ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS

Recuperatorio del Segundo Parcial

19 de Noviembre de 2010

1. Sea C un contorno simple y cerrado, y sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en el interior de C, tal que $f'(z)$ es continua sobre C y en el interior de C. Probar que,

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

2. Calcule el valor de las siguientes integrales indicando, en cada caso, qué teorema o propiedades aplica. Verifique que las hipótesis de los teoremas que usa se satisfacen.

   (a) $\displaystyle\int_C \frac{sen(z)\, cos(z)\, Log(z+3)}{z(z-\frac{\pi}{2})(z+2)}\, dz$; donde C es el contorno $|z| = 5/2$, recorrido en sentido positivo.

   (b) $\displaystyle\int_C \frac{cosh\, z}{z^2+z+1}\, dz$; donde C es el contorno $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, recorrido en sentido positivo.

3. (a) Sea C el círculo unidad $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Probar que para todo $a \in \mathrm{R}$ se tiene,

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}\, dz = 2\pi i.$$

   (b) Escribir la integral en la parte (a) en términos de θ para deducir que,

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta)\, d\theta = \pi.$$

4. Usando la rama $\log(z) = \ln|z| + i\,\theta$ $(0 < \theta < 2\pi)$ de la función logarítmo, probar que

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\, dz = -i\pi,$$

cuando el contorno de integración desde $-2i$ hasta $2i$ es la mitad izquierda del círculo $|z| = 2$.