PARCIAL 2

15 de mayo de 2025

En todos los ejercicios se deben explicar los pasos que se siguen en la resolución.

El código python utilizado en la resolución de los ejercicios marcados con " ▶" se deberá subir a moodle para su evaluación. El envío deberá contar con las siguientes características.

- Los enunciados de los ejercicios 3 y 4 del parcial se entregarán a las 11, en el aula 31.
- Enviar un solo archivo, que deberá llamarse apellido_nombre_parcial2.py o apellido_nombre_parcial2.ipynb.
- El archivo deberá contener las funciones requeridas en los ejercicios 1 y 2 y la ejecución del programa deberá mostrar en pantalla las respuestas solicitadas.
- Está permitido usar los códigos desarrollados en los prácticos.

Ejercicio 1: Considerar una variable aleatoria X con función de densidad f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 30\,(x^2 - 2x^3 + x^4) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Seleccionar una variable aleatoria Y adecuada para aplicar el método de aceptación y rechazo simular X. Explicar para este caso particular en qué consiste el método, desarrollar los cálculos necesarios y escribir el pseudocódigo correspondiente. Indicar cuál es el número esperado de iteraciones que realiza el algoritmo hasta generar un valor de X.

b) Suponer que en una iteración del método, la variable Y toma el valor $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad de que este valor sea aceptado?

c) ▶ Escribir un código en Python `ejercicio1()` que genere valores de X según a). Utilizar este código para estimar el valor esperado de X con 10000 simulaciones.

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria discreta con probabilidad de masa dada por:

$$P(X = i) = p(1-p)^{i-10} \qquad i = 10, 11, 12, \ldots$$

donde $0 < p < 1$.

a) Dar una fórmula recursiva para calcular $P(X = i + 1)$ en términos de $P(X = i)$.

b) Explicar cómo se construye un algoritmo para generar valores de X utilizando el método de la transformada inversa. Utilizar a) en el algoritmo.

c) ► Escribir un código `codigoX(p)` que genere valores de X dada la probabilidad p.

d) ► Para $p = 0.5$, estimar $E[X]$ con 10000 simulaciones.

PARCIAL 2

15 DE MAYO DE 2025

En todos los ejercicios se deben explicar los pasos que se siguen en la resolución. Se puede utilizar los apuntes del teórico.

Ejercicio 3: Considerar una variable aleatoria X con función de densidad f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x-1}{6} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{6} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Dar la función de distribución acumulada $F(x)$. Explicar cómo se aplica el método de la transformada inversa para obtener un algoritmo que simula valores de X y escribir el seudocódigo correspondiente.

b) Considerar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Calcular explícitamente el valor de X que devuelve el algoritmo para cada uno de los siguientes valores de U:

- $U = 0.1$,
- $U = 0.25$
- $U = 0.8$.

Ejercicio 4: El siguiente código simula valores de una variable aleatoria discreta X.

```
def variableX():
    U = random()
    V = random()
    if U < 0.5:
        I = int( V * 5) + 1
    elif U < 0.9:
        I = int(V * 2) + 2
    else:
        I = 3
    return I
```

a) Explicar paso a paso cómo se construyen cuatro variables Bernoulli en el método del alias que sirvan para generar valores de X. La explicación debe referirse a esta variable en particular. Explicitar las cuatro variables Bernoulli.

b) Escribir el seudocódigo que utiliza estas cuatro variables Bernoulli para generar la variable X.

Modelos y Simulación - Parcial 2 2025

Tomás Achával Perera
45085146 D.

Ejercicio 1:

a) Para este caso, selecciono $Y \sim U(0,1)$ como variable p/el método de aceptación y rechazo. Sea f_Y la f.d.p de Y.

El método consiste en generar un valor de Y y aceptarlo con probabilidad $\frac{f(Y)}{C \cdot f_Y(Y)} = \frac{f(Y)}{C} \cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(Y) = \frac{f(Y)}{C}$ pues $f_Y(Y) = \mathbb{I}_{(0,1)}(Y)$
(y siempre será $0 \leq y \leq 1$)

donde C es un valor tal que

$$\frac{f(Y)}{f_Y(Y)} \leq C \quad \forall y \text{ donde } f(Y) > 0$$

Entonces veamos para los casos donde $f(Y) > 0$, esto es $0 \leq Y \leq 1$

$$\frac{f(Y)}{f_Y(Y)} = 30(y^2 - 2y^3 + y^4)$$

Para encontrar su valor máximo, vemos el máximo de $y^4 - 2y^3 + y^2$ con su derivada:

$$(y^4 - 2y^3 + y^2)' = 4y^3 - 6y^2 + 2y = 4y(y^2 - 1.5y + \tfrac{1}{2})$$

que tiene raíces en $y = 0$ y en $\frac{1.5 \pm \sqrt{(-1.5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Veamos entonces los valores de f en sus extremos y puntos críticos:

$f(0) = 0$
$f(\frac{1}{2}) = 1.875 \rightarrow$ máximo.
$f(1) = 0$

Por lo tanto $C = 1.875 \Rightarrow \frac{f(Y)}{f_Y(Y)} \leq C \quad \forall y \text{ tq } f(Y) > 0$

Ejercicio 1b)

Si $Y = \frac{1}{3}$, será aceptado con probabilidad

$$16\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^4\right) \approx 0.79$$

Así entonces el pseudocódigo del algoritmo está dado por

```
While True:
    Generar Y ~ U(0,1)
    IF RANDOM() < f(Y)/1.875:
        RETURN Y
```

$$\frac{30(y^2 - 2y^3 + y^4)}{1.875} = 16(y^2 - 2y^3 + y^4)$$

Bien

y su número esperado de iteraciones es $\boxed{C = 1.875.}$

Código: Bien resuelto

Ejercicio 2: $P(X=i) = p(1-p)^{i-10}$ $i=10,11,\ldots$ con $0<p<1$

a) $P(X=i+1) = p(1-p)^{i+1-10} = p(1-p)^{i-10}(1-p)$

$$\boxed{= (1-p)\,P(X=i)}$$

b) Observemos que la distribución acumulada F de X está dada por

$$F(x) = \sum_{i=10}^{x} P(X=i) = P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + \cdots + P(X=x) \quad \text{para } x \geq 10$$

$$= P(X=10) + (1-p)P(X=10) + (1-p)(1-p)P(X=10) + \cdots + (1-p)^{x-10}P(X=10)$$

Para utilizar el método de la transformada inversa, necesitamos $F^{-1}(U)$ para obtener, es decir, queremos conocer x tal que $F(x) = U$ donde $U \sim U(0,1)$

Como F es una función escalonada, podemos generar U y luego, partiendo de $F(x)$ con $x=10$, aumentar los valores de x hasta que $F(x-1) \leq U \leq F(x)$

En este caso devolver x, pues $F^{-1}(U) = x$.

Para el algoritmo se calcula $P(X=10)$ y para todos los valores sucesivos se utiliza $P(X=x+1) = (1-p)\,P(X=x)$, acumulándolos en una variable que represente la distribución acumulada.

En pseudo código, quedaría, dada una probabilidad p.

```
X=10
PROB = P(X=10)
F = PROB
U = RANDOM()
WHILE U ≥ F:
    PROB = (1-P) * PROB      → P(X=i+1) = (1-p)(P(X=i))
    F += PROB
    X += 1
RETURN X
```

Bien.

Modelos y Simulación - Parcial 2 parte 2

Tomás Achával [illegible]
45085796

Ejercicio 3:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x-1}{6} & si\ 1 \leq x < 2 \\ 3/6 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

a) Dar $F(x)$ y explicar cómo se aplica el método de la transf. inversa y escribir el pseudo código correspondiente.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Veamos los casos:

Si $x < 0$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \boxed{0}$

Si $0 \leq x < 1$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{6}(x-0) = \boxed{\frac{x}{6}}$

$$\star \rightarrow \int_{1}^{x} \frac{2t-1}{6}\,dt = \frac{x^2-x}{6}$$

Si $1 \leq x < 2$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{6}\,dt + \int_{1}^{x} \frac{2t-1}{6}\,dt = \frac{1}{6} + \int_{1}^{x} \frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}(x-1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \boxed{\frac{x^2-x+1}{6}}$$

Si $2 \leq x < 3$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} 1/6\,dt + \int_{1}^{2} \frac{2t-1}{6}\,dt + \int_{2}^{x} 3/6\,dt$$

$$\star \searrow = \frac{1}{6} + \frac{2^2-2}{6} + \frac{3}{6}(x-2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{x}{2} - 1 = \boxed{\frac{x-1}{2}}$$

Si $x \geq 3$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{6} + \frac{2^2-1}{6} + \int_{2}^{3} \frac{3}{6}\,dt = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}(3-2) = \boxed{1}$$

Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x/6 & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2-x+1}{6} & si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{x-1}{2} & si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Como F es monótona creciente en F^{-1} = $\{x : 0 < F(x) < 1\}$, tiene inversa en este conjunto. Sea U tq $0 \le U < 1$, luego si x es tal que $F(x) = U$, tenemos: como $F(1) = \frac{1}{6}$, $F(2) = \frac{1}{2}$ y $F(3) = 1$, podemos separar en casos:

Si $U < \frac{1}{6}$, $U = \frac{x}{6} \Rightarrow \boxed{x = 6U}$

Si $\frac{1}{6} \le U < \frac{1}{2}$, $U = \frac{x^2 - x + 1}{2} \Rightarrow 2U = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2U = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2U - \frac{3}{4} = (x - \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2U - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} = x}$

1,3 / 1,5

Si $\frac{1}{2} \le U < 1$,

$U = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2U + 1}$

Luego

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} 6U & \text{si } U < \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{2U - 3/4} & \text{si } \frac{1}{6} \le U < \frac{1}{2} \\ 2U + 1 & \text{si } U > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{para } 0 \le U < 1$$

El algoritmo de la transformada inversa consiste entonces de realizar los siguientes pasos:

```
def Algoritmo():
    U = random()
    if U < 1/6:
        return 6U
    elif U < 1/2:
        return 1/2 + sqrt(2U - 3/4)
    else:
        return 2U + 1
```

b) El algoritmo devuelve los siguientes valores para los valores dados de U:

$U = 0.1 \rightarrow 6(0.1) = \boxed{0.6}$

$U = 0.25 \rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{2*(0.25) - 3/4} \approx \boxed{1.366}$ =1

$U = 0.8 \rightarrow 2(0.8) + 1 = \boxed{2.6}$

~~0,1~~

0,7 / 1

HOJA 2 - PARTE 2

PÁGINA 2 MyS - PARTE 2

Tomás Achával Bruzzone
45083145 A.

Ejercicio 4)

```
def variableX():
    U = random()
    V = random()
    if U < 0.5:
        I = int(V*5) + 1
    elif U < 0.9:
        I = int(V*2) + 2
    else:
        I = 3
    return I
```

a) Explicar paso a paso cómo se construyen cuatro variables Bernoulli en el método del alias que sirven para generar valores de X. La explicación debe referirse a esta variable en particular. Explicitar las 4 variables Bernoulli.

b) Escribir el pseudocódigo que utiliza estas 4 variables Bernoulli para generar la variable X.

Primero veamos $P(X=i)$ para la variable X dada.

Para $U < 0.5$, $I = \text{int}(V*5)+1$, como $0 \leq \text{INT}(V*5) \leq 4$ → $\text{INT}(U*5) \sim U\{0,4\}$,

entonces $1 \leq I \leq 5$ c/u con igual probabilidad.

Para $0.5 \leq U < 0.9$,

$I = \text{int}(V*2)+2$ como $\text{INT}(U*2) \sim U\{0,1\}$

Entonces $2 \leq I \leq 3$ c/u con igual probabilidad

Para $U > 0.9$,

$I = 3$

Entonces tenemos
$P(X=1) = 0.5 * 1/5 = \boxed{\frac{1}{10}}$

$P(X=2) = 0.5 * 1/5 + 0.4 * \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$

$P(X=3) = 0.5 * 1/5 + 0.4 * \frac{1}{2} + 0.1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{4}{10}}$

$P(X=4) = 0.5 * \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{10}}$

$P(X=5) = 0.5 * 1/5 = \boxed{\frac{1}{10}}$

$P(X=n) = 0$ si $n \notin \{1,2,3,4,5\}$

✓ 0,8 / 0,8

Con estas probabilidades podemos usar el método de alias de la siguiente forma.

Primero, como X toma valores en $\{1,2,3,4,5\}$, multiplicamos estos valores por $n-1=4$, obteniendo
"las probabilidades de"

$4 \cdot P(X=1) = 4/10$ → "tabla" de valores

$4 \cdot P(X=2) = 12/10$ Donde el menor valor está en $X=1$ y el mayor valor en $X=3$

$4 \cdot P(X=3) = 16/10$

$4 \cdot P(X=4) = 4/10$

$4 \cdot P(X=5) = 4/10$

Tenemos entonces hasta ahora una v.a.

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 4/10 \\ 3 & \text{con probabilidad } 6/10 \end{cases}$$

Restando estas probabilidades de la tabla, tenemos

x	1	2	3	4	5		
$4 \cdot P(X=x)$	4/10	12/10	16/10	4/10	4/10	← tabla del paso 1	suma = 4
	0	12/10	10/10	4/10	4/10	← tabla del paso 2	suma = 3

Ahora el menor valor está en $x=4$ y el mayor en $x=2$. Agregamos la v.a.

$$X_2 = \begin{cases} 4 & \text{con probabilidad } 4/10 \\ 2 & \text{con probabilidad } 6/10 \end{cases}$$

Actualizamos la tabla restando estos valores:

x	1	2	3	4	5	
$4 \cdot P(X=x)$	4/10	12/10	16/10	4/10	4/10	
	0	12/10	10/10	4/10	4/10	
	0	6/10	1	0	4/10	→ tabla del paso 3, suma = 2

1/1

La menor está en $x=5$ y la mayor en $x=3$, obteniendo la v.a.

$$X_3 = \begin{cases} 5 & \text{con probabilidad } 4/10 \\ 3 & \text{con probabilidad } 6/10 \end{cases}$$

La tabla del paso 4, tras restar estas probabilidades es

x	1	2	3	4	5
	0	6/10	4/10	0	0

y su suma es 1, por lo que agregamos la v.a. $X_4 = \begin{cases} 2 & \text{con prob. } 6/10 \\ 3 & \text{con prob. } 4/10 \end{cases}$

Así podremos usar el método del alias con las variables aleatorias X_1, X_2, X_3 y X_4.

TOMÁS ACHAVAL BECERRA
45085746 A.

b) EL PSEUDO CÓDIGO DEL MÉTODO DEL ALIAS CON LAS VARIABLES BERNOULLI DEFINIDAS EN EL PASO a) ESTÁ DADO POR:

```
def ALIAS X():

    I = INT(RANDOM()* 4)

    V = RANDOM()

    IF I=0:
        IF V < 0.4: RETURN 1
        ELSE:       RETURN 3
    ELIF I=1:
        IF V < 0.4: RETURN 4
        ELSE:       RETURN 2
    ELIF I=2:
        IF V < 0.4: RETURN 5
        ELSE:       RETURN 3
    ELSE:
        IF V < 0.6: RETURN 2
        ELSE:       RETURN 3
```

0,7 | 0,7