto } 1}_{I_1 = I_{cm} + MR^2}$$

$$\hookrightarrow K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Momento angular

El análogo al Momento lineal o cantidad de movimiento lineal $\vec{P}$ de una partícula en movimiento rotacional es el Momento angular, $\vec{L}$.

Para una partúclua de masa m, velocidad $\vec{v}$ y posición $\vec{r}$ respecto de un origen O de un sistema inercial, se define:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \qquad \text{Momento angular de la partícula}$$

es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{P}$. Regla de la mano derecha.

La rapidez de cambio del momento angular es igual a la suma de los momentos externos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \underbrace{\cancel{(\vec{v} \times m\vec{v})}}_{\vec{v} \parallel \vec{P}} + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Momento angular de un cuerpo rígido

Para un cuerpo que gira alrededor de un eje de simetría.

Deberemos sumar los $\vec{L}$ de todas las partículas que lo componen:

$$L = \sum L_i = \sum r_i m_i \overbrace{(\omega r_i)}^{v_i} = \left(\sum m_i r_i^2\right) \omega = I\omega$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \text{para cuerpo alrededor de eje de simetría}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Cuidado! Si el eje de rotación no es un eje de simetría, el momento angular no es paralelo al eje de rotación. $\vec{L}$ describirá un cono alrededor del eje.

Si sobre un sistema no existe Momento externo Neto aplicado, se conserva el Momento angular.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = Cte$$

La fuerza externa Peso, no ejerce torque ya que está aplicada sobre el eje de giro, eje z, (que pasa por el CM). Lo mismo ocurre con la normal del piso. L es constante:

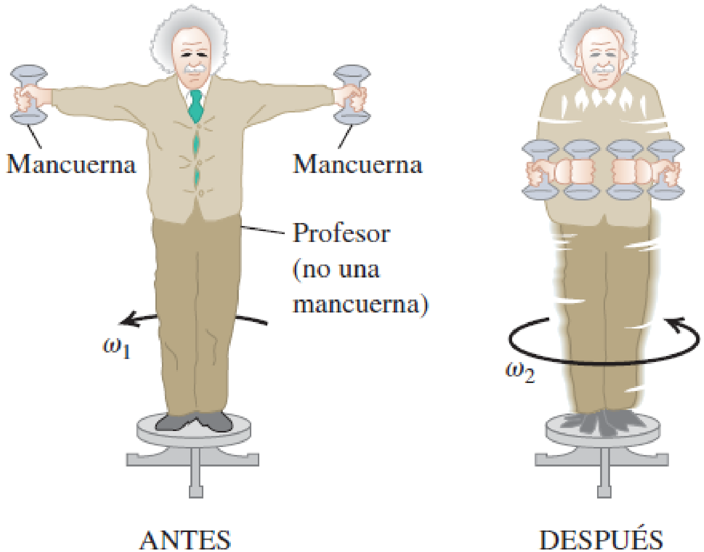


Figura 13: Al disminuir el valor de I, aumenta ω para mantener $L = I\omega$ constante.

Una puerta es impactada por una bala. Calcular ω después de que la bala se incrustó en la puerta. ¿ Se conserva la energía cinética?

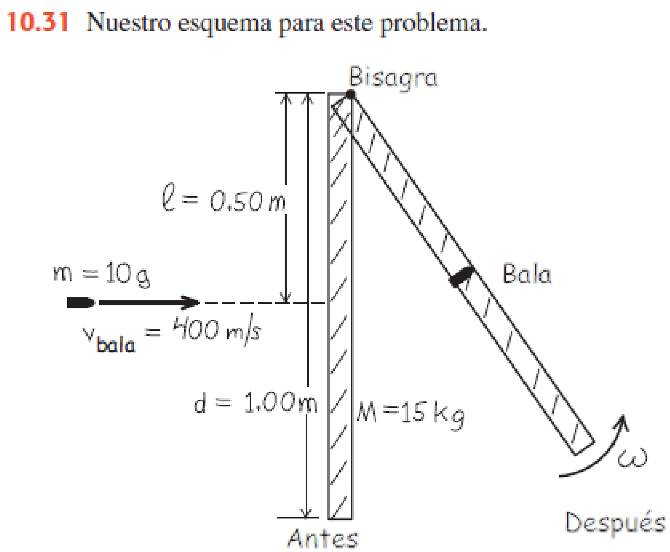


Figura 14: Sistema puerta-bala. Conserva Momento angular.

$$L_i = mvl = 2{,}0Kg.m^2/s \qquad L_f = I_{Tot}\omega$$

$$I_{Tot} = \frac{Md^2}{3} + ml^2 = 50Kg.m^2 + 0{,}0025Kg.m^2$$

$$\omega = \frac{mvl}{I_{Tot}} = 0{,}4rad/s$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 = 800J$$

$$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = 0{,}4J$$

Se perdió muchísima energía!! La velocidad angular es muy baja.

¿Cómo cambiaría si la bala impactara contra el borde de la puerta cerca del picaporte?