PRACTICO 3

HOJA N°

FECHA

1

a) $Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

$Q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow Q' = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = Q \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3$

b) $dE_p = k_c \cdot \frac{q\,dq}{r}$

$$\begin{cases} q = Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \\ dq = 4\pi r^2 \rho\, dr \end{cases}$$

$dE_p = k_c \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot 4\pi r^2 \rho\, dr}{r} = k_c \frac{16}{3} \cdot \pi^2 \rho^2 r^4 dr$

c)

$$E_p = \int_0^R k_c \frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 r^4 dr = \frac{k_c 16\pi^2 \rho^2 r^5}{5}\Bigg|_0^R = \frac{k_c 16\pi^2 \rho^2 R^5}{5}$$

Con $k_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\rho^2 = \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6}$

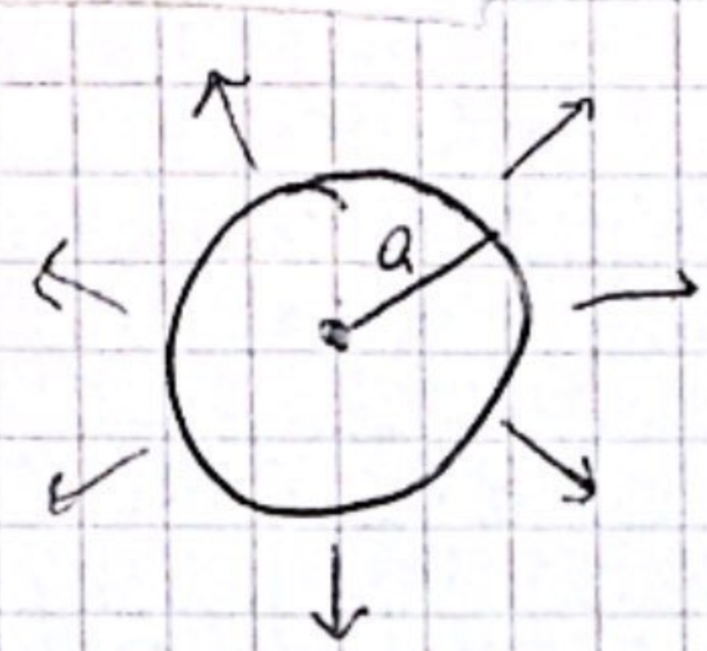
$$E_p = \frac{\cancel{16} \cdot 9 \cdot Q^2 \cdot R^5 \pi^2}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{16}\pi^2 R^6 \cdot 5} = \frac{9Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

2



Sabiendo que el campo solo depende del radio, el potencial también. Es decir que:

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma \cdot r}{\pi \cdot \varepsilon_0}$$

Dado que

$$dE_p = V \cdot dq \implies E_p = \int_0^a \frac{\sigma \cdot r}{\pi \varepsilon_0} \cdot dq$$

en donde $dq = \sigma \cdot ds$ → superficie de cada pequeña circunferencia , $ds = 2\pi r \cdot dr$

entonces: $dq = 2\sigma \pi r dr$

Es decir:

$$E_p = \int_0^a \frac{\sigma \cdot r}{\pi \varepsilon_0} \cdot 2\sigma \pi r \, dr = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon_0} \int_0^a r^2 \, dr = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^a \right)$$

$$= \frac{2\sigma^2 a^3}{3\varepsilon_0}$$

Siendo $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$

$$\boxed{E_p = \frac{2Q^2}{3\pi^2 \varepsilon_0 a}}$$

NOTA

3

$$C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \rightsquigarrow \text{comprobado en el teórico}$$

Por otra parte:

$r = 15\,cm$
$d = 0{,}04\,mm$

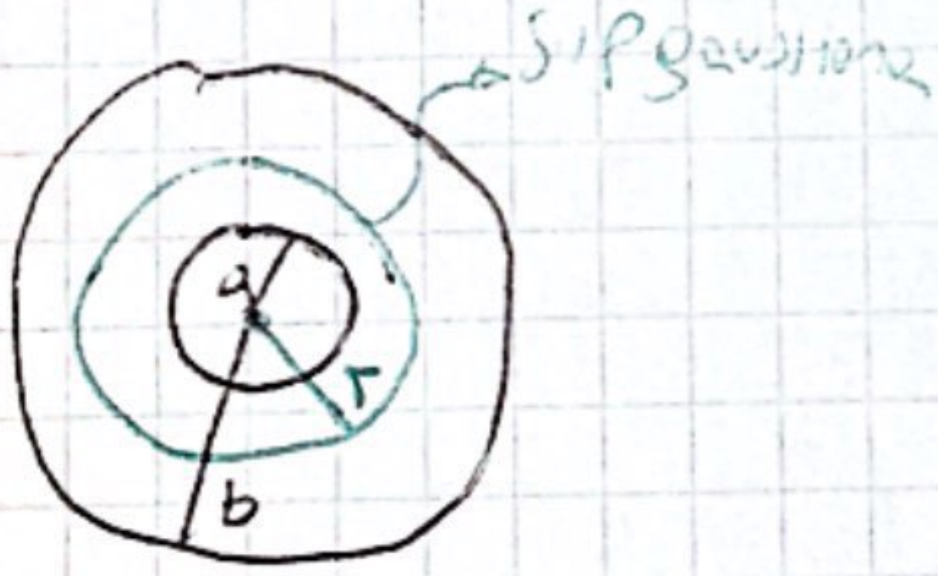
Notemos que el desarrollo por gauss es exactamente el mismo, por lo tanto podemos conservar el resultado anterior:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi \cdot r^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi \cdot 15^2\,cm^2}{0{,}4\,cm} = 5{,}04\,m \cdot \varepsilon_0$$

4

a) Dada la simetría, podemos expresar el campo solo dependiendo del radio.

Campo entre a y b:



$$\varepsilon_0 \oint E\,ds = Q \rightarrow \text{carga de a}$$

$$\varepsilon_0 E \underbrace{\oint ds}_{\text{sup de la esfera gaussiana}} = Q$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

Sabiendo que $dE_p = \mu \cdot dV_{ol} \Rightarrow E_p = \int_a^b \mu \cdot dV_{ol}$

- $\mu = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4 \varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi r \varepsilon_0}$
- $dv = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{sup de cada esfera que sumo}} dr$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Entonces

$$E_p = \int_a^b \frac{Q^2}{32\pi r^4 \varepsilon_0} \cdot 4\pi r^2 dr = \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \Big|_a^b \right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b)

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} d\vec{r} = -\int_a^b E \cdot dr = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_a^b \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{a-b}{ab}\right)$$

Entonces:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q . 4\pi\varepsilon_0 ab}{Q(a-b)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{a-b}$$

5

a) La capacidad del primer condensador es: $C_1 = \frac{Q}{V_1}$

La capacidad total del sistema $C_T = \frac{Q}{V_f}$

Dado que $C_T = C_1 + C_2$:

$$\frac{Q}{V_f} = \frac{Q}{V_1} + C_2$$

$$\boxed{Q\left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_1}\right) = C_2}$$

NOTA

b)

$$Ep_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{V_1} \cdot V_1^2 = \frac{Q.V_1}{2}$$

con 1 solo condensador

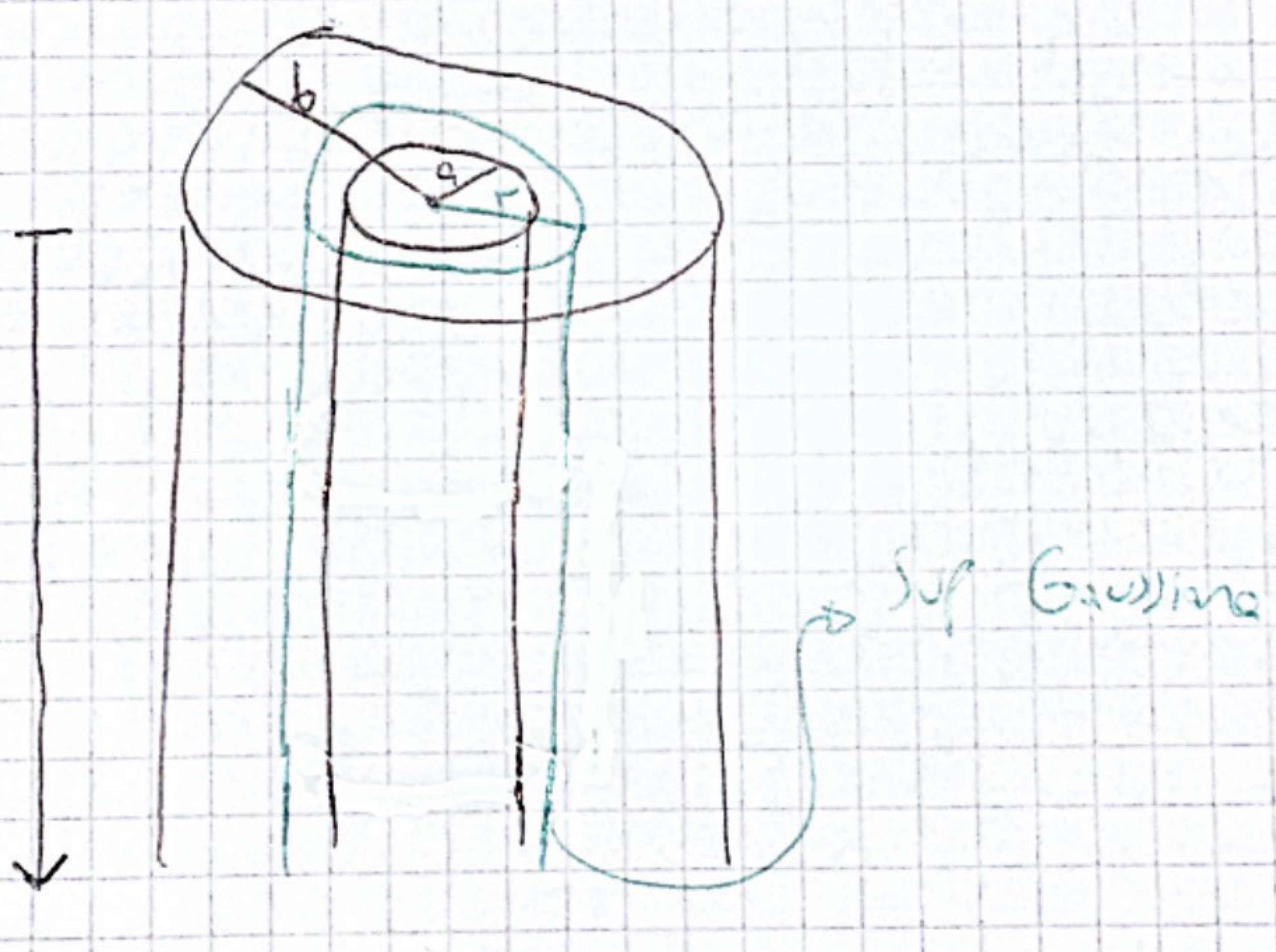
$$Ep_2 = \frac{1}{2} \cdot C_T \cdot V_f^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{V_f} \cdot V_f^2 = \frac{Q.V_f}{2}$$

Con 2 condensadores:

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = \frac{Q}{2}(V_f - V_1) = -35 \underbrace{V}_{\text{Voltios}} \cdot Q$$

6

a)



$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{s} = Q$ donde Q es la carga del cilindro "a"

[redacted]

Entonces

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{s} = Q$$

$$\varepsilon_0 E \int ds = Q$$

$$\varepsilon_0 E\, 2\pi r L = Q$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi r L}$$

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \cdot dr = -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \left(\ln(r) \Big|_a^b \right) = -\frac{Q \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi L \varepsilon_0}$$

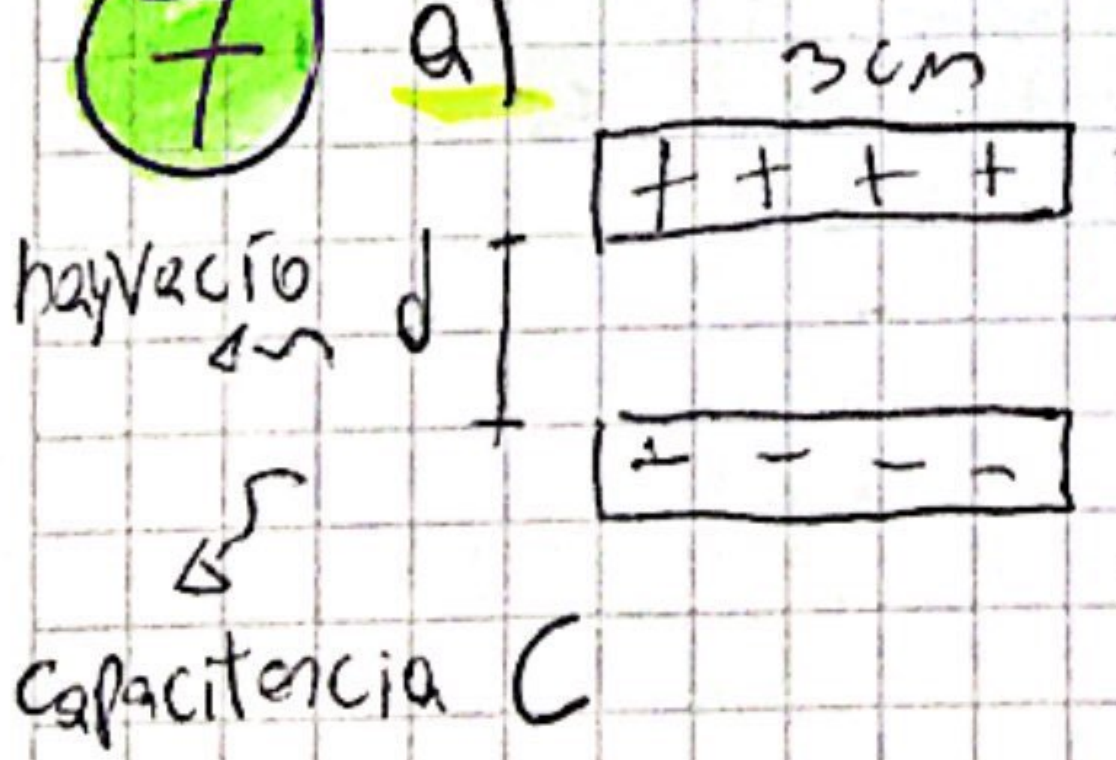
Dado que $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$:

$$\boxed{C = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

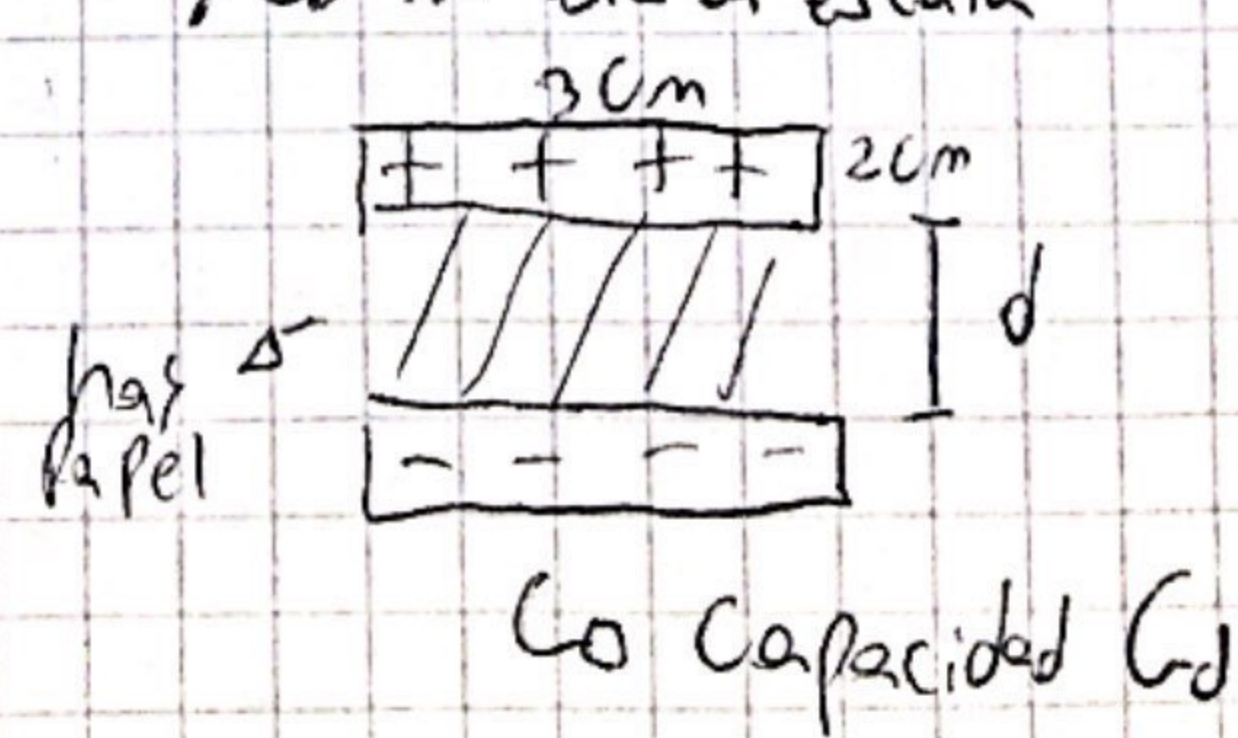
b) Cuando $b \to a$, $\ln\left(\frac{b}{a}\right) \to 0 \Rightarrow C \to \infty$. Es decir que si acortamos las distancias se aumenta la capacitancia. Se corresponde a la capacidad del CCPP en el límite, pues:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \text{ cuando } d \to 0 \Rightarrow C \to \infty$$

7 a)



No está a escala



Sabemos que $C = \frac{\varepsilon_0 . A}{d}$:

$$C = \varepsilon_0 . \frac{2cm . 3cm}{0{,}1cm} = 60\, cm\, \varepsilon_0$$

Y además $C_d = k C$:

$$C_d = 3{,}7 . 60cm . \varepsilon_0 = 222 cm . \varepsilon_0$$

$$\boxed{C = 2{,}22 m\, \varepsilon_0}$$

b)

$$C_d = \frac{Q_d}{V_d} \Longrightarrow Q_d = V_d . C_d$$

$$V_d = -\int_0^d \vec{E}\, d\vec{l} = E . d$$

Con el campo electrico máximo, calculamos la carga máxima:

$$E_{max} = 16 . 10^6 \frac{V}{m}$$

$$V_d = 16 . 10^6 \frac{V}{m} \cdot 0{,}001 m = 16 . 10^3 V$$

Entonces:

$$Q_d = V_d\, C_d = 16 . 10^3 . 2{,}22 . \varepsilon_0 . V . m = 35{,}52 . 10^3 V . \varepsilon_0$$