PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

1	2	3	4	Total
24	25	25	25	99

10 (diez)

Apellido y Nombre: [illegible] Tomás Carrera: LCC

Justifique claramente todas sus respuestas.

Ejercicio 1. Para el siguiente conjunto de datos

248	261	242	249	264	259	244	257	288
231	209	255	267	261	246	262	263	261

a) Hallar el promedio, mediana, desvío estándar muestral, cuartil inferior, cuartil superior y rango intercuartil para este conjunto de datos.

b) Clasificar cada una de los valores obtenidos en el ítem a) como medida de posición o medida de dispersión.

c) ¿Hay datos atípicos en la muestra? Justifique su respuesta.

d) Construya un boxplot con los datos dados.

Ejercicio 2. Supongamos que las condiciones económicas de un determinado año se pueden clasificar en buenas y malas. Supongamos que, si un año es bueno, el siguiente será también bueno con probabilidad 0.7. De igual forma, si un año es malo, la probabilidad de que el siguiente sea bueno es 0.4. La probabilidad de que este año sea bueno es 0.6. Encuentre las probabilidades de que las sentencias siguientes sean ciertas.

a) Las condiciones económicas serán buenas tanto este año como el siguiente.

b) Las condiciones económicas serán buenas este año y serán malas el siguiente.

c) Las condiciones económicas serán malas los dos años.

d) Las condiciones económicas serán buenas el año próximo.

e) Si las condiciones económicas son buenas el año próximo, ¿cuál es la probabilidad condicionada de que las condiciones económicas sean buenas este año?

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad de masa dada por:

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}2, & \text{si } x = -1 \\ a, & \text{si } x = 0 \\ c, & \text{si } x = 2 \\ 0{,}4, & \text{si } x = 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

donde a y c son contantes.

a) Determinar los valores de las constantes a y c tal que la esperanza de X sea 1.6. Justifique sus respuestas.

b) Calcular la varianza de X.

c) Calcular la esperanza de $Z = 3X^2 - 1$.

Ejercicio 4. Las velocidades de los autos que circulan por la Ruta Nacional Nro 9, a la altura de Las Talitas (Tucumán), se distribuyen según una normal con media 98 km por hora y desviación estándar de 8 km por hora.

a) Si la policía de ese pueblo sigue la política de multar solamente al 5 % de los conductores que circulan a mayor velocidad, ¿a partir de qué umbral de velocidad se comenzará a multar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad de una auto elegido al azar que pase por la ruta en Las Talitas esté entre 95 y 110 kilómetros por hora?.

HOJA N°

FECHA

Tomás Achával Becerra
45085146 - LCC

A.

Ejercicio N°1

ORDENO LOS DATOS

$X_1 = 209 \mid 231 \mid 242 \mid 244 \mid 246 \mid 248 \mid 249 \mid 255 \mid 257$

$259 \mid 261 \mid 261 \mid 261 \mid 262 \mid 263 \mid 264 \mid 267 \mid 288 = X_{18}$

a) $\text{PROMEDIO} = \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{18} x_i}{18} = 253.7222$ ✓

FÓRMULA

$$\text{MEDIANA}\left(\{x_i\}_{i=1}^{n}\right) = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \end{cases}$$ ✓

DONDE (i) ES EL VALOR EN EL CONJUNTO ORDENADO.

$\text{MEDIANA} = \tilde{x} = \dfrac{x_9 + x_{10}}{2} = \dfrac{257+259}{2} = \boxed{258}$ ✓

$n = 18$ ES PAR Y POR LO TANTO SU MEDIANA ES EL PROMEDIO DE LOS VALORES CENTRALES.

$S_n = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \boxed{\cancel{16.5807}}$ ✓

16,1135

$Q_1 = \text{MEDIANA}\{x_1, \dots, x_9\} = x_5 = \boxed{246}$ ✓

CANTIDAD IMPAR DE ELEMENTOS $\Rightarrow$ MEDIANA $= x_{\frac{n+1}{2}}$ (VALOR CENTRAL)

$Q_3 = \text{MEDIANA}\{x_{10}, \dots, x_{18}\} = x_{14} = \boxed{262}$ ✓

$$* \; Q_1 = \begin{cases} \text{MEDIANA}\{x_{(1)}, \dots, x_{\left(\frac{n}{2}\right)}\} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ \text{MEDIANA}\{x_{(1)}, \dots, x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

$\text{RIC} = Q_3 - Q_1 = \boxed{16}$ ✓

$$Q_3 = \begin{cases} \text{MEDIANA}\{x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \dots, x_{(n)}\} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ \text{MEDIANA}\{x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \dots, x_{(n)}\} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

b) S_n Y RIC SON MEDIDAS DE DISPERSIÓN. ✓

$\bar{x}, \tilde{x}, Q_1$ Y Q_3 SON MEDIDAS DE POSICIÓN. ✓

c) ¿HAY DATOS ATÍPICOS? $\{\text{DATOS ATÍPICOS}\} = \{x_i : x_i \notin [Q_1 - 1.5 * \text{RIC}, Q_3 + 1.5 * \text{RIC}]\}$

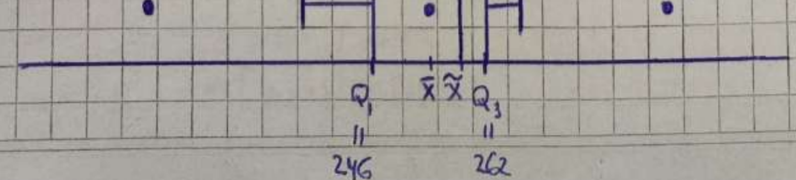
$= \{x_i : x_i \notin [222, 286]\}$

$= \{209, 288\} \rightarrow$ DATOS ATÍPICOS. ✓

d) BOXPLOT ESCALA $\overbrace{\quad}^{10}$

✓

DONDE 231 Y 267 SON BIGOTES DADO QUE SON EL MENOR Y MAYOR DATO EN $[Q_1 - 1.5 * \text{RIC}, Q_3 + 1.5 * \text{RIC}]$



NOTA

Ejercicio N°2:

Tenemos:

- $P(\underbrace{\text{este año es bueno}}_{A}) = 0.6 \therefore P(\underbrace{\text{este año es malo}}_{\bar{A}}) = 0.4$
- $P(\text{año siguiente es bueno} \mid A) = 0.7$
- $P(\underbrace{\text{año siguiente es bueno}}_{B} \mid \bar{A}) = 0.4$

a) $P(\text{este año y el próximo son buenos}) = P(A \cap B)$

Sabemos que $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(A\cap B)}{0.6} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)} = 0.7 * 0.6 = \boxed{0.42}$ ✓

b) $P(\text{este año bueno y el siguiente malo}) = P(A \cap \bar{B})$

Sabemos que $P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\cap \bar{B})}{P(A)} \Rightarrow 1 - P(B|A) = \frac{P(A\cap\bar{B})}{0.6} \Rightarrow \boxed{P(A\cap\bar{B})} = 0.6 * (1-0.7)$ ✓

$= 0.6 * 0.3 = \boxed{0.18}$

c) $P(\text{este año y el siguiente son malos}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Sabemos que $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})} \Rightarrow 1 - P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{0.4} \Rightarrow \boxed{P(\bar{A}\cap\bar{B})} = 0.4 * (1-0.4)$ ✓

$= 0.4 * 0.6 = \boxed{0.24}$

d) $P(\text{el año siguiente será bueno}) = P(B)$

$= P(\underbrace{\text{este año bueno y el siguiente bueno}}_{A\cap B} \cup \underbrace{\text{este año malo y el siguiente bueno}}_{\bar{A}\cap B})$ ✓

son eventos mutuamente disjuntos ✓

$= P((A\cap B) \cup (\bar{A}\cap B)) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$

$= 0.42 + P(\bar{A}\cap B) = 0.42 + 0.16 = \boxed{0.58}$ ✓

Notar que $P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$

$\Rightarrow 0.4 = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{0.4}$

$\Rightarrow P(\bar{A}\cap B) = (0.4)^2$

$= \boxed{0.16}$

e) $P(\text{este año es bueno} \mid \text{el próximo es bueno})$

$= P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{0.58} = \frac{0.42}{0.58} = \boxed{0.7241}$ ✓

*Cada ejercicio utiliza resultados obtenidos en incisos anteriores. :)

→ muy bien

NOTA

HOJA N°

FECHA

Ejercicio N°3

Tomás Achával Berzero
45083746 - LCC

X una v.a con F.P.M dada por

$$P(X) = \begin{cases} 0,2 & x=-1 \\ a & x=0 \\ c & x=2 \\ 0,4 & x=3 \\ 0 & c.c \end{cases} \quad a, c \text{ constantes.}$$

a) Determinar los valores de a y c tq $E(X)=1.6$

Notemos que $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(x_i) = 1 \Rightarrow 0,2 + a + c + 0,4 = 1$

$$a + c = 1 - 0,6$$

$$\boxed{a + c = 0,4}$$

y también que

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i * P(x_i) = 1,6 \Rightarrow (-1)^* (0,2) + 0^* a + 2^* c + 3^* 0,4 = 1,6$$

$$-0,2 + 2c + 1,2 = 1,6$$

$$\boxed{c = \frac{0,6}{2} = 0,3}$$

$c = 0,3 \Rightarrow a + 0,3 = 0,4 \Rightarrow \boxed{a = 0,1}$

b) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, si $E(|X^2|) < \infty$

Veamos

$$\underset{\text{por prop}}{E(X^2)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 P(x_i) = (-1)^2 \cdot (0,2) + (0)^2 \cdot (0,1) + (2)^2 \cdot 0,3 + (3)^2 \cdot 0,4$$

$$= 0,2 + 4^* 0,3 + 9^* 0,4$$

$$= \boxed{5 < \infty}$$

$\therefore V(X) = 5 - (1,6)^2 = \boxed{2.44}$

c) Sabiendo que X^2 es una v.a y que $E(X^2) = 5$, entonces

$$E(Z) = E(3X^2 - 1) = 3E(X^2) - 1 = 3^* 5 - 1 = \boxed{14}$$

Prop Y una va

$\Rightarrow E(aY + b) = aE(Y) + b$

NOTA

EJERCICIO N°4:

X = "Velocidad de los autos en la R9"

- $X \sim N(98, 8^2)$

a) La policía multa al 5% que circula a mayor velocidad.

¿A partir de qué velocidad se comienza a multar?

Sea v dicha velocidad, queremos que

$$P(X \geq v) = 0.05 \Rightarrow P(X \leq v) = 1 - 0.05$$

$$\boxed{P(X \leq v) = 0.95}$$

De aquí se obtiene que $\underline{v = \eta(0.95)}$ o "v es el percentil 95"

Notemos que

$$P(X \leq \eta(0.95)) = P\left(Z \leq \frac{\eta(0.95) - 98}{8}\right), \text{ donde } \boxed{Z = \frac{X - 98}{8} \sim N(0,1)}$$

(lo mismo para el ej. b)

Luego por la tabla de valores,

Si $P\left(Z \leq \frac{\eta(0.95) - 98}{8}\right) = 0.95$ y $P(Z \leq 1.645) = 0.95$ → promedio de $\Phi(1.64)$ y $\Phi(1.65)$

Entonces

$$\frac{\eta(0.95) - 98}{8} \approx 1,645 \Rightarrow \eta(0.95) = 8 * 1,645 + 98$$

$$= \boxed{111.16 = v}$$

Muy bien explicado y justificado.

∴ El umbral de velocidad para ser multado será de $v = 111.16$ Km/h.

b) $P(95 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{95-98}{8} \leq Z \leq \frac{110-98}{8}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{110-98}{8}\right) - \Phi\left(\frac{95-98}{8}\right)$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(-0.375)$$

$$= 0.9332 - (1 - \Phi(0.375))$$ ↗ promedio de los dos valores más cercanos.

$$\approx 0.9332 - 1 + \frac{\Phi(0.37) + \Phi(0.38)}{2}$$

$$\approx 0.9332 - 1 + \frac{0.6443 + 0.6480}{2}$$

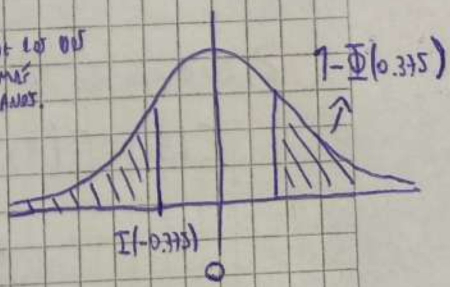
$$\boxed{\approx 0.57935}$$

$\Phi(-0.375) = P(Z \leq -0.375)$ ↗ simetría resp. al 0

$= P(Z \geq 0.375)$

$= 1 - P(Z \leq 0.375)$

$= 1 - \Phi(0.375)$



$\Phi(-0.375) = 1 - \Phi(0.375)$

Por simetría con respecto al 0.

NOTA