1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c
15	15	12	8	8	10	10	10	10

98 10

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: Achával Becerra Tomás
COMISIÓN: 4

Algebra II - 2do Cuatrimestre 2022
Segundo Parcial (24/11/2022)- Tarde

1. (30pts) Sea $\mathbb{R}[t]_2$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2, y sea $T : \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}[t]_2$ la transformación lineal dada por

$$T(p(x)) = p'(x) + 2p(x).$$

(a) Calcular el núcleo y la imagen de T.

(b) Dadas las bases $\mathcal{B}_1 = \{1+t, t+t^2, -t^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t^2+t+1, t^2+1\}$ de $\mathbb{R}[t]_2$, calcular $[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

---

2. (20pts) Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la siguiente transformación lineal:

$$T(x,y,z) = (x-y, -x+2y-z, -y+z), \qquad x,y,z \in \mathbb{C}.$$

(a) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios.

(b) Decidir si T es diagonalizable. En caso que lo sea, dar una base B de $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz de T en dicha base sea diagonal.

---

3. (20pts) Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos la función $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2.$$

(a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno.

(b) Dado el subespacio W generado por los vectores $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$, encontrar una base ortogonal de W.

---

4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

(a) (10pt) Si una matriz $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tiene tres autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

(b) (10pt) Existe un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^5)^*$ y $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

(c) (10pt) Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si A^t lo es.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

ÁLGEBRA LCC

TOMÁS ACHKUAR BENTEO

45085146 - COM 4.

EJERCICIO 1:

$T: \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ TRANSFORMACIÓN LINEAL DADA POR

$$T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$$

a) CALCULAR NÚCLEO E IMAGEN DE T.

SEA $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \Rightarrow \boxed{Nu(T)} = \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2$ TAL QUE $T(ax^2+bx+c) = 0\}$

$= \{ax^2+bx+c$ tq $(ax^2+bx+c)' + 2(ax^2+bx+c) = 0\}$

$= \{ax^2+bx+c$ tq $2ax+b+2ax^2+2bx+c = 0\}$

NOTAR QUE $\mathbb{R}[x]_2$ ES ISOMORFO A $\mathbb{R}^3$ PUES $B = \{x^2, x, 1\}$ ES UNA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}[x]_2$ Y $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, LLEVANDO EL ISOMORFISMO A LA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}^3$ &, $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\therefore ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \simeq (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$= \{ax^2+bx+c$ tq $2a\,x^2 + (2a+2b)x + b+c = 0\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $(2a, 2a+2b, b+c) = (0,0,0)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $2a=0 \wedge 2a+2b=0 \wedge b+c=0\}$

$= \boxed{\{(0,0,0)\}} \simeq \{0 \in \mathbb{R}[x]_2\}$ $\therefore Nu(T) = 0 \in \mathbb{R}[x]_2$

MANTENIENDO DICHO ISOMORFISMO,

$Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $f(a,b,c) = (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $(2a, 2a+2b, b+c) = (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \\ y = 2a+2b \Rightarrow y = \frac{2x}{2} + 2b \Rightarrow b = \frac{y-x}{2} \\ z = b+c \Rightarrow z = \frac{y-x}{2} + c \Rightarrow c = \frac{2z-y+x}{2} \end{cases}$

$= \{(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} - \frac{x}{2}, z - \frac{y}{2} + \frac{x}{2}), x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + y(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + z(0,0,1), x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0,0,1) \rangle \to$ SI SON LI ENTONCES SON BASE DE $\mathbb{R}^3$

BASTA VER QUE EL det de los VECTORES COMO COLUMNAS ES $\neq 0$, PUES SI HUBIESE DOS VECTORES LD ENTONCES SERÍA $= 0$.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{MATRIZ TRIANGULAR}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\therefore$ LOS VECTORES SON BASE DE $\mathbb{R}^3$ $\therefore Im(T) \simeq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$\boxed{Im(T) = \mathbb{R}[x]_2}$

VERIFICO QUE $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3 = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$

$= 0 + 3$ ✓

b) Dadas las bases

$$B_1=\{\underbrace{1+t}_{v_1},\ \underbrace{t+t^2}_{v_2},\ \underbrace{-t^2}_{v_3}\} \text{ y } B_2=\{\underbrace{1+t}_{w_1},\ \underbrace{t^2+t+1}_{w_2},\ \underbrace{t^2+1}_{w_3}\} \text{ de } \mathbb{R}[t]_2, \text{ calcular}$$

$[T]_{B_1B_2}$

Para esto, utilizaré

$$[T]_{B_1B_2} = C(\mathcal{E},B_2)\,[T]_{\mathcal{E}}\,C(B_1,\mathcal{E})$$
$$= C(B_2,\mathcal{E})^{-1}\,[T]_{\mathcal{E}}\,C(B_1,\mathcal{E})$$

donde C es la matriz "cambio de base" y $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}[t]_2$, $\mathcal{E}=\{x^2,x,1\}=\{t^2,t,1\}$

Calculo cada factor por separado,

- $C(B_1,\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} [v_1]_{\mathcal{E}} & [v_2]_{\mathcal{E}} & [v_3]_{\mathcal{E}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $C(\mathcal{E},B_2)=C(B_2,\mathcal{E})^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$C(B_2,\mathcal{E})$

Al llevar $C(B_2,\mathcal{E})$ a una MERF, este lado de la matriz será $C(B_2,\mathcal{E})^{-1}$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

(lado derecho: $C(B_2,\mathcal{E})^{-1}$)

$\therefore\ C(B_2,\mathcal{E})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C(\mathcal{E},B_2)$

- $[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} [T(x^2)]_{\mathcal{E}} & [T(x)]_{\mathcal{E}} & [T(1)]_{\mathcal{E}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

$T(x^2) = (x^2)' + 2x^2 = 2x^2 + 2x$

$T(x) = (x)' + 2x = 2x + 1$

$T(1) = (1)' + 2\cdot 1 = 0 + 2 = 2$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así,

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = [T]_{B_1B_2}}$$

2- SEA $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ LA TRANSFORMACION LINEAL

$T(x,y,z) = (x-y, -x+2y-z, -y+z) \quad x,y,z \in \mathbb{C}$

TOMÁS ACHAVAL BECERRA

45085746 - com 4.

a) CALCULAR AUTOVALORES DE T Y SUS AUTOESPACIOS. SEA $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ UNA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{C}^3$.

SEA T UNA T.L $T: V \to V$ Y C ALGUNA BASE DE V

$\Rightarrow$ λ ES UN AUTOVALOR $\Leftrightarrow$ λ ES SOLUCIÓN DE $\overbrace{\det(xI_d - [T]_C)}^{P_T(x)} = 0$

PARA ELLO, NECESITO $[T]_C = \begin{pmatrix} [T(1,0,0)]_C & [T(0,1,0)]_C & [T(0,0,1)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

LUEGO EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE T SERÁ

$$\boxed{P_T(x)} = \det\left(xI_{d_3} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2(x-2) - (x-1) - (x-1)$$

$$= (x-1)^2(x-2) - 2x+2 = (x^2-2x+1)(x-2) - 2x+2$$

$$= x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 - 2x + 2$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$\boxed{= x(x^2-4x+3) = P_T(x)}$$

LUEGO $P_T(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2 \therefore 1$ Y 2 SON LOS AUTOVALORES DE T.

SEA V_λ EL AUTOESPACIO ASOCIADO AL AUTOVALOR λ, ENTONCES

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z) = 1 \cdot (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y, -x+2y-z, -y+z) = (x,y,z)\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y = x \Rightarrow y = 0 \\ -x+2y-z = y \Rightarrow -x-z = 0 \Rightarrow z = -x \\ -y+z = z \Rightarrow y = 0 \end{cases}\right\}$

$\therefore V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } y = 0 \wedge z = -x\}$

$= \{(x,0,-x),\ x \in \mathbb{C}\}$

$= \{x(1,0,-1) \in \mathbb{C}\} = \langle (1,0,-1) \rangle \Rightarrow \dim V_1 = 1$

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z) = (2x,2y,2z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y, -x+2y-z, -y+z) = (2x,2y,2z)\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y = 2x \Rightarrow x = -y \\ -x+2y-z = 2y \Rightarrow -x = z \\ -y+z = 2z \Rightarrow z = -y \end{cases}\right.$ $\quad x = -y,\ x = -z,\ z = -y$

CONTINÚO EN LA SIGUIENTE PÁGINA $\longrightarrow$

Luego $P_T(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+3)=0$

$\Rightarrow x=0 \vee x^2-4x+3=0 \quad \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow x=1,\ x=3$

$\therefore$ Los autovalores serán

$\boxed{0,1 \text{ y } 3}$ 5pts

Sea V_λ el autoespacio asociado al autovalor λ, luego

$V_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y,-x+2y-z,-y+z)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y=0 \Rightarrow x=y \\ -x+2y-z=0 \Rightarrow z=y \\ -y+z=0 \Rightarrow z=y \end{cases}\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } x=y \wedge z=y\}$

$=\{(y,y,y), y\in\mathbb{C}\}=\boxed{\langle(1,1,1)\rangle}$ $\dim V_0=1$ ✓

$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z)=1\cdot(x,y,z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y,-x+2y-z,-y+z)=(x,y,z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y=x \Rightarrow y=0 \\ -x+2y-z=y \Rightarrow -x-z=0 \Rightarrow x=-z \quad z=-x \\ -y+z=z \Rightarrow y=0 \end{cases}\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } y=0 \wedge z=-x\}$

$=\{(x,0,-x), x\in\mathbb{C}\}=\boxed{\langle(1,0,-1)\rangle}$ $\dim V_1=1$ ✓

$V_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z)=(3x,3y,3z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y,-x+2y-z,-y+z)=(3x,3y,3z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y=3x \Rightarrow -y=2x \Rightarrow y=-2x \\ -x+2y-z=3y \Rightarrow -x-4x-z=3\cdot-2x \Rightarrow -5x-z=-6x \Rightarrow z=x \\ -y+z=3z \Rightarrow +2x+x=3x \Rightarrow x \text{ es libre} \end{cases}\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } y=-2x \wedge z=x\}$

$=\{(x,-2x,x), x\in\mathbb{C}\}=\boxed{\langle(1,-2,1)\rangle}$ $\dim V_3=1$ ✓ 7pts

b) De esta forma, sabemos por teorema que, como $\dim V_0+\dim V_1+\dim V_3=3=\dim\mathbb{C}^3$, entonces T es diagonalizable

Como los vectores son LI, la base $B=\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$ es una base de autovectores en la cual

$[T]_B=\begin{pmatrix}[T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B & [T(v_3)]_B \\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ ✓

* Los vectores son LI pues

8pts

$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=-1-2+2-1=-2\neq 0$

Total ej 2) = 20 pts

Ejercicio 3:

Tomás Achával Becerro

ID. 45085746 - com 4

$\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-EV, $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tq.

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2$$

a) Probar que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es un producto interno. Para ello, debe cumplir:

$u, v, w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$
i) $\langle v+u, w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle u,w\rangle$
ii) $\langle cv, w\rangle = c\langle v,w\rangle$
iii) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle} = \langle w,v\rangle$ → en $\mathbb{R}$, conjugar no afecta.
iv) $\langle v,v\rangle > 0$ si $v \neq 0$ y $\langle v,v\rangle = 0$ si $v = 0$

Probemos

i) $\langle (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle = \langle (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle$

$= (x_1+x_2)x_3 - 2(x_1+x_2)y_3 - 2x_3(y_1+y_2) + 5y_3(y_1+y_2) + (z_1+z_2)z_3$

$= x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1y_3 - 2x_2y_3 - 2x_3y_1 - 2x_3y_2 + 5y_3y_1 + 5y_3y_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

$= x_1x_3 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 5y_3y_1 + z_1z_3 + x_3x_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5y_3y_2 + z_2z_3$

$= \langle (x_1,y_1,z_1),(x_3,y_3,z_3)\rangle + \langle (x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle$ ✓

ii)

$\langle c(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = \langle (cx_1,cy_1,cz_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle$

$= cx_1x_2 - c2x_1y_2 - c2x_2y_1 + c5y_1y_2 + cz_1z_2$

$= c(x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2)$

$= c\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle$ ✓

iii) $\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 - 2y_2x_1 - 2y_1x_2 + 5y_2y_1 + z_2z_1$

$= x_2x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2y_1 + z_2z_1$

$= \langle (x_2,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_1)\rangle$ ✓

iv) $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = x\cdot x - 2xy - 2yx + 5y\cdot y + z\cdot z$

$= x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2$

$= x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2$

$= \underbrace{(x-2y)^2 + y^2 + z^2}$ $(= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 + z^2)$

Como cada término de la suma es un cuadrado (≥ 0) entonces $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle \geq 0 \quad \forall x,y,z$

Al ser únicamente sumas de números positivos o iguales a 0, entonces

$\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = 0 \Leftrightarrow x-2y=0 \Rightarrow x=0$, $y=0$, $z=0$ $\therefore \langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle > 0 \quad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$ ✓

y $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ ✓

• De esta forma, queda demostrado que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es un producto interno pues cumple i), ii), iii), iv). ✓

b) DADO $W = \{\overbrace{(1,1,1),(0,1,1)}^{v_1, v_2}\}$ ENCONTRAR UNA BASE ORTOGONAL DE W.

COMO $W \subseteq \mathbb{R}^3$, PODEMOS APLICAR GRAM-SCHMIDT PARA ENCONTRAR UNA BASE ORTOGONAL DE $\underset{\uparrow}{W}$. $\{w_1, w_2\}$

$w_1 = v_1$

$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$ ASÍ,

$w_1 = (1,1,1)$ ⟶ Debía tomar el P. int. del ej. 3 a)

$w_2 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1),(1,1,1) \rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

DE ESTA MANERA, ASEGURAMOS QUE $\boxed{B = \{(1,1,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\}}$ ES UNA BASE ORTOGONAL DE W.

4. VERDADERO O FALSO.

a) $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ TIENE 3 AUTOVALORES DISTINTOS, ENTONCES ES DIAGONALIZABLE. **VERDADERO**

PARA TODA $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, $\exists T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq $[T]_B = A$, PARA ALGUNA BASE B. LUEGO LOS 3 AUTOVALORES DE A SERÁN AUTOVALORES DE T (POR TEOREMA). LA EXISTENCIA DE 3 AUTOVALORES DISTINTOS IMPLICA LA EXISTENCIA DE 3 AUTOVECTORES LI ENTRE SÍ, PUES CADA UNO SE ENCUENTRA EN UN AUTOESPACIO DISTINTO. DE ESTA FORMA, PUEDO OBTENER B UNA BASE DE AUTOVECTORES $\underset{\text{TEO.}}{\Longrightarrow}$ T ES DIAGONALIZABLE $\therefore$ A ES DIAGONALIZABLE.

(EN $\mathbb{R}^3$, 3 VECTORES LI FORMAN UNA BASE)

b) EXISTE UN ISOMORFISMO ENTRE $(\mathbb{R}^5)^*$ Y $M_{2\times3}\,\mathbb{C}$. FALSO. ~~$\dim(M_{2\times3}(\mathbb{C})) = 6$~~

SABEMOS QUE $\dim(\mathbb{R}^{5*}) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5$ Y $\dim(M_{2\times3}(\mathbb{C})) = 2 \times 3 = 6$ $\Big\} \neq$ Y COMO $\dim(\mathbb{R}^{5*}) \neq \dim(M_{2\times3}(\mathbb{C}))$ ENTONCES NO EXISTE UN ISOMORFISMO.

c) UNA MATRIZ CUADRADA A ES INVERSIBLE SI Y SOLO SI A^T LO ES. **VERDADERO**.

SABEMOS QUE A INVERSIBLE $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

A INVERSIBLE $\Rightarrow A^T$ INVERSIBLE

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(A^T) \neq 0$ ✓ PUES $\overset{*}{\det}(A) = \det(A^T)$.

A^T INVERSIBLE $\Rightarrow A$ INVERSIBLE

$\det(A^T) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ ✓ PUES $\overset{*}{\det}(A^T) = \det(A^{T^T}) = \det(A)$