Nombre: Tomás Achával Becerro

D.I. 45085746

6,60

Hojas entregadas: 3

TEMA B

Primer parcial de Matemática DiscretaII-26 de abril de 2024.

Escriba su nombre EN CADA HOJA y numere cada hoja de la forma n/N donde n es el número de la hoja y N el número total de hojas que entrega (sin contar esta).

1): (3,5 puntos) En el siguiente network, x es igual a la cifra de las unidades de su DNI. Hallar un flujo maximal en el, usando Dinitz en cualquiera de sus versiones. Dar tambien un corte minimal y mostrar que el valor del flujo maximal es igual a la capacidad del corte minimal.

(si ud. no aprendió Dinitz, puede hacerlo usando Edmonds-Karp, pero a) va a demorar mas y b) tiene un punto de descuento, es decir el ejercicio vale 2,5 puntos en ese caso).

$sA : 71 + x$	$CD : 100$	$It : x$	$PM : 100$
$sB : 100$	$DM : 71 + x$	$IF : 100$	$PQ : 100$
$sC : 100$	$EF : 70$	$JK : 100$	$QR : 100$
$sE : 70$	$EG : 71$	$KI : 10$	$RU : 100$
$sP : 11 + x$	$Ft : 70$	$KL : 100$	$UX : 100$
$AI : 100$	$GN : 100$	$LI : 100$	$XY : 100$
$AM : 71$	$Ht : x$	$Mt : 82 + x$	$Yt : 100$
$BH : 100$	$HJ : 100$	$Nt : 100$	

2):

a) (2,5 puntos) A partir del siguiente network y comenzando con el flujo 0, construir el primer NA y hallar un flujo bloqueante en el usando WAVE.

b) (0,5 puntos) Luego de haber hecho a), a partir del flujo obtenido, continuar con Edmonds-Karp hasta hallar un flujo maximal y un corte minimal en el network. (nota: ud debe hacer la parte a) para poder hacer la parte b). Si Ud. hace la parte a) usando un algoritmo distinto a Wave, el ejercicio entero vale 0 puntos).

sA 15	BC 10	DE 10	Ft 8
sB 10	BD 5	DG 9	Gt 7
AC 15	CE 20	Et 9	
AD 5	CF 9		

3): (3,5 puntos) Dado un grafo G con vertices $\{v_1, ..., v_n\}$, sean $x_1, ..., x_n, z$ vértices que no estén en G y sea H el grafo con vértices $\{v_1, ..., v_n, x_1, ...x_n, z\}$ y lados:

$$E(H) = E(G) \cup \{x_i v_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{x_i z : i = 1, ..., n\}$$

Probar que $\chi(H) = \chi(G) + 1$.

Nota: es casi obvio que $\chi(H) \leq \chi(G) + 1$ asi que probar unicamente esta desigualdad vale solo 0,1 puntos.

(ayuda: una forma de hacerlo es suponer por contradicción que $\chi(H) = \chi(G)$ y usar el coloreo de H para crear un coloreo de G con $\chi(G) - 1$ colores. Nota: el coloreo de H no va a dar automaticamente un coloreo de G con $\chi(G) - 1$ colores. Dado el coloreo de H, que en particular colorea a G como subgrafo, hay que cambiar inteligentemente este ultimo coloreo para que queden $\chi(G) - 1$ colores).

HOJA N° 1/3

FECHA

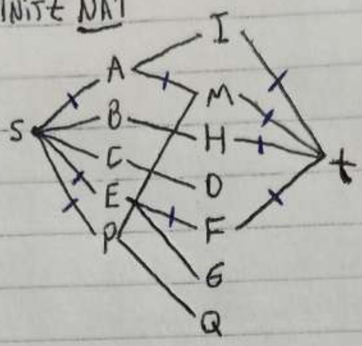
Tomás Achával Becerra

45085746 A.

100

Ejercicio N°1 (X=6)

DINITZ NA1



CAMINOS DFA

sAIt: 6

sAMt: 71

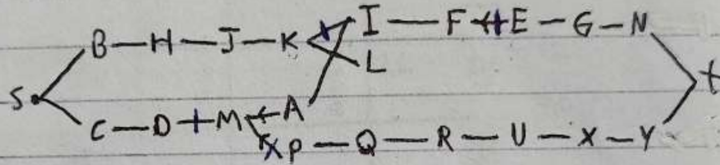
sBHt: 6

sEFt: 70

sPMt: 17

FIN NA1 (FLUJO BLOQUEANTE)

NA2



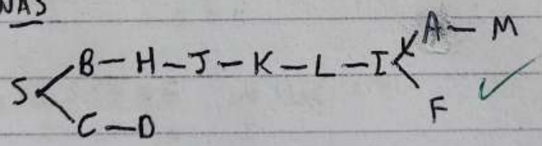
CAMINOS: sBHJKIF$\overleftarrow{E}$GNt: 10

sCD$\overleftarrow{M}$$\overleftarrow{A}IF\overleftarrow{E}$GNt: 60

sCD$\overleftarrow{M}$$\overleftarrow{P}$QRUXYt: 17

FIN NA2 (FLUJO BLOQUEANTE)

NA3



NO LLEGA A t

CORTE $S = \{s, B, C, H, D, J, K, L, I, A, F, M\}$

$\boxed{CAP(S)} = c(sE) + c(sP) + c(Ht) + c(It) + c(Ft) + c(Mt)$

$= 70 + 17 + 6 + 6 + 70 + 88 = \boxed{257}$

$\boxed{V(f)} = OUT_f(s) - IN_f(s) = OUT_f(s) = 77 + 16 + 77 + 70 + 17$

$= \boxed{257}$

$\boxed{CAP(S) = 257 = V(f)}$ (f es maximal)

- sA 77→71→0
- sB 100→94→84
- sC 100→40→23
- sE 70→0
- sP 17→0
- AI 100→94→34
- AM 71→0→60
- BH 100→94→84
- CD 100→40→23
- DM 77→17→0
- EF 70→0→10→70
- EG 71→61→1
- >Ft 70→0
- GN 100→90→30
- >Ht 6→0
- HJ 100→90
- >It 6→0
- IF 100→90→30
- JK 100→90
- KI 10→0
- KL 100
- LI 100
- >Mt 88→17→0
- >Nt 100→90→30
- PM 100→83→100
- PQ 100→83
- QR 100→83
- RU 100→83
- UX 100→83
- XY 100→83
- >Yt 100→83

El valor del flujo en cada lado está dado por la diferencia entre el primer y último valor de la lista.

Por ejemplo: [GN 100→90→30] ⇒ f(GN) = 100 − 30 = 70

NOTA

Tomás Achával Becerro
45085746 A.

EJERCICIO Nº2

NA DE WAVE   BLOQUEADOS = $\boxed{}$

sA 15→0→3→1
sB 10→0
AC 15→0→8→6
AD 5→0
BC 10→0→2
BD 5→3
CE 20→0→11
CF 9→4→0→1
DE 10
DG 9→4→2
Et 9→0
Ft 8→3→0
Gt 7→2→0

s	A	B	C	D	E	F	G	t	
-25	15 ∨ 0	10 ∨ 0	15 ∨ 25 ∨ 5 ∨ 0		20 ∨ $\boxed{11}$	5 ∨ 0		9 ∨ 14	OLA →
			11		$\boxed{0}$				OLA ←
			$\boxed{7}$			4 ∨ $\boxed{1}$		17	OLA →
	8		$\boxed{8}$ ∨ $\boxed{0}$			$\boxed{0}$			OLA ←
	$\boxed{3}$			5 ∨ 0			5 ∨ 0	22	OLA →
-22	$\boxed{0}$								OLA ←

FIN NA1 DE WAVE, TODOS LOS VÉRTICES ESTÁN BALANCEADOS (ES FLUJO BLOQUEANTE)

CONTINÚO CON E-K

1ER CAMINO   sACBEFDGt → sA$\overleftarrow{C}$BDGt : 2
s A C̄ C C B D G

2DO CAMINO   sAC~~B~~EF~~D~~G NO LLEGA A t
s A C̄ C C B D

CORTE $S = \{s, A, C, B, E, F, D, G\}$

$CAP(S) = c(Et) + c(Ft) + c(Gt)$
$= 9 + 8 + 7 = \boxed{24}$
$V(f) = OUT_f(s) - IN_f(s) = 14 + 10 = \boxed{24}$
} $CAP(S) = V(f)$ (f ES MAXIMAL)

OBS EL VALOR DEL FLUJO EN CADA LADO ESTÁ DADO POR LA DIFERENCIA ENTRE EL PRIMER Y ÚLTIMO VALOR DE LA LISTA PARA ESE LADO.

Ej: [CF 9→4→0→1] ⇒ $f(CF) = 9 - 1 = 8$

NOTA

HOJA Nº 3/3

FECHA

Tomás Achával Becerro

45085746

Ejercicio Nº 3

Grafo G con vértices $v_1, \dots, v_n$

$x_1, \dots, x_n, z$ vértices que no están en G.

Grafo H con vértices $v_1, \dots, v_n, x_1, \dots, x_n, z$ y lados

$$E(H) = E(G) \cup \{x_i v_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{x_i z : i = 1, \dots, n\}$$

Probar que $\chi(H) = \chi(G) + 1$

Sea $\chi(G) = r$, sabemos que existe un coloreo propio de G con r colores, lo llamo C_G

Obs: Si existe un coloreo propio de H con N colores $\Rightarrow \chi(H) \leq N$

El siguiente es un coloreo propio de H con $r+1$ colores $\{1, \dots, r, r+1\}$

$C_H(v_i) = C_G(v_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$ } es propio pues viene de C_G

$C_H(x_i) = r+1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ } sigue siendo propio pues no existen lados $x_i x_j$ y $r+1 \neq C(v_i)\ \forall i$

$C_H(z) = 1$ } sigue siendo propio pues el único vértice coloreado con 1 (o los) se encuentra en los v_i, y estos no forman lados con z.

Por lo tanto $\chi(H) \leq r+1 = \chi(G)+1$

En la siguiente página muestro que $\chi(H) \geq \chi(G)+1$, para finalmente concluir que $\chi(H) = \chi(G)+1$ a partir del resultado anterior y este.

NOTA

Recordemos que C_G es un coloreo propio de G con $r = \chi(G)$ colores, y que este valor es el mínimo posible. Llamamos a estos colores $\{1, \ldots, r\}$

Intentaré colorear H con r colores (y que sea propio).

Inicialmente, coloreo los vértices v_i de acuerdo a C_G, pues es la menor cantidad de colores que puedo utilizar. ~~Hay pérdida de generalidad~~

Sean v_{K_0} los vértices con $c(v_K) = r$. Si tienen este color es porque tienen al menos un vecino con cada color $1, \ldots, r-1$, pues de otra forma existiría un coloreo propio con menos de r colores. sólo si usás greedy

Como todos los vecinos de v_K están conectados a x_K, $c(x_K) = r$.

Sean v_{K_1} los vértices con $c(v_{K_1}) = r-1$. De manera similar, todos sus vecinos utilizan los colores $\{1, \ldots, r-2\} \cup \{r\}$ (si no, podría usar uno de esos colores en G y obtener un col. propio con menos de r colores)

y están conectados a x_{K_1}, por lo tanto $c(x_{K_1}) = r-1$

Continuamos de la misma forma con los colores $r-2, \ldots, 1$

$v_{K2}, \ldots, v_{Kr-1}$, cuyos vecinos utilizan los colores $\{1, \ldots, r-K-1\} \cup \{r-K+1, \ldots, r\}$

De esta forma, existen $x_{K_0}, \ldots, x_{K_{r-1}}$ que utilizan los r colores de C_G

Como z está conectado a todos ellos, $c(z) \neq 1, \ldots, r$ y necesita un nuevo color.

Concluimos en la primera página que $\chi(H) \leq \chi(G) + 1$

y aquí que $\chi(H) \geq \chi(G) + 1$, pues no puedo utilizar $\chi(G)$ colores.

Por ambas conclusiones, $\chi(H) = \chi(G) + 1$

X

De 161 personas que rendimos el parcial, solo Tomás Maraschio (@tomimara52 en GitHub) hizo bien este ejercicio. Adjunto su solución en las siguientes páginas.

Para probar $\chi(H) = \chi(G)+1$, probaré $\chi(H) \leq \chi(G)+1$ y $\chi(H) \geq \chi(G)+1$.

$\chi(H) \leq \chi(G)+1$

Para esto, daré un coloreo propio de H que use $\chi(G)+1$ colores.
Sea c un coloreo propio de G que usa los colores $\{1, 2, \dots, \chi(G)\}$.
Defino $\tilde{c}(y) = \begin{cases} c(v_i) & \text{si } y = v_i \text{ para algún } i \\ \chi(G)+1 & \text{si } y = x_i \\ 1 & \text{si } y = z \end{cases}$

Es fácil ver que es propio:
Sea $v_iv_j \in E(H)$, $\tilde{c}(v_i) \neq \tilde{c}(v_j)$ porque c es propio y $\tilde{c}(v_i) = c(v_i)$ y $\tilde{c}(v_j) = c(v_j)$
Sea $v_ix_i \in E(H)$, $\tilde{c}(v_i) \neq \tilde{c}(x_i)$ porque $c(v_i) \neq \chi(G)+1$ y $\tilde{c}(x_i) = \chi(G)+1$
Sea $x_iz \in E(H)$, $\tilde{c}(x_i) \neq \tilde{c}(z)$ porque $\chi(G)+1 \neq 1$
Así, como $\tilde{c}$ es coloreo propio que usa $\chi(G)+1$ colores en H,
$\chi(H) \leq \chi(G)+1$.

$\chi(H) \geq \chi(G)+1$.

Sup. $\chi(H) = \chi(G)$. Sea c un coloreo propio que usa $\chi(H)$ colores en H.
Como todos los x_i se conectan con el z, sé que para colorear los x_i uso (a lo sumo) $\chi(H)-1$ colores. Definiré $\tilde{c}$ coloreo de G:

$\tilde{c}(v_i) = \begin{cases} c(v_i) & \text{si } c(v_i) \neq c(z) \\ c(x_i) & \text{si } c(v_i) = c(z) \end{cases}$. Primero, notar que $\tilde{c}$ usa a lo sumo $\chi(H)-1$ colores, porque $c(z)$ nunca es usado. Ahora probaré que $\tilde{c}$ es propio. Para ello, tomo un $v_iv_j \in E(G)$.

Si $\tilde{c}(v_i) = c(v_i)$ y $\tilde{c}(v_j) = c(v_j)$: Entonces $\tilde{c}(v_i) \neq \tilde{c}(v_j)$, porque c es un coloreo propio.

$\wedge$ $\tilde{c}(v_i) = c(x_i)$ y $\tilde{c}(v_j) = c(v_j)$:

Como $v_i v_j \in E(G)$, por definición sé que $x_i v_j \in E(H)$. Luego, como c es propio en H, $c(x_i) \neq c(v_j)$, entonces $\tilde{c}(v_i) \neq \tilde{c}(v_j)$.

$\wedge$ $\tilde{c}(v_i) = c(v_i)$ y $\tilde{c}(v_j) = c(x_j)$:

Igual que el caso anterior.

$\wedge$ $\tilde{c}(v_i) = c(x_i)$ y $\tilde{c}(v_j) = c(x_j)$:

Esto significa que $c(v_i) = c(v_j) = c(z)$, pero esto es un absurdo porque $v_i v_j \in E(H)$ y c era propio. Por lo tanto, este caso no se puede dar.

Finalmente, como probé que $\tilde{c}(v_i) \neq \tilde{c}(v_j)$ para cualquier $v_i v_j \in E(G)$, $\tilde{c}$ es un coloreo propio en G. Pero $\tilde{c}$ ~~...~~, como dije antes, usa menos de $\chi(H) = \chi(G)$ colores. Esto es un absurdo, porque no puedo usar menos colores que el número cromático. Luego, $\chi(H) \neq \chi(G)$, entonces $\chi(H) \geq \chi(G) + 1$ (porque G es subgrafo de H).

Finalmente, como $\chi(G) + 1 \leq \chi(H) \leq \chi(G) + 1$, $\underline{\chi(H) = \chi(G) + 1}$. $\blacksquare$