Cinemática

¿Cómo describimos el movimiento?

Queremos idear la forma de comunicar la información del movimiento de un cuerpo.

Supongamos que tenemos un movil que viaja en línea recta. Podemos comenzar sacando sucesivas fotos de sus posiciones a distintos tiempos.

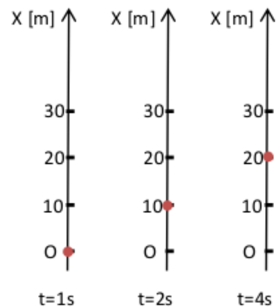


Figura 1: Fotos sucesivas

.

Si representamos un eje de los tiempos en la dirección horizontal podemos represenas una idea más contínua de las posiciones:

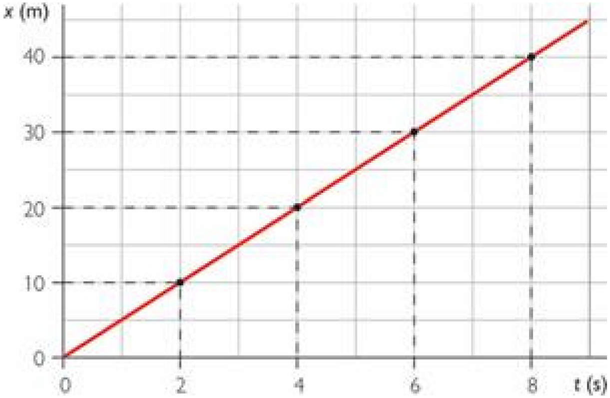


Figura 2: Gráfico posición vs tiempo

Sistemas de referencia

Origen O, ejes coordenados con escalas, flechas indican dirección de crecimiento.

Un punto se identifica con un par ordenado, (x, y):

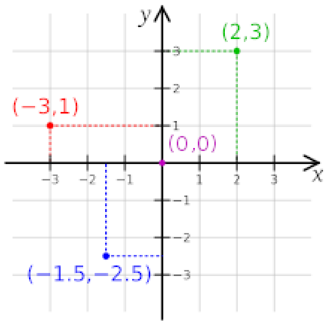


Figura 3: Ejes coordenados y puntos identificados

Las escalas de los ejes no necesitan ser idénticas. Puedo representar posición vs tiempo.

Pero también puedo mostrar trayectorias. Unidades importantes

Velocidades

Definamos primero la velocidad media. Esto es habitualmente lo que uno calcula en un viaje. Recorrí 40Km y tardé media hora. Decimos que realizamos el viaje a 80Km/h.

Calculamos la velocidad media como la pendiente de la recta secante que une los puntos inicial y final:

$$v_{med} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \iff \tan\alpha = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$$

También solemos representar la velocidad media con una línea arriba de la V, como $\bar{V}$.

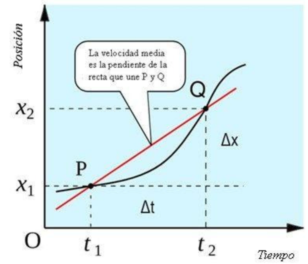


Figura 4: Velocidad media

La velocidad media cambiará según el instante inicial y final elegidos.

Definimos que la velocidad instantanea como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantanea es la pendiente de la recta tangente a la curva $x(t)$, en cada instante de interés.

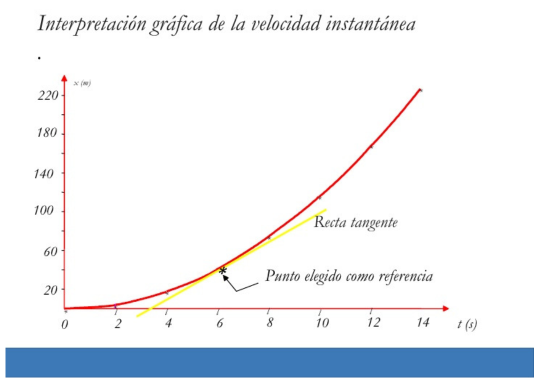


Figura 5: Velocidad instantánea, recta tangente.

Cuanto más vertical sea la tangente, más rápido se mueve el móvil.

Velocidad instantanea a cada tiempo

En el eje de las ordenadas representamos el valor de la velocidad que conocemos a cada tiempo.

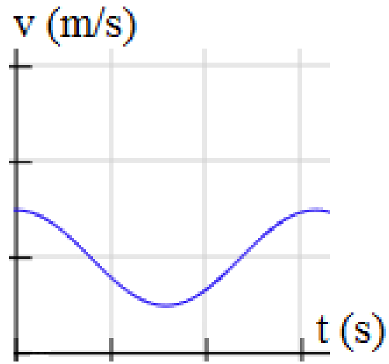


Figura 6: Velocidad en función del tiempo

No confundir una velocidad que disminuye con una velocidad negativa:

- Si la velocidad disminuye pero sigue siendo positiva, el móvil se sigue alejando en el sentido del eje positivo pero más lentamente.
- Si una velocidad es negativa, diremos que el móvil está viajando en sentido contrario, tanto más rápidamente cuanto más negativa sea la velocidad.

Aceleración

La aceleración mide los cambios de velocidad.

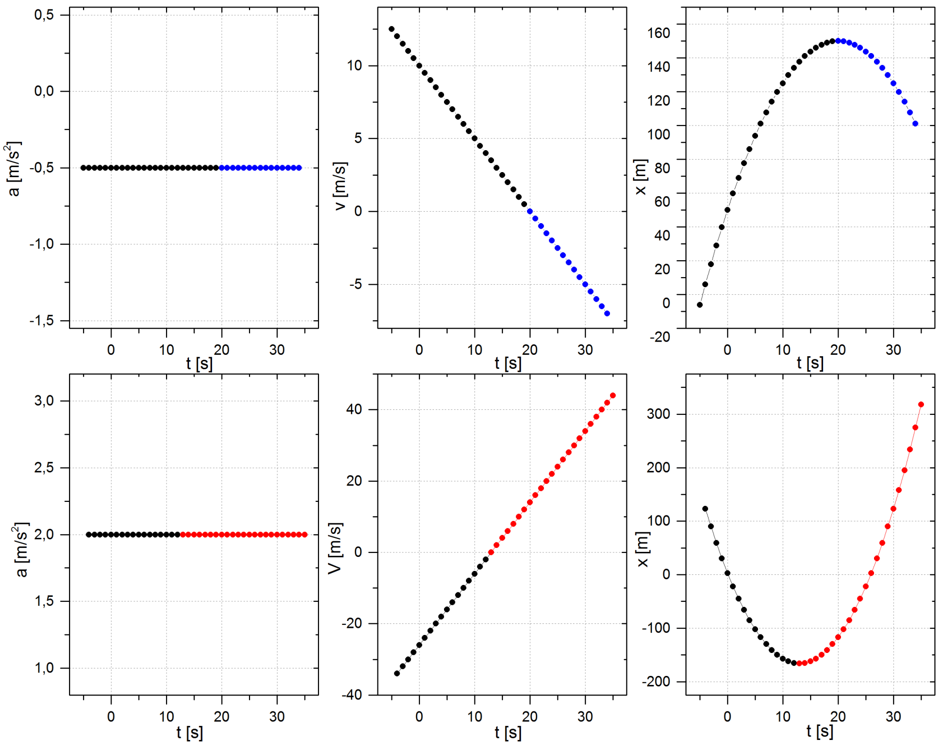
La aceleración representa la pendiente de la recta tangente en el gráfico de v vs. t.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

La aceleración tiene unidades de velocidad dividido unidades de tiempo, por ejemplo m/s^2.

Además está relacionada con la concavidad o convexidad de la curva $x(t)$.

concavidad o convexidad



Ecuaciones de movimiento

MRU $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow v = constante$

y su posición cambia como:

$$x(t) = x_0 + vt$$

x_0 es la posición a tiempo 0. Es la ecuación de una recta de pendiente v.

MRUV $\Rightarrow a = constante \Rightarrow$

$$\hookrightarrow v(t) = v_0 + at$$

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Un ejemplo: caída libre donde la gravedad es una aceleración constante de $g = 9{,}8\text{m}/s^2$.

Cuidado!!! Importante detalle:

Las curvas de posición y velocidad en función del tiempo deben ser curvas continuas y suaves.

Pelota lanzada hacia arriba

mostrar simulación cañon vertical. Flecha velocidad.

Lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba.

La gravedad vale $g = 9{,}8m/s^2$, pero está tirando en dirección contraria a nuestra elección de los positivos para el eje y. Es por esto que debemos expresar la aceleración como negativa, $a = -9{,}8m/s^2$.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -g\hat{j} \\ \vec{v}(t) &= (v_0 - gt)\hat{j} \\ \vec{y}(t) &= (y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j} \end{aligned}$$

¿Para qué sirve escribir estas ecuaciones? ¿Cómo extraigo esa información? Debo saber preguntar.

¿ Cuándo la pelota llega al piso?

¿ Cuándo la pelota llega al piso? $y(t) = 0$ ¿ en qué tiempo ocurre eso?

$$y(t) = 0 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Despejar tiempo. Elegir el que tenga significado para nuestro problema.

¿Y cómo averiguo la altura máxima que alcanzó la pelota?

Debo preguntarme qué ocurre físicamente en ese instante.

La pelota venía subiendo, cada vez más lento porque está siendo frenada, hasta que en algún momento alcanza la altura máxima y comienza a caer. ¿Cómo está identificado ese punto?. ¿Qué ocurrió ahí? lo que debemos reconocer, es que en ese instante la pelota se detuvo.

Una vez que hemos identificado físicamente el punto en cuestión, pedimos en la ecuación de velocidad que valga cero.

Luego ese tiempo, usado en la ecuación de posición nos dirá la altura a la que estaba la pelota cuando se detuvo.

Encuentro entre dos móviles

Ecuaciones de movimiento correspondientes a cada uno de ellos.

$$x^A(t) = x^B(t)$$

$$x_0^A + v_0^A t + \frac{1}{2} a^A t^2 = x_0^B + v_0^B t + \frac{1}{2} a^B t^2$$

En esta ecuación queda el tiempo como la incógnita a despejar, t_e.

¿Cuál es la posición en la que se encontraron?

$$x^A(t_e) = x_0^A + v_0^A t_e + \frac{1}{2} a^A t_e^2$$

$$x^B(t_e) = x_0^B + v_0^B t_e + \frac{1}{2} a^B t_e^2$$

Ambas deberían ser iguales (si hice bien las cuentas...)

Movimiento en 2 o 3 dimensiones

La posición se expresa como un vector: $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\overbrace{\Delta\vec{r}}^{\text{vector resta de vectores}}}{\underbrace{\Delta t}_{\text{escalar}}}$$

La velocidad instantanea será un vector calculado como:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Tendremos las componentes de la velocidad en cada dirección:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt} \qquad v_z(t) = \frac{dz}{dt}$$

El vector velocidad es siempre paralelo a la trayectoria de la partícula. Apunta en la dirección del desplazamiento.

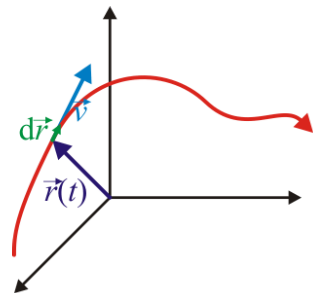


Figura 7: Vector velocidad en 3 dimensiones.

Para cada eje coordenado tendremos la colección de ecuaciones de movimiento correspondiente

$$\left.\begin{array}{ccc} x(t) & v_x(t) & a_x \\ y(t) & v_y(t) & a_y \\ z(t) & v_z(t) & a_z \end{array}\right\} \text{Con esto armo los vectores}$$

La rapidez es el módulo del vector velocidad, $|\vec{v}|$, un escalar sin dirección ni sentido.

La aceleración

Representa cambios en el vector velocidad, tanto de módulo como de sentido.

También podemos descomponer el vector aceleración en sus componentes paralela, $a_{\parallel}$, y perpendicular, $a_{\perp}$, a la trayectoria (y la velocidad, ya que $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria), en un instante dado.

Si la velocidad de un movil cambia sólo su módulo, tendremos un movimiento en línea recta con rapidez cambiante.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \parallel \Delta \vec{v} \qquad \parallel \vec{v}_i$$

Si la velocidad cambia la dirección pero no su módulo, la variación de velocidad es perpendicular al vector velocidad. Obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \perp \qquad \vec{v}$$

La trayectoria se curva hacia donde tira esta aceleración.

En general, en un movimiento tendremos ambas componentes de aceleración, $a_{\parallel}$ y $a_{\perp}$.

Según cada caso puede ocurrir que sólo cambie la dirección de viaje, (movimiento circular uniforme por ejemplo), que cambie de dirección y acelere o que cambie de dirección y frene según se muestra en la figura 8.

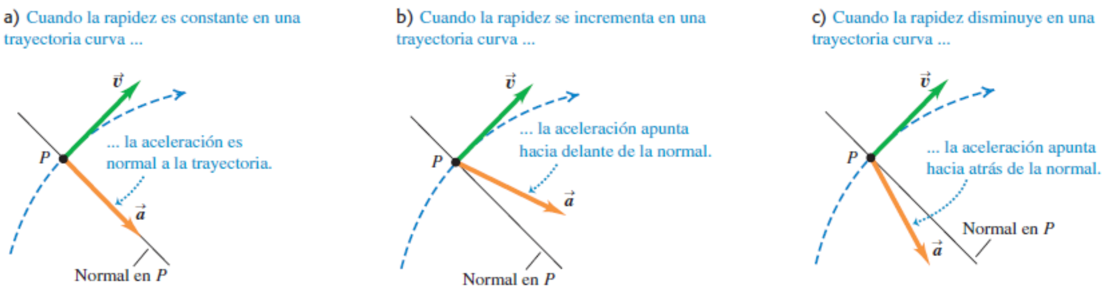


Figura 8: Los cambios producidos por la aceleración.

Proyectiles lanzados con ángulo inicial

simulación con cañon inclinado.

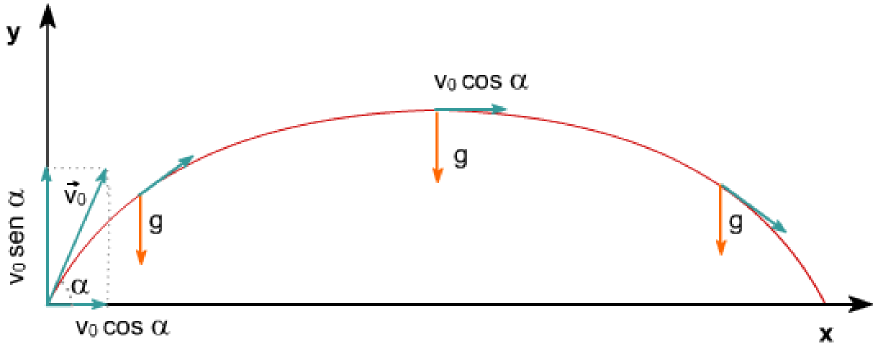


Figura 9: Proyectiles lanzados con velocidad inicial.

- elección de los ejes coordenados para la descripción. Mostrar opciones. Elegir lo que prefieran.
- escribir las ecuaciones de movimiento en ambos ejes. Eje x con $V = cte$ y eje y con aceleración constante, la gravedad.
- analizar el alcance, altura máxima, llegada al piso. Hasta ese momento sirve la descripción. Luego dejan de valer las ecuaciones de movimiento. Discutir por qué. Y hacer notar que la pelota se estampa contra el piso, no se detiene en el piso. Calcular vector velocidad de llegada al piso.
- mostar la parábola y en distintos puntos del recorrido mostrar que la gravedad, si bien es siempre vertical, respecto de la velocidad se descompone diferente en cada punto como aceleración paralela y perpendicular. Por lo tanto ocurrirán cambios de módulo y dirección de velocidad.
- al resolver una cuadrática encontraré dos tiempo soluciones, tomar la desición de cual tiene sentido físicamente.
- comentar posible complicación de que el piso esté mas bajo en el lugar del alcance, entonces ¿cómo averiguo dónde cae?...etc.

Movimiento en un círculo con rapidez constante

simulador 2D

Comencemos por analizar el movimiento en una trayectoria circular con rapidez contante

$$|v| = cte \Rightarrow a_{\perp}$$

La llamamos aceleración centrípeta, y apunta hacia el centro del círculo.

El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria, por lo tanto en este caso resulta perpendicular al radio R del círculo que se está recorriendo.

Si miramos los vectores posición en dos instantes cercanos del recorrido, los puntos P1 y P2 se encuentran a distancia R, radio del círculo, del punto C. Por lo tanto, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ tiene el mismo largo. Los vectores velocidad en cada punto son perpendiculares a los vectores posición, y podemos establecer entonces una semejanza de triángulos, mostrada en figura 10

$$\frac{|\Delta v|}{v} = \frac{\Delta r}{R} \Rightarrow |\Delta v| = v\frac{\Delta r}{R}$$

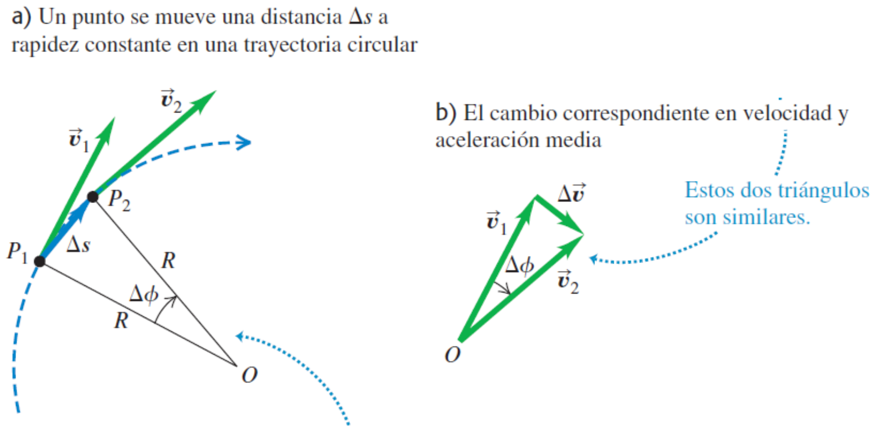


Figura 10

Pero además, la aceleración media es:

$$a_{media} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = v\frac{\Delta r}{R}\frac{1}{\Delta t}$$

Tomando límite a cero

$$\lim_{\Delta t \to 0} a_{media} = a_c \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = v$$

resulta:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Definimos como período, T, al tiempo que tardo en dar una vuelta completa. Como la longitud de la vuelta es $2\pi R$ y la recorro a velocidad v, resulta

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Llamamos frecuencia, f, a la cantidad de vueltas que damos por unidad de tiempo, es decir

$$f = \frac{1}{T} \qquad [1/s]$$

Sus unidades son vueltas por segundo.

Objeto extenso girando

Cuando lo que gira describiendo un círculo es un objeto extenso, una varilla por ejemplo, se observa que cada punto a lo largo de la varilla tiene una velocidad diferente. La velocidad de viaje del punto extremo de la varilla debe ser mayor. El punto O, en el eje de giro, tiene velocidad cero, ya que no recorre ninguna distancia.

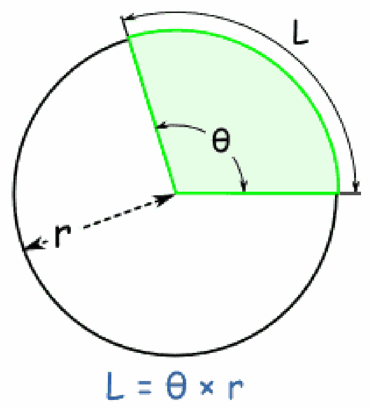


Figura 11: Varilla girando.

$$l_i = v_i \Delta t \Rightarrow v_i = \frac{l_i}{\Delta t}$$

Longitud de un arco de círculo: $l = \theta r$

Todos los puntos de la varilla recorren el mismo ángulo θ en ese intervalo de tiempo. Es por esto que es usual dar información de las variables angulares, que caracterizan el movimiento de la varilla completa.

$$l = \theta r \qquad v = \omega r \qquad a_{\parallel} = \gamma r \qquad \left(a_{\perp} = \frac{v^2}{r} \right)$$

- θ representa el ángulo recorrido en el giro, y se mide en radianes, $[rad]$.
- ω representa la velocidad angular. Sus unidades son $[rad/s]$ y se calcula como $\omega = d\theta/dt$.
- γ es la aceleración angular. Es una medida de los cambios de la velocidad angular ω, es decir, $\gamma = d\omega/dt$, y se mide en $[rad/s^2]$.

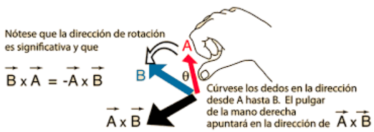
Es importante notar que las ecuaciones de arriba, no son vectoriales. Estamos dando, por ejemplo, la relación entre el módulo del vector velocidad, v, con que estoy recorriendo un círculo de radio r y la rapidez angular, ω, con que lo hacemos.

Relaciones vectoriales

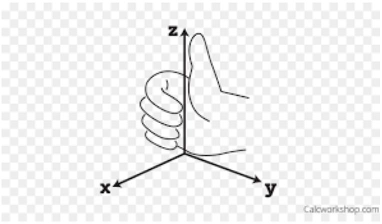
El vector velocidad angular $\vec{\omega}$ apunta en la dirección del eje alrededor del cual hacemos el giro.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Regla de la mano derecha:



(a) El producto vectorial entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$



(b) Regla de la mano derecha.

Figura 12: El resultado del producto vectorial es un vector perpendicular al plano que forman los vectores.