PARCIAL 1

15 DE ABRIL DE 2024

En todos los ejercicios se deben explicar los pasos que se siguen en la resolución.

El código python utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con " ►" se deberá subir a moodle para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características.

- Los enunciados de los ejercicios 3 y 4 del parcial se entregarán a las 11, en el aula 31.
- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse apellido_nombre_parcial1.py o apellido_nombre_parcial1.ipynb.
- El archivo deberá contener las funciones requeridas en los ejercicios 1 y 2 y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1: Se desea determinar mediante Monte Carlo el valor de la integral

$$I = \int_1^7 \sqrt{x + \sqrt{x}}\, dx.$$

a) Explicar y fundamentar cómo se estima mediante simulación el valor de esta integral por el método de Monte Carlo.

b) ► Escribir un programa `monte_carlo(N)` que estime el valor de la integral con N simulaciones. Utilizar el programa para completar la siguiente tabla. Completar la tabla con 6 decimales.

Nº de sim.	Integral
1 000	
10 000	
100 000	

Ejercicio 2: Se generan valores a partir de variables aleatorias independientes, distribuidas uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.

Si la suma acumulada es mayor que 1, se considera acierto.

Si no, se sigue generando hasta que se supere 1.

Se quiere estimar la probabilidad p de que el número total de sumandos para conseguir el acierto sea impar.

a) ► Escribir e implementar un programa `juego()` en computadora que simule el experimento hasta obtener un acierto.

b) ► Escribir e implementar un programa `pares(N)` para estimar p con $N = 100$, 1000 y 10000 simulaciones.

N^o de sim.	p
100	
1 000	
10 000	

Ejercicio 3: Sea X una variable aleatoria uniforme discreta que toma valores enteros entre -10 y 10. Esto es:

$$-10 \leq X \leq 10.$$

La función $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ está definida como:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ 5 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular $E[g(X)]$

b) Sea $Y = g(X)$. Calcular $P(X = 10 \mid Y = 5)$.

Ejercicio 4: $N(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } t \in (0,1] \cup (2,3] \cup (4,5] \dots \\ 3 & \text{si } t \in (1,2] \cup (3,4] \cup (5,6] \dots \end{cases}$$

Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(N(3) - N(1.25) > 2)$.

b) $P(N(4) - N(1) = 6 \mid N(3) - N(1.25) = 5)$.

45085146 A.

Achaíre Berzero Tomás

PARCIAL 1 - MODELOS Y SIMULACIÓN

EJERCICIO 1a)

ESTIMAR EL VALOR DE $I = \int_1^7 \sqrt{x+\sqrt{x}}\, dx$

SEA $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ TAL QUE $I = \int_1^7 f(x)\, dx$

REALIZANDO UN CAMBIO DE VARIABLE $y = \frac{x-a}{b-a}$ DONDE $a=1$ Y $b=7$, OBTENGO

$x = a + (b-a)y = 1 + (7-1)y = 6y+1$ y $dy = \frac{1}{6}dx \Rightarrow dx = 6dy$

DE ESTA FORMA, $I = \int_0^1 f(6y+1)\cdot 6\, dy$ ✓

AHORA, SI $h(y) = 6\cdot f(6y+1)$, PODEMOS VER A $I = \int_0^1 h(y)\, dy$ COMO

$E(h(X))$ PARA UNA v.a $X \sim U(0,1)$

FINALMENTE, PARA ESTIMAR I, GENERAMOS N REALIZACIONES $U_1, \dots, U_N$ DE VARIABLES ALEATORIAS $U_1, \dots, U_N$ INDEPENDIENTES Y UNIFORMES EN $(0,1)$ Y ESTIMAMOS

$$I \sim \frac{\sum_{i=1}^{N} h(U_i)}{N}$$

Bien! Código: Bien resuelto

2) El juego debe contar cuántos términos hasta superar 1. Por ende debe ser while sum ≤ 1

HOJA 1 PARTE TEÓRICA

45085146

ACHAVAL BARRETO TOMÁS

PARCIAL 1 - Modelos y Simulación

Ejercicio 3

Sea X una v.a. uniforme discreta que toma valores entre -10 y 10. Esto es $-10 \leq X \leq 10$.

La función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 5 \\ 5 & \text{c.c} \end{cases}$$

a) Calcular $E(g(x))$

b) Calcular $P(X=10 \mid Y=5)$ con $Y = g(X)$

RESPUESTAS:

a) $E(g(X)) = \sum_{i=-10}^{10} g(i)\, P(X=i)$

como $X \sim \mathcal{U}\{-10,10\}$, $P(X=i) = \frac{1}{21}$ $\forall i = -10, -9, \dots, 10$

Además, $g(i) = 0$ $\forall i \leq 0$. Por lo que nos quedamos con

$$E(g(X)) = \frac{1}{21} \cdot \sum_{i=1}^{10} g(i) = \frac{1}{21}(1+2+3+4+5+5+5+5+5+5)$$

$$= \frac{1}{21} \cdot 40 = \boxed{\frac{40}{21}} \sim 1.905$$

b) $$P(X=10 \mid Y=5) = \frac{P(X=10, g(X)=5)}{P(g(X)=5)}$$

MISMO EVENTO

como $\boxed{g(X) = 5 \iff X \geq 5}$ entonces $\{X=10, \underbrace{g(X)=5}_{\text{ES EL EVENTO } X \geq 5}\} = \{X=10, X \geq 5\}$

LUEGO

MISMO EVENTO

$$\frac{P(X=10, g(X)=5)}{P(g(X)=5)} = \frac{P(X=10, X \geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X=10)}{\sum_{i=5}^{10} P(X=i)} = \frac{\frac{1}{21}}{6 \cdot \frac{1}{21}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Ejercicio 4: $N(t)$ $t \geq 0$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } t \in [0,1] \cup (2,3] \cup (4,5] \dots \\ 3 & \text{si } t \in (1,2] \cup (3,4] \cup (5,6] \dots \end{cases}$$

Calcular

a) $P(N(3) - N(1.25) > 2)$

b) $P(N(4) - N(1) = 6 \mid N(3) - N(1.25) = 5)$

Respuestas

a) Como $N(t)$ es un proceso de Poisson no homogéneo, sabemos que

$$N(3) - N(1.25) \sim \mathcal{P}(\lambda = m(1.25, 3))$$

donde

$$m(1.25,3) = \int_{1.25}^{3} \lambda(t)\,dt = \int_{1.25}^{2} 3\,dt + \int_{2}^{3} 5\,dt = 3(2-1.25) + 5(3-2) = 7.25$$ ✓

Luego $P(N(3) - N(1.25) > 2) =$

$$= 1 - \left(P(N(3)-N(1.25)=0) + P(N(3)-N(1.25)=1) + P(N(3)-N(1.25)=2)\right)$$

$$= 1 - \left(e^{-7,25} + e^{-7,25} \cdot 7,25 + e^{-7.25} \cdot \frac{(7,25)^2}{2!}\right)$$ ✓

$$= 1 - e^{-7.25}\left(1 + 7,25 + \frac{7,25^2}{2}\right) \approx \boxed{0.9755}$$ Bien.

b) $P(N(4) - N(1) = 6 \mid N(3) - N(1.25) = 5)$

$$= \frac{P(N(4)-N(1)=6,\ N(3)-N(1.25)=5)}{P(N(3)-N(1.25)=5)}$$

Convirtiendo la intersección en eventos independientes, obtenemos la unión

$$= \frac{P(N(4)-N(3)=k,\ N(3)-N(1.25)=5,\ N(1.25)-N(1)=1-k)}{P(N(3)-N(1.25)=5)} \quad \text{para } \underbrace{k=0,1}$$

como $k=0$ y $k=1$ generan eventos disjuntos, obtenemos:

$$= \frac{P(N(4)-N(3)=1,\ N(3)-N(1.25)=5,\ N(1.25)-N(1)=0) + P(N(4)-N(3)=0,\ N(3)-N(1.25)=5,\ N(1.25)-N(1)=1)}{P(N(3)-N(1.25)=5)}$$ ✓

y como los eventos de las intersecciones son independientes, tenemos

$$= P(N(4)-N(3)=1) \cdot P(N(1.25)-N(1)=0) + P(N(4)-N(3)=0)\, P(N(1.25)-N(1)=1) =$$

Nota: que $P(N(3)-N(1.25)=5)$ fue simplificada por cancelación en ambos términos.

HOJA 2 PARTE TEÓRICA

M50851146 A.
ACHAVAL BERGO TOMÁS

COMO $N(t)$ ES UN PROCESO DE POISSON NO HOMOGÉNEO,

$$N(4)-N(3) \sim P(\lambda = m(3,4)),\ \lambda = \int_3^4 \lambda(t)\,dt = \int_3^4 3\,dt = 3$$

y

$$N(1.25)-N(1) \sim P(\lambda = m(1,1.25)),\ \lambda = \int_1^{1.25} \lambda(t)\,dt = \int_1^{1.25} 3\,dt = 3(1.25-1) = 0.75$$

LUEGO TENEMOS

$$P(N(4)-N(3)=1) = e^{-3}\cdot 3 \quad , \quad P(N(4)-N(3)=0) = e^{-3}$$

$$P(N(1.25)-N(1)=0) = e^{-0.75} \quad , \quad P(N(1.25)-N(1)=1) = e^{-0.75}\cdot 0.75$$

Y ASÍ

$$\star = e^{-3}\cdot 3\cdot e^{-0.75} + e^{-3}\cdot e^{-0.75}\cdot 0.75 \sim \boxed{0.0882}$$

Bien!

apel de fibra de caña de azúcar.