HOJA N°

FECHA

REPASO TEOREMAS IMPORTANTES

TEOREMA (MÉTODO DE BISECCIÓN)

Si $[a_0,b_0], \dots, [a_n,b_n]$ son los sucesivos intervalos generados por el método de bisección, entonces existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ \text{y} \lim_{n\to\infty} b_n,$$ son iguales y representan una raíz de f.

Además,

Si $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = r \Rightarrow |r-c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)$

DEMOSTRACIÓN:

· Veamos primero que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_0 \rightarrow \{a_n\} \text{ crece y tiene cota superior.}$$
$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq a_0 \longrightarrow \{b_n\} \text{ decrece y tiene cota inferior.}$$

· Notar que

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1}), \ n \geq 1$$

Repitiendo, obtenemos

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0-a_0), \text{ luego } \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_0-a_0) = \boxed{0}$$

Sea

$$r = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \text{ veamos que es raíz.}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) < 0 \Rightarrow f(r)^2 \leq 0 \Rightarrow f(r)=0 \therefore r \text{ es raíz}$$

Finalmente, sea

$$c_n = \frac{b_n+a_n}{2} \Rightarrow |r-c_n| \leq \underbrace{\frac{1}{2}(b_n-a_n)}_{\leq \frac{1}{2^n}(b_0-a_0)} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)$$

NOTA

TEOREMA (Existencia y Unicidad del punto fijo)

a) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } g \in C[a,b] \\ \text{y } g([a,b]) \subset [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists p \in [a,b] \text{ tq } g(p) = p$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Si además } g' \in C[a,b] \text{ y} \\ |g'(x)| \leq K < 1 \ \forall x \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ único pto fijo de g en (a,b)

__Demostración__

a) Si $g(a) = a$ ó $g(b) = b$, listo

Si no, entonces

$g(a) > a$ y $g(b) < b$. Sea $h(x) = g(x) - x$ definida en $[a,b]$

Luego

$\left.\begin{array}{l} h(a) = g(a) - a > 0 \\ \text{y } h(b) = g(b) - b < 0 \end{array}\right\}$ h tiene una raíz en (a,b). Sea p esa raíz

$\Rightarrow h(p) = 0 \Rightarrow g(p) - p = 0 \Rightarrow g(p) = p$ punto fijo en (a,b).

b) Supongamos que existen dos puntos fijos distintos p y $q \in [a,b]$. Sabemos por el teorema del valor medio que

$$\underbrace{g(p) - g(q)}_{= p - q} = \underbrace{g'(\xi)}_{< 1}(p-q), \text{ para } \xi \text{ entre } p \text{ y } q.$$

$\Rightarrow p - q < p - q$ absurdo que proviene de asumir que $p \neq q$. ∎

TEOREMA (Convergencia del método de pto fijo)

$\left.\begin{array}{l} g \in C[a,b] \\ g([a,b]) \subset [a,b] \\ \exists g'(x) \ \forall x \in (a,b) \\ 0 < |g'(x)| \leq K < 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \forall p_0 \in [a,b], \text{ la sucesión} \\ p_n = g(p_{n-1}),\ n \geq 1 \text{ cumple} \\ p_n \xrightarrow[n \to \infty]{} p, \text{ donde } g(p) = p \end{array}$

__Demostración:__

Por las hipótesis, sabemos que $\exists! p \in [a,b]$ tq $g(p) = p$.

Sea $e_n = |p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)| \underbrace{|p_{n-1} - p|}_{e_{n-1}} \leq K|p_{n-1} - p| \leq \cdots \leq K^n |p_0 - p|$

Tto del valor medio, ξ_n entre p_{n-1} y p

Luego

$e_n \leq K e_{n-1} \leq \cdots \leq K^n e_0$

Pero como $K < 1$, luego $K^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$\lim_{n \to \infty} e_n = \lim_{n \to \infty} K^n e_0 = 0 \Rightarrow p_n \xrightarrow[n \to \infty]{} p$ ∎

NOTA

HOJA N°

FECHA

TEOREMA (MÉTODO DE NEWTON)

Si f'' es continua en un entorno de una raíz r de f, y si $f'(r) \neq 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que si x_0 cumple $|x_0 - r| \leq \delta$ luego $|r - x_n| \leq \delta \ \forall x_n$, la sucesión converge a r y lo hace de manera cuadrática.

DEMOSTRACIÓN

Sea $e_n = r - x_n$, luego

$$e_{n+1} = r - x_{n+1} = r - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) + f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

Veamos ahora el desarrollo de Taylor de f centrado en x_n:

$f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(\xi_n)h^2}{2}$, con ξ_n entre x_n y $x_n + h$

Tomemos $h = e_n = r - x_n$, luego

$f(x_n + r - x_n) = f(r) = 0 \Rightarrow$

$0 = f(x_n) + f'(x_n)e_n + \frac{f''(\xi_n)e_n^2}{2}$ luego $f(x_n) + f'(x_n)e_n = -\frac{1}{2} f''(\xi_n) e_n^2$

Con este resultado y (1), obtenemos

$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2$, intentemos acotar esta expresión.

Para ello, definimos

$$c = c(\delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{|x-r|\leq\delta} f''(x)}{\min_{|x-r|\leq\delta} f'(x)}, \text{ para } \delta > 0$$

Luego, como f'' y f' son continuas sabemos que tienen sus máximos dentro de un intervalo cerrado, con ello podemos concluir que para todo par x y ξ que cumplan $|r - x| \leq \delta$ y $|r - \xi| \leq \delta$ para un δ dado, entonces $\exists c = c(\delta)$ tq

$\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x)} \leq c = c(\delta)$. También notemos que

$\delta \to 0 \Rightarrow c(\delta) \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}}_{\text{constante real}} \Rightarrow \underset{\delta \to 0}{\delta c(\delta) \longrightarrow 0}$. Elegimos δ suficientemente chico para que

$\rho = \delta c(\delta) < 1$

Ahora, si x_0 cumple $|r - x_0| \leq \delta$, luego ξ_0 está entre r y $x_0 \Rightarrow |r - \xi_0| \leq \delta$ y por def de $c(\delta)$ tenemos que $\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \leq c(\delta)$, veamos que x_1 cumple también $|r - x_1| \leq \delta$.

$|x_1 - r| = |e_1| = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}|e_0|^2 \leq c(\delta)|e_0|^2 \leq \overbrace{c(\delta)\delta}^{<1} |e_0| < |e_0| \leq \delta$. $\rightarrow$ indica convergencia cuadrática.

Notar que $|e_n| \leq \rho|e_{n-1}| \leq \rho^2|e_{n-2}| \leq \cdots \leq \rho^n|e_0|$ y $\therefore \lim_{n\to\infty} |e_n| = \lim_{n\to\infty} \rho^n|e_0| = 0$.

lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} |r - x_n| = \lim_{n\to\infty} |e_n| = 0$ y así $x_n \to r$ cuando $n \to \infty$. ∎

NOTA

COROLARIO

Si f tiene una raíz simple, el método de Newton tiene al menos orden 2.

Demo

Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $f(r)=0$ y $g(r)=r$

Sabemos que si las derivadas se anulan hasta el grado $r-1$ luego el método tendrá orden de convergencia (al menos) r.

Luego $g'(x) = 1 - \left(\frac{f'(x)^2}{f'(x)^2} - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right) = \frac{\overset{0}{f(x)}\, f''(x)}{\underbrace{f'(x)^2}_{\neq 0}} = 0$ en $x=r$

Así, la derivada se anula hasta el orden 1 y la convergencia será (al menos) cuadrática. ■

TEOREMA: Existencia y unicidad del polinomio interpolante.

Dados $x_0,\dots,x_n$ números reales distintos asociados a $y_0,\dots,y_n$.

$\Rightarrow \exists!\, p(x)$ tq $gr(p)\le n$ y $p(x_i)=y_i$, $i=0,\dots,n$

Demostración:

Existencia (inducción)

$n=0$

$gr(p_0)=0$ elegimos $p(x)\equiv y_0$

HI $gr(p_{k-1})=k-1$ y $p(x_i)=y_i$; $i=0,\dots,k-1$

Construimos

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

Notar que $p_k(x_i)=p_{k-1}(x_i)=y_i$ para $i=0,\dots,k-1$

Pedimos

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k)+c(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1}) = y_k$$ luego $c = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{\underbrace{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})}_{\neq 0}}$ → Bien definido

Por lo tanto queda demostrada la existencia del pol. interpolante.

Unicidad

Supongamos $p_n(x)$ y $q_n(x)$ dos polinomios interpolantes con $gr(p_n)$ y $gr(q_n)\le n$.

Sea $h(x)=p_n(x)-q_n(x)$, notar que $gr(h)\le n$ y

$h(x_i)=p_n(x_i)-q_n(x_i)=0$ para $i=0,\dots,n$ tiene $n+1$ raíces, el teo fundamental del álgebra implica que

$h(x)\equiv 0$ y por lo tanto $p_n(x)=q_n(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. ■

NOTA

		HOJA N°
		FECHA

TEOREMA: ERROR EN EL POLINOMIO INTERPOLANTE

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$ y p un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $n+1$ puntos distintos $x_0, \dots, x_n$. Para cada $x \in [a,b]$, $\exists\, \xi = \xi_x \in [a,b]$ tq

$$\boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

Demostración

Si $x = x_i \Rightarrow f(x_i) - p(x_i) = 0$ ✓

Suponemos $x \neq x_i$ y definimos $\nearrow$ x fijo.

$w(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$, $c = \dfrac{f(x)-p(x)}{w(x)}$ y $\varphi(t) = f(t) - p(t) - c\cdot w(t)$

Si $t = x_0, \dots, x_n \Rightarrow \varphi(t) = 0$

Si $t = x$ fijo de $c \Rightarrow \varphi(x) = 0$ también.

Luego $\varphi(t)$ tiene $n+2$ raíces en $(a,b) \Rightarrow \varphi'(t) \to n+1$ raíces

$\vdots$

$\varphi^{n+1}(t) \to 1$ raíz en (a,b)

Sea $\xi = \xi_x$ esa raíz de $\varphi^{n+1}(t)$ en (a,b)

Luego

$$0 = \varphi^{n+1}(\xi_x) = f^{n+1}(\xi_x) - \overbrace{p^{n+1}(\xi_x)}^{=0} - c\cdot w^{n+1}(\xi_x)$$

Notar que $w(t) = t^{n+1}$ + cosas de grado n luego $w^{(n+1)}(\xi_x) = (n+1)!$

Así,

$0 = f^{n+1}(\xi_x) - c\cdot(n+1)!$ reemplazamos c por su definición

$$\boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

Teorema

Dados $x_0,\dots,x_n$ las diferencias divididas satisfacen

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

Demostración

Definimos polinomios interpolantes de f: q en $x_1,\dots,x_n$

p_n en $x_0,\dots,x_n$

p_{n-1} en $x_0,\dots,x_{n-1}$

Afirmación a demostrar

$$p_n(x) = q(x) + \frac{(x-x_n)}{(x_n-x_0)}\left[q(x)-p_{n-1}(x)\right]$$

- Ambos lados son de grado $\leq n$ ✓
- Para x_0, $p_n(x_0)=f(x_0)$ y $q(x_0) + \overbrace{\frac{(x_0-x_n)}{(x_n-x_0)}}^{-1}\left[q(x_0)-\overset{f(x_0)}{\uparrow}p_{n-1}(x_0)\right] = f(x_0)$ ✓
- Para $x_1,\dots,x_{n-1}$

$$p_n(x_i)=f(x_i) \quad y \quad \overset{f(x_i)}{\uparrow}q(x_i) + \frac{(x_i-x_n)}{(x_n-x_0)}\underbrace{\left[\overset{f(x_i)}{\uparrow}q(x_i)-\overset{f(x_i)}{\uparrow}p_{n-1}(x_i)\right]}_{=0} = q(x_i)=f(x_i) \checkmark$$

- Para x_n

$$p_n(x_n)=f(x_n) \qquad q(x_n)+\frac{\overbrace{(x_n-x_n)}^{=0}}{(x_n-x_0)}\left[q(x_n)-p_{n-1}(x_n)\right] = q(x_n)=f(x_n) \checkmark$$

- Luego la afirmación es cierta y por lo tanto los coeficientes de las potencias de x deben coincidir, especificamente el coeficiente de x^n,

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{\overset{\text{coef en } q}{\uparrow}f[x_1,\dots,x_n]-\overset{\text{coef en } p_{n-1}}{\uparrow}f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

■

Props de las diferencias div.

TEO: $x_0,\dots,x_n \to z_0,\dots,z_n$ cualquier orden $\Rightarrow f[x_0,\dots,x_n]=f[z_0,\dots,z_n]$

Dem: unicidad del pol interpolante $\Rightarrow$ mismos coeficientes.

TEO: Si p con $gr(p)\leq n$ interpola a f en $x_0,\dots,x_n$ y $t\neq x_i \ \forall i$, luego

$$f(t)-p(t) = f[x_0,\dots,x_n,t]\prod_{j=0}^{n}(t-x_j)$$

Dem: Sea q interpolante de f en $x_0,\dots,x_n,t$, por la forma de Newton sabemos que

$q(x) = p(x)+f[x_0,\dots,x_n,t]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, como $q(t)=f(t)$

$\Rightarrow$ $f(t)=p(t)+f[x_0,\dots,x_n,t]\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$ luego $\boxed{f(t)-p(t)=f[x_0,\dots,x_n,t]\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)}$

■

NOTA

TEOREMA:

Si $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ ES UN CONJUNTO DE POLINOMIOS LI PARA CUALQUIER INTERVALO $[a,b]$ EN EL ESPACIO DE POLINOMIOS DE GRADO $\leq n$, ENTONCES $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ ES BASE DEL ESPACIO. (TODO POLINOMIO SE ESCRIBE COMO COMB. ÚNICA DE $\phi_0, \dots, \phi_n$)

TEOREMA: Si $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ ES UN CONJUNTO ORTOGONAL DE FUNCIONES EN $[a,b]$ CON PESO w, ENTONCES LA APROXIMACIÓN POR CUADRADOS MÍNIMOS, CON PESO w, A UNA FUNCIÓN f, ESTÁ DADA POR

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x), \quad \text{DONDE } a_k = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \phi_k(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, \phi_k(x)^2\, dx} = \frac{1}{\alpha_k} \int_a^b w(x) f(x) \phi_k(x)\, dx$$

POLINOMIOS DE LEGENDRE

$$\phi_0 = 1 \quad \phi_1 = x \quad \phi_2 = x^2 - \frac{1}{3} \quad \phi_3 = x^3 - \frac{3}{5}x \qquad \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\right\}$$

TEOREMA: $f \in C[a,b]$, g INTEGRABLE EN $[a,b]$ Y g NO CAMBIA DE SIGNO EN $[a,b]$. ENTONCES

$$\exists c \in [a,b] \text{ tq } \int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

HOJA N°

FECHA

TEOREMA

Si $\phi_j(x)$ es un polinomio en X de grado igual a j para $j=0,\dots,n$, entonces el conjunto

$\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ es LI en cualquier intervalo $[a,b]$

Demostración:

Sean $c_0,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ tq

$$P(x) = c_0\phi_0 + \dots + c_n\phi_n = \sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j = 0 \quad \text{para cualquier } x \text{ en } [a,b]$$

Como $p(x)=0\ \forall x\in[a,b]$, entonces los coeficientes de todas las potencias deben ser iguales a 0. Sabemos que el coeficiente de x^n es únicamente c_n, y por lo tanto $c_n=0$. Por lo tanto nos queda $\sum_{j=0}^{n-1} c_j\phi_j(x)=0$. Repitiendo el proceso se obtiene $c_{n-1}=c_{n-2}=\dots=c_0=0$

y por lo tanto el conjunto $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ es LI. ■

LEMA

Si $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en $I = [a,b]$ con respecto a una función de peso w definida en I, entonces son LI.

Demostración:

Planteamos c_i tq

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i = 0 \quad \forall x \in I$$

Luego

$$0 = \int_a^b 0\cdot\phi_k(x)w(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i\,\phi_k(x)\,w(x)dx = \int_a^b \phi_k^2(x)\cdot c_k\,w(x)dx = \alpha_k c_k \quad \forall k=0,\dots,n$$

$0=\alpha_k c_k$ pero $\alpha_k>0\ \forall k$ y por lo tanto $c_k=0\ \forall k=0,\dots,n$. ■

Lema: Sea $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ un conjunto de polinomios ortogonales con peso $w(x)\in[a,b]$ y $gr(\phi_k)=k\ \forall k$, y $Q_k(x)$ un polinomio de grado $k<n$, entonces

$$\int_a^b w(x)\,Q_k(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0$$

Demostración

Sabemos que todo subconjunto de un conjunto LI es LI, específicamente, $\{\phi_0,\dots,\phi_{n-1}\}$ es LI $\therefore Q_k(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k\phi_k$ para algunos $c_k\in\mathbb{R}$.

Luego
$$\int_a^b w(x)\,Q_k\,\phi_n\,dx = \int_a^b w(x)\sum_{k=0}^{n-1} c_k\phi_k\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\int_a^b w(x)\,\phi_k(x)\,\phi_n(x) = \boxed{0}$$ ■

NOTA

TEOREMA: El conjunto de funciones polinomiales que se define a continuación, como $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$, es un conjunto ortogonal en $[a,b]$ con respecto a una función de peso w.

Para cada $x \in [a,b]$,

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x - B_1, \quad B_1 = \frac{\int_a^b x \cdot w(x)\phi_0^2(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\phi_0(x)^2\,dx}$$

Para $k \geq 2$,

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)$$

$$B_k = \frac{\int_a^b x \cdot w(x)\phi_{k-1}^2(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\phi_{k-1}^2(x)\,dx}$$

$$C_k = \frac{\int_a^b x \cdot w(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\phi_{k-2}^2(x)\,dx}$$

Demostración por inducción en k

$$k=1 \Rightarrow \int_a^b w(x)\phi_1\phi_0\,dx = \int_a^b x w(x)\phi_0(x)\,dx - B_1\int_a^b w(x)\phi_0(x)\,dx = \int_a^b x w(x)\phi_0(x)\,dx - \frac{\int_a^b x w(x)\phi_0^2(x)\,dx \,^{*} \int_a^b w(x)\phi_0(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\phi_0^2(x)\,dx}$$

y como $\phi_0 = \phi_0^2$ entonces $\int_a^b w(x)\phi_1\phi_0\,dx = 0$

HI el conjunto $\{\phi_0, \dots, \phi_{k-1}\}$ es ortogonal. Probemos que ϕ_k sea ortogonal a todos ellos.

Veamos,

$$\int_a^b w(x)\phi_{k-1}(x)\phi_k(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b x\,w(x)\phi_{k-1}^2(x)\,dx - B_k\int_a^b w(x)\phi_{k-1}^2\,dx}_{=0 \text{ por def } B_k} \underbrace{- C_k\int_a^b w(x)\phi_{k-1}\phi_{k-2}\,dx}_{=0} = 0 \checkmark$$

Ahora

$$\int_a^b w(x)\phi_{k-2}\phi_k\,dx = \underset{①}{\int_a^b x\,w(x)\phi_{k-1}\phi_{k-2}\,dx} - B_k\underset{②}{\int_a^b w(x)\phi_{k-1}\phi_{k-2}\,dx} - C_k\underset{③}{\int_a^b w(x)\phi_{k-2}^2\,dx} = 0$$

① − ③ = 0 por def C_k
② = 0 por HI.

Ahora para $0 \leq i \leq k-3$, utilizando $k = i+1$ en la definición de ϕ_k original, obtenemos

$$\phi_{i+1}(x) = (x - B_{i+1})\phi_i(x) - C_{i+1}\phi_{i-1}(x) \Rightarrow x\phi_i(x) = \phi_{i+1}(x) + B_{i+1}\phi_i(x) + C_{i+1}\phi_{i-1}(x)^{*} \longrightarrow \bigstar$$

Veamos

$$\int_a^b w(x)\phi_i\phi_k\,dx = \int_a^b x\,w(x)\phi_i\phi_{k-1}\,dx \underbrace{- B_k\int_a^b w(x)\phi_i\phi_{k-1}\,dx}_{=0 \text{ por HI}} \underbrace{- C_k\int_a^b w(x)\phi_i\phi_{k-2}\,dx}_{=0 \text{ por HI}}$$

$$= \int_a^b x\,w(x)\phi_i\phi_{k-1}\,dx \underset{\text{def } x\phi_i}{=} \underbrace{\int_a^b w(x)\phi_{i+1}\phi_{k-1}\,dx}_{=0} + \underbrace{B_{i+1}\int_a^b w(x)\phi_i\phi_{k-1}\,dx}_{=0} + \underbrace{C_k\int_a^b w(x)\phi_{i-1}(x)\phi_{k-1}(x)\,dx}_{=0 \text{ por HI}}$$

pues ϕ_{k-1} es ortogonal a ϕ_i, ϕ_{i+1} y ϕ_{i-1} para $i = 1, \dots, k-3$

* Notar que $\phi_{i-1} = \phi_0$ si $i = 0$

pues $\boxed{i = k-1}$.

■

NOTA

HOJA N°

FECHA

TEOREMA: REGLA DE SIMPSON COMPUESTA

SEA $f \in C^4[a,b]$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $h = \frac{b-a}{2n}$ Y $x_j = a + jh$ $j = 0, \dots, 2n$. $\rightarrow$ PARA n SUBINTERVALOS.

ENTONCES $\exists \xi \in (a,b)$ TAL QUE LA REGLA COMPUESTA DE SIMPSON ESTÁ DADA POR

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6n}\left\{f(a) + 2\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + f(b)\right\} - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

TEOREMA: REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTA

SEA $f \in C^2[a,b]$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, n$.

ENTONCES EXISTE $\xi \in (a,b)$ TQ LA REGLA COMPUESTA DE TRAPECIO PARA n SUBINTERVALOS ESTÁ DADA POR

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left\{f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right\} - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

DEMOSTRACIÓN PARA AMBOS

- SUMO LA REGLA SIMPLE Y LA REDISTRIBUYO.
- EN PRINCIPIO, EL ERROR ESTÁ DADO POR $\sum_{i=0}^{n} E_n$

$$E_S = f^{(4)}(\xi_i)\,\frac{((b-a)/2)^5}{-90}$$

$$E_T = f''(\xi_i)\,\frac{(b-a)^3}{-12}$$

LUEGO

$$\min_{x \in (a,b)} f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(\xi_i) \leq \max_{x \in (a,b)} f^{(4)}(x)$$

$$n \times \min_{x \in (a,b)} f^{(4)}(x) \leq \sum f^{(4)}(\xi_i) \leq n \cdot \max_{x \in (a,b)} f^{(4)}(x)$$

$$\min f^{(4)}(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f^{(4)}(\xi_i) \leq \max f^{(4)}(x)$$

TEO VAL. MEDIO $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ TQ $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f^{(4)}(\xi_i) = f^{(4)}(\xi) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} f^{(4)}(\xi_i) = n \times f^{(4)}(\xi)$

LUEGO

$$\sum_{i=0}^{n} f^{(4)}(\xi_i) \cdot \frac{((b-a)/2)^5}{-90} = \frac{n\overbrace{((b-a)/2n)^5}^{h^5}}{-90} f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)}{-180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

TEOREMA: Sea $f\in C^2[a,b]$, $n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$, $h=\frac{b-a}{n+2}$, $x_j=a+(j+1)h$, $j=-1,0,\dots,n+1$.

Entonces $\exists\, \xi\in(a,b)$ tq la regla compuesta del pto medio para $n+2$ subintervalos está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\,\frac{(b-a)}{n+2}\cdot\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{(b-a)}{6}h^2 f''(\xi)$$

TEOREMA Sea $f\in C^1[a,b]$, $n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$, $h=\frac{b-a}{n}$, $x_j=a+jh$, $j=0,\dots,n$, ent $\exists\, \xi\in(a,b)$ tq la regla compuesta del rectángulo está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) + \frac{(b-a)}{2}h f'(x)$$

TEOREMA:

Sea w una función de peso definida en $[a,b]$ y $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ un conjunto de polinomios w-ortogonales en $[a,b]$ con $gr(\phi_k)=k$ $\forall k$. Si $x_0,\dots,x_{k-1}$ son raíces de ϕ_k entonces son reales, simples y pertenecen al intervalo abierto (a,b).

TEOREMA

Sean $A_k=\{A(1:k,1:k)\}$ las submatrices de A formadas por las primeras k filas y k columnas para $k=1,\dots,n$. Si A_k es no singular $\forall k$ entonces se puede realizar eliminación gaussiana y $Ax=b$ tiene sol. única.

TEOREMA: Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tq $A_k=A(1:k,1:k)$ para $k=1,\dots,n-1$ son no singulares. Entonces existen únicas matrices L y $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tal que L es triangular inferior con 1's en la diagonal y U es triangular superior, tal que $A=LU$ y $\det(A)=\det(U)=u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.

Demostración: inducción en la dimensión de la matriz.

$n=1 \Rightarrow A=LU$, $L=(1)$ $U=(a_{11})$ y $\det(A)=\det(U)=a_{11}$ ✓

Ahora supongamos que la descomposición LU es única hasta $n=k-1$. ($A_{k-1}=L_{k-1}U_{k-1}\in\mathbb{R}^{k-1\times k-1}$). Queremos ver que existen L_k y $U_k\in\mathbb{R}^{k\times k}$ tq $A_k=L_kU_k$. Realizamos una partición,

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & b^T \\ \hline d & A_{k-1}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots 0 \\ \hline l & \tilde{L}_{k-1}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} u_{11} & u^T \\ \hline \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \tilde{U}_{k-1}\end{array}\right]$$

y el producto de particiones nos indica

$a_{11}=1\times u_{11}$ ✓

$u^T=b^T \Rightarrow u=b$ ✓

$l\,u_{11}=d \Rightarrow l=\frac{d}{u_{11}}$ ✓

$$l u^T + \tilde{L}_{k-1}\tilde{U}_{k-1} = A_{k-1} \Rightarrow \tilde{L}_{k-1}\tilde{U}_{k-1} = \overbrace{A_{k-1}-l u^T}^{\exists\,\mathbb{R}^{k-1\times k-1}} \Rightarrow \tilde{L}_{k-1} \text{ y } \tilde{U}_{k-1} \text{ existen y son únicas.}$$

La unicidad se demuestra pues si existen entonces tienen esta forma.

$\det(A)=\det(L)\det(U)=\det(U)=u_{11}\cdots u_{nn}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

TEOREMA

SEA w UNA FUNCIÓN DE PESO POSITIVA DEFINIDA EN $[a,b]$ Y q UN POLINOMIO DE GRADO EXACTAMENTE $n+1$ ORTOGONAL A TODO POLINOMIO p CON $gr(p) \leq n$.

SI $x_0, \ldots, x_n$ SON LAS RAÍCES DE q, ENTONCES LA FÓRMULA

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \quad , \text{ CON } \quad a_i = \int_a^b w(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

SERÁ EXACTA PARA TODO POLINOMIO f DE GRADO $\leq 2n+1$.

DEMOSTRACIÓN.

· PRIMERO VEMOS QUE ES EXACTA PARA GRADO $\leq n$. SEA f UN POLINOMIO DE GRADO $\leq n$, ENTONCES f ES EL ÚNICO POLINOMIO QUE INTERPOLA SUS PROPIOS $n+1$ NODOS Y SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \text{ , LUEGO } \int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) w(x) dx}_{a_i} = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

POR LO TANTO SABEMOS QUE ES EXACTA PARA TODO POLINOMIO DE GRADO $\leq n$.

· SUPONGAMOS AHORA QUE $n+1 \leq gr(f) \leq 2n+1$. ENTONCES PODEMOS DIVIDIR A f POR EL POLINOMIO q Y SABEMOS QUE EXISTEN p (COCIENTE) Y r (RESTO) TAL QUE

(1) $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$, CON $gr(p) \leq n$ Ó $r(x) \equiv 0$

LUEGO

(2) $\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0$ PUES q ES ORTOGONAL A P DE GRADO $\leq n$.

ADEMÁS, COMO x_i ES RAÍZ DE q PARA $i=0, \ldots, n$

(3) $f(x_i) = p(x_i)q(x_i) + r(x_i) = r(x_i)$ PARA $i=0, \ldots, n$

LUEGO COMO $gr(r) \leq n$

4) $\int_a^b r(x)w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

FINALMENTE POR (1), (2), (3) Y (4), SE TIENE QUE

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b (p(x)q(x)+r(x))w(x)dx = \overbrace{\int_a^b p(x)q(x)w(x)dx}^{=0} + \int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Y POR LO TANTO LA REGLA ES EXACTA PARA TODO POLINOMIO f DE GRADO $\leq 2n+1$ ∎

Prop: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\|\cdot\|$ una norma ~~matricial~~ vectorial que induce una norma matricial, entonces

1. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $\exists \tilde{x}$ con $\|\tilde{x}\| = 1$ tq $\|A\tilde{x}\| = \|A\|$

Demostración:

1. Si $x = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \leq \|A\|\|0\| = 0$ ✓

Si $x \neq 0 \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \forall x \in \mathbb{R}^n \therefore \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ✓

2.

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = \sup_{x\neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{y:\|y\|=1} \|Ay\|,$$ como $S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\| = 1\}$ es cerrado y compacto, la función $x \to \|Ax\|$ alcanza sus extremos, en particular, $\exists \tilde{x}$ tq $\|\tilde{x}\| = 1$ y por lo tanto

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\tilde{x}\| \blacksquare$$

Teorema: Sea $b \in \mathbb{R}^n$ y $A = M - N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con A y M no singulares. Si $\|M^{-1}N\| < 1$ para alguna norma matricial inducida entonces la sucesión $x_{k+1} = M^{-1}N x_k + M^{-1}b$ converge a la solución de $Ax = b$ para cualquier x_0.

Demostración: $x^* = M^{-1}N x^* + M^{-1}b$
y $x^{k+1} = M^{-1}N x^k + M^{-1}b$ $\Rightarrow x^{k+1} - x^* = M^{-1}N(x^k - x^*)$ para $k \geq 0$

con alguna norma matricial inducida,

$$\|x^{k+1} - x^*\| = \|M^{-1}N(x^k - x^*)\| \leq \|M^{-1}N\|\|x^k - x^*\| \quad \text{para } k \geq 0$$

Repitiendo este paso,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|M^{-1}N\|^{k+1}\|x^0 - x^*\| \quad \text{y por lo tanto}$$

$$0 \leq \underbrace{\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^*\|}_{=0.} \leq \lim_{k\to\infty} \|M^{-1}N\|^{k+1}\|x^0 - x^*\| = 0 \quad \text{, pues } \|M^{-1}N\| < 1 \blacksquare$$

Teorema: Si A es DD, Gauss-Seidel y Jacobi convergen a x_* para cualquier x_0.

Demostración (Jacobi)

$M = D$ es no singular $\Rightarrow a_{ii} \neq 0 \ \forall i$ luego

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21}/a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$ luego $\|M^{-1}N\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$ pues A es DD.

Como existe una norma matricial inducida tq $\|M^{-1}N\| < 1$ entonces el método converge $\forall x^0$ inicial.

Teorema:

Para cada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\rho(A) = \inf\{\|A\|\}$ sobre todas las normas matriciales inducidas.

Teorema

Una condición necesaria y suficiente p/q el método $x_{k+1} = M^{-1}N x_k + M^{-1}b$, para $k \geq 0$ converja a la única solución de $Ax = b$ para cualquier x^0 inicial es que $\rho(M^{-1}N) < 1$.