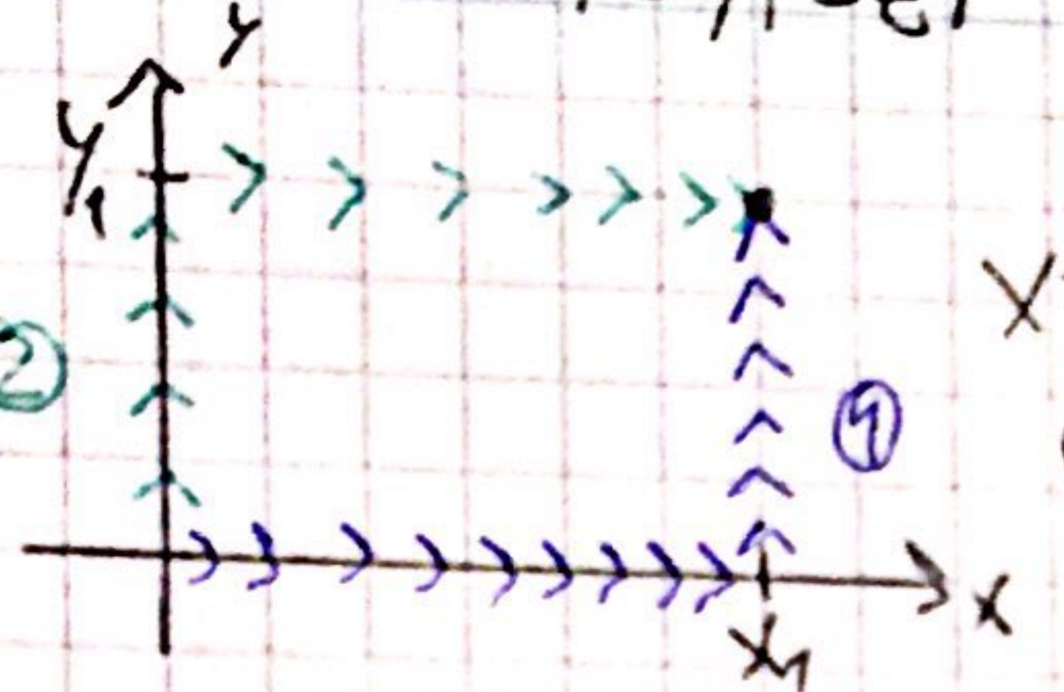
HOJA N°

FECHA

PRACTICO 2

1) $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (6xy, 3(x^2-y^2), 0)$

a)



$x = cte = x_1$

$dx = 0$

$y = cte = 0$

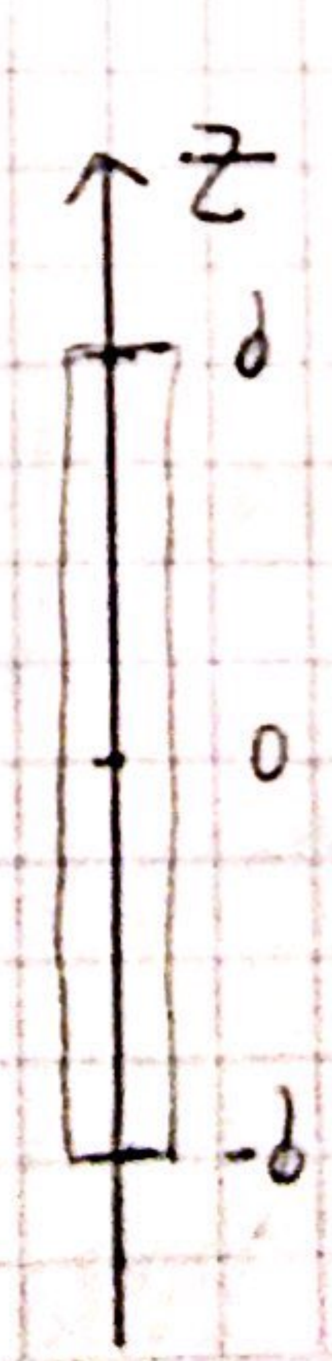
$dy = 0$

①
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) = \int_0^{x_1} E_x(x,0)\,dx + \int_0^{y_1} E_y(x_1,y)\,dy = \int_0^{x_1} 0\,dx$$
$$+ \int_0^{y_1} 3(x_1^2 - y^2)\,dy = \left(3x_1^2 - \frac{3y^2}{3}\right) y \Big|_0^{y_1} = 3x_1^2 y_1 - y_1^3$$

②
$$\int_{P_3}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{P_3}^{P_2} (E_x, E_y, E_z).(dx, dy, dz) = \int_0^{y_1} E_y(0,y)\,dy + \int_0^{x_1} E_x(x,y_1)\,dx = \int_0^{y_1} -3y^2\,dy +$$
$$\int_0^{x_1} 6xy_1\,dx = -\frac{3y^3}{3}\Big|_0^{y_1} + \frac{6x^2 y_1}{2}\Big|_0^{x_1} = -y_1^3 + 3x_1^2 y_1$$

3)

a)



$Q = \lambda . 2d$

$V_q = k . \frac{q}{|r - r_q|}$ ~ Potencial en un punto producido por una sola carga

$$V(0,0,2d) = K_c \int dq \cdot \underbrace{\frac{1}{2d-z}}$$

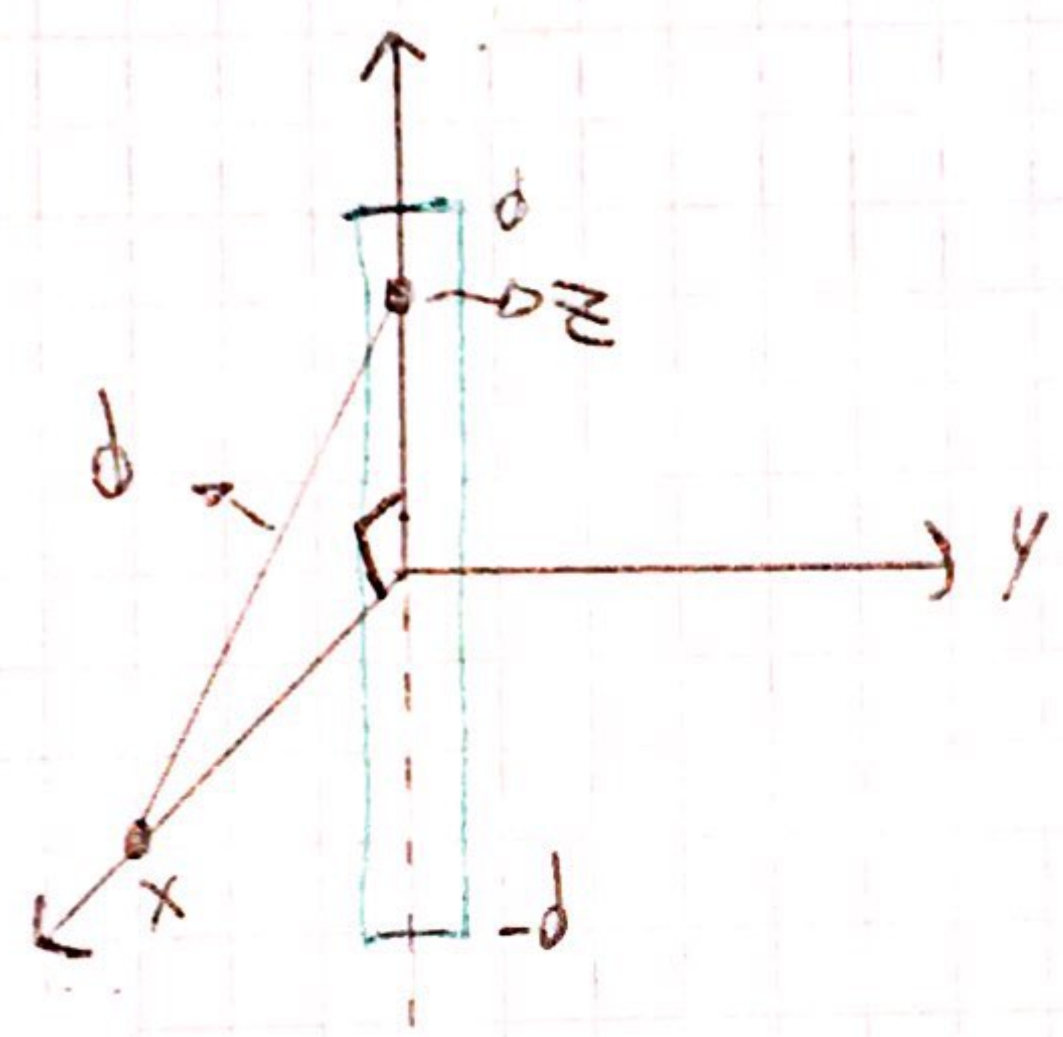
↳ distancia entre 2d y los puntos de la varilla

donde $dq = \lambda . dz$

$$V(0,0,2d) = K_c . \lambda \int_{-d}^{d} \frac{dz}{2d-z} = -K_c \lambda . \left(\ln(2d-z) \Big|_{-d}^{d} \right)$$

$$= K_c . \lambda \left(\ln(3d) - \ln(d) \right) = K_c \lambda \ln(3)$$

b)



dado que es un triangulo rectangulo:

$d = \sqrt{x^2+z^2}$ ⤳ distancia de cualquier punto en x a z.

Por lo tanto:

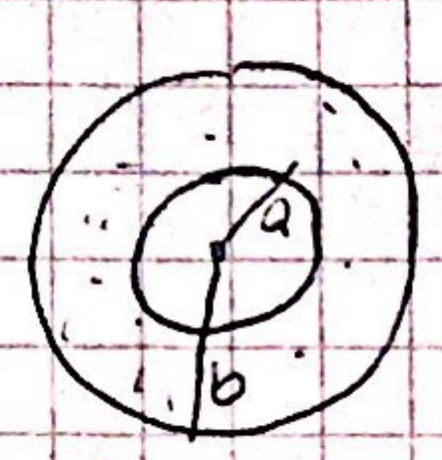
$$V(x,0,0) = K_c \int_{-d}^{d} \frac{\lambda . dz}{\sqrt{x^2+z^2}} = K_c . \lambda \left(\operatorname{Tanh}^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \right) \Big|_{-d}^{d} \right)$$

↳ integral de linea sobre el eje z, pues ahí está la carga

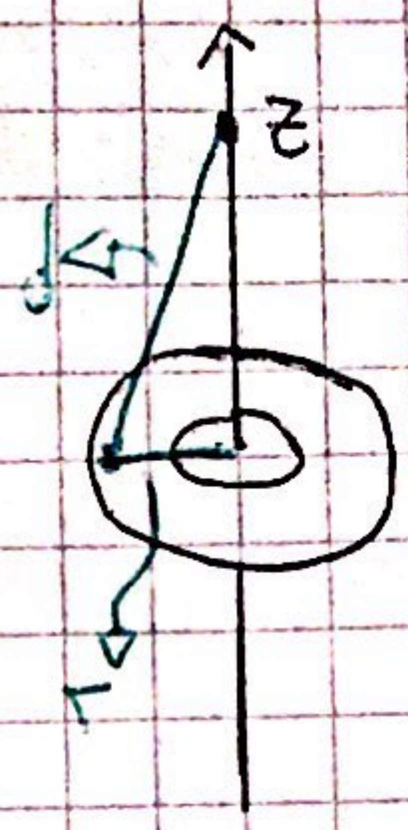
$$V(\sqrt{3}d, 0, 0) = K_c \lambda . \ln(3)$$

4

a)



→ discos



$$V_q = k_c \cdot \frac{dq}{r}$$

$$d = \sqrt{z^2+r^2}$$

Entonces:

$$V = \int_{sup} \frac{k_c \cdot dq}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

donde: $dq = \sigma\, 2\pi r\, dr$

↳ carga de cada circunferencia

$$V(0,0,z) = k_c \cdot \int_a^b \frac{\sigma 2\pi r\, dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = 2\pi k_c \sigma \underbrace{\int_a^b \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2+r^2}}}$$

Sustitución: $a = z^2+r^2$

$da = 2r\, dr$

$$\int \frac{da}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\int \frac{da}{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

$$V(0,0,z) = 2\pi k_c \sigma \int_a^b \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2+r^2}} = \sigma 2\pi k_c \left(-\sqrt{z^2+r^2} \Big|_a^b \right) = \sigma 2\pi k_c \left[-\sqrt{b^2+z^2} + \sqrt{a^2+z^2} \right]$$

NOTA

Scanned with CamScanner

b) $V(0,0,0) = \sigma 2\pi k_c \left(\sqrt{b^2} + \sqrt{a^2}\right) = 2\pi k_c (b+a)\,\sigma$

Cuando $||z|| >> b$ (y por lo tanto $|z| >> a$):

$V(0,0,z) = 2k_c\left[-|z| + |z|\right] = 0$

5

a) $\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_0 \cdot e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \cdot -a2x = -\frac{2a\phi_0 x}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \phi_0 \cdot e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \cdot -a2y = -\frac{2a\phi_0 y}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \phi_0 \cdot e^{-a(x^2+y^2+z^2)} \cdot -2za = -\frac{2a\phi_0 z}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}}$$

Entonces:

$$\vec{E}(x,y,z) = 2a\phi_0\left(\frac{x}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{y}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{z}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}}\right)$$

b)

$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\rightsquigarrow$ Maxwell

$\varepsilon_0 \nabla\vec{E}(x,y,z) = \rho(x,y,z)$

HOJA N°

FECHA

$$\cancel{\frac{\partial E}{\partial x} = 2a\phi_0 \frac{\left(e^{ax^2} - x \cdot e^{ax^2} \cdot 2ax\right)}{\left(e^{ax^2}\right)^2} = \frac{2a\phi_0 (1-2ax^2)}{e^{ax^2}}}$$

$$\cancel{\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{2a\phi_0 (1-2ay^2)}{e^{ay^2}}} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{2a\phi_0}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}} \cdot \left[1 - 2a x_i (x+y+z)\right]$$

$$\cancel{\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{2a\phi_0 (1-2az^2)}{e^{az^2}}}$$

Entonces:

$$\rho(x,y,z) = 2a\phi_0 \varepsilon_0 \left[\frac{1-2ax(x+y+z)}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{1-2ay(x+y+z)}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{1-2az(x+y+z)}{e^{a(x^2+y^2+z^2)}} \right]$$

En el origen:

$$\rho(0,0,0) = 2a\phi_0 \varepsilon_0 (1+1+1) = 6a\phi_0 \varepsilon_0$$

En el infinito:

$$\rho(\infty,\infty,\infty) = 2a\phi_0 \varepsilon_0 (0+0+0) = 0$$

Pues $e^{ax_i^2}$ crece más rápido que x_i^2

6

$dV = -E \cdot dr$

↳ dado a la simetría del problema

Dado $E = \frac{Q \cdot k_c}{r^2}$:

$$dV = -\frac{Q k_c}{r^2} dr \Rightarrow V = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q k_c}{r^2} dr.$$

$$= -Q k_c \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -Q k_c \left(-\frac{1}{r} \Big|_{\infty}^{r} \right)$$

$$= \frac{Q k_c}{r}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{Q k_c}{r} \hat{r}}$$

Sea R el radio de la esfera:

$$V(R) = \frac{Q k_c}{R} \hat{r} = \phi_0 \hat{r} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{R \phi_0}{k_c}}$$

↝ carga total de la esfera

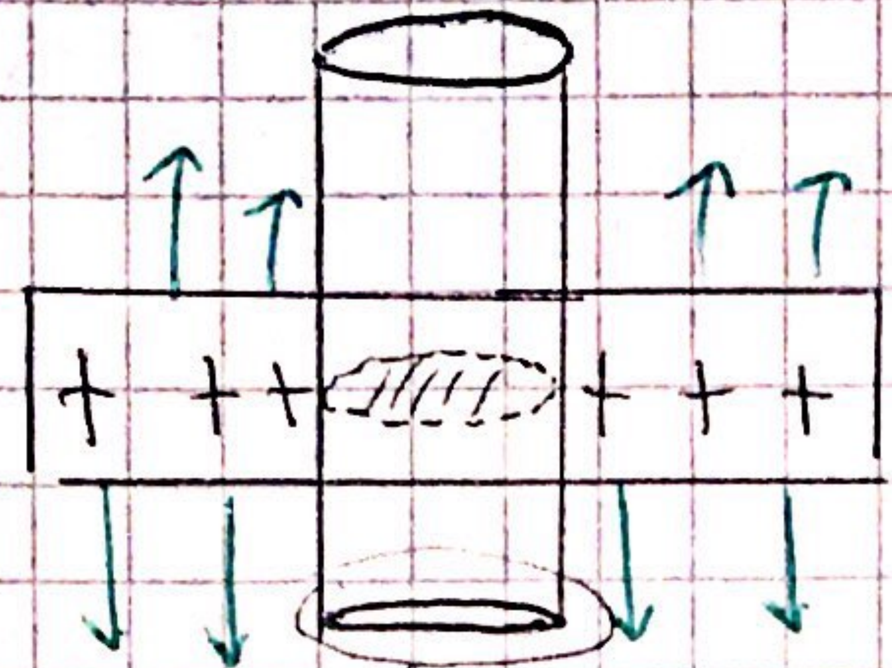
en la superficie

Al ser conductora toda la carga está en la superficie, por eso Q

FECHA

7

Analicemos con una sola placa

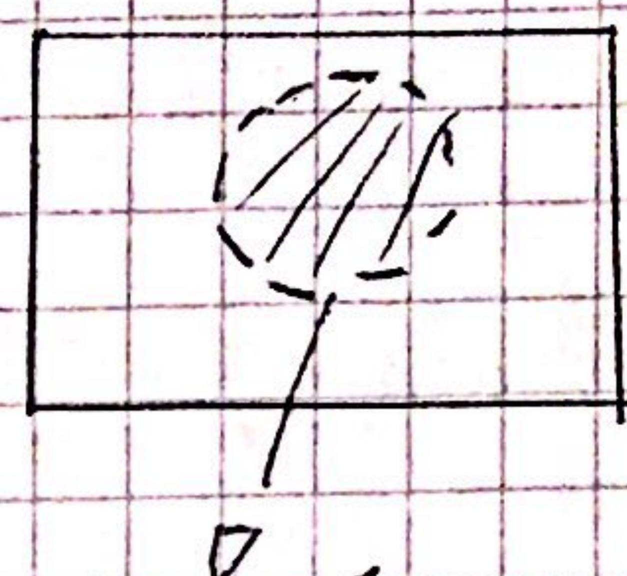


despreciamos el alto

$\hookrightarrow$ sup gaussiana

$\to$ el piso tiene superficie $A = A'$

En 2d:



Sup A'

Por Gauss:

$$2\,\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{s} = Q' \longrightarrow Q' = \sigma \cdot A' = \sigma \cdot A$$

pues el campo es el mismo por encima y debajo

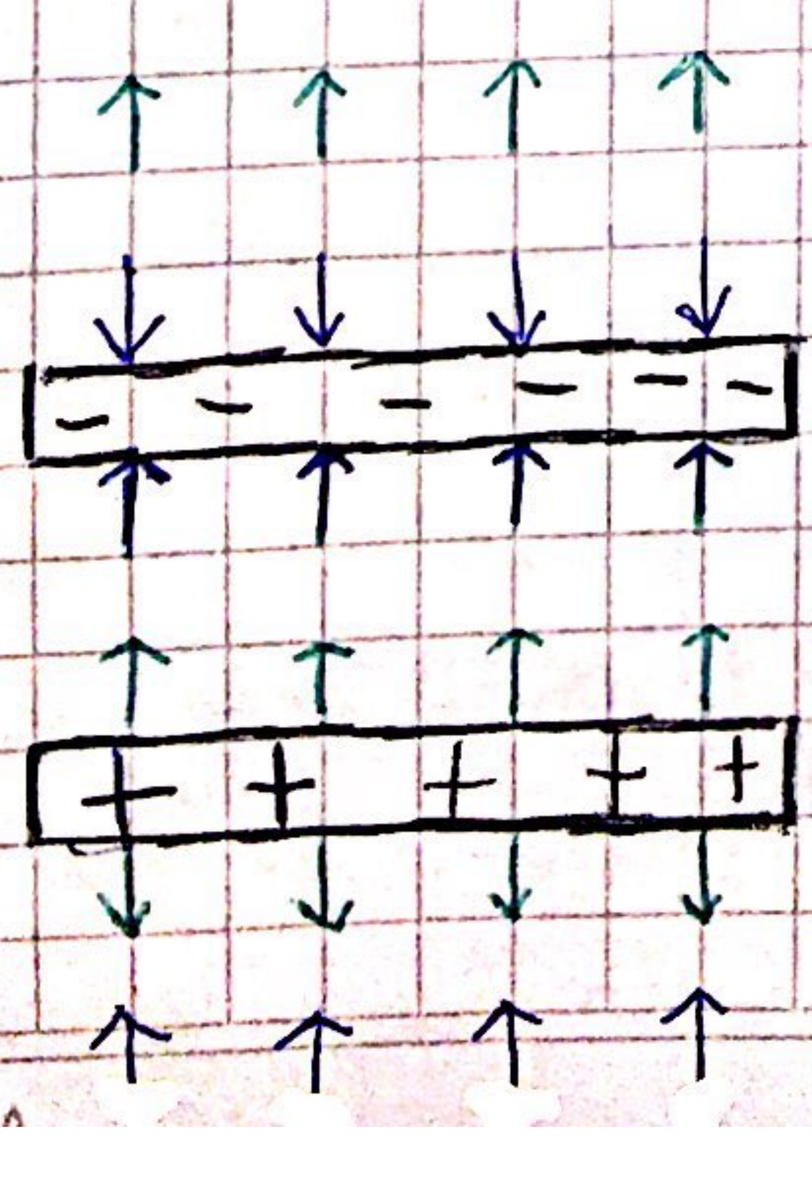
$$2\varepsilon_0 E \underbrace{\int ds}_{\text{sup } A} = \sigma \cdot A$$

$$2\varepsilon_0 E . A = \sigma A$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Campo de placa de carga positiva

¡Es constante!



Es de notar que $E_T = 0$

Es de notar que aquí $E_T = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Es de notar que $E_T = 0$

NOTA

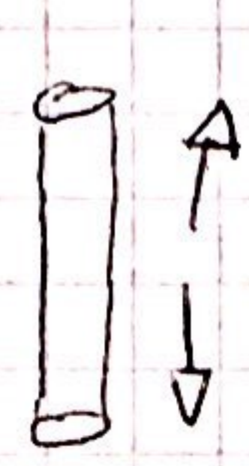
Por otro lado:

$$V=\int_0^d E\cdot d\vec{L} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d dL = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot L\Big|_0^d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

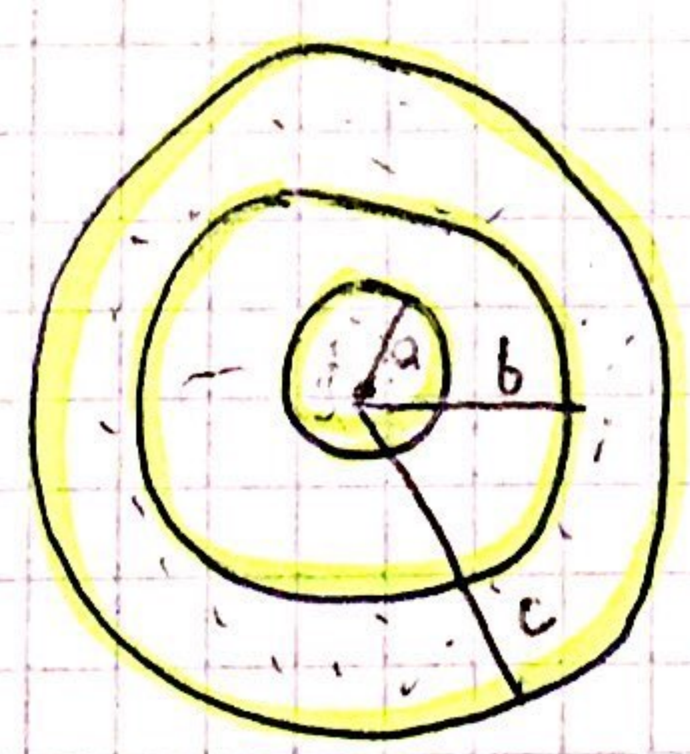
8

Notar que tenemos simetria rotacional

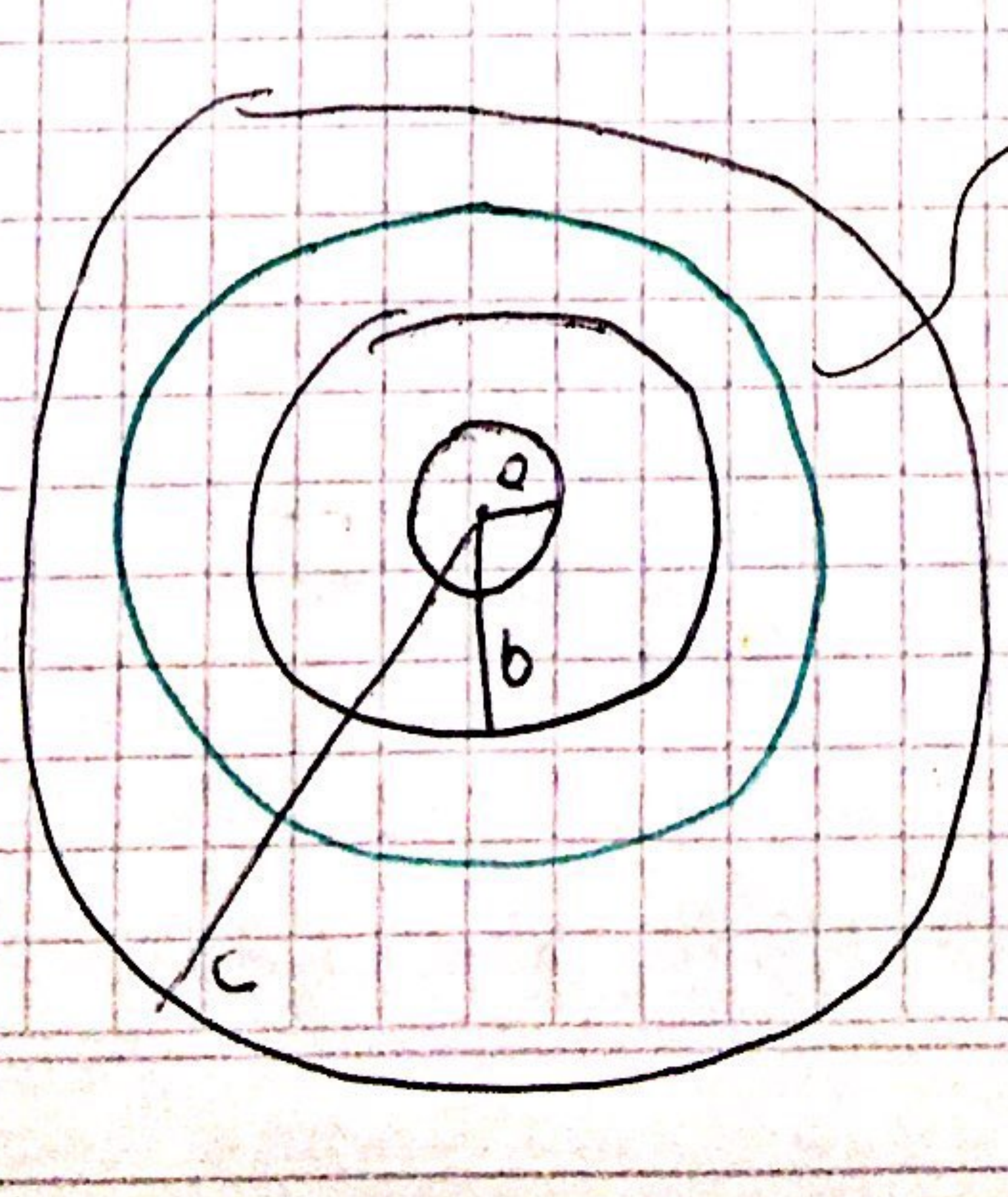
y simetría de longitud



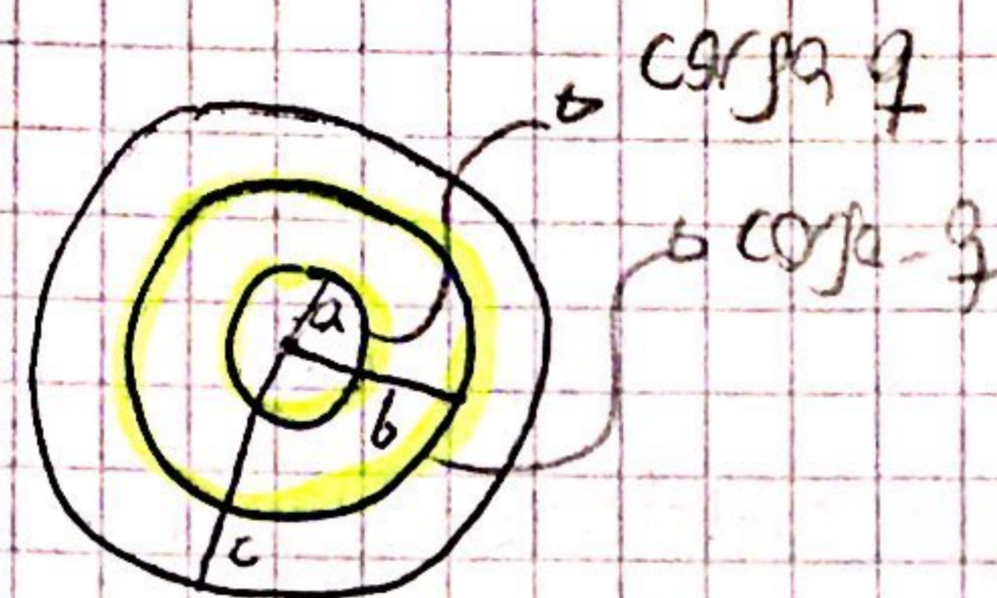
Para que esté en equilibrio electroestático el campo debe ser cero dentro del cuerpo, por lo tanto $Q=0$ dentro del conductor $\Rightarrow$ la carga debe estar en la superficie. Por lo tanto las zonas posibles donde se pueden encontrar las cargas:



Ahora analizemos con la superficie gaussiana Verde:



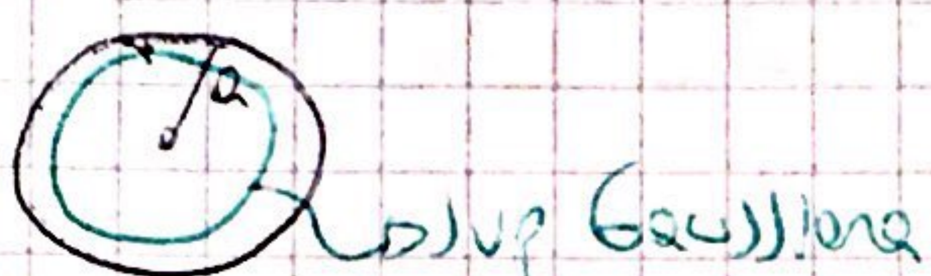
La sup. está dentro de un conductor, por lo que su campo interno debe ser cero $\Rightarrow$ en la Sup. "b" debe haber la misma cantidad de carga pero opuesta que en "a", de este modo la carga neta es cero, y por lo tanto el campo es cero. Es decir que la distribución de carga es:



Además: $\sigma_a = \frac{q}{2\pi L a}$ → área del cilindro

$\sigma_b = -\frac{q}{2\pi L b}$

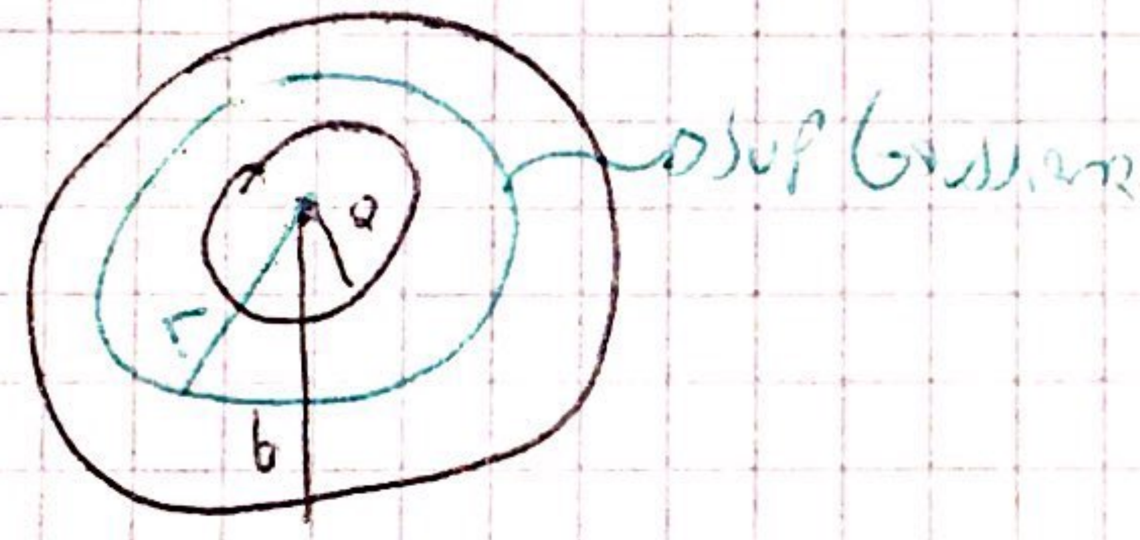
Cálculo del Potencial



Dentro de "a" $Q=0 \Rightarrow \vec{E}=0 \Rightarrow \vec{V}=cte$

$$\vec{V} \underset{b}{=} \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Uso $r_0 = a$ con la fórmula del potencial de abajo. Debe ser continua



Por Gauss:

$Q' = \sigma_a \cdot 2\pi a \cdot L$ → pues es la carga del cilindro a

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{s} = Q'$$

$$\varepsilon_0 E \int ds = \sigma_a 2\pi a L$$

$$\varepsilon_0 . E . 2\pi . r . L = \sigma_a 2\pi a L$$

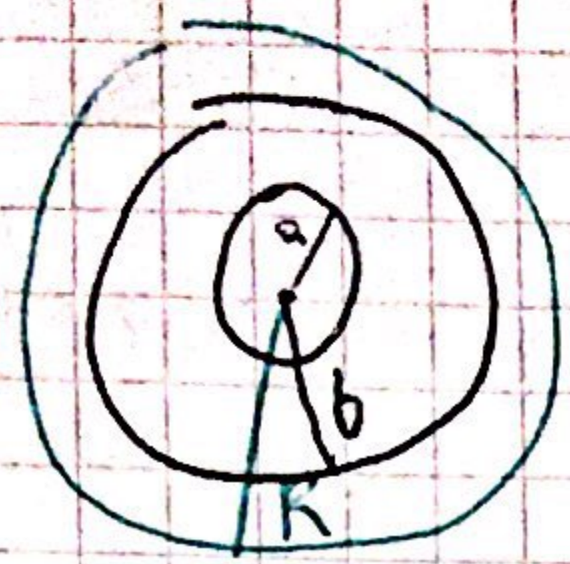
$$\boxed{E = \frac{\sigma_a . a}{\varepsilon_0 . r}}$$

$r_0 \geq a$

$V(r_0) - V(b)$

$$V = \int_{r_0}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0} \int_{r_0}^{b} \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma_a a}{\varepsilon_0} \cdot \ln(r)\Big|_{r_0}^{b} = \frac{\sigma_a . a}{\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{r_0}\right)$$

por continuidad



~ Sup Gaussiana con $R \geq b$

$$V(b) = \frac{\sigma_a \, a}{\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} = 0$$

$Q' = 0$, por lo tanto $E = 0 \Longrightarrow V = cte = 0$

10

a)
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & -(x+y) & -2z \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \hat{i} = \frac{\partial(-2z)}{\partial y} - \frac{\partial(-(x+y))}{\partial z} = 0-0=0 \\ \hat{j} = \frac{\partial(x+y)}{\partial z} - \frac{\partial(-2z)}{\partial x} = 0-0=0 \\ \hat{k} = \frac{\partial(-(x+y))}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = -1-1=-2 \end{cases}$$

Rotor: $\nabla \times \vec{F} = (0,0,-2)$

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(-(x+y))}{\partial y} + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} = 1-1-2 = -2$$

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{F} = -2$

b)
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 2x+3z & 3y \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \hat{i} = 3-3=0 \\ \hat{j} = 0-0=0 \\ \hat{k} = 2-2=0 \end{cases}$$

Rotor: $\nabla \times \vec{G} = (0,0,0)$

$$\frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial(2x+3z)}{\partial y} + \frac{\partial(3y)}{\partial z} = 0+0+0 = 0$$

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{G} = 0$

NOTA

Hay que encontrar ϕ tal que $\vec{G}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\phi}{\partial x}=2y \overset{?}{\Longrightarrow} \phi=2xy\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=2x+3z \overset{?}{\Longrightarrow} \phi=2xy+3zy\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=3y \overset{?}{\Longrightarrow} \phi=3yz\end{array}\right\}$$

Es claro que: $\phi(x,y,z)=2xy+3zy$

c)

$$\left.\begin{array}{ccc}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-z^2 & 2 & 2xz\end{array}\right\}\begin{array}{l}\hat{i}=\frac{\partial(2xz)}{\partial y}-\frac{\partial(2)}{\partial z}=0-0=0\\ \hat{j}=\frac{\partial(x^2-z^2)}{\partial z}-\frac{\partial(2xz)}{\partial x}=-2z-2z=-4z\\ \hat{k}=\frac{\partial(2)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2-z^2)}{\partial y}=0-0=0\end{array}$$

Rotor: $\nabla\times\vec{H}=(0,-4z,0)$

$$\frac{\partial(x^2-z^2)}{\partial x}+\frac{\partial(2)}{\partial y}+\frac{\partial(2xz)}{\partial z}=2x+0+2x=4x$$

Divergencia: $\nabla\cdot\vec{H}=4x$

FECHA

NOTA

HOJA N
FECHA

9

- están al mismo potencial
- Tienen carga de igual magnitud

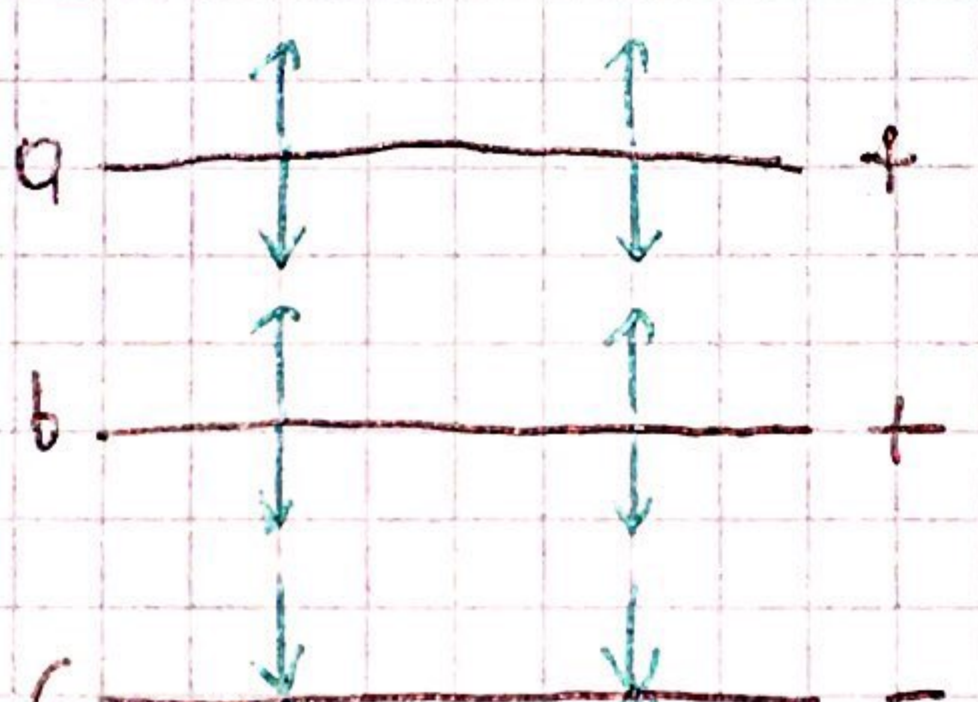
$\sigma_a = -\sigma_b$

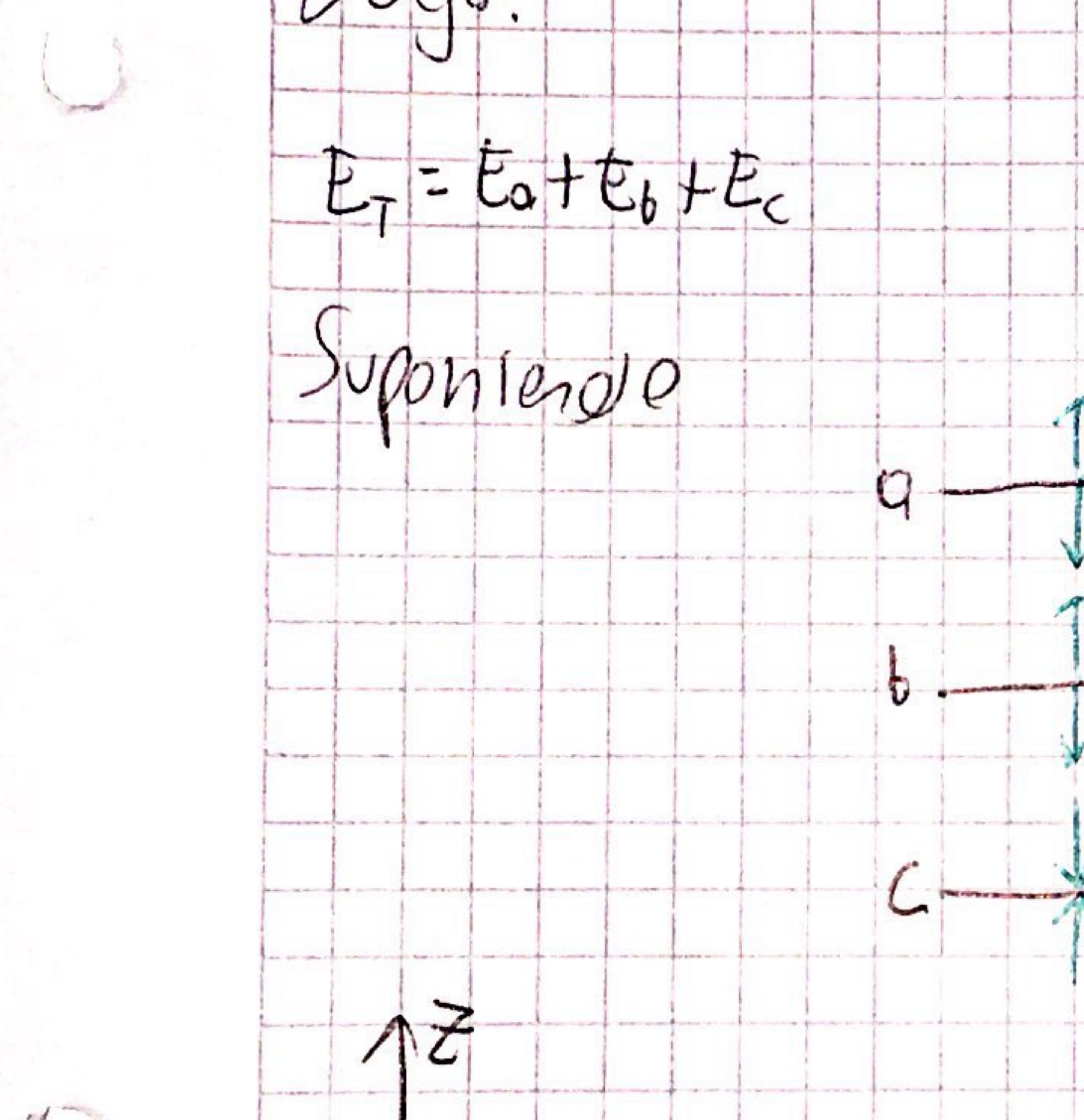
Para cada placa $E = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0}$ ~> por ej 7

Luego:

$E_T = E_a + E_b + E_c$

Suponiendo





En ①: $\vec{E}_{1T} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma - 2\sigma_a)\hat{z}$

En ②: $\vec{E}_{2T} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}(2\sigma_a + \sigma)\hat{z}$

NOTA

$$V(b)-V(a) = -\int_b^a E_1\,dz = -\int_0^5 E_1\,dz = -5E_1$$

$$V(c)-V(b) = -\int_c^b E_2 . dz = -\int_{-8}^0 E_2\,dz = -8E_2$$

La dif de potenciales entre b y a deben ser iguales a la dif de potencial entre b y c. Luego:

$$-5E_1 = -8E_2$$

$$\frac{5}{2\varepsilon_0}(\sigma - 2\sigma_a) = -\frac{4}{\varepsilon_0}(2\sigma_a + \sigma)$$

$$\frac{5}{2}\sigma + 4\sigma = -8\sigma_a + 5\sigma_a$$

$$\frac{13}{2}\sigma = -3\sigma_a$$

$$\sigma_a = -\frac{13}{6}\sigma$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_a = -\frac{13}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^{-4}\ \frac{C}{m^2} = -0{,}72 .\ 10^{-4}\ \frac{C}{m^2}$$