9.87 (10)

TOMÁS ACHÁVAL BENZERO
45085796 Ф.
3 HOJAS ENTREGADAS.

TEMA G

Segundo parcial de matematica discreta II-2024

Escriba su nombre EN CADA HOJA y numere cada hoja de la forma n/N donde n es el número de la hoja y N el número total de hojas que entrega (sin contar esta).

1. La siguiente matriz representa el costo de asignar los trabajadores $A, B, \ldots$ a los trabajos $I, II, \ldots$, etc.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	$VIII$
A	3	8	9	7	9	1	5	8
B	5	7	7	6	7	1	5	7
C	3	4	5	5	5	3	4	8
D	9	7	9	5	7	8	4	5
E	5	2	4	8	3	2	7	8
F	2	9	2	3	7	2	5	8
G	2	3	9	9	8	7	5	7
H	7	9	5	4	4	3	8	5

Hallar un matching que minimize el costo total, i.e., la suma de los costos.

2. Sea C el código con matriz de chequeo $H = [A|I]$, donde I es la identidad 6x6 y A es la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $a = 1$ si la cifra de las unidades de su DNI es impar, y 0 si es par, $b = 1$ si la cifra de las decenas de su DNI es impar, y 0 si es par, $c = 1$ si la cifra de las centenas de su DNI es impar, y 0 si es par, y $d = 1$ si la cifra de los miles de su DNI es impar y 0 si es par.

a) Decir cuantas palabras tiene en total C, justificando.

b) Escribir dos palabras no nulas que esten en C.

c) Calcular $\delta(C)$, justificando.

d) Si se recibe la palabra 110000000010100, y se asume que se produjo a lo sumo un error de transmisión, determinar la palabra enviada si esto es posible o indicar porqué no si no se puede.

3. Sea C el código ciclico de longitud $n = 23$ con polinomio generador $g(x) = 1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{11}$;

a) Decir cuantas palabras tiene C, justificando.

b) Dar una palabra del código cuyos últimos (mas a la derecha) 10 bits sean 1100000000. (ayuda: usar inteligentemente el metodo 2 de codificacion)

c) Este código corrige 3 errores.

Si se recibe la palabra $w = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^{14}$, hallar la palabra que sea mas probable que haya sido enviada.

(ayuda: el primer j para el cual el peso de s_j es menor o igual que 3 cumple que $4 \leq j \leq 9$ asi que si ud obtiene un j menor o mayor que esos numeros, tiene un error).

HOJA 1/3

100%

EJERCICIO N°1: MINIMIZAR LA SUMA DE LOS COSTOS.

TOMÁS ACHÁVAL BERETTA LCC
45085146

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	8	9	7	9	1	5	8
B	5	7	7	6	7	1	5	7
C	3	4	5	5	5	3	4	8
D	9	7	9	5	7	8	4	5
E	5	2	4	8	3	2	7	8
F	2	9	2	3	7	2	5	8
G	2	3	9	9	8	7	5	7
H	7	9	5	4	4	3	8	5

UTILIZARÉ EL ALGORITMO HÚNGARO HASTA HALLAR UN MATCHING DE "0"s

NOTACIÓN

S = "FILAS ETIQUETADAS"

RESTO MIN POR FILA

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	7	8	6	8	0	4	7
B	4	6	6	5	6	0	4	6
C	0	1	2	2	2	0	1	5
D	5	3	5	1	3	4	0	1
E	3	0	2	6	1	0	5	6
F	0	7	0	1	5	0	3	6
G	0	1	7	7	6	5	3	5
H	4	6	2	1	1	0	5	2

RESTO MIN POR COLUMNA

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A	2	7	8	5	7	$\boxed{0}$	4	6	6
B	4	6	6	4	5	0	4	5	←
C	$\boxed{0}$	1	2	1	1	0	1	4	1
D	5	3	5	$\boxed{0}$	2	4	0	0	
E	3	$\boxed{0}$	2	5	0	0	5	5	
F	0	7	$\boxed{0}$	0	4	0	3	5	
G	0	1	7	6	5	5	3	4	←
H	4	6	2	0	$\boxed{0}$	0	5	1	
	G					B			

RESTO $\min(S \times \overline{\Gamma(S)}) = 1$ EN $S \times \overline{\Gamma(S)}$ Y LO SUMO EN $\overline{S} \times \Gamma(S)$

	1	2	3	4	5	6	7	8		
A	2	6	7	4	6	$\boxed{0}$	3	5	6	6
B	4	5	5	3	4	0	3	4	←	←
C	0	0	1	0	0	0	$\boxed{0}$	3	1	
D	6	3	5	$\boxed{0}$	2	5	0	0		
E	4	$\boxed{0}$	2	5	0	1	5	5	I	
F	1	7	$\boxed{0}$	0	4	1	3	5		
G	$\boxed{0}$	0	6	5	4	5	2	3	←	
H	5	6	2	0	$\boxed{0}$	1	5	1		
	G	C		C	C	B	C			
						B				

MISMO PROCEDIMIENTO CON $\min(S \times \overline{\Gamma(S)}) = 2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A	$\boxed{0}$	4	5	2	4	0	1	3	6
B	2	3	3	1	2	$\boxed{0}$	1	2	←
C	0	0	1	0	0	2	$\boxed{0}$	3	
D	6	3	5	0	2	7	0	$\boxed{0}$	4
E	4	0	2	5	$\boxed{0}$	3	5	5	2
F	1	7	$\boxed{0}$	0	4	3	3	5	
G	0	$\boxed{0}$	6	5	4	7	2	3	1
H	5	6	2	$\boxed{0}$	0	3	5	1	5
	A	G		H	E	B	D	D	

LUEGO UN MATCHING DE SUMA MÍNIMA ESTÁ DADO POR

	COSTO
A1	3
B6	1
C7	4
D8	5
E5	3
F3	2
G2	3
H4	4

COSTO TOTAL
25

OBSERVACIÓN: EL PROCEDIMIENTO DE RESTAR EL $\min(S \times \overline{\Gamma(S)})$ Y PASAR A UNA NUEVA MATRIZ SE REALIZA CUANDO NO EXISTE MATCHING DE "0"s EN LA MATRIZ ACTUAL. POR EL TEOREMA DE HALL, ESTO SUCEDE CUANDO HAY UN SUBCONJUNTO S DE UNA DE LAS PARTES DE UN GRAFO BIPARTITO QUE CUMPLE $|S| \leq |\Gamma(S)|$, EN NUESTRO CASO, S = "FILAS ETIQUETADAS" Y $\Gamma(S)$ = "COLUMNAS ETIQUETADAS".

TOMÁS ACHÁVAL BERAZZO LCC
45085746 A.

d	c	b	a
IMPAR	IMPAR	PAR	PAR
1	1	0	0

EJERCICIO N°2 $H=[A|I]$ CON A DADA EN LA CONSIGNA

$$H = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

a) EL CÓDIGO C TIENE $2^{\dim(C)}$ PALABRAS, PUES ES UN CÓDIGO LINEAL.

VIMOS QUE $\dim(C) = \text{CANTIDAD\_COLUMNAS}(H) - \text{CANTIDAD\_FILAS}(H)$

$$= 15 - 6 = 9$$

POR LO TANTO C TIENE $2^9 = 512$ PALABRAS.

b) DOS PALABRAS NO NULAS DE C. PARA ELLO DARÉ DOS FILAS DE G, DONDE G ES LA MATRIZ GENERADORA DE C DADA POR

$G = [I \mid A^t]$ CON I LA IDENTIDAD 9×9

$$\left.\begin{matrix} w_1 = 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ w_2 = 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1 \end{matrix}\right\} \text{SON DOS PALABRAS EN } C$$

c) $\delta(C)$?

LD= "LINEALMENTE DEPENDIENTES"

VIMOS QUE $\delta(C)$ = MIN NUMERO DE COLUMNAS LD EN H

$$\left.\begin{matrix} \bullet\ H \text{ NO TIENE COLUMNA NULA} \\ \bullet\ H \text{ NO TIENE COLUMNAS REPETIDAS} \end{matrix}\right\} \text{POR TEOREMA, } \delta(C) \geq 3$$

- SI $H^{(1)} \dots H^{(15)}$ SON LAS COLUMNAS DE H, LUEGO $H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(10)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$
- $\{H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(10)}\}$ ES LD Y TIENE 3 COLUMNAS
- $\therefore \boxed{\delta(C) = 3}$

d) SE RECIBE $1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0 = w$ Y SE ASUME A LO SUMO UN ERROR

$$Hw^t = H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(11)} + H^{(13)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = H^{(5)}$$ $\Rightarrow$ HUBO UN ERROR EN EL BIT N°5

$\therefore$ LA PALABRA ENVIADA FUE $w + (000010000000000) = \boxed{1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0}$

HOJA 3/3

0.96/1

EJERCICIO N°3

TOMÁS ACHÁVAL BEAZERO LCC
45085146 A.

C código cíclico con $n=23$

$g(x) = 1+x+x^5+x^6+x^7+x^9+x^{11}$

a) ¿Cuántas palabras tiene C?

Un código cíclico también es lineal y $\therefore$ tiene $2^{\dim(C)}$ palabras.

Vimos que si C es un código cíclico de long n y g su polinomio generador,

$\dim(C) = n - \text{grado}(g) = 23 - 11 = 12$

Por lo tanto C tiene $2^{12} = 4096$ palabras.

b) Dar una palabra de C cuyos últimos bits sean 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

Para ello, codificaré la palabra $v =$ 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

Vista como polinomio, $v(x) = x^2+x^3$

Con el método 2 visto en clase,

$$v(x) \longrightarrow x^{gr(g)} \cdot v(x) \bmod g(x) + x^{gr(g)} v(x) \qquad \overbrace{1+x^4+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{13}+x^{14}}^{v \text{ codificada}}$$

$$= x^{11}(x^2+x^3) \bmod g(x) + x^{11}(x^2+x^3) \qquad ||$$

$$= x^{13}+x^{14} \bmod g(x) + x^{13}+x^{14} \underset{\text{por AUX}}{=} 1+\underbrace{x+x^2+x^3}_{\text{cancelan}}+x^6+x^8+\underbrace{x+x^2+x^3}+x^4+x^7+x^9+x^{13}+x^{14}$$

AUX:

$x^{11} \bmod g(x) = 1+x+x^5+x^6+x^7+x^9$

$x^{12} \bmod g(x) = x+x^2+x^6+x^7+x^8+x^{10}$

$x^{13} \bmod g(x) = x^2+x^3+x^7+x^8+x^9+x^{11} \bmod g(x) = x^2+x^3+x^7+x^8+x^9+(1+x+x^5+x^6+x^7+x^9)$ (se cancelan)

$= 1+x+x^2+x^3+x^6+x^8$ $+x^5$

estuve 20 minutos buscando este error 😭

$x^{14} \bmod g(x) = x+x^2+x^3+x^4+x^7+x^9$ $+x^6$

Luego v codificada es 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

c) El código corrige 3 errores ($t=3$)

Se recibe $w = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^{14}$

Utilizaré "error trapping" para hallar la palabra más probable enviada. Para ello debo encontrar un S_i con $|S_i| \leq 3$ y luego el error será $e = Rot^{-i}(S_i)$

AUX (de pág anterior)

$x^{11} \bmod g = 1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9$

$x^{12} \bmod g = x + x^2 + x^6 + x^7 + x^8 + x^{10}$

$x^{13} \bmod g = 1 + x + x^2 + x^3 + x^6 + x^8$

$x^{14} \bmod g = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^7 + x^9$

$S_0 = (1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^{14}) \bmod g(x)$

$= (1 + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^5 + x^8 + x^{10})$
$+ (x + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 + x^7 + x^9) = 1 + x + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$

$|S_0| = 8 > 3$, continúo

$S_1 = x S_0 \bmod g(x)$

$= x + x^2 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} \bmod g(x)$

$= (\cancel{x} + x^2 + \cancel{x^5} + \cancel{x^6} + x^8 + \cancel{x^9} + x^{10})$
$+ (1 + \cancel{x} + \cancel{x^5} + \cancel{x^6} + x^7 + \cancel{x^9}) = 1 + x^2 + x^7 + x^8 + x^{10}$

$|S_1| = 5 > 3$, continúo

$S_2 = x S_1 \bmod g(x)$

$= x + x^3 + x^8 + x^9 + x^{11} \bmod g(x) = \cancel{x} + x^3 + x^8 + \cancel{x^9} + (1 + \cancel{x} + x^5 + x^6 + x^7 + \cancel{x^9})$

$= 1 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$

$|S_2| = 6 > 3$, continúo a $S_{2+3} = S_5$ pues es la próxima iteración en donde existirá la posibilidad de cancelar términos debido al "$\bmod g(x)$".

$S_5 = x^3 S_2 \bmod g(x)$

$= x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} \bmod g(x) = x^3 + \cancel{x^6} + x^8 + \cancel{x^9} + x^{10} + (1 + x + x^5 + \cancel{x^6} + x^7 + \cancel{x^9})$

$= 1 + x + x^3 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10}$

$|S_5| = 7 > 3$, continúo

$S_6 = x S_5 \bmod g(x)$

$= x + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11} \bmod g(x) = (\cancel{x} + x^2 + x^4 + \cancel{x^6} + x^8 + \cancel{x^9}) + (1 + \cancel{x} + x^5 + \cancel{x^6} + x^7 + \cancel{x^9})$

$= 1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8$

$S_9 = x^3 S_6 \bmod g(x) = x^3 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11} \bmod g(x) = x^3 + \cancel{x^5} + \cancel{x^7} + x^8 + x^{10} + (1 + x + \cancel{x^5} + x^6 + \cancel{x^7} + x^9)$

$= 1 + x + x^3 + x^8 + x^9 + x^{10}$

$|S_9| = 6 > 3$ ∴ Por la consigna, está asegurado que tuve un error de cálculo en alguna iteración anterior. De haberlo hecho correctamente, habría encontrado un S_i con $|S_i| \leq t$ y luego $e = Rot^{-i}(S_i) = x^{n-i} S_i \bmod (1 + x^{23})$ sería el error tal que la palabra más probable enviada haya sido $v = w + e$. (No tuve tiempo de buscar y corregir el error)