Apellido y Nombre: Achával Berzero Tomás

Carrera (LCC/LMA): LCC

Comisión (MAÑANA/TARDE): MAÑANA

Primer Parcial
Análisis Matemático II (LC) - Cálculo II (LMA)

Justificar todas las respuestas.

1. (22 pts.) Calcular las siguientes integrales e indicar el método utilizado.

$$(a) \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{sen}(2x)\,dx \qquad (b) \int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

2. (22 pts.) Determinar si las siguiente integrales convergen y en tal caso calcularlas.

$$(a) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx \qquad (b) \int_\pi^\infty \mathrm{sen}(x)dx$$

3. (18 pts.) Dar un ejemplo de:
   a) Una sucesión (a_n) estrictamente creciente y convergente. Explicitar el límite.
   b) Una sucesión (b_n) alternante.

4. (22 pts.) Determinar si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n^2+3n+5} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+4}{2n^2+3n+5}$$

5. (16 pts.) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2x^n}{2^n}.$$

1	2	3	4	5	Total	Nota
21	22	16	16	10	85	8

(Ocho)

HOJA N°
FECHA

AN. MAT. II - PRIMER PARCIAL

TOMÁS ACHÁVAL BERZERO
COM. 1 - 45085146

Ejercicio 1:

a) CALCULAR:

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx$$

• BUSCO UNA PRIMITIVA PARA UTILIZAR LA REGLA DE BARROW

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$, F PRIMITIVA DE F.

$$\int \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx$$

• NOTEMOS QUE $\text{sen}'(2x) = 2\cos(2x) \Rightarrow \frac{1}{2}\text{sen}(2x)' = \cos(2x)$

Y $\int \text{sen}(2x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$ $\Rightarrow \int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$

$$\int \underbrace{\cos(2x)}_{f}\underbrace{\text{sen}(2x)}_{g'}\,dx \underset{\substack{\text{INT. POR PARTES}\\ \int fg' = fg - \int f'g}}{=} \cos(2x)\cdot\frac{(-\cos(2x))}{2} - \int -\text{sen}(2x)\cdot 2\cdot\frac{(-\cos(2x))}{2}\,dx$$

• $\cos'(2x) = -\text{sen}(2x)2$

$$\underset{\text{ARITMÉTICA}}{=} \cos(2x)\cdot\frac{(-\cos(2x))}{2} - \int \text{sen}(2x)\cos(2x)\,dx$$

LUEGO,

$$\int \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx = -\frac{\cos^2(2x)}{2} - \int \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx$$

HALLÉ UNA PRIMITIVA F

$$2\int \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx = -\frac{\cos^2(2x)}{2} \Longrightarrow \int \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx = -\frac{\cos^2(2x)}{4} + C$$

AHORA,

AUX: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\cos(0) = 1$

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx \underset{\text{REGLA DE BARROW}}{=} \frac{-\cos^2\left(2\frac{\pi}{4}\right)}{4} - \frac{\left(-\cos^2\left(0\frac{\pi}{4}\right)\right)}{4}$$

$$= -\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} + \frac{\cos^2(0)}{4} = -\frac{0}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$ //

NOTA

b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \underset{1}{=} \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g'} \underbrace{\ln(x)}_{f}\,dx \underset{\substack{\text{INT. POR}\\ \text{PARTES}}}{=} \overset{g}{\frac{-1}{x}}\, \overset{f}{\ln(x)} - \int \overset{g}{-\frac{1}{x}} \cdot \overset{f'}{\frac{1}{x}}\,dx$ → x^{-2} (YA CALCULADA)

$\int f g' = f g - \int f' g$

$$= -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

AUX:

$\int x^{-2} = -x^{-1} = \frac{-1}{x}$

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{-1}{x}$$

$$\boxed{\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{(\ln(x)+1)}{x} + C}$$

B

EJERCICIO 2:

DETERMINAR SI CONVERGEN Y EN TAL CASO CALCULARLAS.

a) $\displaystyle\int_0^3 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3-x}}}_{f(x)}\,dx$ - ANALIZO LA SIGUIENTE INTEGRAL (EN EL LÍMITE)

$$\lim_{T\to 3^-} \underbrace{\int_0^T \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx}$$

BUSCO UNA PRIMITIVA P/RESOLVER LA INTEGRAL CON BARROW, LUEGO TOMO LÍMITE.

- NOTAR QUE

$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$ $\left(\text{"}\frac{1}{0}\text{"}\right)$

Y $f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \int (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -2\sqrt{3-x} + C$$

• NOTEMOS QUE

$\left(-\sqrt{3-x}\right)' = -(-1)\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$

$\therefore \left(-2\sqrt{3-x}\right)' = -2\cdot(-1)\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3-x}} = (3-x)^{-\frac{1}{2}}$

LUEGO

$\int (3-x)^{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{3-x}$

AHORA,

$$\lim_{T\to 3^-} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx \overset{\text{BARROW}}{=} \lim_{T\to 3^-} -2\sqrt{3-T} + 2\sqrt{3-0}$$

$$= \lim_{T\to 3^-} -2\sqrt{3-T} + 2\sqrt{3}$$

$$= \lim_{T\to 3^-} -2\sqrt{3-T} + \lim_{T\to 3^-} 2\sqrt{3}$$

$$= -2\lim_{T\to 3^-} \sqrt{3-T} + 2\sqrt{3} = -2\cdot 0 + 2\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

LA INTEGRAL CONVERGE A ESTE VALOR.

NOTA

HOJA N°

FECHA

Tomás Achával Becerra

2.b) $\displaystyle\int_M^{\infty} sen(x)\,dx$

• Notemos que $sen(M)=0$ y que $\nexists \lim_{x\to\infty} sen(M)$

• Notar que $\int sen(x)dx = -cos(x)+C$ (p/utilizar Barrow)

Luego, analizo el siguiente límite

$$\lim_{T\to\infty}\int_M^T sen(x)\,dx \underset{\text{BARROW}}{\downarrow} = \lim_{T\to\infty} -cos(T)+cos(M)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \overbrace{-1}^{\text{constante que no afecta al límite}} - cos(T)$$

$$= -1 + \underbrace{\lim_{T\to\infty} -cos(T)}_{\text{Notar que}}$$

$$\nexists \lim_{T\to\infty} -cos(T) \quad \left(\text{oscila infinitamente entre } -1 \text{ y } 1\right)$$

$\therefore \displaystyle\int_M^{\infty} sen(x)\,dx$ DIVERGE

3) a) Dar una sucesión (a_n) estrictamente creciente y convergente. Explicar el límite.

$a_n = \dfrac{-1}{n^2}$ • $\dfrac{-1}{n^2} < \dfrac{-1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Alguna cuenta...]

• $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{x\to\infty} f(x)$, donde $f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \overset{f(n)}{\overset{\|}{|a_n|}}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

Y por teorema, sabemos que si a_n converge absolutamente, entonces a_n converge.

Así, $a_n = \dfrac{-1}{n^2}$ es una sucesión estrictamente creciente, la cual converge a 0.

NOTA

3.b) DAR UNA SUCESIÓN (b_n) ALTERNANTE.

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n}(-1)^n}$$

ES ALTERNANTE PUES $\frac{1}{n}(-1)^n < 0 \ \forall n$ IMPAR.

Y $\frac{1}{n}(-1)^n > 0 \ \forall n$ PAR.

4- DETERMINAR SI SON ABS. CONVERGENTES, COND. CONVERGENTES, O DIVERGENTES

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n^2+3n+5}$$

DEFINIMOS:

ABS. CONV $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ CONV.

COND. CONV $\Rightarrow \sum |a_n|$ DIVERGE, PERO $\sum a_n$ CONVERGE

• NOTEMOS QUE,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2n^2+3n+5} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+5}$$

• AHORA, NOTEMOS QUE

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{2n^2+3n+5}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n} \quad \forall n \ (\text{PUES } n^2 < 2n^2+3n+5)$$

POR TEOREMA,
SABEMOS QUE SI $0 \leq a_n \leq b_n$ Y $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE.

• TENEMOS $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ LA CUAL CONVERGE PUES $\sum \frac{1}{n^p}$ CONVERGE SI $p > 1$

ASÍ, COMO $0 \leq \frac{1}{2n^2+3n+5} \leq \frac{1}{n^2}$, Y $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE,

ENTONCES

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+5}$ CONVERGE. ESTO SIGNIFICA QUE

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n^2+3n+5}$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

HOJA N°

FECHA

Tomás Achahual Bereeo A.

4.b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{(-1)^n \frac{3n^2+4}{2n^2+3n+5}}^{a_n}$$

· Utilizaré las definiciones desarrolladas en 4.a)

· Analizo $|a_n|$ · Ahora, sabemos que $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\left(a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ div}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{3n^2+4}{2n^2+3n+5}}^{|a_n|}, \text{ veamos } \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+3n+5} \underset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{4n+3}$$

"lo veo como una función $f(n)=|a_n|$" L'Hopital $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \neq 0$$

L'Hop $\frac{\infty}{\infty}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge (por TFO)

· Veamos si converge condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2+4}{2n^2+3n+5}$$

Notar que

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{2n^2+3n+5} + \frac{(-1)^n 4}{2n^2+3n+5} \overset{\text{si ambas convergen}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{2n^2+3n+5} + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n^2+3n+5}(-1)^n}^{\text{sé que converge abs.}}$$

$\Rightarrow$ converge $\left(< \frac{4}{n^2} \text{ cuya suma converge}\right)$

También cumple ✩ $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n^2+3n+5} = \boxed{0}$ y sus términos decrecen a medida que n crece. $(a_n > a_{n+1} \ \forall n)$

Aux:
$$\begin{array}{r|l} 3n^2 & 2n^2+3n+5 \\ -3n^2 - \frac{9}{2}n - \frac{15}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{9}{2}n - \frac{15}{2} & \end{array}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2n^2+3n+5}(-1)^n$$

Ahora, sabemos que

$a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq 0 \ \forall n$

y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum a_n (-1)^n$ converge ✩ $\Leftrightarrow$ ambas convergen

NO

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{2}(2n^2+3n+5) + -\frac{9}{2}n - \frac{15}{2}}{2n^2+3n+5}(-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\frac{3}{2}}{2n^2+3n+5}}_{a_n}(-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\frac{9}{2}n + \frac{15}{2}}{2n^2+3n+5}}_{a'_n}(-1)^n$$

Notemos que tanto a_n como a'_n cumplen las hipótesis

(El denominador crece más rápido)

$$a_n = \frac{3}{4n^2+6n+10} > a_{n+1} = \frac{3}{4(n+1)^2+6(n+1)+10} > 0 \ \forall n$$

$$a'_n = \frac{\frac{9}{2}n + \frac{15}{2}}{2n^2+3n+5} = \frac{9n+15}{4n^2+6n+10} > \frac{9(n+1)+15}{4(n+1)^2+6(n+1)^2+10} \ \forall n$$

$$y \ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4n^2+6n+10} = \boxed{0}$$

NO

$$y \ \lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9n+15}{4n^2+6n+10}$$

$$\text{L'Hopital} \ \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{8n+6} = \boxed{0}$$

$\Rightarrow \sum a_n(-1)^n$ converge

cumple ✩

$\Rightarrow \sum a'_n (-1)^n$ converge.

cumple ✩

NOTA

Siguiente pág

En resumen, tenemos que

$\sum |a_n|$ diverge, $a_n = (-1)^n \dfrac{3n^2+4}{2n^2+3n+5}$

y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pues

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n^2+4)}{2n^2+3n+5}}_{\text{converge}} \Leftarrow \underbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4n^2+6n+10}}_{\text{converge}} \text{ y } - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+13}{4n^2+6n+10}(-1)^n}_{\text{converge}} \text{ y } + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n^2+3n+5}}_{\text{converge}}}_{\text{PROBADO //}}$$

Así, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(3n^2+4)}{2n^2+3n+5}$ converge condicionalmente.

5) Determinar radio de convergencia (R) e intervalo de convergencia (I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{n^2}{2^n}}_{a_n} x^n$$

• Sabemos que $R = \dfrac{1}{L}$, donde $L := \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \infty$

• Busco L,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^2}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2\cdot \cancel{2^n}}}{\frac{n^2}{\cancel{2^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2}$$

$$\overset{\text{L'Hop } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{4n} \overset{\text{L'Hop } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

solo se puede aplicar en funciones

• Así, $L = \frac{1}{2}$ y $R = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ ✓ → La serie converge absolutamente en $(-2,2)$.

• Luego, $I := [ó(a-R, a+R)ó]$, donde a es el "centro de la función". En este caso, $a=0 \Rightarrow I = [ó(-R,R)ó]$

Así, $I = [ó(-2,2)ó]$ Analizo si converge en los extremos.

$x=-2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(-1)^n(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}((-1)(-2))^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \rightarrow$ diverge pues $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$ ✓

está mal escrito

$x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(-1)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-1)^n$ ↗ Sea $S_K = \sum_{n=1}^{K} n^2(-1)^n \Rightarrow S_1 = -1,\ S_2 = -1+4 = 3,\ S_3 = 3-9 = -6,\ S_4 = -6+16 = 10$] Así, $\nexists \lim_{K\to\infty} S_K$?

"Los términos crecen indefinidamente en valor."

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(-1)^n 2^n}{2^n}$ diverge

NOTA

Conclusión en siguiente hoja

HOJA Nº
FECHA

Tomás Achával Becerra

EN RESUMEN, PARA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n} x^n$

$R = 2$, $I = (-2, 2)$

, PUES LA SERIE DIVERGE TANTO $\underbrace{\text{PARA } x=2}_{\text{SUS SUMAS PARCIALES}}$ COMO PARA $\overbrace{x=-2}^{\text{CLARAMENTE (PROBADO)}}$

NO SE ACERCANA NINGÚN NUMERO, CRECIENDO EN VALOR ABSOLUTO PARA CADA TÉRMINO.

$\blacksquare$