100%

PARCIAL 3 - LENGFORM

Tomás Achával Becerra
45085746

Ejercicio 1) Sea $\Sigma = \{@, !, \%\}$

a) Describa el dominio de $\lambda_x[x \text{ es primo}]$

b) Pruebe que $\lambda_x[x \text{ es primo}]$ es Σ-p.r.

RESPUESTA:

a) El dominio de $\lambda_x[x \text{ es primo}]$ son todos los valores de $x \in \omega$ para los cuales la expresión "x es primo" está definida. Como está definida $\forall x \in \omega$, entonces

$$D_{\lambda_x[x \text{ es primo}]} = \omega.$$

b) Sea $P: \omega \to \omega$ dada por $P = \lambda_x[x \text{ es primo}]$. Notar que la expresión "x es primo" es equivalente a la expresión "$x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge (\forall t \in \omega)_{t \leq x}\ t=1 \vee t=x \vee t \nmid x$"

Por lo tanto

$$P = \Big(\underbrace{\lambda_x[x \neq 0]}_{P_1} \wedge \underbrace{\lambda_x[x \neq 1]}_{P_2}\Big) \wedge \underbrace{\lambda_x\big[(\forall t \in \omega)_{t \leq x} (t=1 \vee t=x) \vee t \nmid x\big]}_{P_3}$$

Lema: Si $P: S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q: S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-p.r. entonces $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$ y $\neg(P)$ lo son.

Por el lema anterior es claro que si P_1, P_2 y P_3 son Σ-p.r., P lo será.

$P_1 = \neg(\lambda_x[x=y]) \circ [p_1^{1,0}, C_0^{1,0}]$ es Σ-p.r. con dominio ω.

$P_2 = \neg(\lambda_x[x=y]) \circ [p_1^{1,0}, C_1^{1,0}]$ es Σ-p.r. con dominio ω.

Nos resta ver que P_3 es Σ-p.r.

Sea $Q = \lambda_{tx}[(t=1 \vee t=x) \vee t \nmid x]$

$$= \big(\lambda_{xy}[x=y] \circ [p_1^{2,0}, C_1^{2,0}] \vee \lambda_{xy}[x=y]\big) \vee \neg(\lambda_{xy}[x|y])$$

Es claro así que Q es Σ-p.r. y $D_Q = \omega \times \omega$

LEMA DE CUANTIFICACIÓN ACOTADA. Sea Σ un alfabeto finito.

Sea $P: S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-P.R. tal que $S, S_i \subseteq \omega$ y $L_i \subseteq \Sigma^*$ $\forall i$ son no vacíos. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-P.R. Entonces

$$\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

es Σ-P.R. (y su dominio es $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$)

Como $Q: \omega \times \omega \to \omega$ y $N \subseteq \omega$ es Σ-PR (pues $\chi_N^{\omega} = \lambda_x[x \neq 0]$)

Entonces aplicando el lema de cuantificación acotada resulta en

$$\lambda_{x x_1}\left[(\forall t \in N)_{t \leq x} Q(t, x_1)\right]$$ la cual es Σ-P.R. con dominio $\omega \times \omega$

y notemos que

$$P_3 = \lambda_{x x_1}\left[(\forall t \in N)_{t \leq x} Q(t, x_1)\right] \circ \left[p_1^{1,0}, p_1^{1,0}\right]$$

Por lo tanto P_3 es Σ-P.R. con dominio ω.

Así, como P_1, P_2 y P_3 son Σ-P.R y tienen el mismo dominio, entonces por el primer lema

$$P = (P_1 \wedge P_2) \wedge P_3 = \lambda_x[x \text{ es primo}]$$

es Σ-P.R.