1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c
15	15	12	8	8	10	10	10	10

98

10

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: ACHÁVAL BELLO TOMÁS
COMISIÓN: 4

Algebra II - 2do Cuatrimestre 2022
Segundo Parcial (24/11/2022)- Tarde

1. (30pts) Sea $\mathbb{R}[t]_2$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2, y sea $T : \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}[t]_2$ la transformación lineal dada por

$$T(p(x)) = p'(x) + 2p(x).$$

(a) Calcular el núcleo y la imagen de T.

(b) Dadas las bases $\mathcal{B}_1 = \{1+t, t+t^2, -t^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t^2+t+1, t^2+1\}$ de $\mathbb{R}[t]_2$, calcular $[T]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

2. (20pts) Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la siguiente transformación lineal:

$$T(x, y, z) = (x - y, -x + 2y - z, -y + z), \qquad x, y, z \in \mathbb{C}.$$

(a) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios.

(b) Decidir si T es diagonalizable. En caso que lo sea, dar una base B de $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz de T en dicha base sea diagonal.

3. (20pts) Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Consideremos la función $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2.$$

(a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno.

(b) Dado el subespacio W generado por los vectores $\{(1,1,1), (0,1,1)\}$, encontrar una base ortogonal de W.

4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

(a) (10pt) Si una matriz $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tiene tres autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

(b) (10pt) Existe un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^5)^*$ y $M_{2\times3}(\mathbb{C})$.

(c) (10pt) Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si A^t lo es.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

ÁLGEBRA LCC

TOMÁS ACHKUAL BENEDO
45085146 - COM 4.

EJERCICIO 1:

$T: \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ TRANSFORMACIÓN LINEAL DADA POR

$$T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$$

a) CALCULAR NÚCLEO E IMAGEN DE T.

SEA $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \Rightarrow \boxed{Nu(T)} = \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2$ TAL QUE $T(ax^2+bx+c)=0\}$

$= \{ax^2+bx+c$ tq $(ax^2+bx+c)' + 2(ax^2+bx+c) = 0\}$

$= \{ax^2+bx+c$ tq $2ax+b+2ax^2+2bx+c=0\}$

NOTAR QUE $\mathbb{R}[x]_2$ ES ISOMORFO A $\mathbb{R}^3$ PUES $B=\{x^2,x,1\}$ ES UNA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}[x]_2$ y $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, LLEVANDO EL ISOMORFISMO A LA BASE CANÓNICA DE $\mathbb{R}^3$ $C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ $\therefore ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]_2 \simeq (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$= \{ax^2+bx+c$ tq $2ax^2+(2a+2b)x+b+c=0\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $(2a, 2a+2b, b+c) = (0,0,0)\}$

$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $2a=0 \wedge 2a+2b=0 \wedge b+c=0\}$

$= \boxed{\{(0,0,0)\}} \simeq \{0 \in \mathbb{R}[x]_2\}$ $\therefore Nu(T) = 0 \in \mathbb{R}[x]_2$

MANTENIENDO DICHO ISOMORFISMO,

$Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $f(a,b,c) = (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $(2a, 2a+2b, b+c) = (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2} \\ y = 2a+2b \Rightarrow y = \frac{2x}{2}+2b \Rightarrow b = \frac{y-x}{2} \\ z = b+c \Rightarrow z = \frac{y-x}{2}+c \Rightarrow c = \frac{2z-y+x}{2} \end{cases}$

$= \{(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}-\frac{x}{2}, z-\frac{y}{2}+\frac{x}{2}), x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + y(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) + z(0,0,1), x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), (0,0,1) \rangle \to$ SI SON LI ENTONCES SON BASE DE $\mathbb{R}^3$

BASTA VER QUE EL det DE LOS VECTORES COMO COLUMNAS ES $\neq 0$, PUES SI HUBIESE DOS VECTORES LD ENTONCES SERÍA $=0$.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{MATRIZ TRIANGULAR}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\therefore$ LOS VECTORES SON BASE DE $\mathbb{R}^3$ $\therefore Im(T) \simeq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $\boxed{Im(T) = \mathbb{R}[x]_2}$

VERIFICO QUE $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3 = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$

$= 0 + 3$ ✓

b) Dadas las bases

$$B_1=\{\underbrace{1+t}_{v_1},\ \underbrace{t+t^2}_{v_2},\ \underbrace{-t^2}_{v_3}\} \text{ y } B_2=\{\underbrace{1+t}_{w_1},\ \underbrace{t^2+t+1}_{w_2},\ \underbrace{t^2+1}_{w_3}\} \text{ de } \mathbb{R}[t]_2, \text{ calcular}$$

$[T]_{B_1B_2}$

Para esto, utilizaré

$$[T]_{B_1B_2}=C(\mathcal{E},B_2)[T]_{\mathcal{E}}\,C(B_1,\mathcal{E})$$
$$=C(B_2,\mathcal{E})^{-1}[T]_{\mathcal{E}}\,C(B_1,\mathcal{E})$$

donde C es la matriz "cambio de base" y $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}[t]_2$, $\mathcal{E}=\{x^2,x,1\}=\{t^2,t,1\}$

Calculo cada factor por separado,

- $C(B_1,\mathcal{E})=\begin{pmatrix}[v_1]_{\mathcal{E}} & [v_2]_{\mathcal{E}} & [v_3]_{\mathcal{E}}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

- $C(\mathcal{E},B_2)=C(B_2,\mathcal{E})^{-1}=$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{f_1-f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&1&0&-1\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[f_3+f_1]{f_2+f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)$$

(la primera mitad de la matriz de partida es $C(B_2,\mathcal{E})$)

Al llevar $C(B_2,\mathcal{E})$ a una MERF, este lado de la matriz será $C(B_2,\mathcal{E})^{-1}$

$$\xrightarrow{f_3-f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-f_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

(la segunda mitad de la última matriz es $C(B_2,\mathcal{E})^{-1}$)

$$\therefore C(B_2,\mathcal{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=C(\mathcal{E},B_2)$$

- $[T]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}[T(x^2)]_{\mathcal{E}} & [T(x)]_{\mathcal{E}} & [T(1)]_{\mathcal{E}}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$

$T(x^2)=(x^2)'+2x^2$
$=2x^2+2x$

$T(x)=(x)'+2x=2x+1$

$T(1)=(1)'+2\cdot 1=0+2=2$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Así,

$$[T]_{B_1B_2}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&2\\4&1&-2\\-2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3&-1&2\\-1&5&-4\\1&-3&2\end{pmatrix}=[T]_{B_1B_2}}$$

2- Sea $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal

$T(x,y,z) = (x-y, -x+2y-z, -y+z)$ $x,y,z \in \mathbb{C}$

Tomás Achaval Becerro
$\mathcal{A}$. 45085746 - com 4.

a) Calcular autovalores de T y sus autoespacios. Sea $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ una base canónica de $\mathbb{C}^3$.

Sea T una T.L $T: V \to V$ y C alguna base de V

$\Rightarrow$ λ es un autovalor $\Leftrightarrow$ λ es solución de $\overbrace{\det(xId - [T]_C)}^{P_T(x)} = 0$

Para ello, necesito $[T]_C = \begin{pmatrix} [T(1,0,0)]_C & [T(0,1,0)]_C & [T(0,0,1)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Luego el polinomio característico de T será

$$\boxed{P_T(x)} = \det\left(xId_3 - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2(x-2) - (x-1) - (x-1)$$

$$= (x-1)^2(x-2) - 2x+2 = (x^2-2x+1)(x-2) - 2x+2$$

$$= x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 - 2x + 2$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$\boxed{= x(x^2-4x+3) = P_T(x)}$$

Luego $P_T(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1$ $\vee$ $x = 2$ $\therefore$ 1 y 2 son los autovalores de T.

Sea V_λ el autoespacio asociado al autovalor λ, entonces

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z) = 1 \cdot (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y, -x+2y-z, -y+z) = (x,y,z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y = x \Rightarrow y = 0 \\ -x+2y-z = y \Rightarrow -x-z = 0 \Rightarrow z = -x \\ -y+z = z \Rightarrow y = 0 \end{cases}\}$

$\therefore V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } y = 0 \wedge z = -x\}$

$= \{(x,0,-x), x \in \mathbb{C}\}$

$= \{x(1,0,-1) \in \mathbb{C}\} = \langle (1,0,-1) \rangle \Rightarrow \dim V_1 = 1$

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z) = (2x,2y,2z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y, -x+2y-z, -y+z) = (2x,2y,2z)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y = 2x \Rightarrow x = -y \\ -x+2y-z = 2y \Rightarrow -x = z \\ -y+z = 2z \Rightarrow z = -y \end{cases}$ $x = -y$, $x = -z$, $z = -y$

Continúo en la siguiente página $\longrightarrow$

Luego $p_T(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+3)=0$

$\Rightarrow x=0 \ \vee \ x^2-4x+3=0$ $\quad \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix}$

∴ Los autovalores serán

$\boxed{0, 1 \text{ y } 3}$ 5pts

Sea V_λ el autoespacio asociado al autovalor λ, luego

$V_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y,-x+2y-z,-y+z)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y=0 \Rightarrow x=y \\ -x+2y-z=0 \Rightarrow z=y \\ -y+z=0 \Rightarrow z=y \end{cases}\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } x=y \wedge z=y\}$

$=\{(y,y,y), y\in\mathbb{C}\}=\boxed{\langle(1,1,1)\rangle}$ $\dim V_0=1$ ✓

$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z)=1\cdot(x,y,z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y,-x+2y-z,-y+z)=(x,y,z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y=x \Rightarrow y=0 \\ -x+2y-z=y \Rightarrow -x-z=0 \Rightarrow x=-z \quad z=-x \\ -y+z=z \Rightarrow y=0 \end{cases}\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } y=0 \wedge z=-x\}$

$=\{(x,0,-x), x\in\mathbb{C}\}=\boxed{\langle(1,0,-1)\rangle}$ $\dim V_1=1$ ✓

$V_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } T(x,y,z)=(3x,3y,3z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } (x-y,-x+2y-z,-y+z)=(3x,3y,3z)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } \begin{cases} x-y=3x \Rightarrow -y=2x \Rightarrow y=-2x \\ -x+2y-z=3y \Rightarrow -x-4x-z=3\cdot-2x \Rightarrow -5x-z=-6x \Rightarrow z=x \\ -y+z=3z \Rightarrow +2x+x=3x \Rightarrow x \text{ es libre} \end{cases}\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \text{ tq } y=-2x \wedge z=x\}$

$=\{(x,-2x,x), x\in\mathbb{C}\}=\boxed{\langle(1,-2,1)\rangle}$ $\dim V_3=1$ ✓ 7pts

b) De esta forma, sabemos por teorema que, como $\dim V_0+\dim V_1+\dim V_3=3=\dim\mathbb{C}^3$, entonces T es diagonalizable

Como los vectores son LI, la base $B=\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$ es una base de autovectores en la cual

$[T]_B=\begin{pmatrix} [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B & [T(v_3)]_B \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$ ✓

* Los vectores son LI pues $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=-1-2+2-1=-2\neq 0$

8pts

Total ej 2) : 20 pts

EJERCICIO 3:

$\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-EV, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tq

$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2$

Tomás Achával Becerra
D. 45085746 - com 4

a) Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno. Para ello, debe cumplir:

$u, v, w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ i) $\langle v+u, w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle u,w\rangle$

ii) $\langle cv, w\rangle = c\langle v,w\rangle$

iii) $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$ → en $\mathbb{R}$, conjugar no afecta.

iv) $\langle v,v\rangle > 0$ si $v \neq 0$ y $\langle v,v\rangle = 0$ si $v = 0$

Probemos

i) $\langle (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle = \langle (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle$

$= (x_1+x_2)x_3 - 2(x_1+x_2)y_3 - 2x_3(y_1+y_2) + 5y_3(y_1+y_2) + (z_1+z_2)z_3$

$= x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1y_3 - 2x_2y_3 - 2x_3y_1 - 2x_3y_2 + 5y_3y_1 + 5y_3y_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

$= x_1x_3 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 5y_3y_1 + z_1z_3 + x_2x_3 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5y_3y_2 + z_2z_3$

$= \langle (x_1,y_1,z_1),(x_3,y_3,z_3)\rangle + \langle (x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\rangle$ ✓

ii)

$\langle c(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = \langle (cx_1, cy_1, cz_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle$

$= cx_1x_2 - c2x_1y_2 - c2x_2y_1 + c5y_1y_2 + cz_1z_2$

$= c(x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2)$

$= c\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle$ ✓

iii) $\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 - 2y_2x_1 - 2y_1x_2 + 5y_2y_1 + z_2z_1$

$= x_2x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2y_1 + z_2z_1$

$= \langle (x_2,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_1)\rangle$ ✓

iv) $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = x\cdot x - 2xy - 2yx + 5y\cdot y + z\cdot z$

$= x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2$

$= x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2$

$= \underbrace{(x-2y)^2 + y^2 + z^2}$ $(= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 + z^2)$

Como cada término de la suma es un cuadrado (≥ 0) entonces $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle \geq 0 \quad \forall x,y,z$

Al ser únicamente sumas de números positivos o iguales a 0, entonces

$\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = 0 \Leftrightarrow x-2y=0 \Rightarrow x=0$, $y=0$, $z=0$ $\therefore \langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle > 0 \quad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$ ✓

y $\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ ✓

$\boxed{\text{De esta forma, queda demostrado que } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ es un producto interno pues cumple i), ii), iii), iv).}}$ ✓

b) Dado $W = \{ \overbrace{(1,1,1), (0,1,1)}^{v_1, v_2} \}$ encontrar una base ortogonal de W.

Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos aplicar Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal de W. $\{w_1, w_2\}$

$w_1 = v_1$

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \quad \text{Así,}$$

$w_1 = (1,1,1)$ ⟶ Debía tomar el P. int. del ej. 3 a)

$$w_2 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1), (1,1,1) \rangle}{\|(1,1,1)\|^2} (1,1,1) = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

De esta manera, aseguramos que $\boxed{B = \{ (1,1,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \}}$ es una base ortogonal de W.

4. Verdadero o falso.

a) $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ tiene 3 autovalores distintos, entonces es diagonalizable. **VERDADERO**

Para toda $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$, $\exists T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq $[T]_B = A$, para alguna base B. Luego los 3 autovalores de A serán autovalores de T (por teorema). La existencia de 3 autovalores distintos implica la existencia de 3 autovectores LI entre sí, pues cada uno se encuentra en un autoespacio distinto. De esta forma, puedo obtener B una base de autovectores $\underset{\text{Teo.}}{\Rightarrow}$ T es diagonalizable $\therefore$ A es diagonalizable.

(En $\mathbb{R}^3$, 3 vectores LI forman una base)

b) Existe un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^5)^*$ y M_{2x3} $\mathbb{C}$. **Falso.** $\dim(M_{2x3}(\mathbb{C})) = 6$

Sabemos que $\left.\begin{array}{l} \dim(\mathbb{R}^{5*}) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5 \\ \text{y } \dim(M_{2x3}(\mathbb{C})) = 2 \times 3 = 6 \end{array}\right\} \neq$ y como $\dim(\mathbb{R}^{5*}) \neq \dim(M_{2x3}(\mathbb{C}))$ entonces no existe un isomorfismo.

c) Una matriz cuadrada A es inversible si y solo si A^T lo es. **VERDADERO**.

Sabemos que A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

A inversible $\Rightarrow A^T$ inversible

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(A^T) \neq 0$ ✓ pues $\overset{\circledast}{\det(A)} = \det(A^T)$.

A^T inversible $\Rightarrow A$ inversible

$\det(A^T) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ ✓ pues $\overset{\circledast}{\det(A^T)} = \det(A^{T^T}) = \det(A)$