100

10

N° de hojas entregadas:

Matemática Discreta I

Parcial 4: Junio 9, 2022
Tema 1

Nombre y apellido: TOMÁS ACHÁVAL

Correo UNC: TOMASACHAVAL@MI.UNC.EDU.AR

COMISIÓN: 2 DNI: 45085146

Observación: La comisión debe ser tal como figura en Guaraní. En caso de no estar inscritos en Guaraní deben poner la comisión a la cual asisten.

Ejercicios:

(1) (25%) Probar utilizando congruencias que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

(2) (45%) Dada la ecuación $34\,x \equiv 6\,(60)$,

(a) (30%) calcular todas las soluciones enteras posibles de la ecuación,

(b) (15%) determinar cuáles son las soluciones enteras de la ecuación que se encuentran en el intervalo $[-40, 40)$.

(3) (30%) Calcular el resto de la división de $74^{111} - 80^{2025}$ por 37.

HOJA N°

FECHA

09/06/2022 PARCIAL 4 - CONGRUENCIAS

TOMÁS ACHÁVAL - COM 2

45085146 (A).

Ejercicio 1:

• $\forall n \in \mathbb{N}$ probar que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

• Notemos que $3^{2n+2} = 3^{2n}.3^2$ y $2^{6n+1} = 2^{6n}.2$

• Ahora tenemos que $3^2 \equiv (-2)\ (11)$ pues $11 | 3^2-(-2)=11$

• Podemos ver también que $2^6 = 64 \equiv (-2)\ (11)$ pues $11 | 64-(-2)=66=11.6$

• Por transitividad, si $3^2 \equiv (-2) \equiv 2^6\ (11)$ entonces $3^2 \equiv 2^6\ (11)$, podemos elevar ambos lados a la misma potencia y obtenemos $(3^2)^n = 3^{2n} \equiv 2^{6n} = (2^6)^n$

• Luego tenemos $3^2 \equiv (-2)\ (11)$ y $3^{2n} \equiv 2^{6n}\ (11)$ donde podemos multiplicar las congruencias obteniendo $3^{2n}.3^2 \equiv 2^{6n}.(-2)\ (11)$

$$\Leftrightarrow 3^{2n+2} \equiv -2^{6n+1}\ (11) \Rightarrow 11 | 3^{2n+2} - (-2^{6n+1})$$

$$\Leftrightarrow 11 | 3^{2n+2} + 2^{6n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

B

Ejercicio 2:

a) Encontrar todas las soluciones enteras de:

$$34x \equiv 6\ (60)$$

A_1 • La ecuación tendrá solución $\Leftrightarrow mcd(34,60) | 6$

A_2 • Veamos $mcd(60,34)$ con el algoritmo de Euclides.

Algoritmo = ① $(a,0)=a$ ② $(b,c)=(c,r)$ donde r es el resto de dividir b por c. $b>c$

A_3 • $(60,34)=(34,26)=(26,8)=(8,2)=(2,0)=2=mcd(60,34)$ y $2|6 \Rightarrow$ hay solución.

$60 \,|\, 34$: cociente 1, resto 26 (a)
$34 \,|\, 26$: cociente 1, resto 8 (b)
$26 \,|\, 8$: cociente 3, resto 2 (c)
$8 \,|\, 2$: cociente 4, resto 0

A_4 • Notemos que $2 = 26 - 8.3$ (por ©)

$2 = 26-(34-26).3$ (por ⓑ)

$2 = 26.4 - 34.3$

$2 = (60-34).4 - 34.3$ (por ⓐ)

☆ $2 = 60.4 - 34.7$

A_5 • También notemos que $6 = 2.3 \overset{☆}{=} 3(60.4-34.7)$

$6 = 12.60 - 34.21$

A_6 • Tenemos que $12.60 \equiv 0\ (60)$ por lo tanto $6 \equiv -34.21 \equiv -21.34\ (60)$

Reflexividad

A_7 • $6 \equiv -21.34\ (60) \Leftrightarrow 34.\underbrace{(-21)}_{x} \equiv 6\ (60)$

A_8 • Luego todas las soluciones serán de la forma

$x = (-21) + \frac{60}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -21 + 30k,\ k \in \mathbb{Z}}$

B

NOTA

b) EN $[-40,40]$ LAS SOLUCIONES SERÁN:

$$\left.\begin{array}{l} X_0 = -21 + 0.30 = -21 \\ X_1 = -21 + 1.30 = 9 \\ X_2 = -21 + 2.30 = 39 \end{array}\right\} \text{Soluciones.}$$

3) CALCULAR EL RESTO DE $74^{111} - 80^{2025}$ AL DIVIDIRLO POR 37.

- NOTEMOS QUE ESTO ES EQUIVALENTE A RESOLVER:

$$74^{111} - 80^{2025} \equiv X \ (37) \quad \text{DONDE } 0 \leq X < 37.$$

- TAMBIEN NOTEMOS QUE:

$$74 \equiv 0 \ (37) \ \text{PUES } 37 \mid 74 - 0 = 37.2$$

$$\Rightarrow 74^{111} \equiv 0^{111} \ (37)$$

$$\Leftrightarrow 74^{111} \equiv 0 \ (37)$$ POR LO QUE PODEMOS RESTAR ESTA CONGRUENCIA DE LA ORIGINAL, QUEDANDO

$$74^{111} - 74^{111} - 80^{2025} \equiv X - 0 \ (37)$$

$$\Leftrightarrow -80^{2025} \equiv X \ (37)$$

- NOTEMOS QUE $80 \equiv 6 \ (37)$ PUES $37 \mid 80 - 6 = 74 = 37.2$

POR LO TANTO $-80^{2025} \equiv -6^{2025} \equiv X \ (37)$

- NOTEMOS TAMBIEN QUE $6^2 \equiv (-1) \ (37)$ PUES $37 \mid 6^2 - (-1) = 37$

POR LO TANTO $-6^{2025} = -(6^2)^{1012} . 6$ PUES $2.1012 + 1 = 2025$ Y $6^{2025} = 6^{2.1012+1} = (6^2)^{1012} . 6$

- AHORA, COMO $6^2 \equiv (-1) \ (37)$

TENEMOS $-6^{2025} \equiv -(6^2)^{1012} . 6 \equiv -(-1)^{1012} . 6 \equiv X \ (37)$

- $(-1)^{1012}$ POR POTENCIA PAR $= 1$

TENEMOS $-1 . 6 \equiv X \ (37)$

$\Rightarrow -6 \equiv X \ (37) \quad -6 \equiv 31 \ (37)$

$\Rightarrow 31 \equiv X \ (37)$ PUES $37 \mid 31 - (-6)$ Y TRANSITIVIDAD. $0 \leq 31 < 37$ ✓

- FINALMENTE

SI $74^{111} - 80^{2025} \equiv X \equiv 31 \ (37)$

POR TRANSITIVIDAD ENTONCES

$$74^{111} - 80^{2025} \equiv 31 \ (37)$$

- 31 ES EL RESTO DE DIVIDIR $74^{111} - 80^{2025}$ POR 37.

NOTA