1	2	3	4	5	6	7
11	8	6	15	12	17	18

CALIF.
9

APELLIDO Y NOMBRE: AGHÁVAC Belgrano Tomás

CONDICIÓN: Libre Regular

Algebra II - Final

6 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   - A es invertible.
   - El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para todo $Y \in \Bbbk^{n\times 1}$.
   - El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución (la trivial).

2. (12 pts) Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Nu} f)$.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente. Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

   (b) (3 pts) Sea V un espacio vectorial de dimension finita. Existe un isomorfismo entre V y V^*.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $T : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ la transformación lineal tal que $T(p(x)) = x\,p'(x) + p(1)$. Pro que $\det T = n!$.

5. (15 pts) Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un $\Bbbk$-espacio vectorial V y consideramos los vectores

$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = u_1 - u_2, \qquad v_3 = u_1 - u_2 + u_3, \qquad v_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4.$$

Probar que, para cada $n = 2, 3, 4$, el subespacio generado por $u_1, u_2, \cdots, u_n$ coincide con el subespacio generado por $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Deducir que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ también es una base de V.

6. Consideramos la función $\Phi : \mathbb{R}[x]_3 \times \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(p, q) = \int_0^2 p(t)q(t)\,dt$.

   (a) (8 pts) Probar que Φ es un producto interno.

   (b) (6 pts) Sea S el subespacio generado por $\{1, 1 + 4t^3\}$. Dar una base ortogonal de S para el producto interno del ítem anterior.

   (c) (6 pts) Dar una base de $S^{\perp}$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, $T(A) = A^t$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   (a) (10 pts) Probar que 1 y -1 son los autovalores de T.

   (b) (10 pts) Dar bases de los correspondientes autoespacios y decidir si T es diagonalizable.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS

FINAL ÁLGEBRA - REGULAR — TOMÁS ACHÁVAL BERZERO

EJERCICIO 1: — 45085146 - COM 4

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes

1. A es inversible 2. $AX=Y$ tiene única sol. $\forall Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ 3. $AX=0$ tiene única sol (trivial)

(1 ⇒ 2) Asumo A inversible. Luego $\exists A^{-1}$ tq $A^{-1}.A = Id = AA^{-1}$.

Así: $Ax = Y \Rightarrow A^{-1}A.X = A^{-1}Y \Rightarrow IdX = A^{-1}Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$ es la única sol. del sistema $Ax=Y$.

(2 ⇒ 3) Directa pues sabiendo que el sistema $Ax=Y$ tiene una única solución $\forall Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, y que

$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A.\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ luego $X = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ es la única solución de $Ax=0$.

(No existe combinación lineal entre ellas q' le sea = 0 (salvo trivial))

filas

(3 ⇒ 1) $Ax=0$ tiene sol. trivial únicamente ⇒ las columnas de la matriz A son LI entre sí con lo cual, y sabiendo que toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es equivalente a una MERF, la única MERF de tamaño $n\times n$ con columnas LI es la matriz Id_n. Así, $A \sim Id_n$ y $\therefore$ (TEO.) A es inversible. ∎

¿por qué?

por qué existe una base así?

EJERCICIO 2:

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean V, W dos $\mathbb{K}$-EV. $\dim V < \infty$. Sea $f: V \to W$ una TL. Probar que

$$\dim Im(f) = \dim V - \dim Nu(f)$$

- Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V tal que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son base de $Nu(f)$. $(k \le n)$ $(\underline{\dim V = n, \dim Nu f = k})$
- Sabemos que $Im(f) = \langle \underbrace{f(v_1), \ldots, f(v_k)}_{\text{los primeros } k \text{ elementos son } = 0 \in W}, \ldots, f(v_n)\rangle = \langle f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\rangle$
- Veamos que el conjunto $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es LI. De ser así, $\dim Im f = \overset{\dim V}{n} - \overset{\dim Nu f}{k}$

Para ello debo ver que $\sum_{i=k+1}^{n} a_i f(v_i) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i = k+1, \ldots, n$.

$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + a_n f(v_n) = 0 \in W$

¿por qué?

f es TL. $\Rightarrow f(a_{k+1}v_{k+1}) + \ldots + f(a_n v_n) = 0$

$\Rightarrow f(a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_n v_n) = 0 \Rightarrow a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_n v_n \in Nu(f)$ Absurdo pues $Nu(f) = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$

Luego $a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_n v_n = 0$ y como $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es LI (todo subconjunto de un conjunto LI es LI)

Entonces $a_i = 0 \ \forall i = k+1, \ldots, n$.

- De esta forma, como $Im(f) = \langle f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\rangle$ y $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es LI entonces $\{f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es una base de $Im(f) \Rightarrow \underline{\dim Im f = n-k}$. ∎ Queda demostrado que $\dim Im f = \dim V - \dim Nu f$.

Bien que la idea gral es clara!

Ejercicio 3 V o F

a) Sea $f: V \to W$ una TL. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ tq $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es LI. Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LI. VERDADERO.

Asumo que $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es LI. Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LD. Entonces

$\exists v_i$ tq $a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n = v_i$. Luego

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n) = f(v_i)$$

f es TL $\Rightarrow a_1 f(v_1) + \dots + a_{i-1} f(v_{i-1}) + a_{i+1} f(v_{i+1}) + \dots + a_n f(v_n) = f(v_i) \Rightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es LD. Absurdo

de ~~asumir~~ suponer que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LD $\therefore \{v_1, \dots, v_n\}$ debe ser LI. ∎ ✓

b) Sea V un EV de dim finita. $\exists$ isomorfismo entre V y V^*. VERDADERO.

Notemos que $\dim V = \dim V^*$ (por teorema)

Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, sabemos que $\exists! f: V \to V^*$ tq $f(v_i) = w_i \;\; \forall i = 1, \dots, n$

$\{w_1, \dots, w_n\}$ una base de V^*.

Como los vectores w_i son LI $\Rightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ pues toda $f(v)$ es combinación lineal de w_i's.

$\left(v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \; \forall i \right) \Rightarrow v = 0$

Luego $Nu(f) = \{0\}$ y por teorema, como $\dim V = \dim V^*$ entonces $Nu(f) = \{0\} \Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ es isomorfismo.}}$

Por que la escritura es muy Chica!

Ejercicio 4: Sea $T: \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ la TL tal que $T(p(x)) = x p'(x) + p(1)$. Probar que $\det T = n!$

Sea $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ una base de $\mathbb{R}[x]_n$

$$\text{Luego } [T]_B = \begin{pmatrix} [T(1)]_B & \cdots & [T(x^n)]_B \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & n \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\det [T]_B} \overset{\uparrow}{=} 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = \boxed{n!} \checkmark$$

Matriz triangular (det es el prod. de la diagonal)

$T(1) = 1 \Rightarrow [T(1)]_B = (1, 0, \dots, 0)$

$T(x) = x + 1 \Rightarrow [T(x)]_B = (1, 1, 0, \dots, 0)$

$T(x^2) = 2x^2 + 1 \Rightarrow [T(x^2)]_B = (1, 0, 2, \dots, 0)$

$\vdots$

$T(x^n) = n x^n + 1 \Rightarrow [T(x^n)]_B = (1, 0, \dots, 0, n)$

Ejercicio 5:

Tomás Achával Becerra
4JOB3746

Sea $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ una base de un $\mathbb{K}$-EV V. y consideramos los vectores:

$$v_1=u_1 \quad v_2=u_1-u_2 \quad v_3=u_1-u_2+u_3 \quad v_4=u_1-u_2+u_3-u_4$$

Probar que para cada $n=2,3,4$, el subespacio generado por $u_1,\dots,u_n$ coincide con $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$. Deducir que $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ también es base de V. $a_i\in\mathbb{K}\ \forall i$

• $\langle u_1,u_2\rangle \overset{?}{=} \langle v_1,v_2\rangle = a_1v_1+a_2v_2 = a_1u_1+a_2(u_1-u_2) = (a_1+a_2)u_1-a_2u_2$ y como a_1 es libre con respecto a $a_2 \Rightarrow a_1'=a_1+a_2 \Rightarrow \langle v_1,v_2\rangle = a_1'u_1-a_2u_2=\langle u_1,u_2\rangle$

• $\langle u_1,u_2,u_3\rangle \overset{?}{=} \langle v_1,v_2,v_3\rangle = a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3 = a_1u_1+a_2(u_1-u_2)+a_3(u_1-u_2+u_3)$

$$=(a_1+a_2+a_3)u_1-(a_2+a_3)u_2+a_3u_3 \;(*)$$

Análogamente a lo anterior, cada u_i tiene un escalar a_i libre, con lo cual podemos definir:

$a_1'=a_1+a_2+a_3$, $a_2'=a_2-a_3$ $a_3'=a_3$ y de esta manera,

$\langle v_1,v_2,v_3\rangle = a_1'u_1+a_2'u_2+a_3'u_3 = \langle u_1,u_2,u_3\rangle$

• $\langle u_1,u_2,u_3,u_4\rangle \overset{?}{=} \langle v_1,v_2,v_3,v_4\rangle = \langle v_1,v_2,v_3\rangle + a_4v_4$

$$\overset{*}{=}(a_1+a_2+a_3)u_1-(a_2+a_3)u_2+a_3u_3+a_4(u_1-u_2+u_3-u_4)$$

Como cada u_i tiene un escalar a_i asociado libre, nuevamente,

$$=\underbrace{(a_1+a_2+a_3+a_4)}_{a_1'}u_1-\underbrace{(a_2+a_3+a_4)}_{a_2'}u_2+\underbrace{(a_3+a_4)}_{a_3'}u_3+\underbrace{a_4}_{a_4'}u_4$$

$$=a_1'u_1+a_2'u_2+a_3'u_3+a_4'u_4=\langle u_1,u_2,u_3,u_4\rangle \;\blacksquare$$

↳ Faltó decir si es base

Ejercicio 6

$\Phi:\mathbb{R}[x]_3\times\mathbb{R}[x]_3\to\mathbb{R}$ dada por $\Phi(p,q)=\int_0^2 p(t)q(t)\,dt$

a) Para probar que Φ es un producto interno debemos ver: (en $\mathbb{R}$)

i) $\Phi(a+b,c)=\Phi(a,c)+\Phi(b,c)$ ✓

ii) $\Phi(ca,b)=c\Phi(a,b)$ ✓

iii) $\Phi(a,b)=\Phi(b,a)$ ✓

iv) $\Phi(a,a)=0 \iff a=0$ y $\Phi(a,a)>0\ \forall a\neq 0$. ✓

Veamos

i) $\Phi(a+b,c)=\int_0^2(a+b)(t)c(t)\,dt=\int_0^2(a(t)+b(t))c(t)\,dt=\int_0^2 a(t)c(t)+b(t)c(t)\,dt=\int_0^2 a(t)c(t)\,dt+\int_0^2 b(t)c(t)\,dt$

$$=\Phi(a,c)+\Phi(b,c) \;✓$$

ii)

$$\Phi(ca,b) = \int_0^2 (ca)(\tau)b(\tau)\,d\tau = \int_0^2 c(a)(\tau)b(\tau)\,d\tau = c\int_0^2 a(\tau)b(\tau)\,d\tau = c\Phi(a,b)$$ ✓ ✓

iii) $\Phi(a,b) = \int_0^2 a(\tau)b(\tau)\,d\tau = \int_0^2 b(\tau)a(\tau)\,d\tau = \Phi(b,a)$ ✓

iv) $\Phi(a,a) = \int_0^2 a(\tau)a(\tau)\,d\tau = \int_0^2 a^2(\tau)\,d\tau$ SABEMOS QUE $a^2(\tau) \geq 0 \ \forall a(\tau) \therefore \int a^2(\tau)\,d\tau \geq 0 \ \forall a(\tau)$

$\int_0^2 a^2(\tau) \geq 0 \ \forall a(\tau)$

Así,

A LA VEZ, SABEMOS QUE $\int p(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \ \forall p(x) \geq 0$ ✓

$\int_0^2 a^2(\tau)\,d\tau = 0 \Leftrightarrow a(\tau) = 0$ PUES $a^2(\tau)$ ES UNA FUNCIÓN POSITIVA (ESTÁ POR ENCIMA DEL EJE X)

Y COMO CONSECUENCIA,

$\int_0^2 a^2(\tau)\,d\tau > 0 \ \forall a(\tau) \neq 0$. GRÁFICAMENTE  $\rightarrow \int_0^2 a^2(\tau) = 0 \Leftrightarrow a^2(\tau) = 0 \Leftrightarrow a(\tau) = 0$ ▪

LUEGO $\Phi(a,a) > 0 \ \forall a \neq 0$

Y $\Phi(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ✓ ✓

8 pts

b) SEA S EL SUBESPACIO GENERADO POR $B = \{1, 1+4\tau^3\}$. DAR UNA BASE ORTOGONAL DE S PARA EL PROD. INTERNO DEL ITEM ANTERIOR. c) DAR UNA BASE DE $S^\perp$. UTILIZARÉ $\Phi := \langle \cdot,\cdot \rangle$

PARA RESOLVER b) Y c) APLICARÉ EL TEOREMA DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT, DONDE, TRAS COMPLETAR B A UNA BASE DE $\mathbb{R}[\tau]_3$, PODRÉ OBTENER UNA BASE $\{w_1, w_2\} \cup \{w_3, w_4\}$, DONDE $\{w_1, w_2\}$ SERÁN UNA BASE ORTOGONAL DE S Y $\{w_3, w_4\}$ UNA BASE DE $S^\perp$.

COMPLETO B A UNA BASE DE $\mathbb{R}[x]_3$ SABIENDO QUE HAY INDEPENDENCIA LINEAL ENTRE POTENCIAS,

$B' = \{1, 1+4\tau^3, \tau, \tau^2\}$ ES LI Y BASE DE $\mathbb{R}[x]_3$.

GRAM-SCHMIDT

$w_1 = v_1$

$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$

$w_1 = \boxed{1}$

$$w_2 = 1+4\tau^3 - \frac{\langle 1+4\tau^3, 1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 = 1+4\tau^3 - \frac{\int_0^2 1+4\tau^3\,d\tau}{\int_0^2 1\,d\tau}\cdot 1 = 1+4\tau^3 - \frac{18}{2} = \boxed{4\tau^3 - 8}$$ ✓

6 pts

b) HASTA AQUÍ, $\{1, 4\tau^3 - 8\}$ ES UNA BASE ORTOGONAL DE S. LUEGO

AUX: $\int_0^2 1+4\tau^3\,d\tau$

$= \tau + 4\frac{\tau^4}{4}\Big|_0^2 = \tau + \tau^4\Big|_0^2 = 2 + 2^4 = \boxed{18}$

$\int_0^2 1\,d\tau = x\Big|_0^2 = \boxed{2}$

$\langle \tau, 1\rangle = \int_0^2 \tau\,d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^2 = \boxed{2}$

$\{w_3, w_4\}$ SERÁ UNA BASE DE $S^\perp$. DONDE

$$w_3 = \tau - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle \tau, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i \quad \text{y} \quad w_4 = \tau^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \tau^2, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

c) ASÍ, ASEGURAMOS QUE:

$$\{w_3, w_4\} = \left\{ \tau - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle \tau, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i \, , \, \tau^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \tau^2, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i \right\}$$ ES UNA BASE DE $S^\perp$.

NOTA:

CONSIDERÉ INNECESARIO EL DESARROLLO COMPLETO DE LAS MÚLTIPLES INTEGRALES "NECESARIAS" PARA DESPEJAR w_3 Y w_4 A UN ELEMENTO MÁS SIMPLE.

Había que hacerlo, lamentablemente. 3 pts

TOMÁS ACHÁVAL BERISSO

45085146

7_ $T:\mathbb{R}^{3x3}\to\mathbb{R}^{3x3}$, $T(A)=A^T$, $A\in\mathbb{R}^{3x3}$

a) PROBAR QUE 1 Y -1 SON LOS AUTOVALORES DE T. SEA λ UN AUTOVALOR DE $T \Rightarrow$

$T(A)=\lambda A$
$=A^T$ $\therefore$ $\lambda A = A^T \Rightarrow$ NOTAR QUE $|\lambda a_{ij}|=|a_{ji}|$, $a_{ij}\in A$, $a_{ji}\in A^T$ $\therefore \lambda=\pm 1$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda a_{ij}=a_{ji}\ \forall_{i,j=1,\dots,n}.$$

$\lambda a_{ii}=a_{ii}\ \forall_i$

$\Rightarrow a_{ii}(\lambda-1)=0 \Rightarrow \underline{a_{ii}=0\ \forall_i \text{ ó } \lambda=1} \Rightarrow$ SI $a_{ii}\neq 0 \Rightarrow \lambda=1$ ES UN AUTOVALOR POSIBLE.

(SE DA CUANDO $A=A^T$)

SI $a_{ii}=0\ \forall i=1,\dots,n$

$$\lambda\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n\,n-1} \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1\,n} & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda a_{ij}=a_{ji}$$

$\lambda a_{ji}=a_{ij}$ $\Rightarrow \lambda\lambda a_{ji}=a_{ji} \Rightarrow \lambda^2 a_{ji}-a_{ji}=0 \Rightarrow a_{ji}(\lambda^2-1)=0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=\pm 1}$

QUEDA DEMOSTRADO $\forall T:\mathbb{R}^{nxn}\to\mathbb{R}^{nxn}$ tq $T(A)=A^T$, $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ LOS ÚNICOS AUTOVALORES POSIBLES SON 1 Y -1. ∎

POR LO TANTO LOS ÚNICOS AUTOVALORES POSIBLES SON $\lambda=1$ Y $\lambda=-1$ PARA $T:\mathbb{R}^{3x3}\to\mathbb{R}^{3x3}$ tq $T(A)=A^T$.

LA EXISTENCIA DE LOS AUTOESPACIOS ASOCIADOS A 1 Y -1 TERMINA DE COMPROBAR QUE LOS MISMOS SON AUTOVALORES DE T.

b) DAR LAS BASES DE ESOS AUTOESPACIOS Y DECIDIR SI T ES DIAGONALIZABLE.

$V_1=\{A\in\mathbb{R}^{3x3}$ tq $T(A)=A\}=\{A\in\mathbb{R}^{3x3}$ tq $A^T=A\}$ $\Rightarrow a_{ij}=a_{ji}\ \forall_{i,j=1,\dots,n}$ SEA E_{ij} LA MATRIZ tq $\begin{cases}(E_{ij})_{rs}=1 \text{ si } i=r \text{ y } j=s \ \forall i=s \text{ y } j=r \\ (E_{ij})_{rs}=0 \text{ EN OTRO CASO.}\end{cases}$

LUEGO UNA BASE DE V_1 SERÍA $\{E_{ij}\}\subseteq\mathbb{R}^{3x3}$ ES DECIR

$$V_1=\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\rangle}_{\text{BASE DE } V_1} \quad \dim V_1 = \cancel{3} = 6$$

EL CONJUNTO ES CLARAMENTE LI PUES LOS ELEMENTOS DE CADA MATRIZ ESTÁN EN POSICIONES DISTINTAS. LO MISMO OCURRE PARA V_{-1}.

Porque?

$V_{-1}=\{A\in\mathbb{R}^{3x3}$ tq $T(A)=-A\}=\{A\in\mathbb{R}^{3x3}$ tq $A^T=-A\}\Rightarrow \underline{a_{ii}=0\ \forall_i}$ y $\underline{a_{ij}=-a_{ji}}_{i\neq j}$ $\forall_{j,i=1,\dots,n}$

$$V_{-1}=\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right\rangle}_{\text{BASE DE } V_{-1}} \Rightarrow \dim V_{-1}=3$$

*AMBAS BASES DADAS SERÍAN LAS "CANÓNICAS" QUE CUMPLEN CON LAS CARACTERÍSTICAS DE CADA AUTOESPACIO.

COMO $\dim V_1+\dim V_{-1}=6+3=9=\dim\mathbb{R}^{3x3}$, PODEMOS GARANTIZAR QUE T ES DIAGONALIZABLE. (POR TEOREMA)

Porque?