HOJA 1

PARCIAL 2, LENGFORM

TOMÁS ACHÁVAL BECERRO
45085146 - A.

2a) Sea $\Sigma = \{@, \$, \%, !\}$. Sea

$$f : \{(\alpha,\beta) \in \Sigma^{*2} : \beta \in \{@,\$\}^* \text{ ó } \alpha \in \{\$,!\}^+\} \rightarrow \Sigma^*$$

$$(\alpha,\beta) \rightarrow \begin{cases} \beta & \text{si } |\alpha| \leq 5 \\ \alpha^{PRED(|\alpha|)} & \text{si } |\alpha| > 5 \end{cases}$$

Pruebe que f es Σ-P.R.

100%

RESPUESTA:

Sean

$$f_1 : \underbrace{\{(\alpha,\beta) \in \Sigma^{*2} : (\beta \in \{@,\$\}^* \text{ ó } \alpha \in \{\$,!\}^+) \wedge |\alpha| \leq 5\}}_{D_{f_1}} \rightarrow \Sigma^*$$

$$(\alpha,\beta) \rightarrow \beta$$

y

$$f_2 : \underbrace{\{(\alpha,\beta) \in \Sigma^{*2} : (\beta \in \{@,\$\}^* \text{ ó } \alpha \in \{\$,!\}^+) \wedge |\alpha| > 5\}}_{D_{f_2}} \rightarrow \Sigma^*$$

$$(\alpha,\beta) \rightarrow \alpha^{PRED(|\alpha|)}$$

LEMA Si $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ son Σ-P.R para $n,m \in \omega$, $i=1,\dots,n$ y $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ $\forall i \neq j$, entonces $f_1 \cup \dots \cup f_n$ es Σ-P.R.

Es claro que D_{f_1} y D_{f_2} cumplen $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$, y que por la definición de f, se cumple $f = f_1 \cup f_2$. Veamos ahora que f_1 y f_2 son Σ-P.R para así concluir por el lema que f es Σ-P.R.

$$f_1 = \underbrace{p_2^{0,2}}_{\bar{f}_1}\Big|_{D_{f_1}} \quad y \quad f_2 = \underbrace{\lambda x\alpha[\alpha^x] \circ [PRED \circ \lambda\alpha[|\alpha|] \circ p_1^{0,2}, p_1^{0,2}]}_{\bar{f}_2}\Big|_{D_{f_2}}$$

LEMA: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ-P.R ($n,m \in \omega$ y $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$) y $S \subseteq D_f$ es un conjunto Σ-P.R, entonces $f|_S$ es Σ-P.R.

Es claro que $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ son Σ-P.R pues están dadas por composición de funciones Σ-P.R. Por el lema anterior, nos resta ver que D_{f_1} y D_{f_2} son conjuntos Σ-P.R para concluir que f_1 y f_2, y por lo tanto f, son Σ-P.R.

Por definición, un conjunto $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-P.R sii $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ es Σ-P.R.

Veamos entonces que $\chi_{D_{f_1}}^{\Sigma^{*2}}$ y $\chi_{D_{f_2}}^{\Sigma^{*2}}$ son Σ-P.R.

Para ello, defino los siguientes predicados sobre Σ^{*2}:

$$P(\cancel{\alpha,\beta}) = \lambda_\alpha[\alpha \in \{@,\$\}^*] \circ p_2^{0,2}(\cancel{\alpha,\beta}) \qquad \text{"}\beta \in \{@,\$\}^*\text{"}$$

$$Q(\cancel{\alpha,\beta}) = \lambda_\alpha[\alpha \in \{\$,!\}^+] \circ p_1^{0,2}(\cancel{\alpha,\beta}) \qquad \text{"}\alpha \in \{\$,!\}^+\text{"}$$

$$K(\cancel{\alpha,\beta}) = \lambda_{xy}[x \leq y] \circ [\lambda_\alpha[|\alpha|] \circ p_1^{0,2}, C_5^{0,2}](\cancel{\alpha,\beta}) \qquad \text{"}|\alpha| \leq 5\text{"}$$

Así, $\chi_{D_{f_1}}^{\Sigma^{*2}} = (P \vee Q) \wedge K$ y $\chi_{D_{f_2}}^{\Sigma^{*2}} = (P \vee Q) \wedge (\neg K)$

LEMA Si $P: S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q: S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-P.R., entonces $P \vee Q$, $P \wedge Q$ y $\neg P$ lo son.

Con este lema, nos queda ver que P, Q y K son Σ-P.R para que D_{f_1} y D_{f_2} sean conjuntos Σ-P.R.

Es claro que K es un predicado Σ-P.R pues es una composición de funciones Σ-P.R.

Para ver que P y Q son Σ-P.R, nos basta con ver que $\lambda_\alpha[\alpha \in \{@,\$\}^*]$ y $\lambda_\alpha[\alpha \in \{\$,!\}^+]$ son Σ-P.R, pues P y Q son composiciones de estas funciones con otras Σ-P.R.

$p = \lambda_\alpha[\alpha \in \{@,\$\}^*] = R(f,\mathcal{G})$ donde $f: \{\Diamond\} \to \omega$, $\Diamond \to 1$ $(f = C_1^{0,0})$

y $\mathcal{G} = \{(@, p_1^{1,1}), (\$, p_1^{1,1}), (\%, C_0^{1,1}), (!, C_0^{1,1})\}$ de manera tal que

$$R(f,\mathcal{G})(\varepsilon) = 1$$
$$R(f,\mathcal{G})(\alpha a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq @ \text{ y } a \neq \$ \\ R(f,\mathcal{G})(\alpha) & \text{c.c.} \end{cases} \rightarrow R(f,\mathcal{G})(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in \{@,\$\}^* \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Como f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-PR $\forall a \in \Sigma$, entonces $\boxed{R(f,\mathcal{G}) \text{ lo es.}}$

De manera análoga se define $\lambda_\alpha[\alpha \in \{\$,!\}^*]$ la cual es Σ-P.R y por lo tanto $Q = \lambda_\alpha[\alpha \in \{\$,!\}^+] = \lambda_\alpha[\alpha \in \{\$,!\}^*] \wedge (\neg\lambda_{\alpha\beta}[\alpha = \beta] \circ [p_1^{0,1}, C_\varepsilon^{0,1}])$ es un predicado Σ-PR obtenido por conjunción, negación y composición de funciones Σ-P.R.

HOJA 2

M5083146

Tomás Achával Bertele

De esta forma podemos concluir que $\chi^{\Sigma^{*2}}_{D_{f_1}}$ y $\chi^{\Sigma^{*2}}_{D_{f_2}}$ son Σ-PR

$\Rightarrow D_{f_1}$ y D_{f_2} son conjuntos Σ-PR (y $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ son Σ-P.R)

$\Rightarrow f_1 = \bar{f}_1|_{D_{f_1}}$ y $f_2 = \bar{f}_2|_{D_{f_2}}$ son Σ-PR

$\Rightarrow f = f_1 \cup f_2$ es Σ-P.R.