ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LC) - CÁLCULO I (LMA)
PARCIAL 2

13 de mayo de 2022

Nombres y Apellido: TOMÁS ACHKUAC	Comisión: 3

1	2	3	4	TOTAL	NOTA
2.5	2.5	2.5	2.5	10	10 (diez)

- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- No está permitido el uso de calculadoras.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

- **Ejercicio 1** *(2.5 Pts.)*

(a) Sea $f(x) = e^{Kx-2}$, con $K \in \mathbb{R}$. Halle el valor de K tal que $f(2) = 1$.

(b) Halle la solución de la siguiente ecuación $\ln(5x) - \ln(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$.

- **Ejercicio 2** *(2.5 Pts.)* Calcule los siguientes límites, si existen. De no existir explique por qué.

  (a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4-x}{|x-4|}$

  (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x(x+1)}$

- **Ejercicio 3** *(2.5 Pts.)* Considere la función $f(x) = \dfrac{9x^2-1}{3x^2-x}$. Halle, en caso de existir, las asíntotas horizontales y/o verticales de la gráfica de f.

- **Ejercicio 4** *(2.5 Pts.)*

  (a) Analice la continuidad de la siguiente función en el punto $x = -1$. En caso de encontrar una discontinuidad, clasifíquela.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x+3}{x+1} & x < -1 \\ \ln(x+2) - 4 & x \geq -1 \end{cases}$$

  (b) Demuestre que la ecuación $\sqrt{x} = x - 1$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0,1)$.

HOJA 1

HOJA N°

FECHA

PARCIAL 2 - ANÁLISIS MATEMÁTICO - COM 3 TOMÁS ACHAVAL

45083196

• EJERCICIO 1:

a) HALLAR K TAL QUE $\overbrace{e^{K.2-2}}^{f(2)} = 1$

TOMO ln DE AMBOS LADOS $\ln(e^{K.2-2}) = \ln(1)$ VERIFICO $f(2) = e^{1.2-2} = e^0 = 1$

$K.2-2 = 0$

$K.2 = 2$

$K = \frac{2}{2}$

$\boxed{K=1}$

b) $\ln(5x) - \ln(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$ POR PROPIEDADES DE $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $a,b>0$

$\ln\left(\frac{5x}{x}\right) = \ln((x+2)(x-2))$ Y $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

DIF. DE CUADRADOS

$e^{\ln(5)} = e^{\ln(x^2-4)}$

APLICO LA FUNCIÓN INVERSA (e^x)

$5 = x^2 - 4$

$9 = x^2$

$\sqrt{9} = x \Rightarrow \boxed{x=3}$ → SOLO LA RAÍZ POSITIVA YA QUE $\ln(x)$ NO ESTÁ DEFINIDO PARA $x \leq 0$

• EJERCICIO 2:

a) $\lim_{x \to 4} \underbrace{\frac{4-x}{|x-4|}}_{f(x)}$ Y TENGO QUE $f(x) \begin{cases} \frac{4-x}{x-4} & \text{si } x > 4 \\ \frac{4-x}{-(x-4)} & \text{si } x < 4 \end{cases}$

AHORA VEAMOS $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{4-x}{-(x-4)}$ PERO $\frac{4-x}{-(x-4)} = \frac{4-x}{-x+4} = \frac{4-x}{4-x}$, POR LO TANTO

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{4-x}{4-x} \boxed{=1}$

TENEMOS TAMBIÉN QUE $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{4-x}{x-4}$ Y VEAMOS $\frac{4-x}{x-4} = \frac{-1(x-4)}{x-4} = -1$

POR LO TANTO $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} -1 \boxed{=-1}$

EL LÍMITE CUANDO $x \to 4$ DE $f(x)$ NO EXISTE YA QUE LOS LÍMITES LATERALES SON DISTINTOS (DISCONTINUIDAD DE SALTO)

NOTA

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{x(x+1)}$

Límite notable

$= \frac{3 \cdot sen(3x)}{3x(x+1)} = \frac{sen(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{(x+1)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(3x)}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3}{x+1} = 1 \cdot \frac{3}{0+1} \boxed{= 3}$

• Ejercicio 3:

$x \neq 0$ y $x \neq \frac{1}{3}$

$F(x) = \frac{9x^2-1}{3x^2-x} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x(3x-1)} = \frac{3x+1}{x}$ (Despejo p/facilitar límites) Ok!

Veamos $Dom(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - x \neq 0\}$ la función $3x^2-x$ tiene raíz en 0 y $\frac{1}{3}$ (a simple vista)

Por lo tanto $Dom(F) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\} \cap \mathbb{R} - \{0\}$

$3x^2 - x = 0$

$3x^2 = x$

$3 = \frac{x}{x^2}$

$3 = \frac{1}{x}$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

• Asíntotas verticales? Veamos límites en puntos de discontinuidad $x=0$ y $x=\frac{1}{3}$

Ya vimos que $F(x) = \frac{9x^2-1}{3x^2-x} = \frac{3x+1}{x}$

Ahora veamos que $\lim_{x\to \frac{1}{3}} F(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} \boxed{= 6}$

Esto nos indica que hay discontinuidad evitable en $x = \frac{1}{3}$ (no es asíntota)

y también $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x+1}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x+1}{x} = \infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x+1}{x} = -\infty$

Esto nos indica una discontinuidad esencial en el punto $x=0$ (asíntota vertical)

• Asíntotas horizontales? Veamos que pasa cuando la variable tiende a + y − infinito.

• $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1} = \frac{3}{1} \boxed{= 3}$ ($\frac{1}{x}$ → tiende a 0)

Aux: $\frac{3x+1}{x} = \frac{\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \frac{3+\frac{1}{x}}{1}$

• $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1} = \frac{3}{1} \boxed{= 3}$ ($\frac{1}{x}$ → también tiende a 0)

Esto nos indica que hay una asíntota horizontal en $y = 3$

HOJA 2

EJERCICIO 4:

TOMÁS ACHÁVAL

45083746

A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{(x+1)} & \text{si } x < -1 \\ \ln(x+2)-4 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

PARA QUE SEA CONTINUA EN -1, DEBE SUCEDER QUE

$\underbrace{\exists \lim_{x\to -1^-} f(x), \exists \lim_{x\to -1^+} f(x)}$, $-1 \in Dom(f)$

Y AMBOS LIMITES DEBEN SER IGUALES A $f(-1)$ ✓

• ANALIZEMOS:

• $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{x^2+4x+3}{(x+1)}$

PERO VEAMOS LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN SUPERIOR (PARA REESCRIBIRLA)

$\dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4.1.3}}{2} = x_1 = -1$ ✓

$x_2 = -3$

$= \lim_{x\to -1^-} \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+1)}$

$= \lim_{x\to -1^-} (x+3) \boxed{= 2}$ ✓

LOS LÍMITES LATERALES EXISTEN, PERO SON DISTINTOS, POR LO QUE HAY UNA DISCONTINUIDAD DE SALTO EN EL PUNTO $x=-1$ ✓

• $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln(x+2)-4 = \ln(1)-4 \boxed{= -4}$

• $f(-1) = -4 \neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$

• $Dom(f) = \mathbb{R}$ ✓

b) $-\sqrt{x} = x-1$ TIENE SOLUCION EN $(0,1)$?

• DOMINIO $= x \geq 0$ PARA QUE LA RAÍZ ESTÉ BIEN DEFINIDA.

• TENEMOS QUE $-\sqrt{x} = x-1$

$\sqrt{x} = -(x-1)$

$x = (-(x-1))^2 \Rightarrow x = (x-1)^2$ YA QUE $(-a)^2 = a^2$ ✓

$x = x^2-2x+1 \Rightarrow 0 = x^2-3x+1$ ✓

$0 = x^2-3x+1$, ES CONTINUA EN $\mathbb{R}$, Y ESTAMOS TRABAJANDO CON $x \geq 0$ ✓

• VEAMOS $f(x) = x^2-3x+1$ EN EL INTERVALO CERRADO $[0,1]$ YA QUE SABEMOS QUE ES CONTINUA.

• $f(0) = 1$

• $f(1) = 1-3+1 = -1$

EL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO NOS AFIRMA QUE EXISTIRÁ UN VALOR $C \in (0,1)$ TAL QUE $f(c) = 0$ ✓

YA QUE $Im\,f(x)$ ~~[illegible]~~ CONTIENE A TODOS LOS VALORES ENTRE -1 Y 1 (EN ALGÚN PUNTO ES 0) PARA $x \in (0,1)$

• POR LO TANTO LA ECUACIÓN ORIGINAL DEBERÁ TENER AL MENOS UNA SOLUCIÓN EN $(0,1)$ ✓

NOTA