Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

LMA Física II: Electricidad y Magnetismo - 1C 2022

Guía N°2: Potencial eléctrico

Problema 1: La siguiente función vectorial representa un posible campo electrostático:

$$E_x = 6\,xy\,, \quad E_y = 3\,(x^2 - y^2)\,, \quad E_z = 0\,.$$

a) Calcular la integral de línea del vector campo eléctrico desde el punto $(0, 0, 0)$ al punto $(x_1, y_1, 0)$ a lo largo del camino que va en líneas rectas desde $(0, 0, 0)$ a $(x_1, 0, 0)$ y luego a $(x_1, y_1, 0)$.

b) Efectuar un cálculo similar para el camino que va por el otro lado del rectángulo, a través del punto $(0, y_1, 0)$, y comparar los resultados obtenidos por ambos caminos.

c) Verificar que existe una función potencial $\phi(x, y, z)$ de este campo, es decir: calcular la integral de línea desde el origen hasta un punto cualquiera (x, y, z) a lo largo de un camino arbitrario a elección, y luego verificar que el gradiente del resultado obtenido es igual a $\vec{E}$. (Cuidado! Para hallar el potencial eléctrico hay que cambiar el signo de la integral).

Problema 2: Mostrar que cualquiera de las afirmaciones:

a) La integral de camino $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para todo campo electrostático $\vec{E}$ es independiente del camino que conecta los puntos P_1 y P_2,

b) Para todo campo electrostático, la integral sobre cualquier camino cerrado Γ es nula: $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$,

puede considerarse corolario de la otra.

Problema 3: Una varilla se extiende a lo largo del eje z desde $z = -d$ hasta $z = d$. La varilla posee una una carga distribuida uniformemente a lo largo de la misma con una densidad lineal λ.

a) Integrando a lo largo de esta distribución de carga, calcular el potencial en el punto P_1 sobre el eje z de coordenadas $(0, 0, 2d)$.

b) Mediante otra integración, calcular el potencial en un punto P_2 que se encuentra sobre el eje x. Verificar que si la coordenada x de P_2 es igual a $\sqrt{3}\,d$, entonces el potencial resulta igual que en P_1. Nota: Los puntos P_1 y P_2 están situados sobre una elipse cuyos focos están en los extremos de la varilla, como puede comprobarse sumando las distancias de P_1 y P_2 a los extremos de la varilla. De hecho, toda esa elipse de revolución alrededor del eje z resulta ser una superficie equipotencial, pero no lo demostraremos en este problema.

Problema 4: Un disco delgado, de radio b, tiene un orificio circular concéntrico de radio a. Sobre el disco se dispone una densidad superficial de carga uniforme σ.

a) Calcular el potencial eléctrico en todo el eje z, tomado como el eje de simetría del problema, fijando el cero de potencial a una distancia infinita.
b) Evaluar el valor del potencial en el centro del orificio, y estudiar el comportamiento del potencial para $|z| \gg b$. Graficar la función $\phi(0, 0, z)$.
c) Considere ahora $a = 1$ cm, $b = 3$ cm, $\sigma = -\frac{4}{3} \times 10^{-5}\,\mathrm{C/m^2}$. Un electrón, partiendo del reposo en el centro del orificio, se aleja de la distribución de carga experimentando solo la repulsión eléctrica con la misma. Calcular la velocidad que alcanza el electrón cuando se encuentre infinitamente alejado, expresando el resultado en m/s.

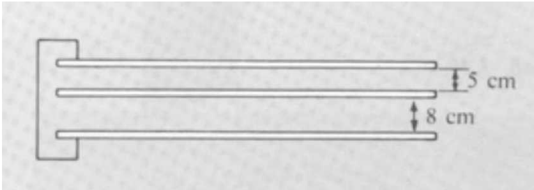
Problema 5: Considere un potencial eléctrico de la forma $\phi(x, y, x) = \phi_0\, e^{-a(x^2+y^2+z^2)}$, con a, ϕ_0 dos constantes positivas con sus correspondientes unidades.
a) Hallar el campo eléctrico en todo el espacio. (¿Es posible anticipar la dirección del campo eléctrico antes de calcular el gradiente?)
a) Hallar la distribución espacial de carga, e indicar cuánto vale la densidad de carga en el origen y en el infinito.

Problema 6: Obtenga el potencial y el campo eléctrico de una esfera conductora de radio R, sabiendo que su superficie se encuentra a potencial ϕ_0 (tomando el potencial cero en el infinito). Calcule la carga total de la esfera e indique cómo está distribuida.

Problema 7: Considere dos placas planas conductoras muy extensas, paralelas, colocadas a distancia d entre sí y con densidades superficiales de carga σ y $-\sigma$ respectivamente. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio (aproximando los conductores como infinitos) y la diferencia de potencial entre las placas.

Problema 8: Un cilindro conductor de radio a con carga total q se encuentra rodeado por un cascarón cilíndrico conductor de radio interior b y exterior c con carga total $-q$. Considere que ambos cilindros son coaxiales y muy largos. Encuentre la distribución de cargas en el cascarón conductor y el potencial eléctrico en todo el espacio.

Problema 9: Tres placas conductoras muy extensas, de igual tamaño y de espesor despreciable se colocan paralelas entre sí con las separaciones que se muestran en la figura. Las placas exteriores están conectadas por un cable conductor y tienen carga total nula, mientras que la placa del medio está aislada y su carga es $1/3 \times 10^{-4}\,\mathrm{C/m^2}$. Usando la aproximación de planos infinitos, calcular las densidades superficiales de carga sobre cada una de las placas externas.



Problema 10: Calcular el rotor y la divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales. Si el rotor resulta nulo, construya una función escalar φ de la cual el campo resulta su gradiente.

a) $F_x = x + y, \quad F_y = -(x + y), \quad F_z = -2z.$

b) $G_x = 2y, \quad G_y = 2x + 3z, \quad G_z = 3y.$

c) $H_x = x^2 - z^2, \quad H_y = 2, \quad H_z = 2xz.$

Problema 11: Dada la función $\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$:

a) Indicar qué relación deben satisfacer las constantes a, b, c para que ϕ cumpla con la ecuación de Laplace.

b) Suponiendo que se cumple la condición anterior, calcular la forma del campo eléctrico correspondiente a ese potencial.

Nota: Esta es la forma aproximada del potencial en el interior de las llamadas "trampas de Paul"; en ellas, el campo eléctrico en cada instante confina en dos direcciones pero siempre es repulsivo en la dirección restante.

Gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Gradiente en coordenadas esféricas (con φ el ángulo azimutal):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Divergencia en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Divergencia en coordenadas esféricas:

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta\,\mathrm{sen}\theta)$$