

ANÁLISIS NUMÉRICO I (LM-LMA) - ANÁLISIS NUMÉRICO (LC)  
PARCIAL 2

8 de Junio de 2023

Nombre y Apellido: <u>TOMÁS ACHUAL BENTERO</u>	Comisión: <u>1</u> - 2 - 3 Carrera: <u>LC</u> - LM - LMA
--	---

1	2	3	4	TOTAL	NOTA
2.75	2.75	2.5	0.75	<del>7.75</del>	<del>8</del>

8.75      9

- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

• Ejercicio 1

Sea  $f(x) = \sin(x)$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ . Encontrar la mejor aproximación de  $f$  en el sentido de cuadrados mínimos por un polinomio de grado menor o igual que 1.

• Ejercicio 2

Encontrar una regla de cuadratura tal que  $\int_0^1 f(t) dt \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$ , de modo que resulte exacta para todas las funciones de la forma

$$f(x) = ae^x + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

• Ejercicio 3

Considerar el sistema  $Ax = b$ , donde  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  y  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

1. Determinar si la sucesión generada por el método de Jacobi es convergente justificando su respuesta.
2. Encontrar  $\ell$  tal que  $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\ell^k}{1-\ell} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$ , donde  $x^*$  es solución del sistema.
3. Calcular el número de iteraciones  $k$  tal que  $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-5}$ , donde  $x^{(0)} = (0, 0)$ .

• Ejercicio 4

1. De la definición del grado de precisión de una regla de integración.
2. ¿Es la regla del punto medio una regla de integración gaussiana? Justifique su respuesta.



## PARCIAL 2 - ANI

TOMÁS ACHAVAL BERNARD

LCC-COM7 45085146

## • EJERCICIO N° 7:

$$f(x) = \sin(x) \text{ en } [0, \pi/2]$$

QUEREMOS APROXIMAR  $f(x)$  EN  $[0, \pi/2]$  EN EL SENTIDO DE CUADRADOS MÍNIMOS, CON UN POLINOMIO  $p(x) = ax + b$ , DE GRADO  $\leq 1$ .

• PARA ELLO, QUEREMOS MINIMIZAR LO SIGUIENTE:

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \int_0^{\pi/2} (\sin(x) - p(x))^2 dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx - 2 \int_0^{\pi/2} \sin(x)p(x) dx + \int_0^{\pi/2} p(x)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx - 2 \int_0^{\pi/2} ax \sin(x) + b \sin(x) dx + \int_0^{\pi/2} a^2 x^2 + 2abx + b^2 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx - 2a \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx - 2b \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx + a^2 \int_0^{\pi/2} x^2 dx + 2ab \int_0^{\pi/2} x dx + b^2 \int_0^{\pi/2} 1 dx \end{aligned}$$

PARA MINIMIZAR  $E(a, b)$  DEBEMOS BUSCAR  $a$  Y  $b$  TAL PUE  $\frac{\partial E}{\partial a} = 0$  Y  $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$ . ✓

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2 \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx + 2a \int_0^{\pi/2} x^2 dx + 2b \int_0^{\pi/2} x dx = 0$$

DIVIDIENDO TODO POR 2 Y REORDENANDO, OBTENEMOS

$$\textcircled{1} \quad a \int_0^{\pi/2} x^2 dx + b \int_0^{\pi/2} x dx = \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx + 2a \int_0^{\pi/2} x dx + 2b \int_0^{\pi/2} 1 dx = 0$$

DIVIDIENDO TODO POR 2 Y REORDENANDO OBTENEMOS

$$\textcircled{2} \quad a \int_0^{\pi/2} x dx + b \int_0^{\pi/2} 1 dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \quad \checkmark$$

PARA DESPEJAR  $a$  Y  $b$  DE  $\textcircled{1}$  Y  $\textcircled{2}$  NECESITAMOS:

$$\int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{(\pi/2)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{(\pi/2)^3}{3} = \frac{\pi^3}{24} \quad \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 1 \quad \checkmark$$

$$x = u \quad \sin(x) = u' \\ \Rightarrow u = -\cos(x)$$

$$uv = x(-\cos(x)) = -x \cos(x)$$

$$\text{NOTA } uv' = 1 \cdot (-\cos(x)) = -\cos(x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx &= \left( -x \cos(x) - \int (-\cos(x)) dx \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \left( -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left( -0 \cos(0) + \sin(0) \right) = 1 \quad \checkmark \\ \int uv' &= uv - \int uv' \end{aligned}$$



$$\frac{24}{M^3} \cdot \frac{M^2}{8} = \frac{3M}{M}$$

CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS, PODEMOS REESCRIBIR

$$\textcircled{1} a \cdot \frac{M^3}{24} + b \cdot \frac{M^2}{8} = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{M^3}{24} = 1 - b \cdot \frac{M^2}{8} \Rightarrow a = \frac{24}{M^3} \left(1 - b \cdot \frac{M^2}{8}\right) \Rightarrow a = \frac{24}{M^3} - \frac{3M}{M} \uparrow$$

debe ir "b"

$$\textcircled{2} a \cdot \frac{M^2}{8} + b \cdot \frac{M}{2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{M^3} - \frac{3}{M}\right) \frac{M^2}{8} + \frac{M}{2} b = 1$$

$$\Rightarrow \frac{24M^2}{8M^3} - \frac{3M^2}{8M} + \frac{M}{2}b = 1 \Rightarrow \frac{M}{2}b = \frac{-3}{M} + \frac{3M}{8} + 1$$

Por lo tanto obtenemos por la mejor aproximación a  $f(x)$  en el sentido de los cuadrados mínimos está dada por

$$\Rightarrow b = \frac{2}{M} \left(\frac{-3}{M} + \frac{3M}{8} + 1\right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{-6}{M^2} + \frac{6}{8} + \frac{2}{M} = \frac{3}{4} + \frac{2}{M} - \frac{6}{M^2}$$

$$p(x) = \left(\frac{24}{M^3} - \frac{3}{M}\right)x + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{M} - \frac{6}{M^2}\right)$$

Ejercicio N°2: REGLA DE CUADRATURA DE LA FOLIA  $\int_0^1 f(t) dt \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$ ,

$$f(x) = ae^x + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), a, b \in \mathbb{R}$$

NOTAR QUE  $f(x) \in \langle e^x, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \rangle$  por lo tanto si nuestra regla es exacta para el conjunto

$\{e^x, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\}$ , entonces será exacta p/ toda función de la forma de  $f(x)$ .

Queremos pues

$$\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1 \quad \text{SEA IGUAL A } A_0 f(0) + A_1 f(1), \text{ es decir}$$

$$e = A_0(e^0) + A_1(e^1) \Rightarrow e = A_0 + eA_1$$

Arroja error

y también podemos

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Big|_0^1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{2}{\pi} - \sin(0) \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

de esta forma, podemos ver

$$\frac{2}{\pi} = A_0 f(0) + A_1 f(1) = A_0 \cos(0) + A_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= A_0 \quad \therefore \quad A_0 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow e = \frac{2}{\pi} + eA_1$$

$$\Rightarrow A_1 = \left(e - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow A_1 = 1 - \frac{2}{\pi e}$$

y la regla será

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \frac{2}{\pi} f(0) + \left(1 - \frac{2}{\pi e}\right) f(1)$$

NOTA

AUX:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2} \sin(\pi x)$$

$$= \frac{1}{2} \sin(\pi x)$$

$$\sin(\pi x) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x)$$

$$\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$$



## Ejercicio N° 3

TOMÁS ACHÁVALA BENEGUIO  
LSC-COM1 45085146 Q.

$$Ax=b, \quad A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1) LA SUCESIÓN GENERADA POR JACOBI ES CONVERGENTE?

SÍ, PORQUE ATENDIENDO QUE LA SUCESIÓN GENERADA POR JACOBI CONVERGE A LA SOLUCIÓN DE  $Ax=b$  PARA CUALQUIER VECTOR  $x^0$  INICIAL, ESTO ES DEBIDO A QUE LA MATRIZ  $A$  ES DIAGONALMENTE DOMINANTE.  $\begin{pmatrix} 3 > 2 \\ 2 > 1 \end{pmatrix}$  LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL (EN VAL. ABS), SON MAYORES A LA SUMA DEL RESTO DE LOS ELEMENTOS EN SUS RESPECTIVAS FILAS. (EN VAL. ABS)

2) ENCONTRAR  $\rho$  TAL QUE  $\|x^k - x^*\|_\infty \leq \frac{\rho^k}{1-\rho} \|x^1 - x^0\|_\infty$ ,  $x^*$  SOLUCIÓN DE  $Ax=b$

SABEMOS QUE SI  $Ax^*=b$  Y SE UTILIZA EL MÉTODO DE JACOBI O G-S ~~PARA~~

CON  $\|M^{-1}N\| < 1$ , ENTONCES  $\exists C$  TA  $\|x^{k+1} - x^*\| \leq C \|x^{(k+1)} - x^k\|$ , CON  $C = \frac{\|M^{-1}N\|}{1 - \|M^{-1}N\|}$

TAMBIÉN PODEMOS VER QUE

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &= \|M^{-1}Nx^k + M^{-1}b - M^{-1}Nx^{k-1} - M^{-1}b\| \\ &= \|M^{-1}N(x^k - x^{k-1})\| \leq \|M^{-1}N\| \|x^k - x^{k-1}\| \end{aligned}$$

REPITIENDO ESTE PROCESO, HASTA QUE  $k-1=0$ , HABRÁ  $K$  ITERACIONES, POR LO QUE

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|M^{-1}N\|^{k-1} \|x^1 - x^0\|, \text{ ASÍ, } \checkmark$$

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\|M^{-1}N\|}{1 - \|M^{-1}N\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}N\|}{1 - \|M^{-1}N\|} \cdot \|M^{-1}N\|^{k-1} \|x^1 - x^0\| = \frac{\|M^{-1}N\|^k}{1 - \|M^{-1}N\|} \|x^1 - x^0\|$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Y } \|M^{-1}N\|_\infty = 2/3 \quad \text{Y POR LO TANTO } \rho = \frac{2}{3}$$

$$\|x^k - x^*\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} \|x^1 - x^0\|$$

CONTINUO EN HOJA 3



# Ejercicio N° 3.3)

Número de iteraciones  $K$  tal que

$$\|x^K - x^*\|_{\infty} \leq 10^{-5} \quad x^{(0)} = (0,0)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = M^{-1} N x^k + r^{-1} b$$

por lo que  $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1/3} \|(5/3, 3/2) - (0,0)\|_{\infty} \leq 10^{-5}$

$$\Rightarrow \frac{2^k}{3^k} \cdot 3 \cdot \frac{5}{3} \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{5 \cdot 2^k}{3^{k-1}} \leq 10^{-5} \Rightarrow 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leq 10^{-5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leq 10^{-6}$$

por lo tanto

$$K \geq \log_{\frac{2}{3}}(10^6) + 1$$

$$K-1 \leq \log_{\frac{2}{3}}(10^6)$$

$$K \leq \log_{\frac{2}{3}}(10^6) + 1$$



## Ejercicio N° 4:

### 1. DEFINICIÓN DE <sup>GRADO DE</sup> PRECISIÓN DE UNA REGLA DE INTEGRACIÓN.

DEF: EL GRADO DE PRECISIÓN DE UNA REGLA DE INTEGRACIÓN ESTÁ DADO POR EL GRADO DEL POLINOMIO HASTA EL CUAL EL ERROR DE LA REGLA ES 0. MÁS GENERALMENTE, ESTÁ DADO POR LA CANTIDAD DE ELEMENTOS DE LA BASE DEL ESPACIO DE FUNCIONES QUE APROXIMA LA REGLA, PARA LOS CUALES DICHA REGLA ES EXACTA.

2. LA REGLA DEL PUNTO MEDIO SI ES UNA REGLA DE INTEGRACIÓN GAUSSIANA. LA MISMA SE OBTIENE DE MEDIANTE LA REGLA DEL RECTÁNGULO DADA POR

$\int_a^b f(x) dx \sim f(a)(b-a)$ , REEMPLAZANDO EL PUNTO EN EL CUAL EVALUAMOS  $f$ , POR UNA RAÍZ DE UN POLINOMIO DE GRADO 1, DISTINTA A 1 EN  $(a, b)$ . DICHO POLINOMIO ESTÁ DADO POR  $\Phi_1(x) = x - B_1$ , DONDE  $B_1 = \frac{\int_a^b x \cdot 1 dx}{\int_a^b 1 dx} = \frac{(b^2 - a^2)/2}{(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)/2}{(b-a)} = \frac{(b+a)}{2}$

$\therefore \Phi_1(x) = x - \frac{(a+b)}{2}$

CON RAÍZ EN  $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$  Y POR LO TANTO LA FORMA

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \sim f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$

SERÁ PRECISA HASTA GRADO  $2n+1$  ( $n=0 \Rightarrow 2n+1=1$ )