EXAMEN FINAL

ANÁLISIS NUMÉRICO I / ANÁLISIS NUMÉRICO

04/07/2023

Apellido y nombre: ACHÁVAL BELTRAMO TOMÁS
Carrera: LCC
Condición: REGULAR (2023)
Cantidad de hojas (sin contar hoja de enunciados): 3

Nota: Todos los desarrollos deben estar debidamente justificados.

Práctico						Teórico			Lab.		
1	2	3	4	~~Libre~~	Total	1	2	Total	Total	Total	NOTA
25	15	25	25		90	50	35	85	–	175	9

Parte Práctica

1. Suponga que $fl(x)$ es la aproximación por redondeo de k dígitos de x. Muestre que

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

2. Determine el paso h para aproximar la integral

$$\int_0^8 x\,\sin(x)\,dx,$$

con un error menor o igual a 10^{-4} utilizando la regla de Simpson compuesta.

3. En un criadero de conejos se censó el tamaño de la población durante los últimos cuatro años y los datos son los siguientes:

t (año)	2019	2020	2021	2022
N(población)	2960	4540	8080	17060

Se cree que los datos siguen un comportamiento dado por una función exponencial de la forma

$$N(t) = N_0 e^{k(t-2019)}.$$

Utilice el método de cuadrados mínimos para estimar los valores de N_0 y k.

4. Disponemos de 210000 pesos para invertir en la bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130000 pesos en las del tipo A y como mínimo 60000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

5. (Sólo alumnos libres) Encuentre una factorización LU de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ con L triangular inferior con 1 en la diagonal y U triangular superior. Luego resuelva el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, utilizando dicha factorización.

Parte Teórica

1. Enuncie la forma estándar de un problema de programación lineal con al menos tres posibles transformaciones para poder llevar un problema cualquiera a la estándar.

2. a) Demuestre que dados un conjunto de puntos (x_i, y_i) para $i = 0, \ldots, n$ el polinomio interpolante en forma de Newton coincide con el polinomio en forma de Lagrange.

   b) Muestre cuál es la forma del error en la interpolación lineal a trozos.

EJERCICIO N° 1

$fl(x)$ APROXIMACIÓN POR REDONDEO DE K DÍGITOS DE X. MOSTRAR QUE

$$\left|\frac{X - fl(x)}{X}\right| \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-k+1}$$

PARA DEMOSTRARLO PRIMERO ESCRIBIMOS LOS NÚMEROS EN SISTEMA DE PUNTO FLOTANTE.

$$X = 0.d_1d_2\ldots d_{k-1}d_k d_{k+1}d_{k+2}\ldots \times 10^e$$

$$fl(x) = 0.d_1d_2\ldots d_{k-1}\tilde{d}_k 0\ldots \times 10^e$$

DONDE $d_i \in \{0,..,9\}$ $i \geq 2$, $d_1 \in \{1,..,9\}$

HAY DOS CASOS:

① $d_{k+1} \leq 5$ ② $d_{k+1} > 5$

CASO 1:

Si $d_{k+1} \leq 5$, ENTONCES $\tilde{d}_k = d_k$ Y POR LO TANTO $\boxed{X - fl(x) \geq 0}$ PUES $fl(x) \leq X$

VEAMOS

$$\left|\frac{X-fl(x)}{X}\right| = \frac{X-fl(x)}{X} = \frac{0.0\ldots 0d_{k+1}d_{k+2}\ldots \times 10^e}{0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^e} = \frac{0.0\ldots 0d_{k+1}d_{k+2}\ldots}{0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots}$$

COMO $d_{k+1} \leq 9$ Y $d_1 \geq 1$, ENTONCES EL NUMERADOR ESTÁ ACOTADO SUPERIORMENTE POR 10^{-k}, Y EL DENOMINADOR ESTÁ ACOTADO INFERIORMENTE POR 10^{-1}.

$$\text{LUEGO} \quad \left|\frac{X-fl(x)}{X}\right| = \frac{0.0\ldots 0d_{k+1}\ldots}{0.d_1d_2\ldots d_{k+1}\ldots} \underset{d_{k+1}\leq 5}{\leq} \frac{\frac{1}{2}10^{-k}}{10^{-1}} = \frac{1}{2}10^{-k+1}$$

PARA EL CASO ①.

CASO 2:

Si $d_{k+1} > 5$, ENTONCES $\tilde{d}_k = d_k + 1$ Y POR LO TANTO $\boxed{X - fl(x) < 0}$ PUES $fl(x) > X$.

VEAMOS

$$\left|\frac{X-fl(x)}{X}\right| = \frac{fl(x)-X}{X} = \frac{0.0\ldots 00\tilde{d}_{k+1}\ldots \times 10^e}{0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^e} = \frac{0.0\ldots 00\tilde{d}_{k+1}\tilde{d}_{k+2}\ldots}{0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots}$$

$\tilde{d}_{k+1}, \tilde{d}_{k+2}$, ETC VIENEN DE LA DIFERENCIA ENTRE $fl(x)$ Y X DADO QUE $\tilde{d}_k = d_k + 1$, LOS DÍGITOS SE OBTIENEN DE

$$\begin{array}{r} 0.0\ldots 10\ldots\ldots \\ -\ 0.0\ldots 0d_{k+1}d_{k+2}\ldots \end{array}$$

POR LO TANTO $\tilde{d}_{k+1} \leq 5$ PUES $d_{k+1} > 5$

LUEGO EL NUMERADOR Y DENOMINADOR TIENEN LAS MISMAS COTAS QUE EN EL CASO 1, PUES $\tilde{d}_{k+1} \leq 5$, POR LO TANTO QUEDA DEMOSTRADO QUE

$$\left|\frac{X - fl(x)}{X}\right| \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-k+1}$$

PARA AMBOS CASOS. ■

Ejercicios 2 y 3

Parte práctica

HOJA N° 1

FECHA

Tomás Achával Berzero
45085146 - LCC

Ejercicio N°2

Sabemos que la regla de Simpson compuesta para n subintervalos está dada por

de $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left\{f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + f(b)\right\} - \underbrace{\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)}_{\text{ERROR}}$$

→ debería decir n

Donde $h=\frac{b-a}{2n}$, $x_j = a+jh$, $j=0,\dots,2n$, y $f \in C^4[a,b]$, $\xi \in (a,b)$

Por lo tanto, para $f(x) = x\,sen(x)$, y $[a,b]=[0,8]$, buscaremos n tal que

$$E_{SC} = \frac{(8-0)}{180}\cdot\left(\frac{8-0}{2n}\right)^4 \cdot f^{(4)}(\xi) \leq 10^{-4}$$

Primero busco una cota superior para $f^{(4)}(\xi)$ en $[a,b]$

$f(x) = x\cdot sen(x)$ $\qquad sen'(x) = cos(x)$, $cos'(x) = -sen(x)$

$f'(x) = sen(x) + x\,cos(x)$

$f''(x) = cos(x) + cos(x) - x\,sen(x)$

Debería ser menos

$f'''(x) = -2sen(x) - (sen(x) + x\,cos(x)) = -3sen(x) + x\,cos(x)$

$f^{(4)}(x) = -3cos(x) + cos(x) - x\,sen(x) = -2cos(x) - x\,sen(x)$

Luego $|f^{(4)}(x)| \leq 2 \;\forall x \in [0,8]$ → ¿Por qué?

Luego

$$E_{SC} \leq \frac{8}{180}\cdot\frac{8^4}{2^4 n^4}\cdot 2 = \frac{8^4}{180}\cdot\frac{1}{n^4} \quad \text{y si } E_{SC} \leq 10^{-4} \text{ luego}$$

$$\frac{8^4}{180}\cdot\frac{1}{n^4} \leq 10^{-4} \Rightarrow n^4 \geq \frac{8^4 \cdot 10^4}{180}$$

$$\Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{(8\cdot 10)^4}{180}} \Rightarrow n \geq \frac{80}{\sqrt[4]{180}} \approx 21.84$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 22}$$

Luego como n debe ser al menos 22 y

$h = \frac{8-0}{2n}$, entonces

$$\boxed{h = \frac{8}{2\cdot 22} \approx 0.18}$$

NOTA

Ejercicio N° 3

T	2019	2020	2021	2022
N	2960	4540	8080	17060

, DATOS DE LA FORMA $N(T) = N_0 e^{K(T-2019)}$

NOTAR QUE $\underbrace{\ln(N(T))}_{Y} = \ln(N_0 e^{K(T-2019)})$

$= \ln(N_0) + \ln(e^{K(T-2019)})$

$= \underbrace{\ln(N_0)}_{b} + K\underbrace{(T-2019)}_{X}$

PROPONGO LA FORMA

$f(x) = Y = b + KX$, DONDE $Y = \ln(N(T))$, $b = \ln(N_0)$, Y $X = T-2019$

LUEGO

X	0	1	2	3	$\to T-2019$
$f(x) = Y$	8	8.42	9	9.74	$\to \ln(T)$ (CON REDONDEO)

AUX: $f^2(x)$
$= K^2x^2 + 2Kbx + b^2$

ENTONCES DESEAMOS MINIMIZAR

$$E(b,K) = \sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{3} f^2(x_i) - 2\sum_{i=0}^{3} f(x_i)y_i + \sum_{i=0}^{3} y_i^2$$

EXPANDIENDO O AÚN MAS,

$$E(b,K) = K^2\sum_{i=0}^{3}x_i^2 + 2Kb\sum_{i=0}^{3}x_i + b^2\sum_{i=0}^{3}1 - 2b\sum_{i=0}^{3}y_i - 2K\sum_{i=0}^{3}x_iy_i + \sum_{i=0}^{3}y_i^2$$

PARA MINIMIZARLO, IGUALAMOS SUS DERIVADAS PARCIALES A 0.

$$\frac{\partial E}{\partial K} = 2K\sum_{i=0}^{3}x_i^2 + 2b\sum_{i=0}^{3}x_i - 2\sum_{i=0}^{3}x_iy_i = 0 \to ① \Rightarrow K\sum_{i=0}^{3}x_i^2 + b\sum_{i=0}^{3}x_i = \sum_{i=0}^{3}x_iy_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2K\sum_{i=0}^{3}x_i + 2b\sum_{i=0}^{3}1 - 2\sum_{i=0}^{3}y_i = 0 \longrightarrow ② \Rightarrow K\sum_{i=0}^{3}x_i + b\sum_{i=0}^{3}1 = \sum_{i=0}^{3}y_i$$

CALCULAMOS,

$$\sum_{i=0}^{3}1 = 4,\ \sum_{i=0}^{3}x_i = 6,\ \sum_{i=0}^{3}x_i^2 = 14,\ \sum_{i=0}^{3}y_i = 35.16,\ \sum_{i=0}^{3}x_iy_i = 55.64$$

CON ESTOS NUMEROS EN ① Y ②, OBTENEMOS EL SISTEMA

$$\begin{cases} 14K + 6b = 55.64 \longrightarrow 14K + 6\left(\frac{35.16}{4} - \frac{3}{2}K\right) = 55.64 \\ 6K + 4b = 35.16 \to b = \frac{35.16}{4} - \frac{3}{2}K \end{cases}$$

$14K - 9K = 55.64 - \frac{3 \cdot 35.16}{2}$

$5K = 55.64 - 52.74$

$\boxed{K = \frac{2.9}{5} \approx 0.58}$

COMO $b = \ln(N_0)$, LUEGO

$b = \frac{35.16}{4} - \frac{3}{2} \cdot 0.58$

$\boxed{N_0 = e^b \approx 2751.77}$ $\boxed{b = 7.92}$

FINALMENTE EL MODELO SERÁ DE LA FORMA $\boxed{N(T) = 2751{,}77 \cdot e^{0.58(T-2019)}}$

B

NOTA

EJERCICIOS 4 y 7

PARTE PRÁCTICA

HOJA Nº 3

FECHA

EJERCICIO Nº 4:

TOMÁS ACHÁVAL BECERRO
45085146 - CCC

EL PROBLEMA SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

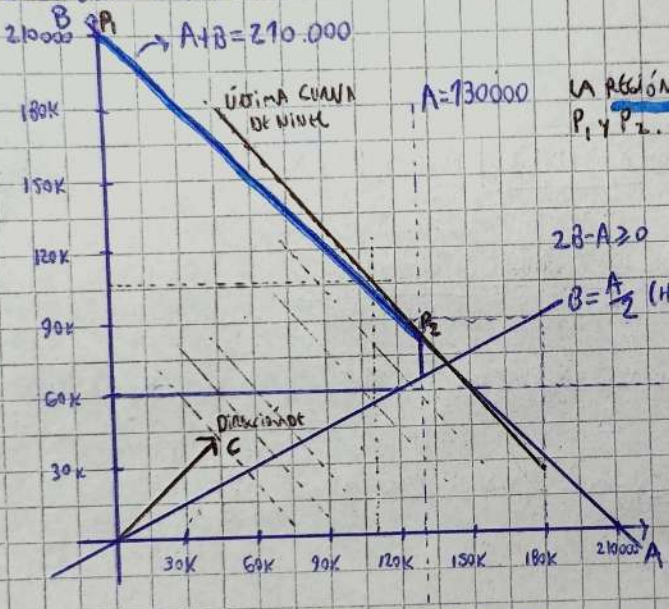
(es equivalente)

$$\text{MÁX } 1.1A + 1.08B \quad 0.1 \times A + 0.08 \times B$$

S.A
$$A + B = 210.000$$
$$2B - A \geq 0$$
$$A \leq 130.000$$
$$B \geq 60.000$$
$$A, B \geq 0$$

LO RESOLVERÉ UTILIZANDO EL MÉTODO GRÁFICO. NOTAR QUE LA DIRECCIÓN DE MÁXIMO CRECIMIENTO ES $C = (1.1, 1.08)$

VEAMOS LA REGIÓN FACTIBLE:



LA REGIÓN FACTIBLE ES EL SEGMENTO QUE UNE A P_1 Y P_2.

SI C FUESE (1,1), LA SOLUCIÓN ÓPTIMA SERÍA TODO EL SEGMENTO QUE UNE A P_1 Y P_2 (TODA LA REGIÓN FACTIBLE). COMO $C = (1.1, 1.08)$ ENTONCES LA SOLUCIÓN ÓPTIMA SE ENCUENTRA EN P_2, PUES ES EL ÚLTIMO VÉRTICE ALCANZADO POR LAS CURVAS DE NIVEL EN LA DIRECCIÓN DE MÁXIMO CRECIMIENTO C.

EL PUNTO P_2 ESTÁ DADO POR LA INTERSECCIÓN DE $A = 130.000$ Y $B + A = 210000$

POR LO TANTO

$$\boxed{A = 130.000} \Rightarrow B = 210.000 - 130.000 = \boxed{80.000}$$

LA DISTRIBUCIÓN DE LA INVERSIÓN SERÁ 130.000 PESOS EN A, Y 80.000 PESOS EN B.

B

OBTENDREMOS: $1.1 * 130.000 + 1.08 * 80.000 = 229400$

ES DECIR UN INTERÉS MÁXIMO DE $229400 - 210.000 = 19400$ PESOS.

NOTA

EJERCICIOS 1 Y 2
PARTE TEÓRICA

HOJA Nº 2

FECHA

PARTE TEÓRICA
EJERCICIO Nº 1

Tomás Alcaraz Becerro
45083146-LGC

La forma estándar de un problema de programación lineal está dada por

$\min \ c^T x$ → Función objetivo lineal, $x \in \mathbb{R}^n$
sujeto a $Ax = b$ → $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, restricciones lineales de igualdad.
$x \geq 0$ → No negatividad en las variables.

En general los problemas no vienen escritos en la forma estándar, si no que vienen como

$\max$ ó $\min \ c^T x$
s.a $Rx \geq c$ → Restricciones de desigualdad (pueden ser con $\leq$)
$Bx = d$
$x \geq 0$

Algunas formas de llevar este formato general a la forma estándar son:

- Si el problema desea maximizar $c^T x$, será lo mismo que minimizar $-c^T x$ y luego multiplicar el resultado obtenido por (-1)

Es decir,

$$\begin{array}{ll} \max \ c^T x & \min \ -c^T x \\ \text{SA} \ Ax=b & \text{Sa} \ Ax=b \\ x \geq 0 & x \geq 0 \end{array}$$

No estándar → Estándar

- Si tenemos una restricción lineal de desigualdad con $\leq$, sumamos una variable nueva, llamada variable de holgura, la cual será también ≥ 0.

Es decir
$x = (x_0, \ldots, x_1)$

$$\begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \text{s.a} \ Ax = b \\ 3x_0 + 2x_1 \leq 8 \\ x \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \text{s.a} \ Ax = b \\ 3x_0 + 2x_1 + S_0 = 8 \\ x \geq 0, S_0 \geq 0 \end{array} = \begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \text{s.a} \ \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{x} \geq 0 \end{array}$$

(Incorporamos S_0 al vector de variables y la ecuación de igualdad al sistema $Ax=b$)

No estándar → variable de holgura → Estándar.

- Si tenemos una restricción lineal de desigualdad con $\geq$, restamos una variable de exceso, la cual también será no negativa.

Es decir
$x = (x_0, \ldots, x_1)$

$$\begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \text{s.a} \ Ax = b \\ 3x_0 + 2x_1 \geq 15 \\ x \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \text{s.a} \ Ax = b \\ 3x_0 + 2x_1 - S_0 = 15 \\ x \geq 0, S_0 \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \text{s.a} \ \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{x} \geq 0 \end{array}$$

(Agregamos S_0 y la ecuación lineal de igualdad que lo contiene a x y $Ax=b$, respectivamente)

No estándar → variable de exceso → Estándar.

NOTA

EJERCICIO N° 2

a) Demostrar que para los $n+1$ puntos (x_i, y_i) $i=0,\dots,n$, el polinomio interpolante en forma de Newton coincide con el polinomio en forma de Lagrange.

Polinomio en forma de Newton: Polinomio en forma de Lagrange:

$$N(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0,\dots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j) \qquad L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x) \, , \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Sabemos que $N(x_i)=y_i$ y $L(x_i)=y_i$ para $i=0,\dots,n$ y que grado$(N)\leq n$ y grado$(L)\leq n$

Sea $H(x) = N(x) - L(x)$, como $gr(N)\leq n$ y $gr(L)\leq n$, entonces $\boxed{gr(H)\leq n}$

Pero

$$H(x_i) = N(x_i) - L(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad \text{para } i=0,\dots,n$$

Por lo que $H(x)=0$ en $n+1$ puntos, pero $gr(H)\leq n$, y por el Teorema Fundamental del Álgebra entonces $H(x)=0 \;\forall x\in\mathbb{R}$.

Como $H(x)=0$, entonces $N(x)-L(x)=0 \Rightarrow N(x)=L(x) \;\forall x\in\mathbb{R}$.

Queda demostrada la igualdad de los polinomios interpolantes en la forma de Newton y Lagrange ■

b) La forma del error en la interpolación lineal a trozos.

Para cada x en $[x_0, x_n]$, $\exists i$ entre 0 y $n-1$ tal que

$x \in [x_i, x_{i+1}]$, luego la fórmula del error para cada $x\in[x_0,x_n]$ está dada por:

$$\boxed{f(x) - S(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\prod_{j=0}^{1}(x-x_j) \, , \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}) \, , \; x\in[x_i,x_{i+1}]}$$

Incompleto