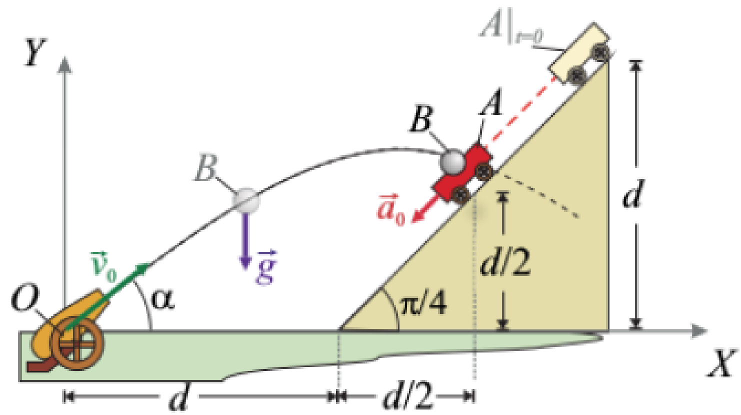
Resolución Parcial 1 - Física 1 - LMA
Versión 1. 08/10/21
María José Domenech

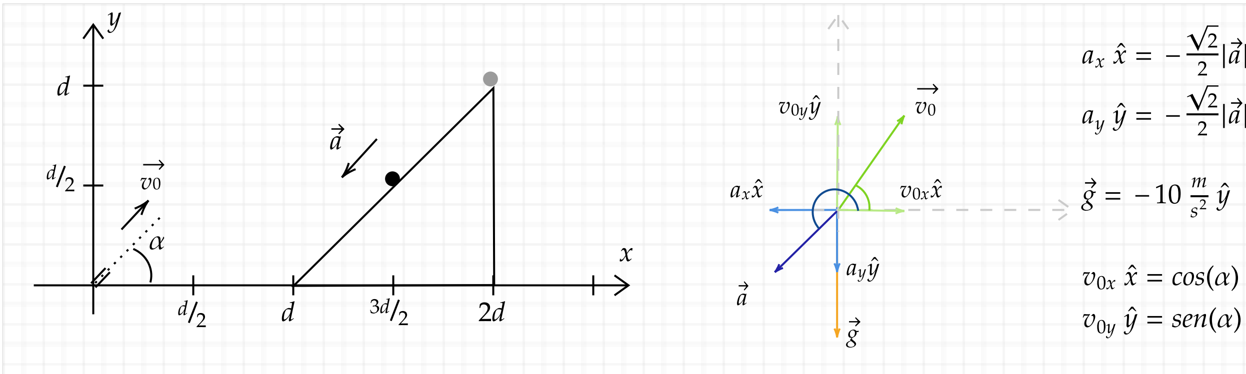
Problema 1: Un móvil A, que puede ser considerado como un cuerpo puntual, se desplaza por una ladera con una pendiente de 45^o respecto de la horizontal. El móvil desciende por la ladera realizando un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, siendo el módulo de su aceleración $|\overrightarrow{a_0}| = a_0 = \frac{g}{\sqrt{2}}$, donde $g = 10m/s^2$, es la aceleración de la gravedad. En el instante de iniciar el descenso el móvil se encuentra en reposo, a una altura d. Además, a una distancia d de la base de la ladera, en dirección horizontal, se halla emplazado un dispositivo lanzador de proyectiles a los que imprime una velocidad inicial de módulo v_0 y formando un ángulo α con la horizontal.



1. Encuentre la expresión de las funciones que describen el movimiento del móvil A respecto al sistema de referencia del dibujo.
2. En el instante en el que el móvil A inicia el descenso, el lanzador dispara un proyectil B que, a partir de entonces, se mueve con la aceleración debida a la acción de la gravedad (g) ¿Qué valores deben tener el ángulo de lanzamiento α y la celeridad inicial v_0 del proyectil B para que éste impacte sobre el móvil A cuando se encuentra en la mitad de la ladera?

Problema 1

1. Lo primero y muy importante antes de comenzar un problema, es ubicar el sistema de coordenadas (ya que hay muchas formas de escribir las ecuaciones que describen un mismo objeto físico y algunas son más complicadas que otras, dependiendo como nos dan los datos). En este caso ya nos dicen en qué sistema ubicarnos. Reescribimos las distancias que nos indican como posiciones en los ejes de nuestro sist de coord.



Sabemos que en general, $\vec{a}(t) = |a|\;(cos\theta\;\hat{x} + sen\theta\;\hat{y})$
como el ángulo de la rampa son 45° y $|a| = \frac{g}{\sqrt{2}}$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{a}(t) = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,\hat{x} + \frac{-\sqrt{2}}{2}\,\hat{y}\right) = \frac{-g}{2}\,(\,\hat{x} + \,\hat{y})$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \underbrace{\frac{-g}{2}}_{a_x(t)}\,\hat{x} + \underbrace{\frac{-g}{2}}_{a_y(t)}\,\hat{y}} \qquad (1)$$

así, integrando para obtener la función velocidad:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}\;t + \vec{v}_i = \frac{-g}{2}t\;(\,\hat{x} + \,\hat{y}) + \vec{v}_i$$

sabemos que el móvil parte del reposo, entonces $\vec{v}(0) = \vec{v}_i = 0$

$$\vec{v}(t) = \frac{-g}{2}t\;(\,\hat{x} + \,\hat{y})$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \underbrace{\frac{-g}{2}t}_{v_x(t)}\,\hat{x} + \underbrace{\frac{-g}{2}t}_{v_y(t)}\,\hat{y}} \qquad (2)$$

integrando nuevamente tenemos la función posición, teniendo en cuenta que a t=0 el móvil se encuentra en la parte más alta de la ladera.

$$\vec{r}(t) = \frac{-g}{4}t^2(\,\hat{x} + \,\hat{y}) + \vec{r}_i \qquad \left(\text{con:}\quad \vec{r}_i = 2d\;\hat{x} + d\;\hat{y} = d(2\hat{x} + \hat{y})\right)$$

$$\Longrightarrow \;\vec{r}(t) = \frac{-g}{4}t^2(\,\hat{x} + \,\hat{y}) + d(2\hat{x} + \hat{y})$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \underbrace{\left(\frac{-g}{4}t^2 + 2d\right)}_{x(t)} \hat{x} + \underbrace{\left(\frac{-g}{4}t^2 + d\right)}_{y(t)} \hat{y}} \tag{3}$$

2. Para saber los valores de $\alpha, \overrightarrow{v_0}$ necesarios para que el proyectil impacte con el móvil en el medio de la ladera, debemos escribir las ec. de mov. del proyectil así las podemos igualar luego con las del móvil:

$$\vec{a}_p(t) = -g\,\hat{y}$$
$$\vec{v}_p(t) = \vec{a}_p t + \vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{x} + (v_{0y} - gt)\,\hat{y} = |\vec{v}_0| cos(\alpha)\,\hat{x} + (|\vec{v}_0| sen(\alpha) - g)\,\hat{y}$$
$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}t + \underbrace{\vec{r}_{p_i}}_{=0} = v_{0x}t\,\hat{x} + \left(v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2\right)\hat{y} = |\vec{v}_0| t\,cos(\alpha)\,\hat{x} + \left(|\vec{v}_0| sen(\alpha) t - \frac{g}{2}t^2\right)\hat{y}$$

que impacte el proyectil con el móvil, significa que para algún tiempo se encuentren en la misma posición del espacio, por eso igualamos las funciones posición $\vec{r}_p(t)$ con $\vec{r}(t)$:

$$|\vec{v}_0| t\,cos(\alpha)\,\hat{x} + \left(|\vec{v}_0| sen(\alpha) t - \frac{g}{2}t^2\right)\hat{y} = \left(\frac{-g}{4}t^2 + 2d\right)\hat{x} + \left(\frac{-g}{4}t^2 + d\right)\hat{y}$$

esta es una ecuación vectorial por lo que tenemos que igualar componente a componente

$$\begin{cases} \text{comp. x:} \quad |\vec{v}_0| cos(\alpha) t = \frac{-g}{4}t^2 + 2d & (a) \\ \\ \text{comp. y:} \quad |\vec{v}_0| sen(\alpha) t - \frac{g}{2}t^2 = \frac{-g}{4}t^2 + d & (b) \end{cases} \tag{4}$$

llegamos a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas$^{(nota1)}$ $(|\vec{v}_0|, \alpha, t)$, nos faltaría una para poder despejar, pero en realidad tenemos una ecuación más (un dato del problema más) porque nos dicen en que posición deben impactar los cuerpos, y como conocemos la función posición del móvil en su totalidad, podemos saber para que tiempo se va a encontrar en esa posición.

la mitad de la ladera corresponde a una altura $y = \frac{d}{2}$ y una posición $x = \frac{3d}{2}$ respecto al origen

$$\vec{r}(t_c) = \underbrace{\left(\tfrac{-g}{4}t_c^2 + 2d\right)}_{x(t)=\frac{3d}{2}}\hat{x} + \underbrace{\left(\tfrac{-g}{4}t_c^2 + d\right)}_{y(t)=\frac{d}{2}}\hat{y} = \frac{3d}{2}\hat{x} + \frac{d}{2}\hat{y}$$

igualando componente a componente: (acá ambas ec nos dan la misma info, así que elegimos una y despejamos)

$$\begin{cases} \dfrac{3d}{2} = \tfrac{-g}{4}t_c^2 + 2d & (c) \\ \dfrac{d}{2} = \tfrac{-g}{4}t_c^2 + d & (d) \end{cases}$$

$$(c): \quad \frac{3d}{2} - 2d = \tfrac{-g}{4}t_c^2$$

$$d\left(\frac{3}{2} - 2\right)4 = -gt_c^2$$

$$-\frac{d}{g}(6-8) = t_c^2$$

$t_c = \pm\sqrt{\dfrac{2d}{g}}$ tomamos el signo + porque siempre $t \geq 0 \implies \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2d}{g}}}$ (5)

Así, reemplazando en el sistema (4),

$$\begin{cases} \text{x:} \quad |\vec{v}_0|cos(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} = \frac{-g}{4}\left(\sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2 + 2d & (a) \\ \text{y:} \quad |\vec{v}_0|sen(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} - \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2 = \frac{-g}{4}\left(\sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2 + d & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{x:} \quad |\vec{v}_0|cos(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} = \frac{-\cancel{g}}{\cancel{4}2}\frac{\cancel{2}d}{\cancel{g}} + 2d & (a) \\ \text{y:} \quad |\vec{v}_0|sen(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} - \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}d}{\cancel{g}} = \frac{-\cancel{g}}{\cancel{4}2}\frac{\cancel{2}d}{\cancel{g}} + d & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{x:} \quad |\vec{v}_0|cos(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} = \frac{-d}{2} + 2d & (a) \\ \text{y:} \quad |\vec{v}_0|sen(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} - d = \frac{-d}{2} + d & (b) \end{cases}$$

$$(a): \quad |\vec{v}_0| cos(\alpha) = \frac{3d}{2}\sqrt{\frac{g}{2d}} \qquad \left[\frac{m}{s} = m.\left(\frac{m}{s^2.m}\right)^{1/2} = \frac{m}{s} \checkmark\right]^{(nota2)}$$

$$|\vec{v}_0| = \frac{3d}{2cos(\alpha)}\sqrt{\frac{g}{2d}}$$

$$(b): \quad |\vec{v}_0| sen(\alpha)\sqrt{\frac{2d}{g}} = \frac{-d}{2} + 2d$$

$$|\vec{v}_0| = \frac{3d}{2sen(\alpha)}\sqrt{\frac{g}{2d}}$$

$$(a)\ y\ (b): \quad \frac{3d}{2cos(\alpha)}\sqrt{\frac{g}{2d}} = \frac{3d}{2sen(\alpha)}\sqrt{\frac{g}{2d}}$$

$$\frac{\cancel{3d}\ sen(\alpha)}{\cancel{2}\ \ cos(\alpha)}\sqrt{\frac{\cancel{g}}{\cancel{2d}}} = \frac{\cancel{3d}}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\cancel{g}}{\cancel{2d}}}$$

$$tan(\alpha) = 1$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(b): \ |\vec{v}_0| = \frac{3d}{2sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{g}{2d}} = \frac{3d}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{2d}} = \frac{3d}{2}\sqrt{\frac{g}{d}} \quad \left[\frac{m}{s} = m.\left(\frac{m}{s^2.m}\right)^{1/2} = \frac{m}{s} \checkmark\right]$$

$$\therefore \ \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}} \quad \boxed{|\vec{v}_0| = \frac{3d}{2}\sqrt{\frac{g}{d}}} \tag{6}$$

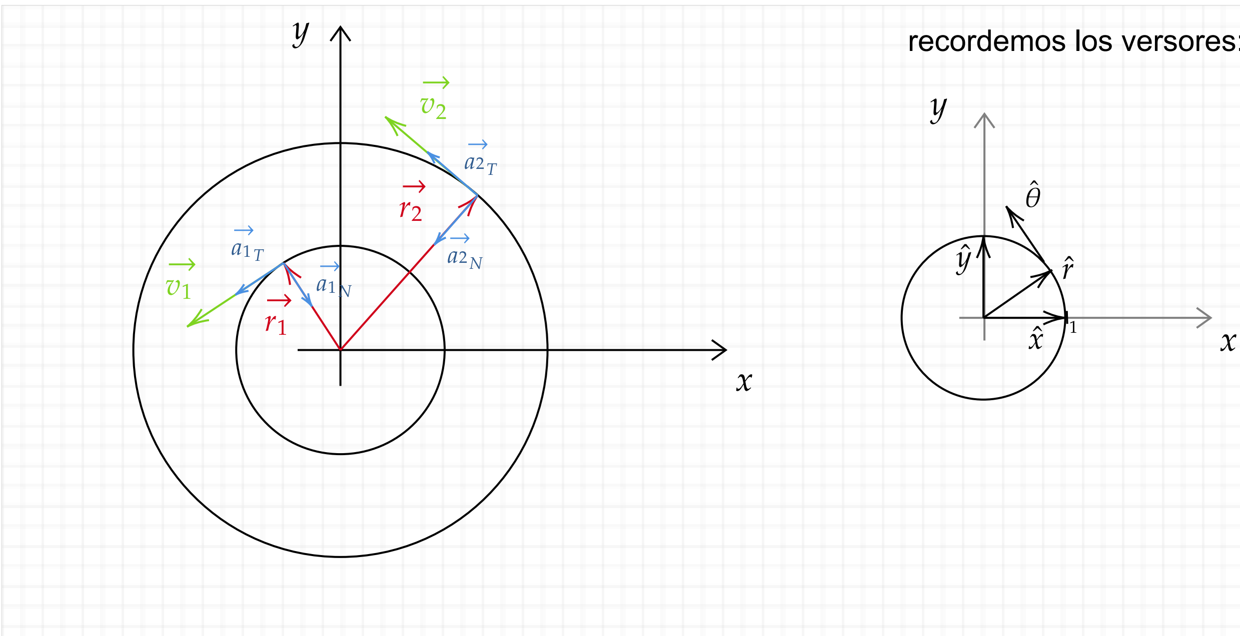
nota1: si tenemos que despejar una incógnita en función de los datos del problema, podemos hacerlo si tenemos una ecuación que la relacione con los datos. Si tenemos que despejar dos incógnitas, necesitamos dos ecuaciones. En general, para poder despejar n incógnitas necesitamos n ecuaciones, porque si tenemos menos al menos una de las incógnitas va a quedar escrita en términos de las demás. Así que siempre para resolver un problema hay que identificar bien cuáles son las incógnitas y buscar tener el mismo número de ecuaciones.

nota2: Chequeamos las unidades para ver si vamos bien, en este caso buscamos dimensiones de velocidad.

Problema 2: Dos ruedas, en un cierto instante, giran a razón de 120 r.p.m. y 240 r.p.m., siendo sus radios de 20 cm y 40 cm respectivamente. A cada una se le aplica un freno y se detiene la menor en 16 s y la mayor en 8 s, ambas con movimiento uniformemente acelerado.

a) ¿Cuál es la aceleración angular de cada rueda? Escriba las funciones de movimiento para ambas ruedas, en coordenadas polares.
b) ¿En qué instante tienen ambas ruedas la misma velocidad angular?
c) ¿En qué instante, un punto de la periferia, tiene la misma velocidad lineal?
d) Calcula la aceleración tangencial y la aceleración normal en dichos instantes.

Problema 2:



Acá voy a plantear las ecuaciones necesarias para resolver el problema, pero más abajo les dejo un anexo donde escribo unas deducciones de cómo se obtienen.

a) Obtener aceleraciones angulares.

Tenemos dos ruedas, una más grande que la otra que giran a distintas velocidades angulares. Nos dicen que se aplica un freno por lo que éstas irán disminuyendo, lo que significa que tendremos aceleraciones angulares negativas (y constantes, porque nos lo aclaran). Si la aceleración angular es constante, entonces ya sabemos que el comportamiento de la velocidad angular es lineal, así que planteamos:

(tomamos como instante inicial t=0 al instante que nos indican)

$$\omega_1(0) = 120\ rpm = 2\ s^{-1} \qquad \frac{1}{s} = s^{-1}$$

$$\omega_2(0) = 240\ rpm = 4\ s^{-1}$$

$$\text{así,}\ \ \omega_1(t) = \gamma_1 t + \omega_1(0) = \gamma_1 t + 2\ s^{-1} \qquad (7)$$
$$\omega_2(t) = \gamma_2 t + \omega_2(0) = \gamma_2 t + 4\ s^{-1}$$

**nota1 sobre pasaje de unidades más abajo. Pasamos a vueltas por segundos porque es más nos dan la info de t en segundos.

sabemos que la rueda 1 frena a los 16 segundos y la rueda 2 frena a los 8 segundos, es decir al cabo de este tiempo sus velocidades angulares se anulan.

$$0 = \omega_1(t_{f1}) = \gamma_1 t_{f1} + \omega_1(0)$$
$$\frac{-\omega_1(0)}{t_{f1}} = \gamma_1 \implies \frac{-2}{16}\ \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{vueltas/s^2} = \boxed{-0,125\ \frac{1}{s^2}\ = \gamma_1} \qquad (8)$$

$$0 = \omega_2(t) = \gamma_2 t + \omega_2(0)$$
$$\frac{-\omega_2(0)}{t_{f2}} = \gamma_2 \implies \frac{-4}{8}\frac{1}{s^2} = \boxed{-0,5\ \frac{1}{s^2} = \gamma_2} \qquad (9)$$

b) Obtener instante donde velocidades angulares se igualan.

del inciso a tenemos que :

$$\omega_1(t) = \gamma_1 t + \omega_1(0) = -0,125\ \frac{1}{s^2}\ t + 2\ \frac{1}{s}$$
$$\omega_2(t) = \gamma_2 t + \omega_2(0) = -0,5\ \frac{1}{s^2}\ t + 4\ \frac{1}{s}$$

$$\omega_1(t_e) = \omega_2(t_e)$$
$$\gamma_1 t_e + \omega_1(0) = \gamma_2 t_e + \omega_2(0)$$
$$t_e(\gamma_1 - \gamma_2) = \omega_2(0) - \omega_1(0)$$
$$t_e = \frac{\omega_2(0) - \omega_1(0)}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \implies \frac{4\ s^{-1} - 2\ s^{-1}}{\left(-0,125\ \frac{1}{s^2} + 0,5\ \frac{1}{s^2}\right)} = \frac{2}{0,375}\frac{\cancel{s}^1}{\cancel{s}^1.s^{-1}} = \boxed{5,333\ s = t_e} \qquad (10)$$

c) Obtener instante en que las velocidades lineales se igualan.

sabemos que la función velocidad de un punto se relaciona con las funciones angulares de la forma:

$$\overrightarrow{v_1}(t) = R_1\ \omega_1(t)\ \hat{\theta} \qquad (11)$$

$$= R_1\ [\gamma_1 t + \omega_1(0)]\ \hat{\theta}$$
$$= 20cm\left[-0,125\ \frac{1}{s^2}\ t + 2\ s^{-1}\right]\hat{\theta}$$

$$\overrightarrow{v_2}(t) = R_2\ \omega_2(t)\ \hat{\theta} \tag{12}$$
$$= R_2\ [\gamma_2 t + \omega_2(0)]\ \hat{\theta}$$
$$= 40cm\left[-0,5\ \frac{1}{s^2}\ t + 4\ s^{-1}\right]\hat{\theta}$$

Así, $\overrightarrow{v_1}(t_a) = \overrightarrow{v_2}(t_a)$

$$R_1\ [\gamma_1 t_a + \omega_1(0)]\ \cancel{\hat{\theta}} = R_2\ [\gamma_2 t_a + \omega_2(0)]\ \cancel{\hat{\theta}}$$
$$t_a(R_1\gamma_1 - R_2\gamma_2) = R_2\omega_2(0) - R_1\omega_1(0)$$
$$t_a = \frac{R_2\omega_2(0) - R_1\omega_1(0)}{(R_1\gamma_1 - R_2\gamma_2)} \Longrightarrow t_a = \frac{40cm.4\ s^{-1} - 20cm.2s^{-1}}{\left(20cm.\ (-0,125)\ \frac{1}{s^2} - 40cm.\ (-0,5)\ \frac{1}{s^2}\right)}$$
$$\frac{120}{17,5}\ \frac{cm\cancel{.}s^{-1}}{cm.\cancel{s}^{-1}\frac{1}{s}} = \boxed{6,86\ s = t_a} \tag{13}$$

d) Calcular aceleración tangencial y normal en dichos instantes

sabemos que:

$$\vec{a}(t) = \underbrace{R\gamma}_{a_T(t)}\ \hat{\theta} + \underbrace{\left(-R\omega^2(t)\right)}_{a_N(t)}\hat{r} \tag{14}$$

$$\Longrightarrow\ a_{T1}(t_e) = R_1\gamma_1$$ (observar que no dep de t)
$$20cm.\ (-0,125)\frac{1}{s^2} = \boxed{-2,5\ \frac{cm}{s^2} = a_{T1}(t_e)} \tag{15}$$

$$a_{T2}(t_e) = R_2\gamma_2$$
$$40cm.\ (-0,5)\frac{1}{s^2} = \boxed{-20\frac{cm}{s^2} = a_{T2}(t_e)} \tag{16}$$

$$\Longrightarrow a_{N1}(t) = -R_1\omega_1^2(t)$$
$$-20cm.\ \left(2\ s^{-1}\right)^2 = -20cm.4s^{-2} = \boxed{-80\frac{cm}{s^2} = a_{N1}(t)} \tag{17}$$

$$a_{N2}(t) = -R_2\omega_2^2(t)$$
$$-40cm.\ \left(4\ s^{-1}\right)^2 = -40cm.16s^{-2} = \boxed{-640\frac{cm}{s^2} = a_{N2}(t)} \tag{18}$$

así, la función aceleración se puede escribir

$$\overrightarrow{a_1}(t) = -2,5\,\frac{cm}{s^2}\hat{\theta} - 80\frac{cm}{s^2}\hat{r}$$

$$\overrightarrow{a_2}(t) = -20\,\frac{cm}{s^2}\hat{\theta} - 640\frac{cm}{s^2}\hat{r}$$

-Anexo movimiento circular-

Definiciones útiles:

(def de versores polares en func de versores cartesianos)

$$\left[\begin{array}{l} \hat{r} = cos\theta(t)\,\hat{x} + sen\theta(t)\,\hat{y} \\ \hat{\theta} = -sen\theta(t)\,\hat{x} + cos\theta(t)\,\hat{y} \end{array}\right. \qquad (19)$$

(derivadas de los versores polares)

$$\left[\begin{array}{l} (\hat{r})' = \omega(t)\,\hat{\theta} = \theta'(t)\,(-sen\theta(t)\,\hat{x} + cos\theta(t)\,\hat{y}) \\ (\hat{\theta})' = -\omega(t)\,\hat{r} = \theta'(t)(-cos\theta(t)\,\hat{x} - sen\theta(t)\,\hat{y}) \end{array}\right. \qquad (20)$$

Funciones de movimiento:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{(en componentes polares)} & \text{(en componentes cartesianas)} \\ \vec{r}(t) = R\hat{r} & \vec{r}(t) = Rcos\theta(t)\,\hat{x} + Rsen\theta(t)\,\hat{y} \\ \vec{v}(t) = R\,\omega(t)\,\hat{\theta} & \vec{v}(t) = -R\,\omega(t)\,sen\theta(t)\,\hat{x} + R\,\omega(t)cos\theta(t)\,\hat{y} \\ \vec{a}(t) = R\gamma\,\hat{\theta} - R\omega^2(t)\hat{r} & \vec{a}(t) = -R\left[\omega^2(t)cos\theta(t) + \gamma sen\theta(t)\right]\hat{x} + \\ & \qquad +R\left[\gamma cos\theta(t) - sen\theta(t)\omega^2(t)\right]\hat{y} \end{array}\right. \qquad (21)$$

Funciones angulares:

$$\left[\begin{array}{l} \theta(t) = \gamma\frac{t}{2}^2 \qquad = \int \omega(t)dt \\ \omega(t) = \gamma t \\ \gamma(t) = \gamma \quad (cte) \end{array}\right. \qquad (22)$$

Acá hacemos la derivación explícita de las funciones de movimiento. Conociendo $\vec{r}(t)$, derivamos respecto del tiempo para obtener $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$. Hay que tener cuidado al calcular las derivadas porque no solo vamos a derivar la componente (como en el caso cartesiano), sino tambien los versores, ya que los versores polares dependen del tiempo (fijarse cómo cambian su dirección con cada punto). En cambio los versores cartesianos son ctes siempre. Luego vamos a hacer lo mismo para la posición, velocidad y aceleración angular $\theta(t)$, $\omega(t)$ y

γ, que resulta más simple porque son funciones escalares (no representan vectores).

Notación: acá $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ significa derivada respecto del tiempo

sabemos que $\vec{r}(t) = R\hat{r}$ y calculamos:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (R\,\hat{r})' = \underbrace{R}_{\substack{\text{sale afuera de (...)'} \\ \text{por ser cte***}}} (\hat{r})' = R\Big(\underbrace{cos\theta(t)\,\hat{x} + sen\theta(t)\,\hat{y}}_{\text{definición de } \hat{r}}\Big)' =$$

$$= R\Big[\underbrace{(cos\theta(t))'}_{\substack{\text{derivar usando} \\ \text{regla de la cadena} \\ \text{ya que } \theta \text{ dep de t}}} \underbrace{\hat{x}}_{\substack{\text{son ctes} \\ \text{resp a t}}} + \underbrace{(sen\theta(t))'\,\hat{y}}_{\text{ídem 1er término}}\Big] = -sen(\theta(t))\,\theta'(t)\,\hat{x} + cos(\theta(t))\,\theta'(t)\,\hat{y} =$$

$$= R\,\underbrace{\theta'(t)}_{\substack{\text{es la vel} \\ \text{angular } \omega}}\Big[\underbrace{-sen(\theta_1(t))\,\hat{x} + cos(\theta_1(t))\,\hat{y}}_{\text{definición de } \hat{\theta}}\Big] = R\,\theta'(t)\,\hat{\theta} = R\,\omega(t)\,\hat{\theta}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = R\,\omega(t)\,\hat{\theta}} \tag{23}$$

$$a(t) = \vec{v}'(t) = (R\,\omega(t)\,\hat{\theta})' = R\,(\omega(t)\,\hat{\theta})' = R \underbrace{(\omega'(t)\,\hat{\theta} + \omega(t)\,\hat{\theta}')}_{\text{aplicamos regla del producto para derivar}} =$$

$$= R\Big[\underbrace{\omega'(t)}_{\substack{\text{def de acel} \\ \text{angular}}}\,\hat{\theta} + \omega(t)\,\underbrace{(-sen(\theta(t))\,\hat{x} + cos(\theta(t))\,\hat{y})'}_{\text{escribimos a } \hat{\theta} \text{ en cartesianas para derivar}}\Big] =$$

$$= R\{\gamma\,\hat{\theta} + \omega(t)\,[(-sen\theta(t))'\,\hat{x} + (cos\theta(t))'\,\hat{y}]\,\} =$$

$$= R\Big\{\gamma\,\hat{\theta} + \omega^2(t)\,\underbrace{[-cos\theta(t)\,\hat{x} - sen\theta(t)\,\hat{y}]}_{\text{notar que es } = -\hat{r}}\Big\} = R\Big(\gamma\,\hat{\theta} - \omega^2(t)\hat{r}\Big)$$

$$\Longrightarrow \boxed{a(t) = R\Big(\gamma\,\hat{\theta} - \omega^2(t)\hat{r}\Big) = \underbrace{R\gamma\,\hat{\theta}}_{a_T(t)} + \underbrace{\Big(-R\omega^2(t)\hat{r}\Big)}_{a_N(t)}} \tag{24}$$

si queremos su expresión en comp cartesianas, reemplazamos los versores y reagrupamos

$$a(t) = R\gamma\,(-sen\theta(t)\,\hat{x} + cos\theta(t)\,\hat{y}) - R\omega^2(t)\,(cos\theta(t)\,\hat{x} + sen\theta(t)\,\hat{y}) =$$
$$a(t) = -R\Big[\omega^2(t)cos\theta(t) + \gamma sen\theta(t)\Big]\,\hat{x} + R\Big[\gamma cos\theta(t) - sen\theta(t)\omega^2(t)\Big]\,\hat{y} \tag{25}$$

Lo mismo vale para obtener las funciones angulares:

$$\begin{gathered} \theta(t) = \int \omega(t)dt = \gamma\frac{t}{2}^2 \\ \theta'(t) = \omega(t) = \gamma t \\ \theta''(t) = \omega'(t) = \gamma\ (cte) \end{gathered} \tag{26}$$

**nota1: las unidades rpm (revoluciones/vueltas por minuto), rps (revoluciones por segundo), etc son unidades de frecuencia (cuantas veces sucede algo periódico por unidad de tiempo). La unidad de tiempo que se usa convencionalmente es el segundo, por lo que vamos a pasar la frecuencia que nos dan con la u. de t en minutos a segundos:
-como pasar de rpm a rps:

$$120\ rpm: \quad \text{120 vueltas cada 1 min} = \text{120 vueltas cada 60 segundos} = 2\ rps$$
$$240\ rpm: \quad \text{240 vueltas cada 1 min} = \text{240 vueltas cada 60 segundos} \underbrace{=}_{\text{hacemos "regla de 3"}} 4\ rps$$

la "regla de tres" para saber cuantas vueltas x unidad de s:

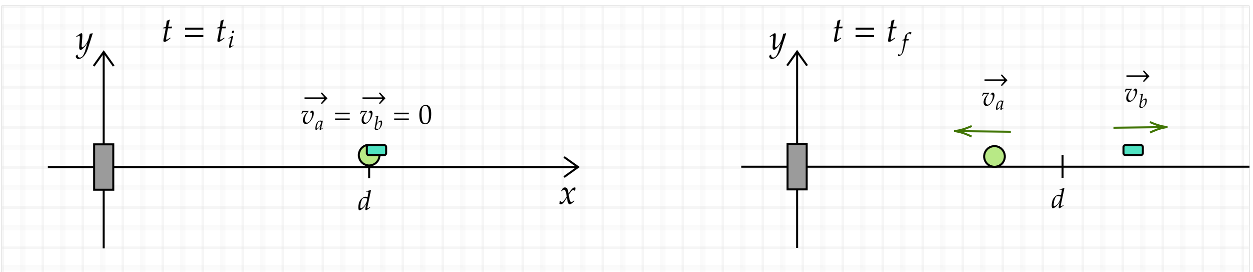
$$60 \text{ segundos} ------- 120 \text{ vueltas}$$
$$1 \text{ segundo} ------- x \text{ vueltas} = \frac{1.120}{60} = 2 \text{ vueltas}$$

Una cosa más que notamos es que revoluciones por segundos corresponde a la unidad fundamental de frecuencia que es el Herzio (Hz), ya que $Hz = s^{-1} = \frac{1}{s} = \frac{\text{"ciclos/vueltas/suceso"}}{s} = rps$. En el problema usamos la expresión explícita s^{-1} para que sea más fácil luego llegar a las unidades de velocidad y aceleración.

***nota2: si nos dicen que el radio varía, no se puede sacar como cte y hay que aplicar regla del producto para derivar. Esto nos daría un término de la velocidad que es radial (con el versor r) además del angular (que tiene versor theta), lo que significaría que el punto se mueve en espiral alejándose o acercándose al origen. Por suerte estamos en movimiento circular (el círculo tiene siempre radio cte) y el movimiento es más simple.

Problema 3: Un astronauta de 60 kg se encuentra en el espacio alejado de la nave espacial una distancia d cuando la cuerda que lo mantiene unido a la nave se rompe. Él lanza su tanque de oxígeno de 10 kg de manera que éste se aleje de la nave espacial con una rapidez de 12 m/s, para impulsarse a sí mismo de regreso a la nave. Suponiendo que inicia su movimiento desde el reposo (respecto de la nave), determine la distancia máxima d a la cual puede estar de la nave espacial cuando la cuerda se rompe para regresar en menos de 60 s (es decir, el tiempo que podría estar sin respirar).

Problema 3:



Queremos saber la distancia máxima d, a la que debe estar el astronauta inicialmente para que en menos de 60s, el astronauta alcance la nave. Para esto necesitamos escribir las funciones de movimiento de los dos cuerpos, (en particular las de posición) y reemplazar el tiempo necesario.

Una cosa que notamos del problema es que nuestro sistmema (astronauta y tanque) es conservativo, es decir que no hay fuerzas externas que actúen sobre él y por lo tanto el momento lineal $\vec{P}$ se conserva^{*nota1}. Así, usando su expresión con las velocidades antes y después del lanzamiento:

$$m_a v_{ai} + m_b v_{bi} = m_a v_{af} + m_b v_{bf}$$ (nos olvidamos del carácter vectorial de $\vec{v}$ porque todo sucede en 1 dimensión) (27)

$$\Longrightarrow 60kg \,.\, 0\,\frac{m}{s} + 10kg \,.\, 0\,\frac{m}{s} = 60kg \,.\, v_{af} + 10kg \,.12\frac{m}{s}$$

$$0 = \; 60kg \,.\, v_{af} + 10kg \,.12\frac{m}{s}$$

$$-\frac{120}{60}\,\frac{kg.m}{kg.s} = v_{af}$$

$$\boxed{-2\,\frac{m}{s} = v_{af}} \qquad (28)$$

Luego, sabemos que las velocidades se mantienen constantes (ya que no hay fuerzas que generen una aceleración^{*nota2}), así que:

$$x_a(t) = v_a t + x_a(0) \qquad (29)$$
$$x_b(t) = v_b t + x_b(0)$$

para escribir las posiciones iniciales es muy importante saber dónde pusimos el sistemade referencia (nosotros colocamos el origen en la nave) $\Longrightarrow x_a(0) = x_b(0) = d$

$$x_a(t) = -2\frac{m}{s}\,t + d \qquad (30)$$
$$x_b(t) = 12\frac{m}{s}\,t + d$$

$$\Longrightarrow x_a(60s) = \underbrace{0}_{\text{pos.de la nave}} = -2\frac{m}{s}\,.\,60s + d$$

$$\boxed{d = 120\,m} \qquad (31)$$

así, si $d \leq 120\,m$ el astronauta puede volver antes de quedarse sin aire

---

*nota1: más formalmente,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad \text{como en este caso no hay fuerzas externas,} \qquad (32)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d\vec{P}}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{P} = cte}$$ (sabemos que la integral de 0 es una cte)

así, se puede escribir para dos instantes diferentes que elijamos, teniendo en cuenta que el P del sistema es la suma de los P de cada partiícula:

$$\vec{P} = \underbrace{m_1\vec{v}_{1i}}_{\vec{P}_1} + \underbrace{m_2\vec{v}_{2i}}_{\vec{P}_2} = cte = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} \qquad (33)$$

en general, si tenemos N partículas, y el P se conserva:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{P}_k = cte \qquad (34)$$
$$= m_1\vec{v}_1 + \dots + m_N\vec{v}_N = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k = cte$$

*nota2: esto es consecuencia de la 2da Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{la suma de las fuerzas sobre un cuerpo es igual su masa por su aceleración} \qquad (35)$$

$$\text{si } \sum \vec{F} = 0 = m\vec{a} \implies \vec{a} = 0 \implies \vec{v} = cte$$