ELEMENTOS DE FUNCIONES COMPLEJAS

Recuperatorio del Primer Parcial

19 de Noviembre de 2010

Parte Teórica

1. Probar la desigualdad triangular $|z+w| \leq |z| + |w|$.

2. Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, donde $z = x+iy$ está en un dominio D, y sea $z_o = x_o + iy_o \in D$.
   - (a) Enunciar condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$.
   - (b) Enunciar condiciones suficientes para la existencia de $f'(z_0)$.
   - (c) Deducir la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y escribir $f'(z_0)$ en coordenadas polares.
   - (d) Probar que si f es derivable en z_o entonces f es continua en z_o.

Parte Práctica

1. Considere la función $f(z) = e^{e^z}$, donde $z = x+iy$.
   - (a) Calcular $Re(f(z))$, $Im(f(z))$ y $|f(z)|$.
   - (b) Encuentre todas las soluciones de la ecuación $f(z) = 1$.
   - (c) ¿Cual es la mayor región del plano donde f es derivable?

2. (a) Demuestre que el conjunto de valores posibles de $\log((8i)^{1/3})$ es idéntico al conjunto de valores de $\frac{1}{3}\log(8i)$. ¿Vale en general que $\frac{1}{p}\log z = \log\left(z^{1/p}\right)$ para todo p entero?, ¿Como debe interpretarse esta última igualdad?

   (b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación: $\cosh(z) = i$.

3. Encuentre la mayor región del plano donde la siguiente función es derivable,

$$f(z) = \frac{Log\,(z+4)}{z^2+i}.$$

ej 14 o pág