Nombre: Tomás Achával Berzero

. 45085746

6,60

Hojas entregadas: 3

TEMA B

Primer parcial de Matemática DiscretaII-26 de abril de 2024.

Escriba su nombre EN CADA HOJA y numere cada hoja de la forma n/N donde n es el número de la hoja y N el número total de hojas que entrega (sin contar esta).

1): (3,5 puntos) En el siguiente network, x es igual a la cifra de las unidades de su DNI. Hallar un flujo maximal en el, usando Dinitz en cualquiera de sus versiones. Dar tambien un corte minimal y mostrar que el valor del flujo maximal es igual a la capacidad del corte minimal.
(si ud. no aprendió Dinitz, puede hacerlo usando Edmonds-Karp, pero a) va a demorar mas y b) tiene un punto de descuento, es decir el ejercicio vale 2,5 puntos en ese caso).

$sA: 71+x$	$CD: 100$	$It: x$	$PM: 100$
$sB: 100$	$DM: 71+x$	$IF: 100$	$PQ: 100$
$sC: 100$	$EF: 70$	$JK: 100$	$QR: 100$
$sE: 70$	$EG: 71$	$KI: 10$	$RU: 100$
$sP: 11+x$	$Ft: 70$	$KL: 100$	$UX: 100$
$AI: 100$	$GN: 100$	$LI: 100$	$XY: 100$
$AM: 71$	$Ht: x$	$Mt: 82+x$	$Yt: 100$
$BH: 100$	$HJ: 100$	$Nt: 100$	

2):
a) (2,5 puntos) A partir del siguiente network y comenzando con el flujo 0, construir el primer NA y hallar un flujo bloqueante en el usando WAVE.
b) (0,5 puntos) Luego de haber hecho a), a partir del flujo obtenido, continuar con Edmonds-Karp hasta hallar un flujo maximal y un corte minimal en el network. (nota: ud debe hacer la parte a) para poder hacer la parte b). Si Ud. hace la parte a) usando un algoritmo distinto a Wave, el ejercicio entero vale 0 puntos).

sA 15	BC 10	DE 10	Ft 8
sB 10	BD 5	DG 9	Gt 7
AC 15	CE 20	Et 9	
AD 5	CF 9		

3): (3,5 puntos) Dado un grafo G con vertices $\{v_1, ..., v_n\}$, sean $x_1, ..., x_n, z$ vértices que no estén en G y sea H el grafo con vértices $\{v_1, ..., v_n, x_1, ...x_n, z\}$ y lados:

$$E(H) = E(G) \cup \{x_i v_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{x_i z : i = 1, ..., n\}$$

Probar que $\chi(H) = \chi(G) + 1$.
Nota: es casi obvio que $\chi(H) \leq \chi(G) + 1$ asi que probar unicamente esta desigualdad vale solo 0,1 puntos.
(ayuda: una forma de hacerlo es suponer por contradicción que $\chi(H) = \chi(G)$ y usar el coloreo de H para crear un coloreo de G con $\chi(G) - 1$ colores. Nota: el coloreo de H no va a dar automaticamente un coloreo de G con $\chi(G) - 1$ colores. Dado el coloreo de H, que en particular colorea a G como subgrafo, hay que cambiar inteligentemente este ultimo coloreo para que queden $\chi(G) - 1$ colores).

HOJA N° 1/3

FECHA

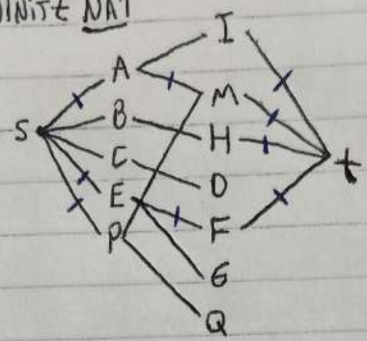
Tomás Achával Becerra

45085746 A.

Ejercicio N°1 (X=6)

100

DINITZ NA1



CAMINOS DFA

sAIt: 6

sAMt: 71

sBHt: 6

sEFt: 70

sPMt: 17

sA 77→71→0

sB 100→94→84

sC 100→40→23

sE 70→0

sP 17→0

AI 100→94→34

AM 71→0→60

BH 100→94→84

CD 100→40→23

DM 77→17→0

EF 70→0→70→70

EG 71→61→1

>Ft 70→0

GN 100→90→30

>Ht 6→0

HJ 100→90

>It 6→0

IF 100→90→30

JK 100→90

KI 10→0

KL 100

LI 100

>Mt 88→17→0

>Nt 100→90→30

PM 100→83→100

PQ 100→83

QR 100→83

RU 100→83

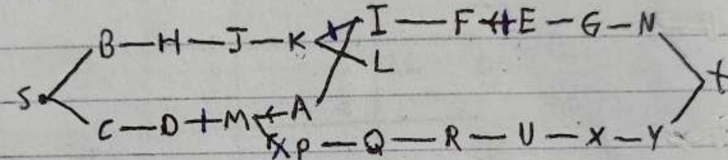
UX 100→83

XY 100→83

>Yt 100→83

FIN NA1 (FLUJO BLOQUEANTE)

NA2



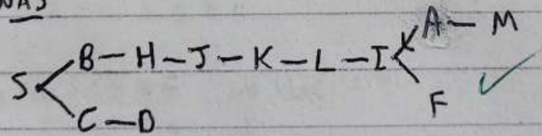
CAMINOS: sBHJKIFEGNt: 10

sCDMAIFEGNt: 60

sCDMPQRUXYt: 17

FIN NA2 (FLUJO BLOQUEANTE)

NA3



NO LLEGA A t

CORTE $S=\{s,B,C,H,D,J,K,L,I,A,F,M\}$

$\boxed{CAP(S)} = c(sE)+c(sP)+c(Ht)+c(It)+c(Ft)+c(Mt)$

$= 70+17+6+6+70+88 = \boxed{257}$

$\boxed{V(f)} = OUT_f(s) - IN_f(s) = OUT_f(s) = 77+16+77+70+17$

$= \boxed{257}$

$\boxed{CAP(S) = 257 = V(f)}$ (f ES MAXIMAL)

EL VALOR DEL FLUJO EN CADA LADO ESTÁ DADO POR LA DIFERENCIA ENTRE EL PRIMER Y ÚLTIMO VALOR DE LA LISTA.

POR EJEMPLO: [GN 100→90→30] ⇒ f(GN) = 100 − 30 = 70

NOTA

Ejercicio Nº2

Tomás Achával Becerro
45085746

NA de Wave   Bloqueados = $\square$

sA 15→0→3→1
sB 10→0
AC 15→0→8→6
AD 5→0
BC 10→0→2
BD 5→3
CE 20→0→11
CF 9→4→0→1
DE 10
DG 9→4→2
Et 9→0
Ft 8→3→0
Gt 7→2→0

s	A	B	C	D	E	F	G	t	
-25	15→0	10→0	15→25→5→0		20→$\boxed{11}$	5→0		9→14	OLA →
			11		$\boxed{0}$				OLA ←
			$\boxed{7}$			4→$\boxed{1}$		17	OLA →
	8		$\boxed{8}$→$\boxed{0}$			$\boxed{0}$			OLA ←
	$\boxed{3}$			5→0			5→0	22	OLA →
-22	$\boxed{0}$								OLA ←

FIN NA1 de Wave, todos los vértices están balanceados (es flujo bloqueante)

Continúo con E-K

1ᵉʳᵃ camino   sACBEFDGt → sA$\overleftarrow{C}$BDGt : 2
s A C⁻ C C B D G

2ᵈᵒ camino   sACBEFDG no llega a t
s A C⁻ C C B D

$$\text{Corte } S = \{s, A, C, B, E, F, D, G\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Cap(S) = c(Et) + c(Ft) + c(Gt) \\ \quad = 9 + 8 + 7 = \boxed{24} \\ V(f) = Out_f(s) - In_f(s) = 14 + 10 = \boxed{24} \end{array}\right\} Cap(S) = V(f) \quad (f \text{ es maximal})$$

Obs: El valor del flujo en cada lado está dado por la diferencia entre el primer y último valor de la lista para ese lado.

Ej: [CF 9→4→0→1] ⇒ $f(CF) = 9 - 1 = 8$

TOMÁS ACHÁVAL BECERRO
45085746

EJERCICIO Nº 3

GRAFO G CON VÉRTICES $v_1, \dots, v_n$

$x_1, \dots, x_n, z$ VÉRTICES QUE NO ESTÁN EN G.

GRAFO H CON VÉRTICES $v_1, \dots, v_n, x_1, \dots, x_n, z$ Y LADOS

$$E(H) = E(G) \cup \{x_i v_j : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{x_i z : i = 1, \dots, n\}$$

PROBAR QUE $\chi(H) = \chi(G) + 1$

SEA $\chi(G) = r$, SABEMOS QUE EXISTE UN COLOREO PROPIO DE G CON r COLORES, LO LLAMO C_G

OBS: SI EXISTE UN COLOREO PROPIO DE H CON N COLORES $\Rightarrow \chi(H) \leq N$

EL SIGUIENTE ES UN COLOREO PROPIO DE H CON $r+1$ COLORES $\{1, \dots, r, r+1\}$

$C_H(v_i) = C_G(v_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$ } ES PROPIO PUES VIENE DE C_G

$C_H(x_i) = r+1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ } SIGUE SIENDO PROPIO PUES NO EXISTEN LADOS $x_i x_j$ Y $r+1 \neq C(v_i)\ \forall i$

$C_H(z) = 1$ } SIGUE SIENDO PROPIO PUES EL ÚNICO VÉRTICE COLOREADO CON 1 (COLOR) SE ENCUENTRA EN LOS v_i, Y ESTOS NO FORMAN LADOS CON z.

POR LO TANTO $\chi(H) \leq r + 1 = \chi(G) + 1$

EN LA SIGUIENTE PÁGINA MUESTRO QUE $\chi(H) \geq \chi(G) + 1$, PARA FINALMENTE CONCLUIR QUE $\chi(H) = \chi(G) + 1$ A PARTIR DEL RESULTADO ANTERIOR Y ESTE.

✓

NOTA

Recordemos que C_G es un coloreo propio de G con $r = \chi(G)$ colores, y que este valor es el mínimo posible. Llamamos a estos colores $\{1, \dots, r\}$

Intentaré colorear H con r colores (y que sea propio).

Inicialmente, coloreo los vértices v_i de acuerdo a C_G, pues es la menor cantidad de colores que puedo utilizar. ~~Hay pérdida de generalidad~~

Sean v_{k_0} los vértices con $c(v_k) = r$. Si tienen este color es porque tienen al menos un vecino con cada color $1, \dots, r-1$, pues de otra forma existiría un coloreo propio con menos de r colores. sólo si usás greedy

Como todos los vecinos de v_k están conectados a x_k, $c(x_k) = r$.

Sean v_{k_1} los vértices con $c(v_{k_1}) = r-1$. De manera similar, todos sus vecinos utilizan los colores $\{1, \dots, r-2\} \cup \{r\}$ (si no, podría usar uno de esos colores en G y obtener un col. propio con menos de r colores)

y están conectados a x_{k_1}, por lo tanto $c(x_{k_1}) = r-1$

Continuamos de la misma forma con los colores $r-2, \dots, 1$

$v_{k_2}, \dots, v_{k_{r-1}}$, cuyos vecinos utilizan los colores $\{1, \dots, r-k-1\} \cup \{r-k+1, \dots, r\}$

De esta forma, existen $x_{k_0}, \dots, x_{k_{r-1}}$ que utilizan los r colores de C_G

Como z está conectado a todos ellos, $c(z) \neq 1, \dots, r$ y necesita un nuevo color.

Concluimos en la primera página que $\chi(H) \leq \chi(G) + 1$
y aquí que $\chi(H) \geq \chi(G) + 1$, pues no puedo utilizar $\chi(G)$ colores.

Por ambas conclusiones, $\chi(H) = \chi(G) + 1$

X