

EXAMEN FINAL
ANÁLISIS NUMÉRICO I / ANÁLISIS NUMÉRICO
04/07/2023

Apellido y nombre: ACHÁVAL BEATRO TORAL
Carrera: LCC
Condición: REGULAR (2023)
Cantidad de hojas (sin contar hoja de enunciados): 3

Nota: Todos los desarrollos deben estar debidamente justificados.

Práctico						Teórico			Lab.		
1	2	3	4	Libre	Total	1	2	Total	Total	Total	NOTA
25	15	25	25		90	50	35	85	-	175	9

Parte Práctica

1. Suponga que $fl(x)$ es la aproximación por redondeo de k dígitos de x . Muestre que

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

2. Determine el paso h para aproximar la integral

$$\int_0^8 x \sin(x) dx,$$

con un error menor o igual a 10^{-4} utilizando la regla de Simpson compuesta.

3. En un criadero de conejos se censó el tamaño de la población durante los últimos cuatro años y los datos son los siguientes:

t (año)	2019	2020	2021	2022
N(población)	2960	4540	8080	17060

Se cree que los datos siguen un comportamiento dado por una función exponencial de la forma

$$N(t) = N_0 e^{k(t-2019)}.$$

Utilice el método de cuadrados mínimos para estimar los valores de N_0 y k .

4. Disponemos de 210000 pesos para invertir en la bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130000 pesos en las del tipo A y como mínimo 60000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

5. (Sólo alumnos libres) Encuentre una factorización LU de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ con L triangular inferior con 1 en la diagonal y U triangular superior. Luego resuelva el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, utilizando dicha factorización.

Parte Teórica -

1. Enuncie la forma estándar de un problema de programación lineal con al menos tres posibles transformaciones para poder llevar un problema cualquiera a la estándar.
2. a) Demuestre que dados un conjunto de puntos (x_i, y_i) para $i = 0, \dots, n$ el polinomio interpolante en forma de Newton coincide con el polinomio en forma de Lagrange.
b) Muestre cuál es la forma del error en la interpolación lineal a trozos.

Ejercicios 2 y 3
Parte Práctica

Ejercicio No 2

Sabemos que la regla de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \{ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \}$$

$$\text{Donde } h = \frac{b-a}{n}$$

EJERCICIO N° 1

$f(x)$ Aproximación por redondeo de K dígitos de x . Mostrar p.e.

$$\left| \frac{x - f(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-K+1}$$

Para demostrarlo primero escribimos los números en sistema de punto flotante.

$$x = 0.d_1 d_2 \dots d_{k-1} d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^e$$

$$\text{donde } d_i \in \{0, \dots, 9\} \quad i \geq 2_{\text{max}}$$

$$f(x) = 0.d_1 d_2 \dots d_{k-1} \tilde{d}_k 0 \dots \times 10^e$$

$$d_1 \in \{1, \dots, 9\}$$

HAY DOS CASOS:

$$\textcircled{1} d_{k+1} \leq 5 \quad \textcircled{2} d_{k+1} > 5$$

CASO 1:

Si $d_{k+1} \leq 5$, entonces $\tilde{d}_k = d_k$ y por lo tanto $x - f(x) \geq 0$, pues $f(x) \leq x$

Veamos

$$\left| \frac{x - f(x)}{x} \right| = \frac{x - f(x)}{x} = \frac{0.0 \dots 0 d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^e}{0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^e} = \frac{0.0 \dots 0 d_{k+1} d_{k+2} \dots}{0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots}$$

Como $d_{k+1} \leq 9$ y $d_1 \geq 1$, entonces el numerador está acotado por 10^{-K} , y el denominador está acotado inferiormente por 10^{-1} .
superiormente

$$\text{Luego } \left| \frac{x - f(x)}{x} \right| = \frac{0.0 \dots 0 d_{k+1} \dots}{0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots} \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-K}}{\frac{1}{10^{-1}}} = \frac{1}{2} 10^{-K+1} \quad \text{PARA EL CASO } \textcircled{1}$$

CASO 2:

Si $d_{k+1} > 5$, entonces $\tilde{d}_k = d_k + 1$ y por lo tanto $x - f(x) < 0$ pues $f(x) > x$.

Veamos

$$\left| \frac{x - f(x)}{x} \right| = \frac{f(x) - x}{x} = \frac{0.0 \dots 0 \tilde{d}_k \tilde{d}_{k+1} \dots \times 10^e}{0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^e} = \frac{0.0 \dots 0 \tilde{d}_k \tilde{d}_{k+1} \dots}{0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots}$$

Luego el numerador y denominador tienen las mismas cotas que en el caso 1, pues $\tilde{d}_{k+1} \leq 5$, por lo tanto podemos repetir

$$\left| \frac{x - f(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-K+1} \quad \text{PARA AMBOS CASOS.}$$

$\tilde{d}_{k+1} \tilde{d}_{k+2}$, etc. van a ser la diferencia entre $f(x)$ y x para $\tilde{d}_k = d_k + 1$, los dígitos se obtienen de $0.0 \dots 10 \dots$
 $0.0 \dots 0 d_{k+1} d_{k+2} \dots$,
 por lo tanto $\tilde{d}_{k+1} \leq 5$ pues $d_{k+1} > 5$

EJERCICIO N° 2TOMÁS ACHILUEL BEZUGO
45085146 - LCCSABEMOS QUE LA REGLA DE SIMPSON COMPLETA PARA n SUBINTERVALOS ESTÁ DADA POR DE $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + 4 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{j+1/2}) + f(b) \right\} - \underbrace{\frac{(b-a)^4}{180} f^{(4)}(\xi)}_{\text{ERROR}}$$

Donde $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, 2n$, y $f \in C^4[a, b]$, $\xi \in (a, b)$

POR LO TANTO, PARA $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$, y $[a, b] = [0, 8]$, BUSQUEMOS n TAL QUE

$$E_{sc} = \frac{(8-0)}{180} \cdot \left(\frac{8-0}{2n}\right)^4 \cdot f^{(4)}(\xi) \leq 10^{-4}$$

PRIMERO BUSCO UNA COTA SUPERIOR PARA $f^{(4)}(\xi)$ EN $[a, b]$

$$f(x) = x \operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x) + x \cos(x)$$

$$f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)$$

$$f'''(x) = -2 \operatorname{sen}(x) - (\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)) = -3 \operatorname{sen}(x) - x \cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x) = -2 \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)$$

LUEGO

$$|f^{(4)}(x)| \leq 2 \quad \forall x \in [0, 8] \quad \rightarrow \text{¿por qué?}$$

LUEGO

$$E_{sc} \leq \frac{8}{180} \cdot \frac{8^4}{2^4 n^4} \cdot 2 = \frac{8^4}{180} \cdot \frac{1}{n^4} \quad \text{y si } E_{sc} \leq 10^{-4} \text{ LUEGO}$$

LUEGO COMO n DEBE
SER AL MENOS 22 y

$$\frac{8^4}{180} \cdot \frac{1}{n^4} \leq 10^{-4} \Rightarrow n^4 \geq \frac{8^4 \cdot 10^4}{180}$$

$$h = \frac{8-0}{2n}, \text{ ENTONCES}$$

$$\Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{(8-0)^4}{180}} \Rightarrow n \geq \frac{80}{\sqrt[4]{180}} \approx 27.84$$

$$\boxed{h = \frac{8}{2 \cdot 22} \approx 0.18}$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 22}$$

Ejercicio N°3

T	2019	2020	2021	2022
N	2960	4540	8080	77060

, datos de la forma $N(T) = N_0 e^{K(T-2019)}$

$$\text{Normal out } \ln(N(T)) = \ln(N_0 e^{K(T-2019)})$$

$$Y = \ln(N_0) + \ln(e^{K(T-2019)})$$

$$\text{Propongo la forma } Y = b + KX$$

, donde $Y = \ln(N(T))$, $b = \ln(N_0)$, y $X = T - 2019$

WAGO	X	0	1	2	3	→ T-2019
	f(X) = Y	8	8.92	9	9.74	→ ln(T) (con Revalorato)

→ T-2019

→ ln(T) (con Redondeo)

$$\text{Aux: } S^2(X) = K^2 X^2 + 2KBX + b^2$$

Entonces buscamos minimizar

$$E(b, K) = \sum_{i=0}^3 (S(X_i) - Y_i)^2 = \sum_{i=0}^3 S^2(X_i) - 2 \sum_{i=0}^3 S(X_i) Y_i + \sum_{i=0}^3 Y_i^2$$

Expandiendo o aún más,

$$E(b, K) = K^2 \sum_{i=0}^3 X_i^2 + 2KB \sum_{i=0}^3 X_i + b^2 \sum_{i=0}^3 1 - 2b \sum_{i=0}^3 Y_i - 2K \sum_{i=0}^3 X_i Y_i + \sum_{i=0}^3 Y_i^2$$

Para minimizarlo, igualamos sus derivadas parciales a 0.

$$\frac{\partial E}{\partial K} = 2K \sum_{i=0}^3 X_i^2 + 2b \sum_{i=0}^3 X_i - 2 \sum_{i=0}^3 X_i Y_i = 0 \rightarrow \textcircled{1} \Rightarrow K \sum_{i=0}^3 X_i^2 + b \sum_{i=0}^3 X_i = \sum_{i=0}^3 X_i Y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2K \sum_{i=0}^3 X_i + 2b \sum_{i=0}^3 1 - 2 \sum_{i=0}^3 Y_i = 0 \rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow K \sum_{i=0}^3 X_i + b \sum_{i=0}^3 1 = \sum_{i=0}^3 Y_i$$

Calculamos,

$$\sum_{i=0}^3 1 = 4, \sum_{i=0}^3 X_i = 6, \sum_{i=0}^3 X_i^2 = 14, \sum_{i=0}^3 Y_i = 35.16, \sum_{i=0}^3 X_i Y_i = 55.64$$

Con estos valores en $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 14K + 6b = 55.64 \\ 6K + 4b = 35.16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14K + 6(\frac{35.16}{4} - \frac{3}{2}K) = 55.64 \\ 14K - 9K = 55.64 - \frac{3 \cdot 35.16}{2} \end{cases}$$

Como $b = \ln(N_0)$, luego

$$N_0 = e^b \approx 2751.77$$

$$b = \frac{35.16}{4} - \frac{3}{2} \cdot 0.58$$

$$b = 7.92$$

$$5K = 55.64 - 52.74$$

$$K = \frac{2.9}{5} \approx 0.58$$

Finalmente el modelo será de la forma

$$N(T) = 2751.77 \cdot e^{0.58(T-2019)}$$

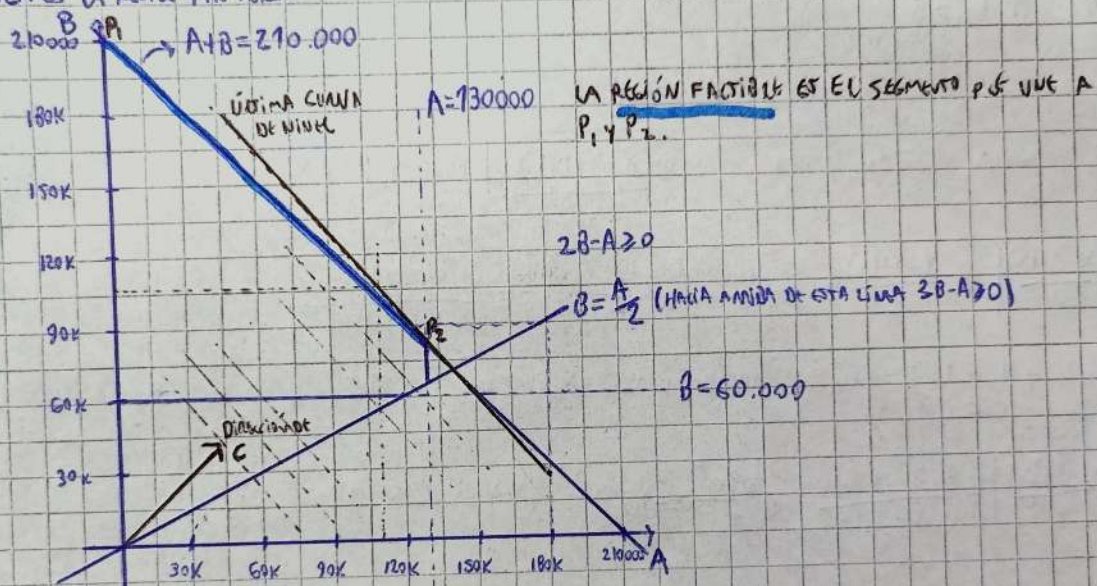
EJERCICIO N° 4:

Tomas Aguilar Briceno
45085146 - CCC

El problema se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \text{MÁX } & 1.1A + 1.08B \quad 0.1 \times A + 0.08 \times B \\ \text{s.t. } & A + B = 210,000 \\ & 2B - A \geq 0 \\ & A \leq 130,000 \\ & B \geq 60,000 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

Lo resolveré utilizando el método gráfico. Nota que la dirección de
veamos la región factible: Máximo crecimiento es $C = (1.1, 1.08)$



Si C fuese $(1,1)$, la solución óptima sería todo el segmento que une a P_1 y P_2 (toda la región factible). Como $C = (1.1, 1.08)$, entonces la solución óptima se encuentra en P_2 , pues es el último vector alcanzado por las curvas de nivel en la dirección de máximo crecimiento C .

El punto P_2 está dado por la intersección de $A=130,000$ y $B+A=210,000$

Por lo tanto

$$\boxed{A=130,000} \Rightarrow B = 210,000 - 130,000 = \boxed{80,000}$$

La distribución de la inversión será 130,000 pesos en A, y 80,000 pesos en B. B

OBTENEMOS: $1.1 \cdot 130,000 + 1.08 \cdot 80,000 = 229,400$
Es decir un interés máximo de $229,400 - 210,000 = \underline{19,400 \text{ pesos}}$.

PARTE TEÓRICA
EJERCICIO N° 1

Tomas ACHUAL BEASCO
45085146-LGC

LA FORMA ESTÁNDAR DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL ESTÁ DADA POR

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T X \rightarrow \text{FUNCIÓN OBJETIVO LINEAL, } X \in \mathbb{R}^n \\ \text{SUJETO A} \quad & Ax = b \rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, \text{ RESTRICCIONES LINEALES DE IGUALDAD.} \\ & X \geq 0 \rightarrow \text{NO NEGATIVIDAD EN LAS VARIABLES.} \end{aligned}$$

EN GENERAL LOS PROBLEMAS NO VIENEN ESCRITOS EN LA FORMA ESTÁNDAR, SI NO PUEDE VIENEN COMO

$$\begin{aligned} \max \text{ ó } \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & Rx \geq c \rightarrow \text{RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD (PUEDEN SER CON } \leq) \\ & Bx = d \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

ALGUNAS FORMAS DE QUEM ESTE FORMATO GENERAL A LA FORMA ESTÁNDAR SON:

• SI EL PROBLEMA DESEA MAXIMIZAR $C^T X$, SE PUEDE MISMO QUE MINIMIZAR $-C^T X$ Y LUEGO MULTIPLICAR EL RESULTADO OBTENIDO POR (-1)

ES DECIR,

$$\begin{aligned} \max \quad & C^T X \rightarrow \min \quad -C^T X \\ \text{S.O.} \quad & Ax = b \quad \text{S.O.} \quad Ax = b \\ & X \geq 0 \quad \quad \quad X \geq 0 \\ \text{NO ESTÁNDAR} & \rightarrow \text{ESTÁNDAR} \end{aligned}$$

• SI TENEMOS UNA RESTRICCIÓN LINEAL DE DESIGUALDAD CON \leq , SUMAMOS UNA VARIABLE NUEVA, LLAMADA VARIABLE DE HOLGURA, LA CUAL TAMBIÉN ≥ 0 .

ES DECIR

$$\begin{aligned} X = (x_0, -x_1) \quad \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & Ax = b \\ & 3x_0 + 2x_1 \leq 8 \\ & X \geq 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & Ax = b \\ & 3x_0 + 2x_1 + s_0 = 8 \\ & X \geq 0, s_0 \geq 0 \end{aligned} = \begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & \tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b} \\ & \tilde{X} \geq 0 \end{aligned}$$

NO ESTÁNDAR \rightarrow VARIABLE DE HOLGURA \rightarrow ESTÁNDAR.

(INCORPORAMOS s_0 AL VECTOR DE VARIABLES Y LA ECUACIÓN DE IGUALDAD AL SISTEMA $Ax = b$)

• SI TENEMOS UNA RESTRICCIÓN LINEAL DE DESIGUALDAD CON \geq , RESTAMOS UNA VARIABLE DE EXCESO, LA CUAL TAMBIÉN SEAN NO NEGATIVA.

ES DECIR

$$\begin{aligned} X = (x_0, -x_1) \quad \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & Ax = b \\ & 3x_0 + 2x_1 \geq 15 \\ & X \geq 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & Ax = b \\ & 3x_0 + 2x_1 - s_0 = 15 \\ & X \geq 0, s_0 \geq 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \min \quad & C^T X \\ \text{S.O.} \quad & \tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b} \\ & \tilde{X} \geq 0 \end{aligned}$$

NO ESTÁNDAR \rightarrow VARIABLE DE EXCESO \rightarrow ESTÁNDAR.

(AGREGAMOS s_0 Y LA ECUACIÓN LINEAL DE IGUALDAD AL VECTOR A Y $Ax = b$, RESPECTIVAMENTE)

Ejercicio N° 2

a) DEMOSTRAR QUE PARA LOS $n+1$ PUNTOS (x_i, y_i) $i=0, \dots, n$, EL ÚNICO INTERPOLANTE EN FORMA DE NEWTON COINCIDE CON EL POLINOMIO EN FORMA DE LAGRANGE.

POLINOMIO EN FORMA DE NEWTON:

POLINOMIO EN FORMA DE LAGRANGE:

$$N(x) = \sum_{j=0}^n f[x_0, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \quad L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

SABEROS QUE $N(x_i) = y_i$ Y $L(x_i) = y_i$ PARA $i=0, \dots, n$ Y QUE $\text{grado}(N) \leq n$ Y $\text{grado}(L) \leq n$

SEA $H(x) = N(x) - L(x)$, COMO $\text{gr}(N) \leq n$ Y $\text{gr}(L) \leq n$, ENTENDES $\boxed{\text{gr}(H) \leq n}$

PERO

$$H(x_i) = N(x_i) - L(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad \text{PARA } i=0, \dots, n$$

POR LO QUE $H(x) = 0$ EN $n+1$ PUNTOS, PERO $\text{gr}(H) \leq n$, Y POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA ENTENDES $H(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

COMO $H(x) = 0$, ENTENDES $N(x) - L(x) = 0 \Rightarrow N(x) = L(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

PUEDA DEMOSTRAR LA IGUALDAD DE LOS POLINOMIOS INTERPOLANTES EN LA FORMA DE NEWTON Y LAGRANGE.

b) LA FORMA DEL ERROR EN LA INTERPOLACIÓN LINEAL A TAJOS.

PARA CADA x EN $[x_0, x_1]$, $\exists \xi$ ENTRE 0 Y $n-1$ TAL QUE

$x \in [x_i, x_{i+1}]$, LUGO LA FÓRMULA DEL ERROR PARA CADA $x \in [x_0, x_1]$ ESTÁ DADA POR:

$$f(x) - S(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}], \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Incompleto