Tomás Achával Bertero
45083146 ✓.

Ejercicio N° 1

Probar que

si $f: L \to L'$ un isomorfismo, $a \in At(L) \Rightarrow f(a) \in At(L')$

Prueba:

Por definición, sabemos que

1) $a \in At(L) \Rightarrow \nexists b \in L$ tq $b <_L a$ y $b >_L 0^L$ $\boxed{y\ 0 < a}$ ($<$ siendo el orden $\leq$ y $\neq$)

2) f iso $\Rightarrow x \leq_L y \Leftrightarrow f(x) \leq_{L'} f(y)$ (f mantiene el orden)

3) $\forall y \in L', \exists x \in L$ tq $f(x) = y$ (f es sobreyectiva)

Ahora, asumiendo $a \in At(L)$,

Supongamos que $f(a) \notin At(L')$, esto significa que

① $\exists c \in L'$ tq $c <_{L'} f(a)$ & $c >_{L'} 0^{L'}$ $\boxed{o\ 0 = a}$ ¿y este caso?

Por ③, sabemos que

$\exists d \in L$ tq $f(d) = c$, y que $f(0^L) = 0^{L'}$

como f mantiene el orden, $f(0) \leq f(x)\ \forall x \in L$ y por lo tanto $f(0^L) = 0^{L'}$

Esto significa que

$f(d) <_{L'} f(a)$ y $f(d) >_{L'} f(0^L)$

Por ②, esto ocurre sí y solo sí

$d <_L a$ y $d >_L 0^L$

Pero esto contradice ①,

pues $\exists d$ tq $d <_L a$ y $d >_L 0^L \Rightarrow a \notin At(L)$, Absurdo de asumir que $f(a) \notin At(L')$ ∎

contrarrecíproca de ①

2

HOJA N°

FECHA

Tomás Achá'val Borello

45085746 [illegible].

Ejercicio N° 3

Probar que en toda Álgebra de Boole,

$$a \leq x \Rightarrow x = a \vee (x \wedge \neg a)$$

Prueba: Asumimos $a \leq x$, $a, x \in B$ álgebra de Boole.

Veamos

$$a \vee (x \wedge \neg a) = (a \vee x) \wedge (a \vee \neg a) = x \wedge 1 = x$$

Distributividad de $\vee$ con $\wedge$ (válido porque toda álgebra de Boole es distributiva.)

Por $a \leq x$ y def de $\neg a$

$1 \geq x \ \forall x \in B.$

Luego por transitividad del $=$, si $a \leq x$ entonces

$$\boxed{a \vee (x \wedge \neg a) = x} \blacksquare$$

2

HOJA Nº

FECHA

Tomás Achával [illegible]

45085146 A.

Ejercicio Nº 2

Probar que en todo reticulado,

$$x \leq z \text{ e } y \leq w \Rightarrow x \wedge y \leq z \wedge w$$

① ②

Prueba: Asumimos ① y ②

Sabemos que $x \wedge y \leq z \wedge w$

$\Leftrightarrow$ → propiedad que sale de la def. de $\wedge$.

$$\underbrace{x \wedge y \leq z}_{} \quad \& \quad \underbrace{x \wedge y \leq w}_{}$$

def $\wedge$ ① def $\wedge$ ②

$$x \wedge y \leq x \leq z \quad \& \quad x \wedge y \leq y \leq w$$

$\therefore$ $\therefore$ → transitividad del $\leq$.

$$x \wedge y \leq z \checkmark \quad \& \quad x \wedge y \leq w \checkmark$$

De esta forma queda demostrado que

Si $x \leq z$ & $y \leq w$, entonces

$x \wedge y \leq z$ & $x \wedge y \leq w$ y por lo tanto $\boxed{x \wedge y \leq z \wedge w}$.

$\boxed{2}$