ANÁLISIS NUMÉRICO I (LM-LMA) - ANÁLISIS NUMÉRICO (LC)
PARCIAL 2

8 de Junio de 2023

Nombre y Apellido: Tomás Achaval Bertero	Comisión: 1 - 2 - 3 Carrera: LC - LM - LMA

1	2	3	4	TOTAL	NOTA
2.75	2,75	2.5	0,75	7.75	8

- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

- **Ejercicio 1**

  Sea $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Encontrar la mejor aproximación de f en el sentido de cuadrados mínimos por un polinomio de grado menor o igual que 1.

- **Ejercicio 2**

  Encontrar una regla de cuadratura tal que $\int_0^1 f(t)\,dt \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$, de modo que resulte exacta para todas las funciones de la forma

  $$f(x) = ae^x + b\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- **Ejercicio 3**

  Considerar el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

  1. Determinar si la sucesión generada por el método de Jacobi es convergente justificando su respuesta.
  2. Encontrar ℓ tal que $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\ell^k}{1-\ell}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$, donde x^* es solución del sistema.
  3. Calcular el número de iteraciones k tal que $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-5}$, donde $x^{(0)} = (0, 0)$.

- **Ejercicio 4**

  1. De la definición del grado de precisión de una regla de integración.
  2. ¿Es la regla del punto medio una regla de integración gaussiana? Justifique su respuesta.

PARCIAL 2 - ANI

Tomás Achával Becerra
LCC - com 1 45085146

• EJERCICIO N°1:

• $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $[0, \pi/2]$

Queremos aproximar $f(x)$ en $[0, \pi/2]$ en el sentido de cuadrados mínimos, con un polinomio $p(x) = ax + b$, de grado ≤ 1.

• Para ello, queremos minimizar lo siguiente:

$$E(a,b) = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}(x) - p(x))^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(x)\,dx - 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)p(x)\,dx + \int_0^{\pi/2} p(x)^2\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(x)\,dx - 2\int_0^{\pi/2} ax\operatorname{sen}(x) + b\operatorname{sen}(x)\,dx + \int_0^{\pi/2} a^2x^2 + 2abx + b^2\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(x)\,dx - 2a\int_0^{\pi/2} x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx - 2b\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx + a^2\int_0^{\pi/2} x^2\,dx + 2ab\int_0^{\pi/2} x\,dx + b^2\int_0^{\pi/2} 1\,dx$$

Para minimizar $E(a,b)$ debemos buscar a y b tal que $\frac{\partial E}{\partial a}$ y $\frac{\partial E}{\partial b}$ sean 0.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2\int_0^{\pi/2} x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx + 2a\int_0^{\pi/2} x^2\,dx + 2b\int_0^{\pi/2} x\,dx = 0$$

Dividiendo todo por 2 y reordenando, obtenemos

$$(1)\quad a\int_0^{\pi/2} x^2\,dx + b\int_0^{\pi/2} x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx + 2a\int_0^{\pi/2} x\,dx + 2b\int_0^{\pi/2} 1\,dx = 0$$

Dividiendo todo por 2 y reordenando obtenemos

$$(2)\quad a\int_0^{\pi/2} x\,dx + b\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

Para despejar a y b de (1), (2) necesitaré:

$$\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3} = \frac{\pi^3}{8\cdot 3} = \boxed{\frac{\pi^3}{24}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = -\overset{0}{\cos(\tfrac{\pi}{2})} + \cos(0) = \boxed{1}$$

$X = V \quad \operatorname{sen}(x) = U'$
$\Rightarrow U = -\cos(x)$
$UV = X(-\cos(x)) = -X\cos(x)$
$UV' = 1\cdot(-\cos(x)) = -\cos(x)$

$$\int_0^{\pi/2} x\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx = \left[-x\cos(x) - \overbrace{\int (-\cos(x))\,dx}^{+\int \cos(x)dx}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \underbrace{-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \left(\underbrace{-0\cdot\cos(0)}_{0} + \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}\right) = \boxed{1}$$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\frac{24}{n^3}\cdot\frac{n^2}{8}=\frac{3}{n}$$

CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS, PODEMOS RESOLVER

① $a\cdot\frac{n^3}{24}+b\cdot\frac{n^2}{8}=1 \Rightarrow a\cdot\frac{n^3}{24}=1-b\cdot\frac{n^2}{8} \Rightarrow a=\frac{24}{n^3}\left(1-b\frac{n^2}{8}\right) \Rightarrow \boxed{a=\frac{24}{n^3}-\frac{3}{n}}$

Acá debe ir "b"

falta "b"

② $a\cdot\frac{n^2}{8}+b\cdot\frac{n}{2}=1 \Rightarrow \left(\frac{24}{n^3}-\frac{3}{n}\right)\frac{n^2}{8}+\frac{n}{2}\cdot b=1$

$\Rightarrow \frac{24}{8}\frac{n^2}{n^3}-\frac{3n^2}{8n}+\frac{n}{2}b=1 \Rightarrow \frac{n}{2}b=\frac{-3}{n}+\frac{3}{8}n+1$

$\Rightarrow b=\frac{2}{n}\left(\frac{-3}{n}+\frac{3n}{8}+1\right)$

$\Rightarrow b=\frac{-6}{n^2}+\frac{6}{8}+\frac{2}{n}=\boxed{\frac{3}{4}+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}$

POR LO TANTO OBTENEMOS QUE LA MEJOR APROXIMACIÓN A $f(x)$ EN EL SENTIDO DE LOS CUADRADOS MÍNIMOS ESTÁ DADA POR

$$\boxed{p(x)=\left(\frac{24}{n^3}-\frac{3}{n}\right)x+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}\right)}$$

Ejercicio N°2: REGLA DE CUADRATURA DE LA FORMA $\int_0^1 f(t)\,dt \approx A_0 f(0)+A_1 f(1)$,

$f(x)=ae^x+b\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$, $a,b\in\mathbb{R}$

NOTAR QUE $f(x)\in\langle e^x,\cos(\frac{n}{2}x)\rangle$ POR LO TANTO SI NUESTRA REGLA ES EXACTA PARA EL CONJUNTO $\{e^x,\cos(\frac{n}{2}x)\}$, ENTONCES SERÁ EXACTA P/ TODA FUNCIÓN DE LA FORMA DE $f(x)$.

QUEREMOS QUE

$= e^1-e^0 = e-1$

$\int_0^1 e^x\,dx = e^1 = e$ SEA IGUAL A $A_0 f(0)+A_1 f(1)$, ES DECIR

Arrastra error

$e = A_0(e^0)+A_1(e^1) \Rightarrow e = A_0+eA_1$

Y TAMBIÉN PODEMOS

$\int_0^1 \cos\left(\frac{n}{2}x\right)dx = \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\Big|_0^1 = \overbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}^{1}\cdot\frac{2}{n}-\overbrace{\mathrm{sen}(0)}^{0}\frac{2}{n}=\boxed{\frac{2}{n}}$ ✓

DE ESTA FORMA, PODEMOS QUE

$\frac{2}{n}=A_0 f(0)+A_1 f(1)=\overbrace{A_0\cos(0)}^{A_0}+\overbrace{A_1\cos\left(\frac{n}{2}\right)}^{0}$

$=A_0 \quad \therefore \quad \boxed{A_0=\frac{2}{n}} \Rightarrow e=\frac{2}{n}+eA_1$

$\Rightarrow A_1=\left(e-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{e}$

$\Rightarrow \boxed{A_1=1-\frac{2}{n\,e}}$ ✓

Y LA REGLA SERÁ

$$\int_0^1 f(t)\,dt \approx \frac{2}{n}f(0)+\left(1-\frac{2}{ne}\right)f(1)$$ ✓

AUX:

$\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)'=\frac{n}{2}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

$\therefore$

$\frac{2}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)'=\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

Tomás Achával Berzero
LCC-Com1 45085146 A.

Ejercicio N° 3

$Ax=b$, $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$

1) ¿La sucesión generada por Jacobi es convergente?

Sí, podemos afirmar que la sucesión generada por Jacobi converge a la solución de $Ax=b$ para cualquier vector x^0 inicial, esto es debido a que la matriz A es diagonalmente dominante. $\begin{pmatrix}3>2\\2>1\end{pmatrix}$ Los elementos de la diagonal (en val. abs), son mayores a la suma del resto de los elementos en sus respectivas filas. (en val. abs)

2) Encontrar ℓ tal que $||x^k-x^*||_\infty \leq \frac{\ell^k}{1-\ell}||x^{(1)}-x^{(0)}||_\infty$, x^* solución de $Ax=b$

Sabemos que si $Ax^*=b$ y se utiliza el método de Jacobi o G-S ~~...~~ con $||M^{-1}N||<1$, entonces $\exists C$ tq $||x^{k+1}-x^*||\leq C||x^{(k+1)}-x^{k}||$, con $C=\frac{||M^{-1}N||}{1-||M^{-1}N||}$

Hay que justificar esto

También podemos ver que

$$||x^{k+1}-x^k|| = ||M^{-1}Nx^k+M^{-1}b-M^{-1}Nx^{k-1}-M^{-1}b||$$
$$=||M^{-1}N(x^k-x^{k-1})|| \leq ||M^{-1}N||\,||x^k-x^{k-1}||$$

Repitiendo este proceso, hasta que $k-1=0$, habrá k iteraciones, por lo que

$\boxed{||x^{k+1}-x^k|| \leq ||M^{-1}N||^k\,||x^1-x^0||}$, así,

$$||x^k-x^*|| \leq \frac{||M^{-1}N||}{1-||M^{-1}N||}\cdot||x^k-x^{k-1}|| \leq \frac{||M^{-1}N||}{1-||M^{-1}N||}\cdot||M^{-1}N||^{k-1}\,||x^1-x^0|| = \frac{||M^{-1}N||^k}{1-||M^{-1}N||}||x^1-x^0||$$

$M=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$ $M^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/2\end{bmatrix}$ $N=\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$

$M^{-1}N=\begin{bmatrix}0&2/3\\1/2&0\end{bmatrix}$ y $||M^{-1}N||_\infty = 2/3$ y por lo tanto $\boxed{\ell=\frac{2}{3}}$

$$\boxed{||x^k-x^*||_\infty \leq \frac{(\frac{2}{3})^k}{1-\frac{2}{3}}||x^1-x^0||}$$

Continúo en Hoja 3

NOTA

4

Tomás Achával Becerra
LCC - Com1 45083146

Ejercicio N° 3.3):

Numero de iteraciones K tal que

$$\|x^k - x^*\|_\infty \leq 10^{-5} \quad x^{(0)} = (0,0)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad X_{k+1} = M^{-1}N x^k + M^{-1}b$$

$$= \begin{bmatrix} 5/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Pido que $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1/3} \|(5/3, 3/2) - (0,0)\|_\infty \leq 10^{-5}$

$$\Rightarrow \frac{2^k}{3^k} \cdot 3 \cdot \frac{5}{3} \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{5 \cdot 2^k}{3^{k-1}} \leq 10^{-5} \Rightarrow 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leq 10^{-5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leq 10^{-6}$$

$$k-1 \leq \log_{\frac{2}{3}}(10^{-6})$$

$$k \leq \log_{\frac{2}{3}}(10^{-6}) + 1$$

Por lo tanto $k \geq \log_{\frac{2}{3}}(10^{6}) + 1$

Ejercicio Nº 4:

1. Definición de grado de precisión de una regla de integración.

DEF: El grado de precisión de una regla de integración está dado por el grado del polinomio hasta el cual el error de la regla es 0. Más generalmente, está dado por la cantidad de elementos de la base del espacio de funciones que aproxima la regla, para los cuales dicha regla es exacta.

B

2. La regla del punto medio sí es una regla de integración gaussiana. La misma se obtiene de mejorar la regla del rectángulo dada por

$\int_a^b f(x)dx \sim f(a)(b-a)$, reemplazando el punto en el cual evaluamos f, por una raíz de un polinomio de grado 1, ortogonal a 1 en (a,b). Dicho polinomio está dado por

$$\Phi_1(x) = x - B_1 \text{, donde } B_1 = \frac{\int_a^b x \cdot 1\, dx}{\int_a^b 1\, dx} = \frac{(b^2-a^2)/2}{(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)/2}{(b-a)} = \frac{(b+a)}{2}$$

$$\therefore \Phi_1(x) = x - \frac{(a+b)}{2}$$

con raíz en $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$ y por lo tanto la forma

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \sim f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$ será precisa hasta grado $2n+1$ $(n=0 \Rightarrow 2n+1 = 1)$