Matemática Discreta I

Parcial 1: Abril 12, 2022
Tema 2 - Turno Mañana

Ejercicios:

(1) (a) Dada la siguiente definición recursiva:

$$\begin{cases} a_1 = -3, \\ a_2 = 2, \\ a_n = 5a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3, \end{cases}$$

calcular el valor numérico de los términos a_3, a_4, a_5 y a_6.

(b) Calcular el valor numérico de

$$\prod_{i=2}^{4} (i+1)(i-1) \,,$$

utilizando en cada paso la definición recursiva de productoria.

(2) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 6, \\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que $a_n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

HOJA 1

12/04/2022 MATEMÁTICA DISCRETA

Tomás Achával - Com 2
45083146

Ejercicio 1. A)
$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 2 \\ a_n = 5a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ PARA } n \geq 3 \end{cases}$$

• CALCULAR a_3, a_4, a_5, a_6

$a_3 = 5a_{3-1} - 2a_{3-2}$
$= 5a_2 - 2a_1$
$= 5.2 - 2.-3$
$= 10 + 6$
$\boxed{= 16}$

$a_4 = 5a_{4-1} - 2a_{4-2}$
$= 5a_3 - 2a_2$
$= 5.16 - 2.2$
$= 80 - 4$
$\boxed{= 76}$

$a_5 = 5a_{5-1} - 2a_{5-2}$
$= 5a_4 - 2a_3$
$= 5.76 - 2.16$
$= 380 - 32$
$\boxed{= 348}$

$a_6 = 5a_{6-1} - 2a_{6-2}$
$= 5a_5 - 2a_4$
$= 5.348 - 2.76$
$= 1740 - 152$
$= 1600 - 12$
$\boxed{= 1588}$

AUX: $5.348 = 1500 + 200 + 40$
$= 1740$

Ejercicio 1. B)
$$\prod_{i=2}^{4} (i+1)(i-1) = \underbrace{(2+1)(2-1)}_{i=2}\underbrace{(3+1)(3-1)}_{i=3}\underbrace{(4+1)(4-1)}_{i=4}$$
$= 3.1.4.2.5.3$
$= 12.10.3$
$= 120.3$
$\boxed{= 360}$

no usa def. recursiva

Ejercicio N°2 a_n, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 6 \\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

• Probar que $a_n = -2.3^n + 3.4^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$

• Veamos los casos base: $n=0 \to a_0 = -2.3^0 + 3.4^0 = -2+3 = 1$ ✓ es V

$n=1 \to a_1 = -2.3^1 + 3.4^1 = -6+12 = 6$ V es V

• Planteo mi hipótesis inductiva: $a_K = -2.3^K + 3.4^K$, para todo $0 \leq K \leq H$ ($\to H \geq 2$) y asumo que la misma es verdadera.

• Ahora demuestro por inducción completa que $a_{H+1} \overset{?}{=} -2.3^{H+1} + 3.4^{H+1}$

$\overset{*}{=} \underbrace{-2.3^{H+1} + 3.4^{H+1}}_{}$ → * más prolijo

• Por su definición recursiva:

$$a_{H+1} = 7.a_{H+1-1} - 12.a_{H+1-2}$$

$$= 7.a_H - 12.a_{H-1}$$

Por HI $= 7.(-2.3^H + 3.4^H) - 12.(-2.3^{H-1} + 3.4^{H-1})$

Distribuyo $= 7.(-2).3^H + 7.3.4^H - 12.(-2).3^{H-1} - 12.3.4^{H-1}$

Igualo exponentes $= 7.(-2).3.3^{H-1} + 7.3.4.4^{H-1} + 24.3^{H-1} - 36.4^{H-1}$

Resuelvo $= -42.3^{H-1} + 84.4^{H-1} + 24.3^{H-1} - 36.4^{H-1}$

Resuelvo + y − $= (-42+24)3^{H-1} + (84-36).4^{H-1}$

$= -18.3^{H-1} + 48.4^{H-1}$ $\quad -18 = -2.3^2$ y $48 = 3.4^2$

$= -2.3^2.3^{H-1} + 3.4^2.4^{H-1}$

Sumo exponentes $= \underbrace{-2.3^{H+1} + 3.4^{H+1}}_{}$

a_{H+1} es V, por lo tanto tenemos que: $a_K, 0 \leq K \leq H \Rightarrow a_{H+1} = V$

Lo cual nos indica que a_n es V para todo $n \in \mathbb{N}_0$