ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LC) - CÁLCULO I (LMA)
PARCIAL 3

15 de junio de 2022

Nombres y Apellido: Tomás Achával	Comisión: 3

1	2	3	4	TOTAL	NOTA
2	2	3	3	10	10 (diez)

- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- No está permitido el uso de calculadoras.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.
- **Ejercicio 1** *(2 Pts.)*
  (a) Calcular la derivada de las siguientes funciones:
  i) $h(x) = \cos(e^{\sqrt{3x}})$ ii) $g(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
  (b) Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \sqrt[5]{x+2}$ en el punto $(30, 2)$.
  (c) Estimar el valor de $\sqrt[5]{30}$ usando la aproximación lineal de f calculada en el inciso (b).
- **Ejercicio 2** *(2 Pts.)* Calcular los siguientes límites:
  (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\cos(x+\frac{\pi}{2})}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x x^2$
- **Ejercicio 3** *(3 Pts.)* Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$ definida en el intervalo $[-2, 4]$.
  a) Encontrar los puntos críticos y determinar los extremos absolutos de la función f.
  b) Determinar los intervalos donde la función f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.
- **Ejercicio 4** *(3 Pts.)* Graficar una función que cumpla con **todas** las siguientes características:
  a) La función está definida para todos los reales.
  b) Tiene una asíntota horizontal en $y = -2$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  c) Tiene sólo 1 discontinuidad: de salto en $x = 0$.
  d) Es continua por derecha en $x = 0$ y $f(0) = 3$. Además, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
  e) f no tiene raíces, $f(x) < 0$ para todo $x < 0$ y $f(x) > 0$ para $x \geq 0$.
  f) $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen únicamente para $x = 0$.
  g) $f'(x) = 0$ para $x = -2$ y $x = 3$.
  h) $f'(x) > 0$ exclusivamente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(3, +\infty)$.
  i) $f''(x) < 0$ exclusivamente en $(-\infty, -4)$.
  j) Tiene 1 punto de inflexión.
  k) En función de los datos brindados, especificar cuáles son las asíntotas de la función, cuáles son los máximos, mínimos, los puntos críticos y puntos de inflexión, en qué intervalos la función crece y decrece, y en cuáles es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

HOJA 1 ANÁLISIS MATEMÁTICO I - PARCIAL 3

TOMÁS ACHÁVAL - com 3
45083746

EJERCICIO 1:

a) CALCULAR DERIVADAS

i) $h(x) = \cos(e^{\sqrt{3x}})$

• $h(x)$ ES LA COMPOSICIÓN DE LAS FUNCIONES $\cos(x)$ CON $e^{\sqrt{3x}}$

USO REGLA DE LA CADENA.

$h'(x) = \cos'(e^{\sqrt{3x}}) . (e^{\sqrt{3x}})'$ Y SABEMOS QUE $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

• A LA VEZ, $e^{\sqrt{3x}}$ ES LA COMPOSICIÓN DE e^x CON $\sqrt{3x}$, VUELVO A USAR CADENA:

$h'(x) = -\operatorname{sen}(e^{\sqrt{3x}}) . (e^{\sqrt{3x}})' (\sqrt{3x})'$

• SABEMOS QUE $e^{x'} = e^x$ Y COMO CÁLCULO AUX: $(\sqrt{3x})' = \sqrt{3x}' . 3 \overset{\text{CADENA}}{=} \frac{1}{2\sqrt{3x}} . 3$ PUES $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

POR LO TANTO $\boxed{h'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(e^{\sqrt{3x}}) . (e^{\sqrt{3x}}) . 3}{2\sqrt{3x}}}$

ii) $g(x) = \frac{\arctan(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ UTILIZO LA DERIVADA DE UN COCIENTE SABIENDO QUE $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Y $\sqrt{x^2+1}'$, POR CADENA, ES $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \underbrace{(x^2+1)'}_{2x = (x^2)' + (1)'}$ POR $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

• SABEMOS QUE $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

• POR LO TANTO, Y POR CALCULOS AUX.

$$g'(x) = \left(\frac{\arctan(x)}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\frac{1}{x^2+1} . \sqrt{x^2+1} - \arctan(x) . \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$\boxed{= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} - \frac{x\arctan(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}$$

NOTA

b) $f(x)=\sqrt[5]{x+2}$

• Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(30,2)$

• Sabemos que la ecuación tendrá la forma:

$$T(x)=f'(30)(x-30)+f(30)$$

• Calculo $f'(x)=\left(\sqrt[5]{x+2}\right)'=\left((x+2)^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}(x+2)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}(x+2)^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{(x+2)^4}}$

Por lo tanto

$$T(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{(30+2)^4}}(x-30)+2 \quad \text{pues } f(30)=2$$

Aux: $\sqrt[5]{32^4}=\sqrt[5]{32}^4=2^4=16$

$$=\frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}(x-30)+2=\underset{\text{Aux}}{\underset{\Downarrow}{}}\frac{1}{5.16}(x-30)+2$$

$$\boxed{T(x)=\frac{(x-30)}{80}+2}$$

c) Estimar $\sqrt[5]{30}$

• Sabemos que $f(x)\approx f'(30)(x-30)+f(30)$ para valores de x cercanos a 30.

• $\sqrt[5]{30}=f(28)=\sqrt[5]{28+2}$

• $f(28)\approx f'(30)(28-30)+f(30)=T(28)$

• $f(28)\approx\frac{(28-30)}{80}+2 \Rightarrow f(28)\approx\frac{-2}{80}+2$

$$f(28)\approx-\frac{1}{40}+2=-\frac{1+80}{40}=\boxed{\frac{79}{40}}$$

NOTA

2-TOMÁS ACHÁVAL Ⓐ.

UTILIZARÉ LA HOJA AL REVÉS.

EJERCICIO 2: CALCULAR LÍMITES

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\cos(x+\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+\operatorname{sen}(x)))'}{(\cos(x+\frac{\pi}{2}))'}$ ⭐

INDET. $\frac{0}{0}$
USO L'HOPITAL

AUX: $(\ln(1+\operatorname{sen}(x)))'$ POR CADENA Y USANDO $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

$= \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} \cdot (1+\operatorname{sen}(x))'$

$= \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} \cdot ((1)' + \operatorname{sen}(x)')$; $\operatorname{sen}(x)' = \cos(x)$

$= \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$

Y $\cos(x+\frac{\pi}{2})' = -\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) \cdot 1$; $1 = (x+\frac{\pi}{2})'$

POR AUX:

$⭐ = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}}{-\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{\frac{0}{1+0}}{-1} \boxed{= 0}$

1

b) $\lim_{x\to -\infty} e^x \cdot x^2$ → PRODUCTO INDETERMINADO $0 \cdot \infty$
→ CONVIERTO EL PRODUCTO EN COCIENTE.

AUX: $(e^{-x})'$ POR CADENA ES $(e^{-x})'(-x)' = -e^{-x}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{-1 \cdot -e^{-x}}$

L'HOPITAL $\frac{\infty}{\infty}$; L'HOPITAL $\frac{-\infty}{-\infty}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} \boxed{= 0}$

PUES $\frac{1}{e^x}$, CON x NEGATIVO (TIENDE A $-\infty$)
ES $= \frac{1}{\frac{1}{e^{-x}}} = e^{-x}$, DONDE $-x$ ES POSITIVO.

AUX2: $(-e^{-x})' = (-1)(e^{-x})'$
$= -(-e^{-x}) = e^{-x}$

EJERCICIO 3: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ EN $[-2,4]$

• PUNTOS CRÍTICOS Y EXTREMOS ABSOLUTOS? ANALIZO $f'(x)$, PUES $f'(x)=0$ Y $\nexists f'(x)$ SERÁN PUNTOS CRÍTICOS

• $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \boxed{= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

• NOTEMOS QUE $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ PUES $1 \neq 0$

• TAMBIÉN VEAMOS QUE

$Dom(f') = \{x \in \mathbb{R} : 3\sqrt[3]{x^2} \neq 0\} \iff \sqrt[3]{x^2} \neq 0 \iff x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$

• POR LO TANTO $x=0$ ES UN PUNTO CRÍTICO, PUES LA DERIVADA NO ESTÁ DEFINIDA EN ÉL.

• Para determinar los extremos absolutos de la función, que está definida en el intervalo cerrado $[-2,4]$, basta con analizar $f(-2)$, $f(4)$ y $f(\text{puntos críticos})$ y comparar dichos valores.

• $f(-2)=\sqrt[3]{-2}$ $\quad f(0)=\sqrt[3]{0}=0$

• $f(4)=\sqrt[3]{4}$

Notemos que $\sqrt[3]{-2}<0$ y $\sqrt[3]{4}>0$,

Por lo tanto podemos concluir que los puntos extremos absolutos de la función f son:

$\underbrace{x=4}_{\text{Máximo absoluto en } [-2,4]}$ y $\underbrace{x=-2}_{\text{Mínimo absoluto en } [-2,4]}$

b) Para analizar la concavidad de la función debemos analizar $f''(x)$.

• Recordemos $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f''(x)=\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)'$

• Notemos que $f'(x)$ es la composición de $\dfrac{1}{x}$ con $3\sqrt[3]{x^2}$, por lo que podemos derivarla utilizando la regla de la cadena, donde:

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)'\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)'=\frac{-1}{(3\sqrt[3]{x^2})^2}\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^2}^{\,2}\sqrt[3]{x}}=\frac{-2}{9\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot x^{\frac{1}{3}}}=\frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}}=\frac{-2}{9x^{5/3}}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Aux) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-2}=\dfrac{-1}{x^2}$

$\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)'=3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'$
$=3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'$
$=3\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

• Notemos que -2 es <0 $\forall x\in\mathbb{R}$

. Por lo tanto $g''(x)>0 \Leftrightarrow 9\sqrt[3]{x^5}<0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^5}<0 \Leftrightarrow x^5<0 \Leftrightarrow x<0$

y $g''(x)<0 \Leftrightarrow 9\sqrt[3]{x^5}>0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^5}>0 \Leftrightarrow x^5>0 \Leftrightarrow x>0$

• Por lo que $g''(x)>0 \Leftrightarrow x<0$ y $g''(x)<0 \Leftrightarrow x>0$ $\Big\}$
$g(x)$ es concava hacia arriba $\forall x<0$, es decir $x\in[-2,0]$
$g(x)$ es concava hacia abajo $\forall x>0$, es decir $x\in(0,4]$

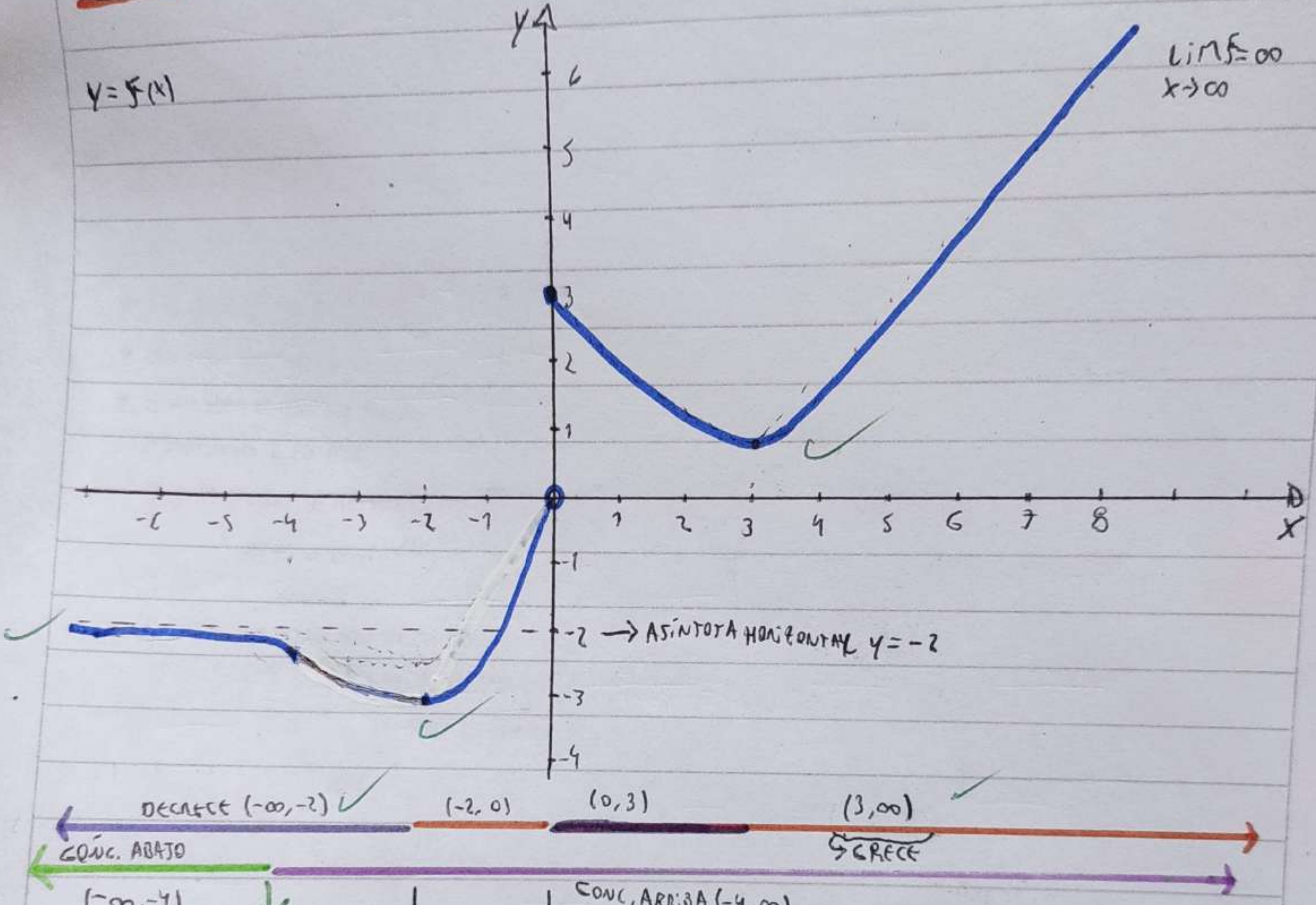
Tomás Achával D.

Hoja Nº 3

HOJA Nº

FECHA

Ejercicio 4: Graficar la función que cumpla con todos los requisitos dados.



Pto de inflexión $x = -4$

Pto. crítico $x = -2$

Pto crítico $x = 0$

Pto crítico $x = 3$

¡Excelente la resolución del examen!