Examen de Elementos de Funciones Complejas (4/12/08)

1) Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, definida en un dominio Ω de $\mathbf{C}$.
a) Dar la definición de derivada $f'(z_0)$, $z_0 \in \Omega$.
b) Mostrar que si existe $f'(z_0)$ entonces u y v satisfacen Cauchy-Riemann en z_0.
c) Probar que si $f(z)$ es analítica en un dominio y satisface $v(x,y) = u(x,y)^2$ entonces f es una función constante.

2) Sea $f(z)$ una función analítica en el interior y sobre el círculo $|z - z_0| = R$, recorrido en sentido positivo.
a) Dar una acotación para $\left|f^{(n)}(z_0)\right|$ en términos de R.
b) Enunciar y probar el teorema de Liouville.
c) Qué puede decir sobre la existencia de ceros de un polinomio complejo de grado $n \geq 1$? Justifique su respuesta.

3) a) Probar que el siguiente desarrollo en serie de Maclaurin en $|z-1| < 1$ es correcto.

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

b) Deducir de a), justificando que

$$\text{Log } z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad \text{en } |z-1| < 1$$

c) Mostrar que la función $f(z) = \begin{cases} \frac{\text{Log } z}{z-1} & \text{si } z \neq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$ es continua en $z = 1$ y que es analítica en $D = \{z : |z| > 0 \text{ y } -\pi < \text{Arg } z < \pi\}$; dibuje D.

4) Calcular las siguientes integrales justificando los resultdos:
a)

$$\int_{|z|=2} \left(\frac{1}{(1-z^2)} + \frac{1}{z-3} \right) dz$$

b)

$$\int_C \frac{\text{Log } z}{(z-1)^3} dz$$

donde C es el círculo $|z-1| = \frac{1}{2}$ recorrido en sentido antihorario.

5) Justificar si son verdaderas las siguientes afirmaciones:
a) El conjunto de puntos donde la función $f(z)$ no es analítica es finito.

$$f(z) = \frac{1}{\sinh z - \cosh z}$$

b) Se puede obtener de manera inmediata, **sin derivar**, el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(z) = z^2 - 1$ alrededor de $z = 1$ como: .....
c)

$$\lim_{z \to \pi} \frac{\sin z}{\pi - z} = \ldots$$