ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LC) - CÁLCULO I (LMA)
PARCIAL 1

8 de abril de 2022

Nombres y Apellido: Tomás Achaval Berzano	Comisión: 3

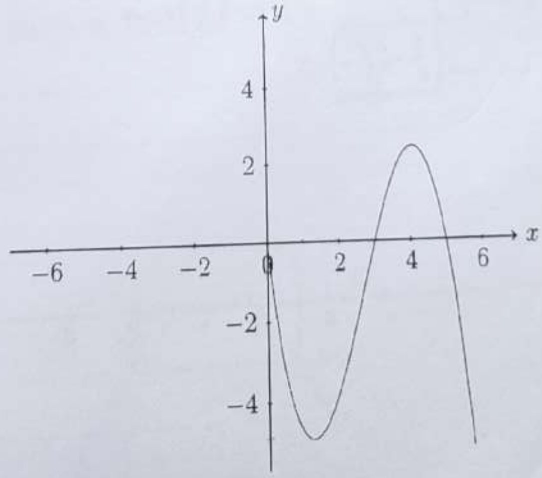
A.

1	2	3	4	TOTAL	NOTA
2.5	2.5	2.5	2.5		10 (Diez)

- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- No está permitido el uso de calculadoras.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

- **Ejercicio 1** *(2.5 Pts.)* Determine todos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades. Exprese el resultado como un intervalo o como unión de intervalos y dibújelos en la recta real.
  (a) *(1.25 Pts.)* $|x-1| > |3x+2|$
  (b) *(1.25 Pts.)* $\frac{-3x+5}{(6-x)(x+3)} \geq 0$

- **Ejercicio 2** *(2.5 Pts.)*
  (a) *(0.5 Pts.)* Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x}$.
  (b) *(1 Pto.)* Determinar el dominio de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y exprese la fórmula de dichas funciones de manera explícita.
  (c) *(0.5 Pts.)* Decida si f es par, impar o ninguna de las dos.
  (d) *(0.5 Pts.)* Dado el gráfico de la función $h(x)$ para $x \geq 0$ (mirar figura), complete el gráfico para $x < 0$ de manera que la función resultante sea par o impar (realice los dos gráficos por separado).



HOJA 1

PARCIAL 1

TOMÁS ACHÁVAL

Comisión 3

Ejercicio 1:

A) $|x-1| > |3x+2|$ TENGO QUE $|x| < A \Rightarrow -A < x < A$

ENTONCES $\underbrace{-|x-1| < 3x+2}_{A} \underbrace{< |x-1|}_{B}$ OBTENGO Y RESUELVO LOS CASOS A y B.

CASO A: $-|x-1| < 3x+2$ → PROPIEDAD $|x| > A \Rightarrow x < -A$ ó $x > A$

$\Leftrightarrow |x-1| > (-1)(3x+2)$ ENTONCES $x-1 < -(-3x-2)$ ó $x-1 > -3x-2$

$|x-1| > -3x-2$

$x-1 < 3x+2$ ó $4x > -1$

$-3 < 2x$ ó $x > -\frac{1}{4}$

POR LO TANTO LA SOLUCIÓN DEL CASO A ES: $-\frac{3}{2} < x$ ó

$\left(-\frac{1}{4}, \infty\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

$= \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

CASO B: $3x+2 < |x-1|$ → PROP. $|x| > A \Rightarrow x < -A$ ó $x > A$

POR LO TANTO TENEMOS QUE $x-1 < -(3x+2)$ ó $x-1 > 3x+2$

Y DESPEJAMOS $x-1 < -3x-2$ ó $-3 > 2x$

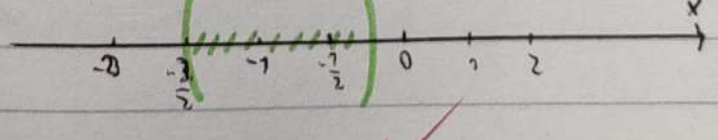
$4x < 1$ ó $-\frac{3}{2} > x$

$x < -\frac{1}{4}$ ó

Y TENEMOS SOLUCIÓN CASO B $= \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$

POR LO QUE LA SOLUCIÓN DE $|x-1| > |3x+2| = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right) \cap \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$

$= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



NOTA

b) $\dfrac{-3x+5}{(6-x)(x+3)} \geq 0$ NOTEMOS QUE $x \neq 6$ Y $x \neq -3$ ✓

• NOTEMOS TAMBIÉN QUE LA ECUACIÓN ES IGUAL A 0 CUANDO $-3x+5=0$

$\Leftrightarrow -3x=-5$

$\boxed{x=\frac{5}{3}}$ ES SOLUCIÓN ✓

• VEAMOS QUE LA ECUACIÓN SERÁ >0 CUANDO:

• CASO A: $-3x+5>0$ Y $(6-x)(x+3)>0$

$\Leftrightarrow -3x>-5$ Y DE NUEVO $6-x>0$ Y $x+3>0$ ó $6-x<0$ Y $x+3<0$

$\boxed{x<\frac{5}{3}}$ Y $\boxed{6>x}$ Y $\boxed{x>-3}$ ó $\underbrace{6<x \text{ Y } x<-3}_{\text{ABSURDO} = \emptyset}$

$=$ $(-3,6)$ ✓

SOL. CASO A $= \left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cap (-3,6)$

$= \left(-3, \frac{5}{3}\right)$ ✓

• CASO B: $-3x+5<0$ Y $(6-x)(x+3)<0$ ✓

$\Leftrightarrow 5<3x$ Y AHORA $(6-x)>0$ Y $(x+3)<0$ ó $(6-x)<0$ Y $(x+3)>0$

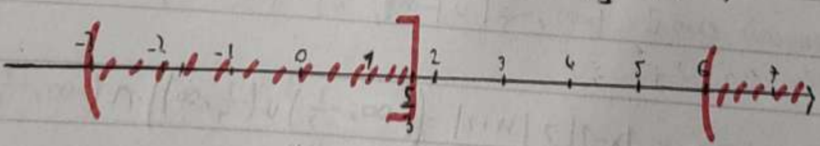
$\frac{5}{3}<x$ Y $\Leftrightarrow \underbrace{6>x \text{ Y } x<-3}_{(-\infty,-3)}$ ó $6<x$ Y $x>-3$

$\left(\frac{5}{3},\infty\right)$ $\cap$ $(-\infty,-3) \cup (6,\infty)$

SOLUCIÓN CASO B: $(6,\infty)$

POR LO TANTO LA SOLUCIÓN DE $\dfrac{-3x+5}{(6-x)(x+3)} \geq 0$ ES $= \left\{\frac{5}{3}\right\} \cup \left(-3,\frac{5}{3}\right) \cup (6,\infty)$ ✓

$= \left(-3,\frac{5}{3}\right] \cup (6,\infty)$



✓

HOJA N°2

TOMÁS ACHÚCARRO - com 3

• Ejercicio 2: $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $g(x)=\frac{1}{1+x}$

A) $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\geq 0\}$ ✓

$\Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Rightarrow -1\geq x$ ó $x\geq 1$

Por lo tanto reescribo $Dom(f)$ como $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1 \vee x\geq 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ ✓

$Dom(g)=\{x\in\mathbb{R} \mid 1+x\neq 0\} \Leftrightarrow \{x\in\mathbb{R} \mid x\neq -1\}=\mathbb{R}-\{-1\}$ ✓

B) • $f\circ g=f(g(x))=f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\boxed{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2-1}}$ y $Dom(f\circ g)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq -1 \wedge \left(\frac{1}{1+x}\right)^2-1\geq 0\}$ ✓

• Despejo $\left(\frac{1}{1+x}\right)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1+x}\right|\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x}\leq -1$ ó $\frac{1}{1+x}\geq 1$ → $(1+x)$ es positivo ×

× $(1+x)$ es negativo

No siempre es cierto

$1\geq -1(1+x)$ ó $1\geq 1+x$

$1\geq -1-x$ ó $0\geq x$

$x\geq -2$ ó

$(-2,\infty)\cup(-\infty,0)=\mathbb{R}$

No siempre!

Por lo tanto $Dom(f\circ g)=\mathbb{R}-\{-1\}$ ✗

• $g\circ f=g(f(x))=g(\sqrt{x^2-1})=\boxed{\frac{1}{1+\sqrt{x^2-1}}}$ $Dom(g\circ f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\geq 0\}$

Nunca va a ser 0 ya que la raíz cuadrada de un número siempre es positiva. ✓

lo cual indica $|x|\geq 1$

$\Leftrightarrow x\leq -1$ ó $x\geq 1$ ✓

Podemos reescribir $Dom(g\circ f)$ como $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1 \vee x\geq 1\}$ ✓

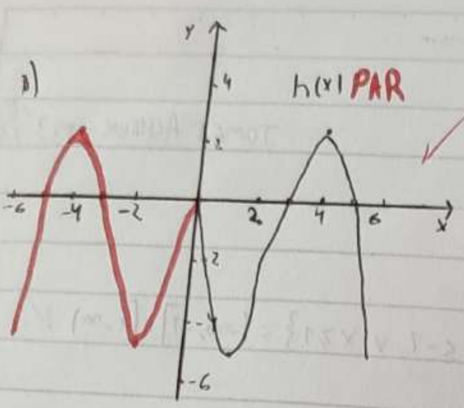
C) $f(x)$ es par, impar o ninguna?

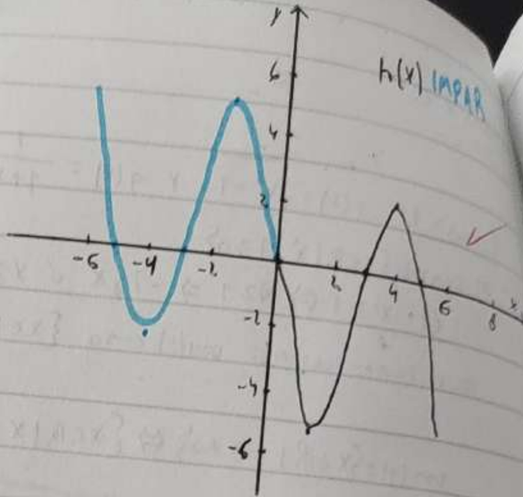
Veamos $f(x)\overset{?}{=}f(-x)=\sqrt{(-x)^2-1}=\sqrt{x^2-1}=f(x)$ ✓ La función $f(x)$ es PAR ✓

D) $h(x)$ par e impar (próx página)

NOTA

b)





· Ejercicio 3: $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt{9-x^2}$

a) $Dom(f) = D = \{x \in \mathbb{R} / 9-x^2 \geq 0\} \Leftrightarrow \{x\in\mathbb{R} / -3 \leq x \leq 3\}$ ✓

$9 \geq x^2 \Leftrightarrow 3 \geq |x|$

b) La raíz cuadrada siempre será positiva, y sólo toma valores ≥ 0, por lo que

$Im(f) \overset{?}{=} \{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\} = [0,\infty)$ pero el valor más grande que alcanzará será $\sqrt{9-0}=3$, ✓

por lo que $Im(f)=\{x\in\mathbb{R}/0\leq x\leq 3\}$ ✓

c) $f: D \to \mathbb{R}$ · ¿Es inyectiva? No, ya que $\sqrt{9-x_1^2}=\sqrt{9-x_2^2} \Leftrightarrow 9-x_1^2 = 9-x_2^2 \Leftrightarrow |x_1|=|x_2|$ ✓

Hay más de un $x \in D$ con la misma imágen. $\quad x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$

· ¿Es sobreyectiva? No, ya que el conjunto de llegada $\mathbb{R}$ es mayor a $Im(f)$

$\mathbb{R} - [0,3] \neq \emptyset$ ✓

· Por lo tanto tampoco es biyectiva ✓

d) Para que $f(x)$ resulte inyectiva, basta con restringir su dominio a valores de x sólo positivos o sólo negativos, podría ser $\{x\in\mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3\}$ o también $\{x\in\mathbb{R} / -3 \leq x \leq 0\}$ y en ambos casos la función resultaría inyectiva. ✓ ✓

e) $f: A \to B$ con $A=[0,3]$ y $B=[0,3]$ → con estos valores es biyectiva. ✓

$f(x)=\sqrt{9-x^2}$ implica que $y=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 9-x^2$ tiene una inversa cuya fórmula

$x^2 = 9-y^2$ está dada por $f^{-1}(x)=\sqrt{9-x^2}$

$x = \sqrt{9-y^2}$

→ No pongo valor absoluto porque $x \geq 0$ ✓

· Verifico $f(f^{-1}(x)) = \sqrt{9-(\sqrt{9-x^2})^2}$

$= \sqrt{9-9-x^2}$

$= \sqrt{x^2} = x$ ✓

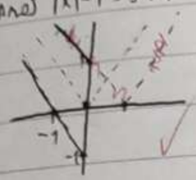
HOJA 3

• Ejercicio 4

Tomás Achával - com3

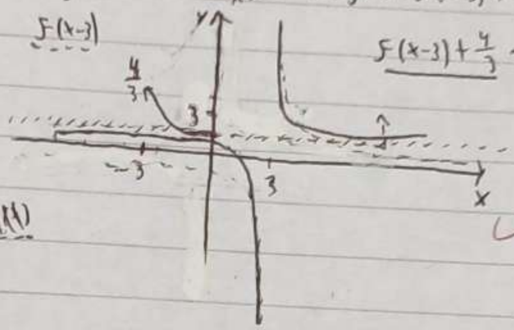
$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-3} + \frac{4}{3} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -\sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Veamos $|x| - 1 = f(x)$



Veamos $\frac{1}{x-3} + \frac{4}{3} = g(x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $g(x) = f(x-3) + \frac{4}{3}$

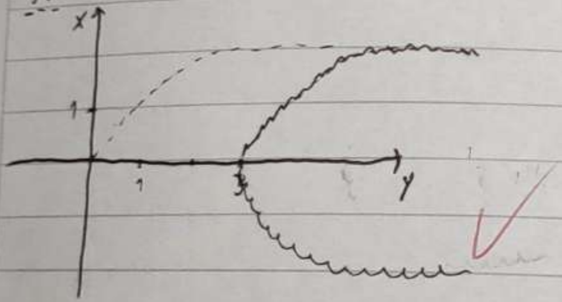
$f(x-3) + \frac{4}{3}$ → eleva la función ↑



y veamos

$f(x) = -\sqrt{x-3}$

$g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = -g(x-3)$



Por lo tanto tenemos el gráfico de $f(x)$