Apellido y Nombre: ACHÁVAL BERZERO TOMÁS

Calificación: 10 (di

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Segundo Parcial – 14/11/2022

1. El parcial debe ser legible.
2. Las páginas deben estar numeradas e indicar la cantidad total de hojas. 2 HOJAS
3. En cada página debe constar tu apellido.
4. Revisá antes de entregar.
5. Sólo podés consultar los digestos oficiales.

1. Considerá la siguiente especificación formal. Considerando $sum.A.i = \langle \sum j : 0 \leqslant j < i : A.j \rangle$.
Const $N : Int; A : Array[0, N)\ of\ Int$;
Var $r : Bool$;
$\{N \geqslant 0\}$
S
$\{r = \langle \sum i : 0 \leqslant i < N \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle\}$

a. Explicá con tus palabras lo que calcula este programa.

b. Derivá un programa imperativo.

HOJA N°

FECHA

Hoja 1
Pág. 1

EJERCICIO 7:

Tomás Achával Berzero

45085146 - comisión 3

$sum\ A.i = \langle \sum j : 0 \leq j < i : A.j \rangle$

Const N: Int; A: Array$[0,N)$ of Int;

Var r: Int;

$P: \{N \geq 0\}$

S

$Q: \{r = \langle \sum i : 0 \leq i < N \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle\}$

a) El programa calcula la suma de los elementos del arreglo que son mayores a la suma de todos los anteriores. ✓

b) Como tengo una expresión cuantificada, sé que necesitaré un ciclo; reescribo la especificación con una inicialización, un invariante y un ciclo. A la vez, propongo dicho invariante.

Const N: Int; A: Array$[0,N)$ of Int;

Var r, n: Int;

$P: \{N \geq 0\}$

S_0

$I: \{r = \langle \sum i : 0 \leq i < n \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N\}$

do $n \neq N \rightarrow r, n := E, n+1$

od

$Q: \{r = \langle \sum i : 0 \leq i < N \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle\}$

• Con el invariante y guarda propuestos, queda asegurada la obligación de prueba $I \wedge \neg b \Rightarrow Q$, donde b es $n \neq N$, pues

$$I \wedge n = N \Rightarrow \underbrace{r = \langle \sum i : 0 \leq i < N \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle}_{Q} \wedge \overbrace{0 \leq N \leq N}^{\text{trivial}}$$

• Con la asignación propuesta en el cuerpo del ciclo, debería ser posible obtener E a partir de la corrección de $\{I \wedge b\}\ r, n := E, n+1\ \{I\}$, lo cual es equivalente a utilizar $I \wedge b$ como hipótesis para demostrar $wp(r, n := E, n+1)(I)$.

Veamos: $wp.(r, n := E, n+1)(I)$

$\equiv$ {def. de wp}

$E = \langle \sum i : 0 \leq i < n+1 \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge \overbrace{0 \leq n+1 \leq N}^{\text{Sabemos que esta parte de la conjunción es correcta,}}$

pues por hipótesis,

$n \neq N \wedge 0 \leq n \leq N \Rightarrow 0 \leq n < N$ } lógica

$\Rightarrow 0 \leq n+1 \leq N$ ∎

$\equiv$ {lógica en el rango}

$E = \langle \sum i : (0 \leq i < n \vee i = n) \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle$

$\equiv$ {siguiente página}

NOTA

PÁGINA 2

$\equiv$ {DISTRIBUTIVIDAD DE LOS OPERADORES $\vee$ y $\wedge$}

$E = \langle \sum i : (0 \leq i < n \wedge A.i > sum.A.i) \vee (i = n \wedge A.i > sum.A.i) : A.i \rangle$

$\equiv$ {PARTICIÓN DE RANGO}

$E = \langle \sum i : 0 \leq i < n \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle + \langle \sum i : i = n \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle$

$\equiv$ {HIPÓTESIS (I∧b) Y RANGO UNITARIO CON CONDICIÓN}

$E = r + (A.n > sum.A.n \to A.n$

$\quad [] A.n \leq sum.A.n \to 0$

$\quad)$

$\equiv$ {LÓGICA}

$E = (A.n > sum.A.n \to r + A.n$

$\quad [] A.n \leq sum.A.n \to r + 0$

$\quad)$

* NOTAR QUE sum.A.n NO ES UNA EXPRESIÓN "COMPUTABLE", POR LO QUE FORTALEZCO MI INVARIANTE CON UNA NUEVA VARIABLE S, TAL QUE $S = sum.A.n$

TENEMOS AHORA,

Const N: Int; A: Array [0,N) of Int;

Var r, n, s: Int;

{$N \geq 0$}

S_0

{$r = \langle \sum i : 0 \leq i < n \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge \overbrace{s = \langle \sum j : 0 \leq j < n : A.j \rangle}^{sum.A.n \text{ POR DEFINICIÓN}}$}

do $n \neq N \to$ if $A.n > s \to r, n, s := r + A.n, n+1, E$

$\quad\quad [] A.n \leq s \to n, s := n+1, E$

$\quad\quad$ fi

od

{Q}

* NOTAR QUE $I \wedge \neg b \Rightarrow Q$ SE MANTIENE.

ESTE CONDICIONAL FUE DEDUCIDO POR LÓGICA, r SOLO ES MODIFICADO CUANDO $A.n > sum.A.n$, LO CUAL AHORA ESTÁ REPRESENTADO POR S, ACLARADO EN EL INVARIANTE FORTALECIDO.

- PARA OBTENER E, REALIZO LA OBLIGACIÓN DE PRUEBA {I∧b} if...fi {I}, LO CUAL ES EQUIVALENTE A UTILIZAR I∧b COMO HIPÓTESIS PARA DEMOSTRAR:

- $(A.n > s \vee A.n \leq s)$

$\wedge$ • $A.n > s \Rightarrow wp.(r, n, s := r + A.n, n+1, E)(I)$

$\wedge$ • $A.n \leq s \Rightarrow wp.(n, s := n+1, E)(I)$

* AL SER UNA CONJUNCIÓN PUEDO DEMOSTRAR CADA TÉRMINO POR SEPARADO.

VEAMOS:

- $A.n > s \vee A.n \leq s$. DIRECTAMENTE TRUE PUES TODO ELEMENTO DE TIPO Int ES "MAYOR" O "MENOR O IGUAL" A CUALQUIER OTRO, Y POR NUESTRA HIPÓTESIS E INFORMACIÓN TANTO A.n COMO S SON ELEMENTOS DE TIPO Int.

// SIGUIENTE HOJA.

NOTA

HOJA 2
PÁGINA 3

HOJA Nº

FECHA

TOMÁS ACHÁVAL DESTEFANO
45085146 - COMISIÓN 3

- $A.n > s \Rightarrow wp.(r, n, s := r + A.n, n+1, E)(I)$

- UTILIZO COMO HIPÓTESIS $I \wedge b \wedge A.n > s$ PARA ASÍ ~~obtener~~ DEMOSTRAR:

$wp(r, n, s := r + A.n, n+1, E)(I)$

$\equiv$ {DEF DE WP}

$r + A.n = \langle \sum i : 0 \leq i < n+1 \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge \overbrace{0 \leq n+1 \leq N}^{\text{YA DEMOSTRADO}} \wedge E = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : A.j \rangle$

$\equiv$ {PASOS ANTERIORES Y LÓGICA EN EL RANGO}

$r + A.n = (A.n > s \to r + A.n \wedge$ TRUE $\wedge E = \langle \sum j : 0 \leq j < n \vee j = n : A.j \rangle$

$\quad \square\, A.n \leq s \to r + 0$

$\quad)$

$\equiv$ {HIPÓTESIS Y PARTICIÓN DE RANGO}

$r + A.n = r + A.n \wedge E = \langle \sum j : 0 \leq j < n : A.j \rangle + \langle \sum j : j = n : A.j \rangle$

$\equiv$ {LÓGICA, RANGO UNITARIO E HIPÓTESIS}

TRUE $\wedge E = s + A.n$ $\quad$ * DE ESTA FORMA SÉ QUE LA TERNA $\{I \wedge b\}$ IF...FI $\{I\}$ ES CORRECTA CUANDO $A.n > s$, VEAMOS EL OTRO CASO.
Y $E = s + A.n$

- $A.n \leq s \Rightarrow wp(n, s := n+1, E).(I)$

- VUELVO A UTILIZAR COMO HIPÓTESIS $I \wedge b \wedge A.n \leq s$ PARA DEMOSTRAR:

$wp(n, s := n+1, E)(I)$

$\equiv$ {DEF. DE WP}

$r = \langle \sum i : 0 \leq i < n+1 \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge \overset{\checkmark}{0 \leq n+1 \leq N} \wedge E = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : A.j \rangle$

$\equiv$ {PASOS ANTERIORES}

$r = (A.n > s \to r + A.n \wedge$ TRUE $\wedge E = s + A.n$

$\quad \square\, A.n \leq s \to r + 0$

$\quad)$

$\equiv$ {HIPÓTESIS}

$r = r + 0 \wedge E = s + A.n$

$\equiv$ {LÓGICA}

$E = s + A.n$ $\quad$ * ANÁLOGAMENTE, QUEDA DEMOSTRADO QUE EL CUERPO DE MI CICLO ES CORRECTO CUANDO $A.n \leq s$ Y $E = s + A.n$.

FINALMENTE, SABEMOS QUE $A.n > s \vee A.n \leq s$ CUBREN TODOS LOS CASOS, POR LO QUE SI MI ASIGNACIÓN PARA LA VARIABLE s ES $s + A.n$, $\{I \wedge b\} \subset \{I\}$ SERÁ CORRECTO, REESCRIBO EL PROGRAMA.

NOTA

PÁGINA 4

$Const\ N : Int;\ A : Array\ [0, N)\ of\ Int;$

$Var\ r, n, s : Int;$

$\{N \geq 0\}$

S_0

$\{ r = \langle \Sigma i : 0 \leq i < n \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge s = \langle \Sigma j : 0 \leq j < n : A.j \rangle \}$

$do\ n \neq N \rightarrow if\ A.n > s \rightarrow r, n, s := r + A.n, n+1, s + A.n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \square\ A.n \leq s \rightarrow n, s := n+1, s + A.n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad fi$

od

$\{ r = \langle \Sigma i : 0 \leq i < N \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \}$

YA QUEDÓ DEMOSTRADO QUE EL PROGRAMA ES CORRECTO CON ESA ESTRUCTURA, PUES SE CUMPLEN $\{I \wedge b\}\ C\ \{I\}$ Y $I \wedge \neg b \Rightarrow Q$, Y LA COTA CLARAMENTE DECRECE AUNQUE NO ES NECESARIO DEMOSTRARLA.

SÓLO NOS FALTA OBTENER UNA INICIALIZACIÓN S_0. POR LÓGICA Y PARA RECORRER TODO EL ARREGLO, LA VARIABLE n COMIENZA EN 0.

$\underset{\text{HIPÓTESIS}}{\{N \geq 0\}} \Rightarrow wp(r, s, n := E, F, 0)(I)$

$\equiv$ DEF DE WP

$E = \underbrace{\langle \Sigma i : 0 \leq i < 0 \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle}_{} \wedge \overbrace{0 \leq 0 \leq N}^{\text{LÓGICA}} \wedge F = \underbrace{\langle \Sigma j : 0 \leq j < n : A.j \rangle}_{}$

$\equiv$ { LÓGICA, RANGO VACÍO E HIPÓTESIS }

$E = 0 \wedge True \wedge F = 0 \Rightarrow$ POR LO TANTO $\{N \geq 0\}\ S_0\ \{I\}$ SERÁ CORRECTA CON $S_0 \equiv r, s, n := 0, 0, 0$

OBTUVIMOS FINALMENTE EL PROGRAMA:

$Const\ N : Int;\ A : Array\ [0, N)\ of\ Int;$

$Var\ r, n, s : Int;$

$P: \{N \geq 0\}$

$S_0: r, s, n := 0, 0, 0$

$I: \{ r = \langle \Sigma i : 0 \leq i < n \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge s = \langle \Sigma j : 0 \leq j < n : A.j \rangle \}$

$C \begin{cases} do\ n \neq N \rightarrow if\ A.n > s \rightarrow r, n, s := r + A.n, n+1, s + A.n \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \square\ A.n \leq s \rightarrow n, s := n+1, s + A.n \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad fi \\ od \end{cases}$

$Q: \{ r = \langle \Sigma i : 0 \leq i < N \wedge A.i > sum.A.i : A.i \rangle \}$

PRUEBAS:

- $\{P\}\ S_0\ \{I\}$ ✓
- $\{I \wedge b\}\ C\ \{I\}$ ✓
- $I \wedge \neg b \Rightarrow Q$ ✓

NOTA