45085746 - LCC

TOMÁS ACHÁVAL BECERRO

Ejercicio 1)

TOMBOLA: 9.47 HORA: 5:23 p.m.

Ejercicio 9)

Sea $\Sigma=\{@,\&\}$. Supongamos $f: L\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ es Σ-efectivamente computable. Suponga además que $(@,\&)\in L$ y $f(@,\&) = @@@$. Pruebe que el conjunto

$$L' = \{(\alpha,\beta)\in L : f(\alpha,\beta) = \alpha\alpha\alpha\}$$

es Σ-efectivamente enumerable.

Solución:

Como $L'\neq\emptyset$ (pues $(@,\&)\in L'$), utilizaré el lema:

Un conjunto $S\subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ Σ-mixto no vacío es efectivamente enumerable sii existe un procedimiento efectivo $\mathbb{P}$ que lo enumera i.e. $\mathbb{P}$ cumple las siguientes propiedades:

1 - El conjunto de datos de entrada de $\mathbb{P}$ es ω
2 - $\mathbb{P}$ siempre termina.
3 - El conjunto de datos de salida de $\mathbb{P}$ es S.

- Sea $\leq$ un orden total sobre Σ.
- Como f es Σ-E.C., existe un procedimiento efectivo $\mathbb{P}_f$ que computa a f.

Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo con datos de entrada $x\in\omega$ dado por:

Etapa 1: Si $x=0$, detenerse y devolver $(@,\&)$.

Etapa 2: Asignar
$$\alpha \longleftarrow *^{\leq}((x)_1)$$
$$\beta \longleftarrow *^{\leq}((x)_2)$$
$$K \longleftarrow (x)_3$$

Etapa 3: Ejecutar K pasos del procedimiento $\mathbb{P}_f$ con dato de entrada (α,β).
Si se detuvo dando un dato de salida, asignar d = dato de salida de $\mathbb{P}_f$.
Si no se detuvo, detenerse y devolver $(@,\&)$.

Etapa 4: Si $d=\alpha\alpha\alpha$, detenerse y devolver (α,β).
Si no, detenerse y devolver $(@,\&)$.

VEAMOS QUE $\mathbb{P}$ ES UN PROCEDIMIENTO EFECTIVO QUE ENUMERA A L'.

1 - LOS DATOS DE ENTRADA DE $\mathbb{P}$ SON ω. ESTO ES CLARO POR SU DEFINICIÓN.

2 - $\mathbb{P}$ SIEMPRE TERMINA:

PARA CUALQUIER DATO DE ENTRADA x, LA CANTIDAD DE PASOS QUE REALIZA $\mathbb{P}$ ESTÁ LIMITADA POR VALORES FINITOS TALES COMO SU CANTIDAD DE ETAPAS Y LOS $(x)_3$ PASOS QUE EJECUTA DE $\mathbb{P}_f$. CONCLUYENDO CON LA ETAPA 4 QUE OBLIGATORIAMENTE SE DETIENE (DE NO HABERSE DETENIDO ANTES)

3 - EL CONJUNTO DE DATOS DE SALIDA DE $\mathbb{P}$ ES L'. DIGAMOS D = CONJUNTO DE DATOS DE SALIDA DE $\mathbb{P}$.

$(D \subseteq L')$ SEA (α, β) UN DATO DE SALIDA DE $\mathbb{P}$.

a) SI $(\alpha, \beta) = (@, \&)$, $(\alpha, \beta) \in L'$.

b) SI $(\alpha, \beta) \neq (@, \&)$, ENTONCES $\mathbb{P}$ SE DETUVO EN EL PRIMER PASO DE LA ETAPA 4. ESTO SIGNIFICA QUE $\mathbb{P}_f$ SE DETUVO CON DATO DE ENTRADA (α, β) Y DEVOLVIÓ $d = \alpha\alpha\alpha$ COMO DATO DE SALIDA. COMO $\mathbb{P}_f$ COMPUTA A f, $\underbrace{(\alpha, \beta) \in L = D_f \text{ y } f(\alpha, \beta) = d = \alpha\alpha\alpha}$.

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) \in L'.$$

$(L' \subseteq D)$ SEA (α, β) UN ELEMENTO FIJO DE L'. COMO $\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in \Sigma^*$, Y LA FUNCIÓN $*^{\leq}$ ES SOBREYECTIVA EN Σ^*, ENTONCES:

- $\exists K_1 \in \omega$ TQ $*^{\leq}(K_1) = \alpha$
- $\exists K_2 \in \omega$ TQ $*^{\leq}(K_2) = \beta$

COMO $(\alpha, \beta) \in L'$, $(\alpha, \beta) \in L$ Y ~~$f(\alpha,\beta)$~~ $f(\alpha, \beta) = \alpha\alpha\alpha$, SABEMOS QUE EXISTE $K_3 \in \mathbb{N}$ TQ EL PROCEDIMIENTO $\mathbb{P}_f$ SE DETIENE TRAS K_3 PASOS CON DATO DE ENTRADA (α, β) Y DEVUELVE $\alpha\alpha\alpha$ COMO DATO DE SALIDA.

ES CLARO ENTONCES QUE EJECUTAR $\mathbb{P}$ CON DATO DE ENTRADA $x = \langle K_1, K_2, K_3, 0, \dots \rangle$ DEVOLVERÁ EL DATO (α, β) i.e. $(\alpha, \beta) \in D$ PUES $(x)_1 = \alpha$, $(x)_2 = \beta$ Y $(x)_3$ SON SUFICIENTES PASOS PARA QUE $\mathbb{P}_f$ SE DETENGA DEVOLVIENDO $\alpha\alpha\alpha$ COMO DATO DE SALIDA $\therefore$ $\mathbb{P}$ FRENARÁ EN LA ETAPA 4 DEVOLVIENDO (α, β)

DE ESTA FORMA PODEMOS DECIR QUE $\mathbb{P}$ ENUMERA A L' Y $\therefore$ L' ES Σ-EFECTIVAMENTE ENUMERABLE.