RESUMEN

- **POBLACIÓN**: COLECCIÓN DE ELEMENTOS. FINITA O INFINITA.
- **MUESTRA**: SUBCONJUNTO ELEGIDO AL AZAR DE LA POBLACIÓN.

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

1- ELEGIR UN INTERVALO QUE CONTENGA TODOS LOS DATOS.

2- DIVIDIR EL INTERVALO EN $K \sim \sqrt{n}$ SUBINTERVALOS ADYACENTES Y DISJUNTOS. (INTERVALOS DE CLASE)

3- CONTAR EL Nº DE OBS. QUE CAEN EN C/SUBINTERVALO. (FA)

4- CALCULAR LA FR DE CADA INTERVALO, DONDE $FR_i = \frac{FA_i}{n}$

OBS: $\sum_{i=1}^{K} FA_i = n$ Y $\sum_{i=1}^{K} FR_i = 1$

HISTOGRAMAS

- MARCAR LOS K INTERVALOS EN UNA RECTA.
- RECTANGULO DE $ALTURA_i = \frac{FR_i}{LONG(IC)}$, EN GRAL, $LONG(IC) = \frac{\text{RANGO MUESTRAL}}{K}$

EJEMPLO

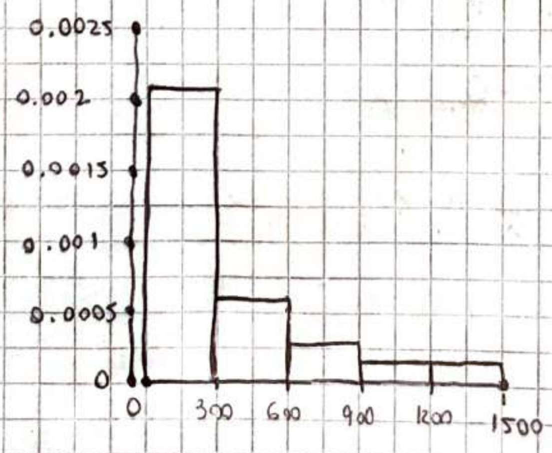
32	37	57	70	74
75	76	109	166	177
190	193	203	241	242
269	336	359	406	455
507	647	832	999	1248

$n=25$

$I=[0,1500]$

$K=5$

IC	FA	FR	FAA	FRA
[0,300]	16	16/25	16	16/25
(300,600]	5	1/5	21	21/25
(600,900]	2	2/25	23	23/25
(900,1200]	1	1/25	24	24/25
(1200,1500]	1	1/25	25	1



$LONG(IC) = 300$

$ALTURA_i = \frac{FR_i}{300}$

NOTA

MEDIDAS SOBRE CONJUNTOS DE DATOS

- MEDIA O PROMEDIO MUESTRAL:

$$\overline{x} = \frac{\sum^{n} x_i}{n}$$

PERCENTILES MUESTRALES (PERCENTIL $i \rightarrow i\%$ DE LOS DATOS A SU IZQUIERDA)

- MEDIANA MUESTRAL

$$\tilde{x} = \begin{cases} \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

- PRIMER CUARTIL Y TERCER CUARTIL

$$Q_1 = \begin{cases} \text{MEDIANA}\{x_{(i)} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ \text{MEDIANA}\{x_{(i)} : 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}\} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

$$Q_3 = \begin{cases} \text{MEDIANA}\{x_{(i)} : \frac{n}{2}+1 \leq i \leq n\} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ \text{MEDIANA}\{x_{(i)} : \frac{n+1}{2} \leq i \leq n\} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

RANGO MUESTRAL: $x_{(n)} - x_{(1)}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{VARIANZA MUESTRAL: } S_n^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \\ \text{DESVÍO ESTANDAR MUESTRAL: } \sqrt{S_n^2} = S_n \end{array}\right\} \text{"CORREGIDOS" CAMBIA } \frac{1}{n} \text{ POR } \frac{1}{n-1}$$

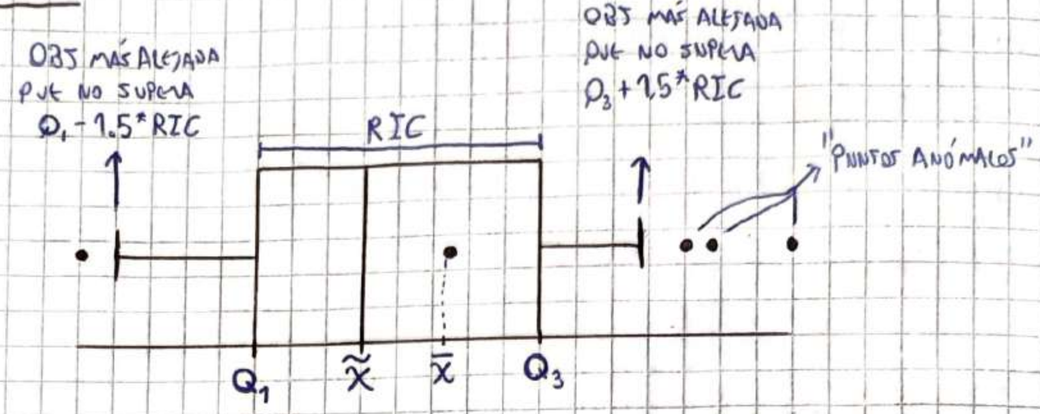
RANGO INTERCUARTIL: $RIC = Q_3 - Q_1$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \frac{S_n}{\overline{x}} \cdot 100\%$

PROP $x = \{x_i\}$, $y = \{a x_i + b\} \longrightarrow \overline{y} = a\overline{x} + b$ Y $S_y^2 = a^2 S_x^2$

NOTA

BOXPLOT



PROBABILIDAD

PROPS DE CONJUNTOS

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

- **ESPACIO MUESTRAL** (Ω) = CONJUNTO DE TODOS LOS RESULTADOS POSIBLES.
- **EVENTO**: CUALQUIER SUBCONJUNTO DE Ω.
- **FAMILIA DE EVENTOS** $(\mathcal{A})$: SUBCONJUNTO NO VACÍO DE Ω QUE CUMPLE:
  - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
  - $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

EN GENERAL, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

- **PROBABILIDAD** $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ QUE CUMPLE
  - $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$ PARA A_i EVENTOS DISJUNTOS EN $\mathcal{A}$.
- **MODELO PROBABILÍSTICO** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

OBS: SI $\#\Omega = N$ Y TODO EVENTO SIMPLE ES EQUIPROBABLE,

$P(E) = \frac{1}{N}$ PARA $E \in \mathcal{A}$ EVENTO SIMPLE.

$P(E) = \frac{\#E}{N}$ PARA $E \subseteq \mathcal{A}$ EVENTO COMPUESTO.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

DADO $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ M.P. ASOCIADO A UN EXPERIMENTO. PARA CUALQUIER $A, B \in \mathcal{A}$ SE CUMPLEN:

i) $A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B-A)$ Y $P(B) \geq P(A)$

ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow[\text{EVENTOS}]{\text{PARA } n} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot B_i$

iv) A Y B DISJUNTOS $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$B_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i})$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

DADO $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ M.P. Y $A, B \in \mathcal{A}$ CON $P(B) > 0$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

PROPIEDADES:

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- A, C DISJUNTOS $\Rightarrow P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$
- $P(\Omega|B) = 1$
- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

A Y B SON INDEPENDIENTES $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow \bar{A}$ Y B, A Y $\bar{B}$, $\bar{A}$ Y $\bar{B}$ SON INDEPENDIENTES.

REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0 \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

LEY DE PROBABILIDAD TOTAL $A_1, \dots, A_N$ MUTUAMENTE EXCLUYENTES CON $\bigcup A_i = \Omega$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i) \quad \forall B \in \mathcal{A}$$

TEOREMA DE BAYES $A_1, \dots, A_n$ MUTUAMENTE EXCLUYENTES, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ Y $P(A_i) > 0 \ \forall i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) P(A_j)} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad Y \ \forall B \in \mathcal{A} \text{ CON } P(B) > 0.$$

NOTA

VARIABLE ALEATORIA

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ m.p, X es v.a si $X: \Omega \to \mathbb{R}$ y $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA (f.d.a)

X v.a., $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ definida como:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

V.A. DISCRETA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $X: \Omega \to \mathbb{R}$

- Toma un número finito o inf. numerable de valores con prob. positiva.

OBS: Si solo toma dos valores con prob positiva y $p = P(X=1) \to X$ distribuye Bernoulli de parámetro p.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ m.p, X v.a.D.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE MASA (f.p.m)

$p: \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por $p(x) = P(X=x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

OBS: $Im(X) = \{a_i\}_{i \in I}$ $I \subseteq \mathbb{N}$

- $\sum_{i \in I} p(a_i) = 1$
- $F(a) = P(X \leq a) = \sum_{\substack{x \leq a \\ x \in Im(X)}} p(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Props de la f.d.a

- $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- F es monótona creciente
- $\lim_{-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{+\infty} F(x) = 1$
- Escalonada discontinua en $Im(X)$
- $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$ y $\lim_{x \to a^-} F(x) = P(X < a)$
- $a_i < a_{i+1}$ $\forall_i \Rightarrow p(a_1) = F(a_1)$ $\quad p(a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, $P(a \leq X \leq b) = F(b) - P(X \leq a)$

NOTA

ESPERANZA O VALOR MEDIO

X v.a.c $Im(X) = \{x_i\}_{i \in I}$ y p su f.p.m

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i \, p(x_i) = \mu$$

PROP

$$E(h(X)) = \sum_{i \in I} h(x_i)\, p(x_i) \quad , \quad E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$$

VARIANZA

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 \qquad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

PROP

- $0 \leq V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$

OBS: X Bernoulli de param $p \Rightarrow E(X) = p$ y $V(X) = p(1-p)$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- n ensayos independientes.
- 2 resultados posibles (E ó F)
- $p = P(E)$ constante en c/ensayo

X = "nº de éxitos en n ensayos"

$X \sim B(n, p)$

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & 0 \leq x \leq n \\ 0 & c.c \end{cases}$$

- $E(X) = n \cdot p$
- $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

$X \sim P(\lambda)$ con $\lambda > 0$ si su f.p.m es $p(k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$

$E(X) = \lambda = V(X)$

APROXIMACIÓN POR POISSON A BINOMIAL

$$p(X_n = k) \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{con } \lambda = np,\ n \geq 100,\ p \leq 0{,}01 \text{ y } np \leq 20$$

Distribución Hiper Geométrica

- Población N
- M éxitos y $N-M$ fracasos
- Muestra de tamaño n.

X = "n° de éxitos en la muestra de tamaño n"

$X \sim H(n, M, N)$

Su f.p.m es

$$P(K) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{K}\binom{N-M}{n-K}}{\binom{N}{n}} & \max\{0, n+M-N\} \leq K \leq \min(M, n) \\ 0 & c.c \end{cases}$$

- $E(X) = n \cdot \dfrac{M}{N}$ · $V(X) = n\left(\dfrac{M}{N}\right)\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

Aprox de H por B

Si $n < 0{,}05 \cdot N$, $\dfrac{M}{N}$ y $1-\dfrac{M}{N}$ no sean próximos a 0.

$$P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Distribución Binomial Negativa

- Secuencia de ensayos independientes
- C/u es E ó F
- $P(E) = p$ constante
- Se frena al obtener $r \in \mathbb{N}$ éxitos.

X = "n° de F que preceden el r-ésimo éxito"

$X \sim BN(r, p)$

Su f.p.m es

$$P(K) = \begin{cases} \binom{r+K-1}{r-1} p^r (1-p)^K & K \in \mathbb{N} \\ 0 & c.c \end{cases}$$

- $E(X) = \dfrac{r(1-p)}{p}$ · $V(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

SEA X UNA V.A SOBRE $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X ES UNA V.A.C SI

$$P(X=x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

OBS SU F.D.A $F(X)=P(X \leq x)$

i) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

ii) $P(X \geq a) = 1 - F(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

PROP $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \ldots, \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq \ldots, \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$

PROPS DE LA F.D.A (F) DE UNA V.A.C

- F ES MONÓTONA CRECIENTE
- F ES CONTINUA EN $\mathbb{R}$
- $\lim_{+\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{-\infty} F(x) = 0$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD (F.D.P) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ TQ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

V.A ABSOLUTAMENTE CONTINUA SU F.D.A ESTÁ DADA POR

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ CON } f \text{ UNA F.D.P.}$$

OBS $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$ OBS2 $f(x) = F'(x)$ DONDE EXISTA, 0 C.C.

PERCENTIL p100 O CUANTIL p: VALOR $\eta(p)$ TQ $F(\eta(p)) = p$

OBS SI $Y = aX + b$ Y $\eta_X(p) \to \eta_Y(p) = \begin{cases} a\,\eta_X(p) + b, & a > 0 \\ a\,\eta_X(1-p) + b, & a < 0 \end{cases}$

ESPERANZA $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$, SI $h(X)$ ES V.A.C $\Rightarrow E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$

VARIANZA $\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = E(X^2) - E(X)^2$

- $E(aX+b) = aE(X) + b$, $V(aX+b) = a^2 V(X)$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Distribución Uniforme

$X \sim U[a,b]$ si su f.d.p es $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & c.c \end{cases}$

Luego, su f.d.a es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Proposición Si $X \sim U[0,1]$

- $\eta_X(p) = p \quad \forall p \in (0,1)$ $\quad$ • $E(X) = \frac{1}{2}$ y $V(X) = \frac{1}{12}$
- Si $a < b \in \mathbb{R}$, $Y = (b-a)X + a \Rightarrow$
  - i) $Y \sim U[a,b]$ $\quad$ ii) $\eta_Y(p) = (b-a)p + a$, $p \in (0,1)$
  - iii) $E(Y) = \frac{a+b}{2}$ y $V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribución Normal o Gaussiana

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si su f.d.p es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Props de la f.d.p de una $N(\mu, \sigma^2)$

- $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\int^{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ $\quad$ • $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x) = 0$
- $f(\mu - x) = f(\mu + x)$ (simetría sobre μ)

Obs $Z \sim N(0,1)$ "normal estándar", su f.d.a $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \forall z \in \mathbb{Z}$

$E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$

Obs $X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

Prop $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ $\quad$ • $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ "estandarización"

Uso de la tabla

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall a < b \in \mathbb{R}$

NOTA