ANÁLISIS NUMÉRICO I (LM-LMA) - ANÁLISIS NUMÉRICO (LC)
PARCIAL 1

25 de Abril de 2023

Nombre y Apellido: Tomás Altamirano Bertero	Comisión: 1

1	2	3	4	TOTAL	NOTA
3	3	2,75	1	9.75	10 (diez)

- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

- **Ejercicio 1**
  (a) Construya el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt{x+1}$ alrededor de $x = 0$.
  (b) Use el polinomio de Taylor obtenido en (a) para aproximar $\sqrt{1.25}$.
  (c) De una estimación del error cometido en (b) usando la fórmula del resto.

- **Ejercicio 2** Se sabe que la función $f(x) = e^x - \pi x$ tiene 2 raíces, una en el intervalo $[0, 1]$ y otra en el intervalo $[1, 2]$.
  (a) Encuentre dos funciones de iteración que podrían ser usadas en el Método de Iteración de Punto Fijo para encontrar una raíz de $f(x)$. Justifique su respuesta.
  (b) Elija una de las funciones de iteración del punto anterior para cada raíz con la cual sea posible definir un intervalo donde el Método de Punto Fijo converja. Justifique adecuadamente su respuesta.

- **Ejercicio 3**
  Suponga que p_n es un polinomio de grado menor o igual a n que interpola a la función $f(x) = e^{\frac{x-2}{2}}$ en los nodos

$$0 = x_0 < \ldots < x_n = 2, \quad \text{con } x_i = 2\frac{i}{n} \quad \text{para } i = 0, \ldots, n.$$

  a) Construya el polinomio $p_2(x)$.
  b) Muestre que

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}, \quad x \in [0, 2].$$

- **Ejercicio 4**
  Demuestre que si p es una raíz de multiplicidad $r \geq 2$ de f, entonces la siguiente modificación del método de Newton recupera la convergencia cuadrática:

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

HOJA Nº 1

FECHA

ANI - Primer Parcial

Tomás Achával Becerra LCC
45085746 - comisión 1

Ejercicio 1:

a) Polinomio de Taylor centrado en 0 de $f(x)=\sqrt{x+1}$

Para ello necesito

$f(0)=\sqrt{0+1}=1$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} \Rightarrow f''(0)=-\frac{1}{4}$

$$P_2(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2!}x^2 = \boxed{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2}$$

b) Para aproximar $\sqrt{1.25}$ con el polinomio de grado 2, debemos tener en cuenta que

$\sqrt{1,25}=f(\frac{1}{4})$ pues $f(1/4)=\sqrt{1+1/4}=\sqrt{1.25}$

Por lo tanto

$$f(\tfrac{1}{4}) \approx P(\tfrac{1}{4}) = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{8\cdot 16} = \frac{8\cdot16+16-1}{8.16} = \frac{128+15}{128} = \boxed{\frac{143}{128}=1.1171875}$$

c) El error cometido ENd por el polinomio de Taylor de grado 2 está dado por

$$R_{3,0}(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x)^3=\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}x^3 \quad , \xi \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

Aux: $f^{(3)}(x)=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^5}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^5}}$

$$R_{3,0}(\tfrac{1}{4})=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\xi+1)^5}}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \leq \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{2^{10}}$$

$\sqrt{(\xi+1)^5}\geq 1, \ \forall \xi \in [0,\frac{1}{4}]$

Pues $\sqrt{(0+1)^5}=1<\sqrt{(\frac{1}{4}+1)^5}$ y la función $\sqrt{\ }$ es continua y creciente.

Así, $\boxed{R_{3,0}(\tfrac{1}{4})\leq\frac{1}{2^{10}}}$

Ejercicio N°2

Se sabe que $f(x) = e^x - \pi x$ tiene una raíz en $[0,1]$ y otra en $[1,2]$

a) Encontrar dos funciones de iteración que podrían ser usadas en el método de iteración de Pto Fijo para encontrar una raíz de $f(x)$

Para ello, debemos encontrar $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tal que, si p es una raíz de f, $g_1(p) = p = g_2(p)$

Notar que si p es raíz de f,

$f(p) = e^p - \pi p = 0 \Rightarrow e^p = \pi p \Rightarrow p = \frac{e^p}{\pi}$ lo cual nos da la función $\boxed{g_1(x) = \frac{e^x}{\pi}}$ que tiene punto fijo en p pues $g(p) = \frac{e^p}{\pi} = p$

Por otro lado,

$f(p) = e^p - \pi p = 0 \Rightarrow e^p = \pi p \Rightarrow \ln(e^p) = \ln(\pi p) \Rightarrow p = \ln(\pi p)$, lo cual nos da $\boxed{g_2(x) = \ln(\pi x)}$ que también tiene punto fijo en p pues $g(p) = \ln(\pi p) = p$

b) Para el intervalo $[0,1]$, utilizaré la función $g_1(x) = \frac{e^x}{\pi}$

Para que la sucesión converja, es necesario encontrar $[a,b]$ tal que

- $g(x)$ es continua en $[a,b]$ ✓ ($g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$)
- $g([a,b]) \subset [a,b]$
- $\exists g'$ $\forall x \in [a,b]$
- $0 < |g'(x)| \leq k < 1$ $\forall x \in [a,b]$,

Probaré con el intervalo $[0,1]$, si cumple las condiciones, entonces la sucesión converge al único punto fijo de g en dicho intervalo.

$g(x) = \frac{e^x}{\pi} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{\pi}$

Notar que g y g' son funciones crecientes y continuas pues e^x lo es. Sabiendo esto, basta con que $g(0) \in [0,1]$ y $g(1) \in [0,1]$ para garantizar que $g([0,1]) \subset [0,1]$

Veamos, $g(0) = \frac{e^0}{\pi} = \frac{1}{\pi} \in [0,1]$ y $g(1) = \frac{e^1}{\pi} < 1$ pues $\pi > e$ $\therefore g(1) \in [0,1]$

Los mismos cálculos nos permiten saber que $g'(x) = g(x)$ cumple $\frac{1}{\pi} \leq |g'(x)| \leq \overbrace{\frac{e}{\pi}}^{k} < 1$ por lo tanto la función de iteración $g(x) = \frac{e^x}{\pi}$ converge al punto fijo de g en el intervalo $[0,1]$ pues cumple todos los requisitos.

Para el intervalo $[1,2]$, buscaré que la función $g_2(x) = \ln(\pi x)$ cumpla los mismos requisitos.

- $g(x) = \ln(\pi x)$ es continua en $[1,2]$ ✓
- Como $\ln(\pi x)$ es una función creciente, entonces si

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = \ln(\pi) \approx 1.14 \in [1,2] \\ g(2) = \ln(2\pi) \approx 1.83 \in [1,2] \end{array}\right] \Rightarrow g([1,2]) \subset [1,2]$$

- $g'(x) = \frac{1}{\pi x}$ función continua y decreciente en $[1,2]$

$\therefore g'(1) = \frac{1}{\pi}$ y $g'(2) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2\pi} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{\pi} < 1$ $\forall x \in [1,2]$

De nuevo, el cumplimiento de los requisitos garantiza la convergencia de la iteración de pto. fijo con $g_2(x)$ a la raíz de f en $[1,2]$.

NOTA

FECHA

EJERCICIO N° 3

TOMÁS ACHÁVAL BERTERO LCC
A-5085146 - COMISIÓN 1

• p_n $gr(p_n) \leq n$ INTERPOLA A $f(x) = e^{\frac{x-2}{2}}$ EN LOS NODOS

$0 = x_0 < \dots < x_n = 2$ CON $x_i = 2\frac{i}{n}$ PARA $i = 0, \dots, n$

a) CONSTRUIR EL POLINOMIO $p_2(x)$

NODOS = $x_0 = 0$, $x_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $x_2 = 2$

$f(x_0) = f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} = y_0$

$f(x_1) = f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = y_1$

$f(x_2) = f(2) = e^0 = 1 = y_2$

$$\boxed{\begin{array}{c|ccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1/e & 1/\sqrt{e} & 1 \\ & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}}$$

PARA CONSTRUIRLO UTILIZARÉ EL POL. DE LAGRANGE, DADO POR

$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \ell_i(x)$, DONDE $\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)}$, $\ell_1(x) = \frac{x(x-2)}{1\cdot(-1)}$ y $\ell_2(x) = \frac{x(x-1)}{2 \cdot 1}$

ASÍ,

$$p_2(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + y_2 \ell_2(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} x(x-2) + \frac{1}{2} x(x-1) = \boxed{\frac{1}{2e}(x-1)(x-2) - \frac{1}{\sqrt{e}} x(x-2) + \frac{1}{2} x(x-1)}$$

b) MOSTRAR QUE

$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$, $x \in [0,2]$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$

VEAMOS $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x-1}$ $f''(x) = \frac{1}{2^2} e^{\frac{1}{2}x-1}$ ... $\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{2}x-1}}$

SABEMOS POR TEOREMA* QUE

$$|f(x) - p_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} e^{\frac{1}{2}\xi-1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1 \cdot e^{\frac{1}{2}\xi-1}}{(n+1)!\, 2^{n+1}} x^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!\, 2^{n+1}} x^{n+1}$$

PUES ξ ESTÁ ENTRE 0 y 2 y $\max_{\xi} e^{\frac{1}{2}\xi-1} = e^0 = 1$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \rightarrow \text{PUES } \max_{x \in [0,2]} x^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

DE ESTA FORMA PODEMOS CONCLUIR QUE

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

TEOREMA*

$f \in C^{n+1}[a,b]$
p POLINOMIO
GRADO $\leq n$ QUE
INTERPOLA
A f EN
$x_0, \dots, x_n$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \forall x \in [a,b], \text{ ALGÚN } \xi \in [a,b]$$

No. Esto debería ser $\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

NOTA

Ejercicio N°4

• p raíz multiplicidad $r \geq 2$ de f. $x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ recupera la convergencia cuadrática.

Demostración: Veamos $x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ como $g(x) = x - r\frac{f(x)}{f'(x)}$ de manera tal que $g(p)=p$.

• Como p tiene multiplicidad r, podemos construir $f(x) = (x-p)^r h(x)$, donde $h(x)$ es un polinomio tal que $h(p) \neq 0$

• Quiero calcular $g'(x)$, para ello necesito:

• $$f'(x) = r(x-p)^{r-1}h(x) + (x-p)^r h'(x)$$
$$= \boxed{(x-p)^{r-1}\left(rh(x) + (x-p)h'(x)\right)}$$

• $$f''(x) = (r-1)(x-p)^{r-2}\left[rh(x) + (x-p)h'(x)\right] + (x-p)^{r-1}\left[rh'(x) + h'(x) + (x-p)h''(x)\right]$$
$$= (x-p)^{r-2}\left[r(r-1)h(x) + (r-1)(x-p)h'(x)\right] + (x-p)^{r-1}\left[(r+1)h'(x) + (x-p)h''(x)\right]$$
$$= (x-p)^{r-2}\left[r(r-1)h(x) + (r-1)(x-p)h'(x) + (x-p)\left[(r+1)h'(x) + (x-p)h''(x)\right]\right]$$
$$= (x-p)^{r-2}\left[r(r-1)h(x) + (r-1)(x-p)h'(x) + (r+1)(x-p)h'(x) + (x-p)^2h''(x)\right]$$
$$= (x-p)^{r-2}\left[r(r-1)h(x) + (r-1+r+1)(x-p)h'(x) + (x-p)^2h''(x)\right]$$
$$= \boxed{(x-p)^{r-2}\left[r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2h''(x)\right]}$$

Con esto,

$$g'(x) = \left(x - r\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - r\,\frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - r\left(1 - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right) = 1 - r + r\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Reemplazando obtenemos

$$g'(x) = 1 - r + r\,\frac{(x-p)^r h(x)(x-p)^{r-2}\left[r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2h''(x)\right]}{\left[(x-p)^{r-1}\left(rh(x) + (x-p)h'(x)\right)\right]^2}$$
$$= 1 - r + r\,\frac{\cancel{(x-p)^{2r-2}}\,h(x)\left[r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2h''(x)\right]}{\cancel{(x-p)^{2r-2}}\left(rh(x) + (x-p)h'(x)\right)^2}$$

Y podemos evaluar

$$g'(p) = 1 - r + r\,\frac{h(p)\left[r(r-1)h(p) + \underbrace{2r(p-p)h'(p)}_{0} + \underbrace{(p-p)^2h''(p)}_{0}\right]}{\left[rh(p) + \underbrace{(p-p)h'(p)}_{=0}\right]^2} = 1 - r + r\,\frac{h(p)r(r-1)h(p)}{(rh(p))^2}$$
$$= 1 - r + \frac{\cancel{r^2h^2(p)}(r-1)}{\cancel{r^2h^2(p)}} = 1 - r + r - 1 = \boxed{0}$$

Como $g(p)=p$ y $g'(p)=0$, un corolario* visto en el teórico nos permite asegurar que la sucesión $p_{n+1} = g(p_n)$ tiene orden de convergencia de (al menos) 2.

* Corolario anterior:

Sea p un punto fijo de g, $\{p_n\}$ la sucesión $p_{n+1} = g(p_n)$ que converge a p. Si $g'(p) = \dots = g^{r-1}(p)$ y $g^r(p) \neq 0$, entonces el orden de convergencia de la sucesión será r.