# Álgebra - Primer parcial.

Fecha: 22/09/2022


Tomás Achaval Berrero - LCC

45085746 - com 4


**Ejercicio 1:**

Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tq el sistema tiene al menos una solución. Para cada valor de $a$, encontrar todas las soluciones.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3y - z = a+1 \\ 8x + 4y + 12z = a \end{cases}$$

• Planteo mi sistema como una matriz ampliada

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & a+1 \\ 8 & 4 & 12 & a \end{array}\right) \end{array}$$

• Ahora simplifico y resuelvo mi sistema mediante operaciones elementales de matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & a+1 \\ 8 & 4 & 12 & a \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 8f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & a+1 \\ 0 & \cancel{49}\ 12 & -4 & a-16 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 4f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & -3a-20 \end{array}\right)$$

Cal. aux: $a - 16 - 4(a+1) = a - 16 - 4a - 4 = \boxed{-3a-20} = -3a-20$

• En la fila N°3, podemos ver que para que el sistema sea compatible, entonces $0 = -3a - 20 \Rightarrow 20 = -3a \Rightarrow \boxed{a = \frac{-20}{3}}$. Luego reemplazo $a$ por $\frac{-20}{3}$ en la matriz y continúo resolviendo.

Aux: $6 - \frac{17}{3} = \frac{18-17}{3} = \frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & \frac{-20}{3}+1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3 \cdot 20}{3} - 20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{resuelvo } f_3 \text{ y } f_2]{3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 3 & -1 & -17/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \cdot \frac{1}{3},\ f_2 \cdot \frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 1/9 \\ 0 & 1 & -1/3 & -17/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

• De la última matriz, tenemos que:

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}z = \frac{1}{9} \\ y - \frac{1}{3}z = -\frac{17}{9} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{17}{9} + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

• Luego el conjunto de soluciones para $a = \frac{-20}{3}$ está dado por

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $x = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}z$ y $y = \frac{-17}{9} + \frac{1}{3}z\}$, o equivalentemente

$$\boxed{\text{Soluciones} = \left\{ \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3}z, \frac{-17}{9} + \frac{1}{3}z, z\right) \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{R} \right\}}$$

Nota

Ejercicio 2:

2. Calcular la matriz inversa de la siguiente matriz $A \in \mathbb{Z}_{13}^{3\times3}$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

• Para hallar la inversa de A, planteo la matriz ampliada de la forma $(A|Id)$ y mediante operaciones elementales la llevaré a otra de la forma $(Id|P)$, donde P será el producto de matrices elementales que representa a $A^{-1}$. (Se, por teorema, que $A \sim Id \Leftrightarrow A$ es invertible)

$-2 = 11 \in \mathbb{Z}_{13}$, $-1 = 12 \in \mathbb{Z}_{13}$

$$(A|Id)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F_3+4F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 11 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 7 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[F_3+3F_2]{F_1+5F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+11F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 6 & 12 & 11\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[F_2\cdot 9,\ F_3\cdot 2]{F_1\cdot 7} (Id|P)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 12\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 & 2\end{array}\right)$$

Aux: $12+4(11)=12+44=56$ (56 = 13·4 + 4)

$45 = 13\cdot3+6$, $38 = 13\cdot2+12$

$7\cdot 11 = 77$

$1+77=78=0 \in \mathbb{Z}_{13}$ $(6\cdot13)=78$

$12\cdot7=84=13\cdot6+6$

$11\cdot7=77=13\cdot5+12$

• Por lo tanto $P=$

$$\boxed{\begin{pmatrix}3 & 6 & 12\\ 0 & 9 & 0\\ 8 & 6 & 2\end{pmatrix}=A^{-1}} \in \mathbb{Z}_{13}^{3\times3}$$

• Ejercicio 3:

a) Definir conjunto linealmente independiente.

Def: Sea V un F-espacio vectorial, $W \subseteq V$ un subconjunto. Decimos que W es linealmente independiente si: $\forall v_i \in W, a_i \in F$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i \quad (W=\{v_1 \dots v_n\})$$

Esto significa que la única combinación lineal de los elementos de W que es igual a 0, sea aquella que proviene de utilizar todos los escalares $a_i \in F$ nulos. (siendo n la cantidad de vectores en W)

Tomás Aguirre Vallejo

b) Decidir si el siguiente subconjunto es LI en $\mathbb{C}^3$

$$\{(i,1,i),(0,2,i+1),(i,2i-1,i-2)\}$$

Cuidado!

• Veamos qué sucede si planteo una combinación lineal $=0$ con escalares $a,b,c\in\mathbb{C}$.

$$a(i,1,i)+b(0,2,i+1)+c(i,2i-1,i-2)=(0,0,0)$$

$$=(ai,a,ai)+(0,2b,bi+b)+(ci,c2i-c,ci-2c)=(0,0,0)$$

$$=(ai+ci,\ a+2b+c2i-c,\ ai+bi+b+ci-2c)=(0,0,0)$$

Luego

• Sabemos que $a\in\mathbb{C}$ es $=0 \Leftrightarrow Re(a)=0$ y $Im(a)=0$

$$\begin{cases} ai+ci=0 \\ a+2b+c2i-c=0 \\ ai+bi+b+ci-2c=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (a+c)i=0 \Rightarrow a+c=0 \Rightarrow \boxed{a=-c} \\ (a+2b-c)+(2c)i=0 \Rightarrow (a+2b+c)=0 \Rightarrow (2a+2b)=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \boxed{a=-b} \\ (b-2c)+(a+b+c)i=0 \Rightarrow 2c=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

Recordá! te conv. hacer la matriz asoc. y aplicar op. element.

• Notemos que para dar la combinación lineal de $\mathbf{0}$, entonces $\boxed{c=0=a=b}$ todos los escalares deben ser $\mathbf{0}$. Por lo tanto el conjunto

$\{(i,1,i),(0,2,i+1),(i,2i-1,i-2)\}$ es linealmente independiente. } es LD.

Ejercicio 4: Determinar V o F.

a) $\mathbb{Z}_{20}$ es un cuerpo. Sabemos que si $\mathbb{Z}_{20}$ es un cuerpo entonces $\forall a,b\in\mathbb{Z}_{20}$, $a\cdot 0=0$ pues tenemos que $0=0 \Leftrightarrow 0+0=0 \Leftrightarrow a(0+0)=0 \Leftrightarrow a0+a0=a0 \Leftrightarrow -a0+a0+a0=a0-a0 \Leftrightarrow \boxed{a\cdot 0=0}$ y también sabemos que si $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $b=0$ $(\Rightarrow)$ pues si $a=0 \Rightarrow 0.b=b.0=0$ ✓

$(\Leftarrow)$ es directa por la prop. anterior.

si $a\neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$ $\therefore$ $ab=0 \Leftrightarrow a^{-1}ab=0a^{-1} \Leftrightarrow 1b=0 \Leftrightarrow \boxed{b=0}$

• Utilizando las proposiciones demostradas, en $\mathbb{Z}_{20}$ tenemos por ejemplo:

$a=4$, $b=5$ donde $a\cdot b=4\cdot 5=20=0$ y $4\neq 0\neq 5$

$\Rightarrow$ Absurdo, de asumir que $\mathbb{Z}_{20}$ es un cuerpo.

$\therefore \mathbb{Z}_{20}$ no es un cuerpo, la afirmación es falsa

NOTA

b) La intersección de dos subespacios es subespacio. Asumo que la intersección no es vacía. (De otra forma no tendría sentido)

- Sean $W_1$ y $W_2$ dos subespacios.
- Sabemos que tanto la suma de vectores como el producto por escalares son cerrados.

Es decir que $v+cw \in W_i$ $\forall v,w \in W_i$

- Tenemos que $W_1 \cap W_2$ son los elementos que están en $W_1$ y $W_2$ a la vez.
- También conocemos el siguiente teorema:

Teo: Sea $V$ un F-espacio vectorial. $W \subseteq V$ un subconjunto tq $W \neq \emptyset$.

Entonces $W$ es subespacio $\Leftrightarrow v+cw \in W$, $c \in F, v,w \in W$.

- Utilizando el teorema, veamos que ocurre con $v+cw$ en $W_1 \cap W_2$. ($c \in F$, $v,w \in W_1$ y $v,w \in W_2$)

Tenemos que

$\forall c \in F$, $v+cw \in W_1$, $v,w \in W_1 \cap W_2$, pues $W_1$ es un subespacio cerrado.

A la vez, $v+cw \in W_2$, $v,w \in W_1 \cap W_2$, pues $W_2$ también es un subespacio cerrado.

$\therefore v+cw \in W_1$ y $v+cw \in W_2 \Rightarrow \underline{v+cw \in W_1 \cap W_2}$

$\therefore W_1 \cap W_2$ es un subespacio (tanto la suma como el prod. por escalares son cerrados). VERDADERO

c) $A$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ inversibles $\Rightarrow A+B$ inversible. FALSO

Contraejemplo: Sabiendo que son equivalentes: i) $A$ es inversible, ii) $A \sim I_n$ iii) $\exists P$ tq $AP = I_n$ (P prod. de mat. elem)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \sim I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B \sim I_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{"}\mathbf{0}\text{"}}$$

- Notemos que $A+B$ es igual a una matriz nula la cual nunca será inversible pues $\mathbf{0} \cdot P = \mathbf{0}$ $\forall P \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$\Rightarrow \nexists P$ tq $\mathbf{0} P = I_n$

$\Rightarrow \mathbf{0}$ no es inversible

La afirmación es falsa.

- Notar que $A$ y $B$ son inversibles pues ambas son $\sim I_n$.