GUIA 9

1

a) $\cdot\ |F| = -\frac{A}{R^2}$ $\quad \cdot\ |\vec{L}| = \ell$ $\quad \cdot\ |a_n| = \frac{V^2}{R}$

$$\sum F_{ext} = -m.a_n \implies |F| = -m.|a_n| = -\frac{A}{R^2}$$

pues es fuerza central

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$\implies |\vec{L}| = |\vec{R}|.|\vec{P}| \,.\, \sin(\alpha) = R.P.\sin(90) = R\,m.V = \ell \implies \boxed{V = \frac{\ell}{R.m}}$$

Por otro lado

$$F = -\frac{A}{R^2} = -m.|a_n| \implies -\frac{A}{R^2} = -m\frac{V^2}{R}$$

$$-\frac{A}{R^2} = \frac{-m\ell^2}{R^2.m^2.R}$$

$$\boxed{R = \frac{\ell^2}{A.m}}$$

3

Dado que la tracción que se ejerce es una fuerza central, $R // F \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = R \times F = 0 \implies \vec{L}$ es constante, entonces se conserva

a) $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \implies |\vec{L}| = r.mV$

$$\begin{cases} L_0 = r_0.V_0.m = r_0^2.W_0.m \\ L_1 = r_1.V_1.m = r_1^2.W_1 m \end{cases} \rightarrow \text{Usando } V = r.w$$

Dado que L es constante:

$$r_0^2 . \omega_0 m = r_1^2 . \omega_1 . m$$

$$r_0^2 . \omega_0 = r_1^2 . \omega_1 \Longrightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{r_0^2 . \omega_0}{r_1^2}}$$

b) Ahora tomamos un L después con radio $\frac{r_0}{2}$:

$$\omega_1 = \frac{r_0^2 . \omega_0}{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2} = 4\omega_0$$

Si $V = r . \omega$

$V_f = \frac{r_0}{2} . \omega_1$

$V_i = r_0 \omega_0$

Por otra parte:

$$W_c = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m . V_f^2}{2} - \frac{m V_i^2}{2}$$

$$= \frac{m(V_f^2 - V_i^2)}{2} \rightarrow \text{Uso } V = r . \omega$$

$$= \frac{m\left(\frac{r_0^2}{4} . \omega_1^2 - r_0^2 . \omega_0\right)}{2}$$

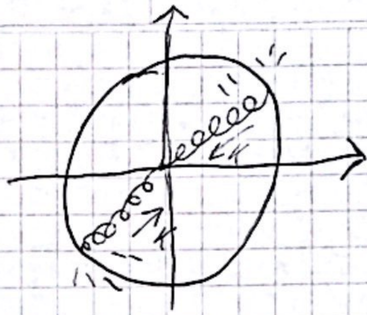
$$= \frac{m . r_0^2\left(\frac{\omega_1^2}{4} - \omega_0^2\right)}{2}$$

$$= \frac{m r_0^2 \left(4\omega_0^2 - \omega_0\right)}{2}$$

$$= \boxed{\frac{3m . r_0^2 . \omega_0^2}{2}}$$

5

a)



Dado que el eje está centrado en el CM:

Por un lado:

$$V_{CM}=0 \implies V_{CM}=\frac{m_a.V_a+m_b.V_b}{m_a+m_b}=0 \implies m_a.V_a=-m_b.V_b$$

dado que $m_a=m_b$

$$\boxed{V_a=-V_b}$$

Por otra parte:

$$X_{CM}=\frac{m_A.\vec{r}_A+m_B.\vec{r}_B}{m_A+m_B}=0 \implies m_A.\vec{r}_A+m_B.\vec{r}_B=0$$

$$m_A.\vec{r}_A=-m_B.\vec{r}_B$$

$$\vec{r}_A=-\vec{r}_B \implies \boxed{|\vec{r}_A|=|\vec{r}_B|} \quad (1)$$

Además sabemos que:

$$|\vec{r}_A|+|\vec{r}_B|=d$$

por (1):

$$|\vec{r}_A|+|\vec{r}_A|=d$$

$$2|\vec{r}_A|=d$$

$$\boxed{|\vec{r}_A|=\frac{d}{2}} \quad (2)$$

Dado que el $\vec{L}$ se conserve (Porque K_1 y K_2 son fuerzas centrales) el valor de $\vec{L}$ es el mismo para todo tiempo.

$$\vec{L} = \vec{r}_A \times \vec{p}_A + \vec{r}_B \times \vec{p}_B$$

$$|\vec{L}| = r_A \cdot m_A V_A + r_B \cdot m_B \cdot V_B$$

$$= r_A^2 \cdot m_A \cdot \vec{\omega} + r_B^2 \cdot m_B \cdot \vec{\omega}$$

$r_A = r_B$
$m_A = m_B$

$$= r_A^2 \cdot m_A \cdot \vec{\omega} + r_A^2 \cdot m_A \vec{\omega}$$

$$= 2 r_A^2 \cdot m_A \cdot \vec{\omega}$$

$$= 2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot m_A \cdot \vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot m_A \cdot \vec{\omega}$$

Notemos que dado $m_A = m_B$:

$$\frac{m_B}{m_A + m_B} = \frac{m_B}{m_B + m_B} = \frac{m_B}{2m_B} = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$|\vec{L}| = \frac{m_B}{m_A + m_B} \cdot d^2 \cdot m_A \cdot \vec{\omega} = \frac{m_B m_A \cdot d^2 \cdot \vec{\omega}}{m_A + m_B}$$

b) $\underline{\text{Para A}}$

$$\sum F_{ext} = -K\left(\frac{3d_0}{2} - d_0\right) = m_A \cdot a_{nA} = m_A \frac{V_A^2}{|\vec{r}_A|} = \frac{m_A \cdot \vec{\omega}^2 |\vec{r}_A|^2}{|\vec{r}_A|}$$

$$= m_A \cdot \vec{\omega}^2 |\vec{r}_A|$$

Entonces:

$$-K(d_0) = m_A \cdot |\vec{\omega}_A|^2 \vec{r}_A \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_A = \sqrt{\frac{-K(d_0)}{m_A \vec{r}_A}}}$$

Para B

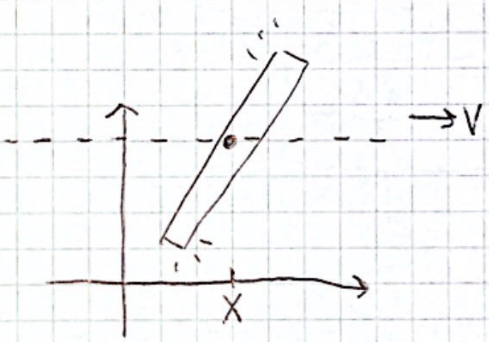
$$\sum F_{ext} = -k\left(\frac{3d_0}{2} - d_0\right) = m_B \cdot a_{nB} = m_B \cdot \frac{|V_B|^2}{\vec{r}_B} = \frac{m_B \cdot \vec{\omega}^2 |\vec{r}_B|^2}{|\vec{r}_B|}$$

Entonces:

$$-k(d_0) = m_B \cdot \vec{\omega}_B^2 \cdot |\vec{r}_B| \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_B = \sqrt{\frac{-k\, d_0}{m_B |\vec{r}_B|}}}$$

6

$$\begin{cases} X_{cm} = 4m \\ L = d = 4m \\ m = 3kg \\ V_{cm} = \frac{1}{2}\frac{m}{s} \\ \omega = 4 \cdot \frac{1}{s} \end{cases}$$



a)

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + I_0 \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{R} \times \vec{P} = (x\hat{i} + 2d\hat{j}) \times (-m.v\hat{i} + 0\hat{j}) = (x0 - 2d(-m.v))\hat{k}$$

$$= 2d.m.V.\hat{k} = 2\, 4m \cdot 3kg \cdot \frac{1}{2}\frac{m}{s}\,\hat{k} = 12\,kg\,\frac{m^2}{s}\,\hat{k}$$

$$I_0 = \frac{M.L^2}{12} = \frac{3kg.16m^2}{12} = 4kg.m^2$$

$$I_0 |\vec{\omega}| = 4kg\,m^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{s} = 16\,kg\frac{m^2}{s}$$

Entonces:

$$|\vec{L}| = |\vec{R} \times \vec{P}| + I_0 |\vec{\omega}| = 12\,kg\,\frac{m^2}{s} + 16\,kg\,\frac{m^2}{s} = 8\,kg\,\frac{m^2}{s}$$

b) Según la ecuación de recién:

$$|\vec{L}| = y_0 . mv + \frac{m.L^2}{12} . 4 . \frac{1}{s}$$

¿Cuando es nulo?

$$0 = y_0 \; 3kg . \frac{m}{s} + 16 \; \frac{m^2 kg}{}$$

$$y_0 = \frac{16 \frac{m^2 . kg}{s}}{\frac{3}{2} . \frac{m \, kg}{s}}$$

$$\boxed{y_0 = -\frac{48}{3} m}$$

7

a) $V_T = 0, \; V_V = 0 \implies \vec{P}$ se conserva:

$$m_T . V_T + m_V . V_V = 0 \implies V_V = -\frac{m_T . V_T}{m_V} = \frac{-\frac{1}{2} kg . 2\frac{m}{s}}{\frac{3}{2} kg}$$

$$V_V = -\frac{2}{3}$$

Dado que $V_V = \omega_V . R \implies \omega_V = \frac{V_V}{R}$

$$= \frac{-\frac{2}{3} \frac{m}{s}}{\frac{1}{2} m} = \boxed{-\frac{4}{3} . \frac{1}{s}}$$

b) Sabemos que $V_V = \frac{\omega_V}{R}$, y dado que $V_V = -\frac{m_T . V_T}{m_V}$:

$$-\frac{m_T V_T}{m_V} = \frac{\omega_V}{R} \implies \omega_V = -\frac{m_T . V_T . R}{m_V}$$

dado que $V_T = 0 \implies \boxed{\omega_V = 0}$

8

a) $V_{cm} = \frac{m.V + m.V + 2m.V_0}{4m} = \frac{2m.V}{4m} = \boxed{\frac{V}{2}}$

b) Dado que no hay fuerzas externas, $\vec{L}$ se conserva.

$|L_{antes}| = |L_{después}|$

$\overrightarrow{L_{antes}} = \vec{L_0} + \vec{S}$

Dado que inicialmente es traslación pura, no hay rotación: $\vec{S} = 0$

$\overrightarrow{L_{antes}} = \vec{L_0} = \vec{r_1} \times \vec{P_1} + \vec{r_2} \times \vec{P_2} + \underbrace{\vec{r_3} \times \vec{P_3}}_{=0 \text{ dado que } V=0} = \vec{r_1} \times \vec{P_1} + \vec{r_2} \times \vec{P_2} = 2dmV(-\hat{k}) + d.m.V(-\hat{k})$

$= 3\,dmV(-\hat{k})$

Por otro lado:

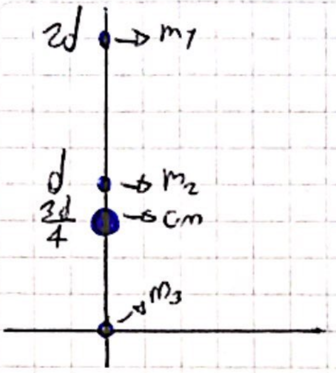
$Y_{cm} = \frac{m_1.Y_1 + m_2.Y_2 + m_3.\overset{=0}{Y_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m.2d + m.d}{4m} = \frac{3d}{4}$ → Nos sirve después

$\overrightarrow{L_{después}} = \vec{L_0} + \vec{S} = \vec{L_0} + I_0.\vec{\omega}$

$\vec{L_0} = \vec{R_{cm}} \times \vec{P_{cm}} = \frac{3d}{4}.M.V_{cm} = \frac{3}{4}d.4m.\frac{V}{2} = \frac{3m.d.v}{2}$

$I_0 = m_1.|\vec{r_1}|^2 + m_2.|\vec{r_2}|^2 + m_3.|\vec{r_3}|^2$

Ahora usemos el Y_{cm} para conocer los r_i:



$|\vec{r}_1| = \frac{5}{4}d$

$|\vec{r}_2| = \frac{1}{4}d$

$|\vec{r}_3| = \frac{3}{4}d$

Entonces:

$$I_0 = m.\left(\frac{5d}{4}\right)^2 + m\left(\frac{1d}{4}\right)^2 + 2m\left(\frac{3d}{4}\right)^2 = md^2\left(\frac{25}{16} + \frac{1}{16} + \frac{18}{16}\right) = \frac{11m.d^2}{4}$$

Finalmente

$$|\vec{L}_{antes}| = |\vec{L}_{despues}|$$

$$3dmv = \frac{3}{2}m.d.v + \frac{11md^2}{4}|\vec{\omega}|$$

$$\frac{3}{2}dmv \cdot \frac{4}{11md^2} = |\vec{\omega}|$$

$$\boxed{\frac{6v}{11d} = |\vec{\omega}|}$$