

9.87 (10)

TOMÁS ACHAVAL BENZERO  
45085746 D.

3 HORAS ENTREGADAS.

TEMA G

Segundo parcial de matematica discreta II-2024

Escriba su nombre EN CADA HOJA y numere cada hoja de la forma  $n/N$  donde  $n$  es el número de la hoja y  $N$  el número total de hojas que entrega (sin contar esta).

1. La siguiente matriz representa el costo de asignar los trabajadores  $A, B, \dots$  a los trabajos  $I, II, \dots$ , etc.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
A	3	8	9	7	9	1	5	8
B	5	7	7	6	7	1	5	7
C	3	4	5	5	5	3	4	8
D	9	7	9	5	7	8	4	5
E	5	2	4	8	3	2	7	8
F	2	9	2	3	7	2	5	8
G	2	3	9	9	8	7	5	7
H	7	9	5	4	4	3	8	5

Hallar un matching que minimize el costo total, i.e., la suma de los costos.

2. Sea  $C$  el código con matriz de chequeo  $H = [A|I]$ , donde  $I$  es la identidad  $6 \times 6$  y  $A$  es la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $a = 1$  si la cifra de las unidades de su DNI es impar, y 0 si es par,  $b = 1$  si la cifra de las decenas de su DNI es impar, y 0 si es par,  $c = 1$  si la cifra de las centenas de su DNI es impar, y 0 si es par, y  $d = 1$  si la cifra de los miles de su DNI es impar y 0 si es par.

- Decir cuantas palabras tiene en total  $C$ , justificando.
  - Escribir dos palabras no nulas que esten en  $C$ .
  - Calcular  $\delta(C)$ , justificando.
  - Si se recibe la palabra 110000000010100, y se asume que se produjo a lo sumo un error de transmisión, determinar la palabra enviada si esto es posible o indicar porqué no si no se puede.
3. Sea  $C$  el código ciclico de longitud  $n = 23$  con polinomio generador  $g(x) = 1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{11}$ ;
- Decir cuantas palabras tiene  $C$ , justificando.
  - Dar una palabra del código cuyos últimos (mas a la derecha) 10 bits sean 1100000000. (ayuda: usar inteligentemente el metodo 2 de codificacion)
  - Este código corrige 3 errores.
- Si se recibe la palabra  $w = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^{14}$ , hallar la palabra que sea mas probable que haya sido enviada.
- (ayuda: el primer  $j$  para el cual el peso de  $s_j$  es menor o igual que 3 cumple que  $4 \leq j \leq 9$  asi que si ud obtiene un  $j$  menor o mayor que esos numeros, tiene un error).



EJERCICIO N°1: MINIMIZAR LA SUMA DE LOS COSTOS.

TOMÁS ACHAVAL BEREÑO LCC  
45085146

UTILIZARE EL ALGORITMO HUNGARO HASTA  
HALLAR UN MATCHING DE "0"s

NOTACIÓN

$S$  = "FILAS ETIQUETADAS"

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	8	9	7	9	7	5	8
B	5	7	7	6	7	1	5	7
C	3	4	5	5	5	3	4	8
D	9	7	9	5	7	8	4	5
E	5	2	4	8	3	2	7	8
F	2	9	2	3	7	2	5	8
G	2	3	9	9	8	7	5	7
H	7	9	5	4	4	3	8	5

RESTO MIN  
POR FILA

RESTO MIN  
POR COLUMNA

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	7	8	6	8	0	4	7
B	4	6	6	5	6	0	4	6
C	0	1	2	2	2	0	1	5
D	5	3	5	1	3	4	0	1
E	3	0	2	6	1	0	5	6
F	0	7	0	1	5	0	3	6
G	0	1	7	7	6	5	3	5
H	4	6	2	1	1	0	5	2

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	7	8	5	7	0	4	6
B	4	6	6	4	5	0	4	5
C	0	1	2	1	1	0	1	4
D	5	3	5	0	2	4	0	0
E	3	0	2	5	0	0	5	5
F	0	7	0	0	4	0	3	5
G	0	1	7	6	5	5	3	4
H	4	6	2	0	0	0	5	1

RESTO  
 $\min(S \times \Gamma(S)) = 1$

EN  $S \times \Gamma(S)$

Y LO SUMO

EN  $S \times \Gamma(S)$

MISMO PROCEDIMIENTO  
CON  $\min(S \times \Gamma(S)) = 2$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	6	7	4	6	0	3	5
B	4	5	5	3	4	0	3	4
C	0	0	1	0	0	0	0	3
D	6	3	5	0	2	5	0	0
E	4	0	2	5	0	1	5	5
F	1	7	0	0	4	1	3	5
G	0	0	6	5	4	5	2	3
H	5	6	2	0	0	1	5	1

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	4	5	2	4	0	1	3
B	2	3	3	1	2	0	1	2
C	0	0	1	0	0	2	0	3
D	6	3	5	0	2	7	0	0
E	4	0	2	5	0	3	5	5
F	1	7	0	0	4	3	3	5
G	0	0	6	5	4	7	2	3
H	5	6	2	0	0	3	5	1

LUEGO UN MATCHING DE SUMA MINIMA ESTÁ DADO

por	costo	COSTO TOTAL
A1	3	25
B6	1	
C7	4	
D8	5	
E5	3	
F3	2	
G2	3	
H4	4	

OBSERVACIÓN: El procedimiento de restar el  $\min(S \times \Gamma(S))$  y pasar a una nueva matriz

se realiza cuando NO EXISTE MATCHING DE "0"s EN LA MATRIZ ACTUAL. Por el TEOREMA DE HALL,

ESTO SUCEDE CUANDO HAY UN SUBCONJUNTO  $S$  DE UNA DE LAS PARTES DE UN GRAFO BIPARTITO

que cumple  $|S| < |\Gamma(S)|$ , EN NUESTRO CASO,  $S$  = "FILAS ETIQUETADAS" y  $\Gamma(S)$  = "COLUMNAS ETIQUETADAS".



Ejercicio N°2  $H = [A|I]$  con A dada en la consigna

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TOMÁS ACHÁVAL BEAZZO LCC

45085746

d	e	b	a
IMPAR	IMPAR	PAR	PAR
1	1	0	0

a) El código  $C$  tiene  $2^{\dim(C)}$  palabras, pero es un código lineal.

Vimos que  $\dim(C) = \text{CANTIDAD\_COLUMNAS}(H) - \text{CANTIDAD\_FILAS}(H)$

$$= 15 - 6 = 9$$

Por lo tanto  $C$  tiene  $2^9 = 512$  palabras.

b) Dos palabras no nulas de  $C$ . Para ello daremos dos filas de  $G$ , donde  $G$  es la matriz generadora de  $C$  dada por

$$G = [I | A^t] \text{ con } I \text{ la identidad } 9 \times 9$$

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ w_2 &= 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} w_1 \\ w_2 \end{aligned}} \right\} \text{son dos palabras en } C$$

c)  $S(C)$ ?

LD = "LINEALMENTE DEPENDIENTES"

Vimos que  $S(C) = \text{MIN NÚMERO DE COLUMNAS LD EN } H$

- $H$  no tiene columna nula
  - $H$  no tiene columnas repetidas
- } Por tanto,  $S(C) \geq 3$

• Si  $H^{(1)}, \dots, H^{(15)}$  son las columnas de  $H$ , luego  $H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

•  $\{H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(10)}\}$  es LD y tiene 3 columnas

•  $S(C) = 3$

d) Se recibe  $1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 = w$  y se asume a lo sumo un error

$$Hw^t = H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(11)} + H^{(13)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H^{(5)} \Rightarrow \text{HUBO UN ERROR EN EL BIT N°5}$$

• La palabra enviada fue  $w + (000010000000000) = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$



## EJERCICIO Nº 3

TOMÁS ACHAÑAL BENZIO ECC  
45085146 A.C código cíclico con  $n=23$ 

$$g(x) = 1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{11}$$

a) CUÁNTAS PALABRAS TIENE C?

UN CÓDIGO CÍCLICO TAMBIÉN ES LINEAL Y  $\therefore$  TIENE  $2^{\dim(C)}$  PALABRAS.VIMOS QUE SI C ES UN CÓDIGO CÍCLICO <sup>DE LONG N</sup> Y g SU POLINOMIO GENERADOR,

$$\dim(C) = n - \text{grado}(g) = 23 - 11 = 12$$

POR LO TANTO C TIENE  $2^{12} = 4096$  PALABRAS. ✓

b) DAR UNA PALABRA DE C CUYOS DÍGITOS BITS SEAN 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0

PARA ELLO, CODIFICARÉ LA PALABRA  $v = 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0$ VISTA COMO POLINOMIO,  $v(x) = x^2 + x^3$ 

CON EL MÉTODO 2 VISTO EN CLASE,

$$v(x) \longrightarrow x^{n-\deg(g)} \cdot v(x) \bmod g(x) + x^{n-\deg(g)} v(x)$$

$$= x^{11} (x^2 + x^3) \bmod g(x) + x^{11} (x^2 + x^3)$$

$$= x^{13} + x^{14} \bmod g(x) + x^{13} + x^{14} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 + x^{13} + x^{14}$$

↑  
POR AUX

CANCELAN

 $v$  CODIFICADA

$$1 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{13} + x^{14}$$

||

AUX:

$$x^{11} \bmod g(x) = 1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 \quad \checkmark$$

$$x^{12} \bmod g(x) = x + x^2 + x^6 + x^7 + x^8 + x^{10} \quad \checkmark$$

$$x^{13} \bmod g(x) = x^2 + x^3 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{11} \bmod g(x) = x^2 + x^3 + x^7 + x^8 + x^9 + (1 + x + x^5 + x^6 + x^7 + x^9)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 \quad + x^5$$

SE CANCELAN

$$x^{14} \bmod g(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^7 + x^9 \quad + x^6$$

estuve 20 minutos  
buscando este error 😞LUEGO  $v$  CODIFICADA ES 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0



c) El código somete 3 errores ( $t=3$ )

Se recibe  $w = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^{14}$

UTILIZARE "ERROR TRAPPING" PARA Hallar LA PALABRA MÁS PROBABLE ENVIADA. PARA ELLO DEBO ENCONTRAR UN  $S_i$  con  $|S_i| \leq 3$  y luego el error será  $e = R^{-1}(S_i)$

AUX (de pág anterior)

$$S_0 = (1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^{14}) \bmod q(x)$$

$$= (1 + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^5 + x^8 + x^{10}) + (x + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}) = 1 + x + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

$$|S_0| = 8 > 3, \text{ CONTINUO}$$

$$S_1 = x S_0 \bmod q(x)$$

$$= x + x^2 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} \bmod q(x)$$

$$= (\cancel{x} + x^2 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10}) + (1 + \cancel{x} + \cancel{x^5} + x^6 + x^7 + x^9) = 1 + x^2 + x^7 + x^8 + x^{10}$$

$$|S_1| = 5 > 3, \text{ CONTINUO}$$

$$S_2 = x S_1 \bmod q(x)$$

$$= x + x^3 + x^8 + x^9 + x^{11} \bmod q(x) = \cancel{x} + x^3 + x^8 + \cancel{x^9} + (1 + \cancel{x} + x^5 + x^6 + x^7 + x^9) = 1 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$$

$$|S_2| = 6 > 3, \text{ CONTINUO A } S_{2+3} = S_5 \text{ PUES ES LA PROXIMA ITERACION EN DONDE}$$

EXISTIRÁ LA POSIBILIDAD DE CANCELAR TÉRMINOS DEBIDO AL "mod  $q(x)$ ".

$$S_5 = x^3 S_2 \bmod q(x)$$

$$= x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} \bmod q(x) = x^3 + \cancel{x^6} + x^8 + x^9 + x^{10} + (1 + \cancel{x} + x^5 + x^6 + x^7 + x^9) = 1 + x + x^3 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10}$$

$$|S_5| = 7 > 3, \text{ CONTINUO}$$

$$S_6 = x S_5 \bmod q(x)$$

$$= x + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{11} \bmod q(x) = (\cancel{x} + x^2 + x^4 + \cancel{x^6} + x^8 + x^9) + (1 + \cancel{x} + x^5 + x^6 + x^7 + x^9) = 1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8$$

$$S_9 = x^3 S_6 \bmod q(x) = x^3 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11} \bmod q(x) = x^3 + x^5 + \cancel{x^7} + x^8 + x^{10} + (1 + \cancel{x} + x^5 + x^6 + x^7 + x^9) = 1 + x + x^3 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

$|S_9| = 6 > 3$  .. POR LA CONSIGNA, ESTÁ ASEGURADO A TÓNER UN ERROR DE CÁLCULO EN ALGUNA ITERACIÓN ANTERIOR. DE HABERLO HECHO CORRECTAMENTE, HABRA ENCONTRADO UN  $S_i$  con  $|S_i| \leq 3$  y luego  $e = R^{-1}(S_i) = x^{15} S_i \bmod (1 + x^{23})$  SERA EL ERROR TAL PUE LA

PALABRA MÁS PROBABLE ENVIADA HAYA SIDO  $v = w + e$ . (NO TUVIERAMOS DE BUSCAR Y COMENZAR EL ERROR)