Funciones Complejas 2021.

Capítulo 1: Números complejos.

Sea K un conjunto no vacío y supongamos que en K tenemos definidos dos operaciones, la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$. Es decir, tenemos dos funciones:

$$+ : K \times K \longrightarrow K \qquad , \qquad \cdot : K \times K \longrightarrow K$$
$$(x,y) \longrightarrow x+y \qquad \qquad (x,y) \longrightarrow x \cdot y .$$

Supongamos que estas dos operaciones tienen las siguientes propiedades:

1) La suma es asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in K$.
2) La suma es conmutativa: $a+b = b+a$. $\forall a,b \in K$
3) Existencia de un elemento neutro para la suma: $\exists\ 0 \in K \ / \ a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in K$.
4) Existencia de opuesto: $\forall a \in K$ existe un elemento $a' \in K \ / \ a+a' = 0$.
5) El producto es asociativo: $(a \cdot b)c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in K$.
6) El producto es conmutativo: $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in K$.
7) Existencia de un elemento neutro para el producto: $\exists$ un elemento $1 \in K \ (1 \neq 0) \ / \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$.
8) Existencia de inverso: $\forall a \in K - \{0\}, \exists a'' \in K \ / \ a \cdot a'' = 1$.
9) Distributividad: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a,b,c \in K$

Un conjunto K con dos operaciones ($+$ y $\cdot$) que satisface todas las propiedades anteriores se llama un __cuerpo__.

__Ejemplo:__ $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$, p primo.

__Proposición:__ Si $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo entonces:

1) El cero es único.
2) El opuesto a' de un elemento $a\in K$ es único (Notación: $a'=-a$).
3) El inverso a'' de un elemento $a\in K-\{0\}$ es único (Notación: $a''=a^{-1}$). $1/a$.
4) $a+b=a+c \Rightarrow b=c$ $(a,b,c\in K)$.
5) $a\cdot 0=0$ $\forall a\in K$.
6) $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$.
7) $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$ y $(-a)\cdot(-b)=ab$ (Regla de los signos).
8) $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ o $a=-b$ (en particular, $(-a)^2=a^2$).
9) $a^2=1 \Leftrightarrow a=1$ o $a=-1$.
10) $(-1)\cdot a=-a$ $\forall a\in K$.

__Dem:__ 1) Suponemos que hay 2 neutros, 0 y $\tilde{0}$.

$$0+\tilde{0}=\begin{cases}\tilde{0} & (\text{pues } 0 \text{ es neutro})\\ 0 & (\text{pues } \tilde{0} \text{ es neutro})\end{cases}$$

$\Rightarrow 0=\tilde{0}$.

5) $a\cdot 0=0$ $\forall a\in K$.

$$a\cdot 0=a\cdot(0+0)\underset{\text{distrib.}}{=}a\cdot 0+a\cdot 0 \Rightarrow \boxed{a\cdot 0=0}$$

(revisar los otros) //

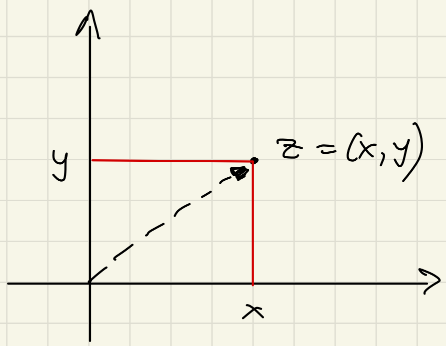
Números complejos

Un número complejo es un par ordenado de números reales:

$$z = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se denota: $\mathbb{C}$ = conjunto de números complejos

$$= \{ z = (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$



Definimos en $\mathbb{C}$ las siguientes operaciones:

Suma: $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (*)$$

Producto: $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

$$(2,3) \cdot (5,-2) = (10 - (-6), -4 + 15) = (16, 11).$$

Analicemos las operaciones $(*)$ para números de la forma $(x, 0)$:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0).$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

Identificando el número complejo $(x, 0)$ con el número real x, podemos pensar a $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$. Más aún, las operaciones en $\mathbb{C}$ extienden a las operaciones en $\mathbb{R}$.

¿Qué ocurre con los números complejos de la forma $(0, y)$?

$$(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2) \qquad (1)$$

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (-y_1 y_2, 0) \qquad (2)$$

(2) dice que el conjunto de números complejos $(0, y)$ <u>no</u> es cerrado bajo el producto (el producto de dos de ellos da un número real).

En particular, $\boxed{(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)}$ (3)

El número complejo $(0,1)$ juega un papel destacado, y se lo denota por i. Luego, podemos escribir (3) como:

$$i \cdot i = -1, \text{ es decir, } \boxed{i^2 = -1}.$$

i = unidad imaginaria.

Además, todo número complejo $z=(x,y)$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = x+iy.$$

Entonces, todo número complejo z se puede escribir como

$$\boxed{z = x+iy, \quad x,y \in \mathbb{R}}.$$

<u>Notación</u>: $x = \mathrm{Re}\, z$ (parte real de z), $y = \mathrm{Im}\, z$ (parte imaginaria de z).

En esta notación, las operaciones $+$ y $\cdot$ quedan:

$$\begin{cases} (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \\ (x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2). \end{cases}$$

<u>Propiedades algebraicas de $(\mathbb{C},+,\cdot)$</u>:

1) Suma asociativa: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ ✓

2) Suma conmutativa: $z_1+z_2 = z_2+z_1$ ✓

3) Existencia del neutro: $0 = (0,0) = 0+i0$ ✓

Si $z = x+iy$, $z+0 = (x+iy)+(0+i0) = (x+0)+i(y+0) = x+iy$.

4) Existencia del opuesto: $z = x+iy \Rightarrow -z = -x+i(-y) = -x-iy$.

$z+(-z) = (x+iy)+(-x-iy) = (x-x)+i(y-y) = 0.$

5) Asociatividad del producto: $(z_1 z_2)z_3 = (z_1 z_2)z_3$

6) Conmutatividad del producto: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \qquad z_2 \cdot z_1 = (x_2+iy_2)\cdot(x_1+iy_1) = (x_2x_1 - y_2y_1) + i(x_2y_1 + y_2x_1)$$

7) Existencia del neutro: el elemento $1 = 1 + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$ satisface

$$z\cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$z\cdot 1 = (x+iy)\cdot(1+i0) = (x-0) + i(x\cdot 0 + y\cdot 1) = x+iy$$

8) Existencia del inverso para $z \in \mathbb{C} - \{0\}$:

Sea $z = x+iy \neq 0$ ($\therefore x \neq 0$ o $y \neq 0$). Queremos encontrar $w = u + iv$ tal que: $z\cdot w = 1$.

$$z\cdot w = 1 \Rightarrow (x+iy)\cdot(u+iv) = 1 \Rightarrow (xu - yv) + i(xv + yu) = 1 + i\cdot 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xu - yv = 1 \\ yu + xv = 0 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema:

$$\begin{array}{lr} (1^{\circ})\times x: & x^2u - xyv = x \\ (2^{\circ})\times y: & y^2u + xyv = 0 \\ \hline + & \underbrace{(x^2+y^2)}_{\neq 0}u = x \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

$$\begin{array}{lr} (1^{\circ})\times y: & xyu - y^2v = y \\ (2^{\circ})\times x: & xyu + x^2v = 0 \\ \hline (2^{\circ})-(1^{\circ}): & (x^2+y^2)v = -y \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$\therefore$ Si $z = x+iy \neq 0$, el inverso de z es:

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

9) Distributividad: $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$. ✓

Entonces el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ junto con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un <u>cuerpo</u>.

Podemos utilizar estas propiedades para calcular el producto:

<u>Ej</u>: $(5-3i)\cdot(2+4i) = 10+20i-6i-12\underbrace{i^2}$

$= 10+20i-6i+12 = \boxed{22+14i}$

<u>Notación</u>: $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} \quad \forall z_2 \neq 0$.

<u>Propiedades</u>:

a) $\dfrac{1}{z} = z^{-1} \quad (z \neq 0)$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} \quad (z_2 \neq 0)$

c) $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} \quad (z_1, z_2 \neq 0)$

d) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3} = \dfrac{z_1}{z_3} + \dfrac{z_2}{z_3} \quad (z_3 \neq 0)$

e) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \dfrac{z_1}{z_3} \dfrac{z_2}{z_4} \quad (z_3, z_4 \neq 0)$

<u>Ejemplos</u>:

1) $(-1+i)(3-2i) = -3+2i+3i-2\overbrace{i^2} = -3+2i+3i+2 = \boxed{-1+5i}$

2) $\dfrac{1}{2-3i} \cdot \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{(2-3i)(1+i)} = \dfrac{1}{2+2i-3i+3} = \dfrac{1}{5-i}$

$\dfrac{1}{5-i} = \dfrac{1}{5-i} \cdot \dfrac{5+i}{5+i} = \dfrac{5+i}{5^2+1^2} = \dfrac{5+i}{26} = \dfrac{5}{26} + i\dfrac{1}{26}$.

3) $\dfrac{3+i}{3+4i} = \dfrac{3+i}{3+4i} \cdot \dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{(3+i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \dfrac{9-12i+3i\overbrace{-4i^2}^{+4}}{25} = \dfrac{13-9i}{25}$

$= \dfrac{13}{25} - i\dfrac{9}{25}$.

4) $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$.

$i^{13} = i^{10+3} = i^{10} \cdot i^3 = (i^2)^5 \cdot (-i) = (-1)^5 \cdot (-i) = (-1)(-i) = i$.

$i^9 = i^8 \cdot i = (i^2)^4 \cdot i = (-1)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

i^6 6/224 1

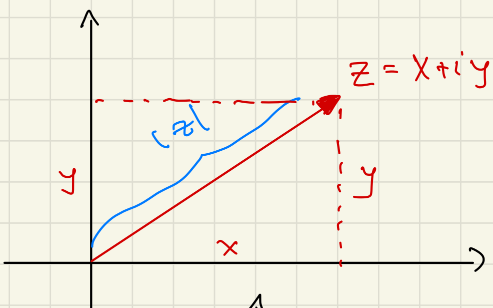
$i^7 = -i$

Conjugado y módulo de un número complejo.

Si $z = x + iy$, se define:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad (\text{módulo de } z \in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

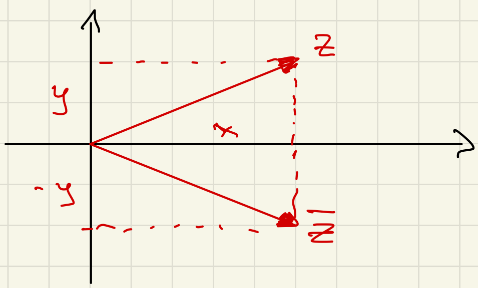
$$\bar{z} = x - iy \quad (\text{conjugado de } z \in \mathbb{C}).$$



$|z|$ = distancia de z al origen

= longitud del vector que representa a z.

(por Pitágoras)

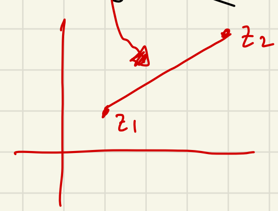


$\bar{z}$ = reflejado de z con respecto al eje x.

Notar que si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces

$$|z_1 - z_2| = |(x_1-x_2) + i(y_1-y_2)| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$\therefore$ $|z_1 - z_2|$ es la <u>distancia</u> entre los puntos z_1 y z_2 del plano.



<u>Ejercicio</u>: Determinar el siguiente lugar geométrico:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 3i| = 2\}.$$

$z = x + iy \Rightarrow \quad |z - 1 + 3i| = 2 \iff |(x+iy) - 1 + 3i| = 2$

$\iff |(x-1) + i(y+3)| = 2.$

$\iff \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = 2$

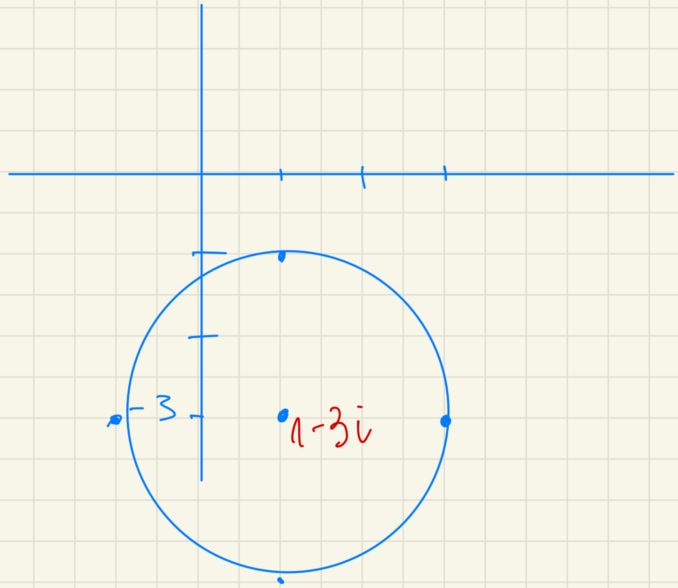
$\iff (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \rightarrow$ ecuación de circunferencia de radio 2 y centro $(1, -3)$.

$$(x-1)^2+(y+3)^2=2^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$\downarrow$

ec. de circunferencia de radio r y centro (a,b)



$$|z-1+3i|=2$$

$$|z-\underbrace{(1-3i)}|=2.$$

$$\overline{-i}=i, \quad \overline{-5}=-5, \quad \overline{-3i+2}=3i+2.$$

Propiedades: $\quad \overline{\overline{z}}=z$

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2.$$

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2\neq 0)$

5) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

6) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

7) $\operatorname{Re} z\leq|\operatorname{Re} z|\leq|z|$

$\operatorname{Im} z\leq|\operatorname{Im} z|\leq|z|$

8) $|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$

9) $\left|\dfrac{z_1}{z_1}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}.$

Con estos propiedades podemos expresar de otra manera el cociente de números complejos:

$$\frac{z}{w}=\frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{w}}=\frac{z\cdot\overline{w}}{(|w|^2)\in\mathbb{R}}$$

$(w\neq 0)$

5) $z=x+iy$

$\bar{z}=x-iy$

$+:\quad z+\bar{z}=2x$

$\Rightarrow x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\operatorname{Re} z.$

igual con y.

Desigualdad triangular: $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. $=$?

Dem: $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\cdot\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

$= z_1\cdot\bar{z}_1 + z_1\cdot\bar{z}_2 + z_2\cdot\bar{z}_1 + z_2\cdot\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2$ (Propiedad 5)

$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$. ✓ //

Generalización: $|z_1+\dots+z_n| \leq |z_1|+\dots+|z_n|$ (por inducción).

También vale: $|z_1+z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$ (*).

Pues: $|z_1| = |(z_1+z_2)-z_2| \leq |z_1+z_2| + |-z_2| = |z_1+z_2| + |z_2|$

$\Rightarrow |z_1+z_2| \geq |z_1|-|z_2|$.

Si hacemos lo mismo, empezando con $|z_2|$, llegamos a: $|z_1+z_2| \geq |z_2|-|z_1|$.

Estas dos desigualdades dicen:

$|z_1+z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$. //

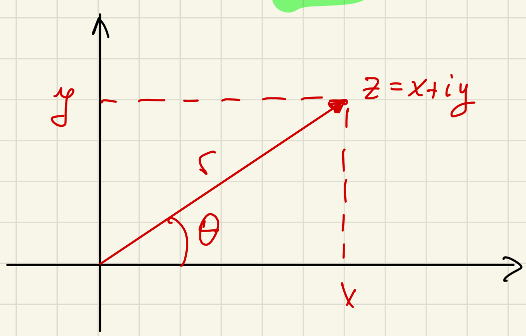
Si hacemos lo mismo, empezando con $|z_2|$, llegamos a: $\quad |z_1+z_2| \geq |z_2|-|z_1|$.

Estas dos desigualdades dicen:

$$|z_1+z_2| \geq \big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| . \quad // .$$

Forma polar:

$z = x+iy \neq 0$, $\quad (r,\theta)$ = coordenadas polares del punto (x,y).



Entonces: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases} \rightarrow \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta.$ $(x \neq 0)$

$\therefore \quad \boxed{z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} \leftarrow$

Notar: $\quad r = |z| \quad$ y $\quad |\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta| = 1$. ✓

r = longitud del vector correspondiente a z.

θ = ángulo formado por el vector de z y el eje real positivo.
↳ medido en radianes

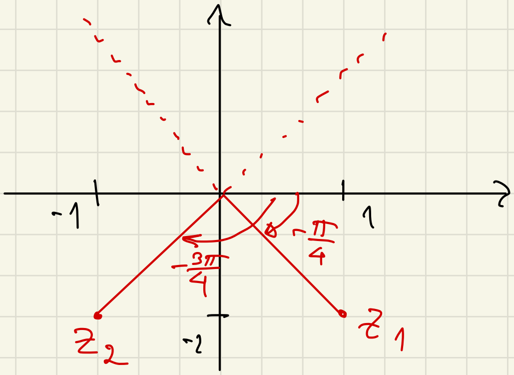
El número θ no está unívocamente determinado, pues puede tomar infinitos valores, y dos de ellos difieren en un múltiplo entero de 2π. Estos valores se determinan como las soluciones de: $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \quad + \quad$ (cuadrante en que se halla (x,y)).

Cada valor posible de θ se denomina un argumento de z, y el conjunto de todos los valores de θ se denota $\arg z$.

El único valor de θ que satisface $-\pi < \theta \leq \pi$ se denomina el valor principal del $\arg z$. Se denota $\operatorname{Arg} z$.

Luego, $\arg z = \{ \operatorname{Arg} z + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$.

<u>Ejemplo</u>: escribir $\boxed{z_1 = 1 - i}$ y $\boxed{z_2 = -1 - i}$ en forma polar.



i) $z_1 = 1 - i$.

$\theta \in (-\pi, \pi]$

$tg\, \theta = -1 \Rightarrow \theta = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$ o $\frac{3\pi}{4}$ ↳ en II cuadrante

$\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{4}$.

$r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore \quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

ii) $z_2 = -1 - i$

$tg\, \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ o $\boxed{-\frac{3\pi}{4}}$

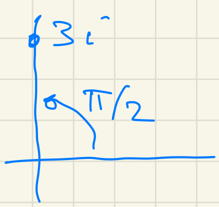
en I cuadrante

$r_2 = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

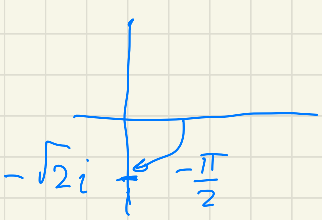
iii) $z = 3i$, no podemos hacer $\frac{y}{x}$.

Pero:



$\therefore \quad z = 3 \cdot \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + i \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{1}\right)$

iv) $z = -\sqrt{2}\, i$



$\therefore \quad z = \sqrt{2}\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \underbrace{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right)$

v) $z = 18\sqrt[3]{7} = 18\sqrt[3]{7}\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

vi) $z = -e^2 = e^2 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$.

Relación entre forma polar y las operaciones:

- La forma polar "no se lleva bien" con $+$ y $-$.
- Con el producto: si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$,
  $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \Big[\big(\underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}_{=\cos(\theta_1+\theta_2)}\big) + i\big(\underbrace{\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2}_{=\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)}\big)\Big]$$

$$= r_1 r_2 \cdot \big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\big)$$

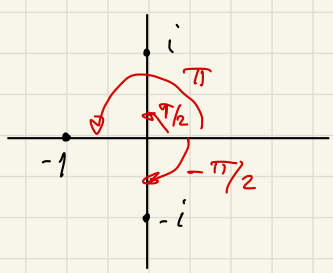
Es decir: $\begin{cases} \bullet\ |z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 \ \checkmark \\ \bullet\ \theta_1 \in \arg z_1 \text{ y } \theta_2 \in \arg z_2 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 \cdot z_2). \end{cases}$

$\theta_1 = \frac{3\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4} \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{3\pi}{2} \notin (-\pi,\pi]$ $\quad -\frac{\pi}{2}\ \checkmark$

Nota: en general, no es cierto que:

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2).$$

Por ejemplo: $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_1 z_2 = -i$.



$\operatorname{Arg}(-1) = \pi$

$\operatorname{Arg}(i) = \pi/2$

$\operatorname{Arg}(-i) = -\pi/2$.

y $\operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(i) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(-i)$.

Ejemplo: ¿cómo se entiende la multiplicación por i?

$i = 0 + i \cdot 1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$.

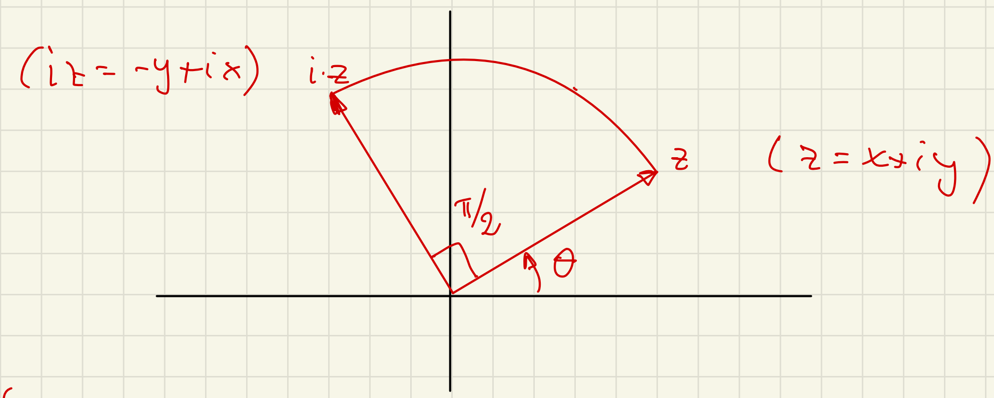
$i \cdot z = i(x+iy) = -y + ix$

Sea $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \neq 0$ y calculemos $i \cdot z$.

$i \cdot z = i\,r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r(-\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)$

o bien, $\quad iz = r\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

O sea, al multiplicar $z \neq 0$ por i lo que hacemos es rotar z un ángulo de $90°$ en el sentido antihorario.



(Álgebra lineal: $\langle (x,y), (-y,x) \rangle = -xy + yx = 0$
$\Rightarrow (x,y) \perp (-y,x)$)

En general: $\quad (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot z =$

$= (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$= r(\cos(\theta+\alpha) + i \operatorname{sen}(\theta+\alpha))$

$\Rightarrow$ Multiplicar por $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ es rotar a z en un ángulo α.

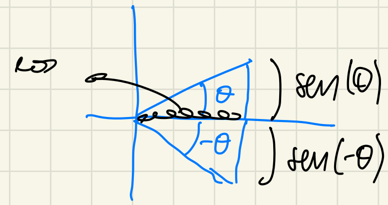
$\alpha > 0$: $\circlearrowleft$

$\alpha < 0$: $\circlearrowright$

- Forma polar y cociente: si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$$



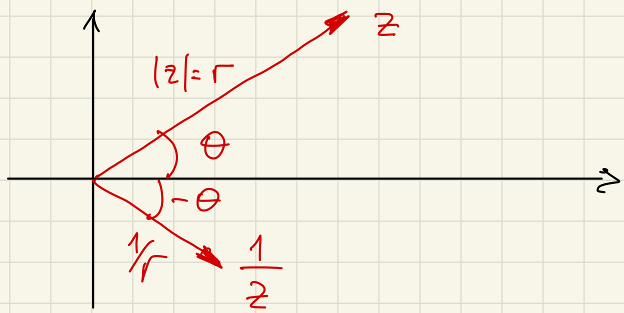
Pero esa no es la forma polar ... Recordemos que:

$$\underset{(\text{par})}{\cos(-\theta)} = \cos\theta \quad y \quad \underset{(\text{impar})}{\operatorname{sen}(-\theta)} = -\operatorname{sen}\theta \quad \forall\theta$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\right)}$$

Gráficamente:



$i^{-1} = ?$

$i^{-1} = \frac{1}{i}$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= -i$.

En general, si $z_2 \neq 0$, tenemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\cdot\frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) + i\operatorname{sen}(-\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

$\therefore$ si $\theta_1 \in \arg(z_1)$ y $\theta_2 \in \arg(z_2)$ entonces $\theta_1 - \theta_2 \in \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Forma exponencial

Definimos el símbolo $e^{i\theta}$ por la siguiente ecuación:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ representa un ángulo medido en radianes. Se conoce como la "fórmula de Euler".

Usando esta fórmula podemos escribir a $z \neq 0$ como:

$$z = r \cdot e^{i\theta} = |z| \cdot e^{i\theta}, \quad \text{con } \theta \in \arg(z).$$

Propiedades:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

"fórmula más bella de la matemática".

1) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

2) $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1 \implies (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

3) Si $z = r e^{i\theta}$ entonces $z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$.

4) Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces: $\begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{cases}$.

y $z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2$ y $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Potencias y raíces

Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define: $z^n = \overbrace{z \cdot z \cdots z}^{n \text{ veces}}$.

Además, se establece: $z^0 = 1 \quad (z \neq 0)$.

Para $z \neq 0$, se define: $z^{-n} = (z^{-1})^n$.

Con respecto a la suma, sigue valiendo la fórmula del "binomio de Newton":

$$n \in \mathbb{N}, \qquad (z_1 + z_2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z_1^j z_2^{n-j}.$$

Por ejemplo: $(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2 z_1 z_2 + z_2^2$.

$(3+2i)^6 = \ldots$

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

Resolver: $z^2 = 2i$

$z = x + iy$ $\Longrightarrow$ $(x+iy)^2 = 2i$

$(x, y \in \mathbb{R})$ $\quad (x^2 - y^2) + i(2xy) = 2i$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \pm x \\ xy = 1. \end{cases}$$

i) $y = x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \boxed{z_1 = 1 + i \quad \text{o} \quad z_2 = -1 - i}$

ii) $y = -x \Rightarrow -x^2 = 1 \quad \nexists.$

Problema: ¿existe $z \in \mathbb{C}$ / $z^2 = 1 + i$?

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+iy)^2 = 1 + i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 1 + i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = x^2 - 1 \\ 4x^2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow 4x^2(x^2 - 1) = 1.$$

resolver . . .

- Con notación exponencial:

Si $z = re^{i\theta}$ $(z \neq 0)$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces: $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$.

Dem: 1) Para $n \in \mathbb{N}$, usamos inducción:

i) si $n = 1$, $z = re^{i\theta}$, vale.

ii) Supongamos que vale para n y lo probamos para $(n+1)$:

$$z^{n+1} = z^n \cdot z \overset{H.I.}{=} r^n e^{i(n\theta)} \cdot r \cdot e^{i\theta} = r^{n+1} \cdot (e^{i(n\theta)} \cdot e^{i\theta}) =$$
$$= r^{n+1} \cdot e^{i(n\theta+\theta)} = r^{n+1} \cdot e^{i(n+1)\theta} \checkmark \quad \therefore \text{ vale } \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) Si $n = 0$, la ecuación vale por definición: $z^0 = 1$.

3) Si $n \in \{-1, -2, -3, \dots\}$, escribimos $n = -m$ con $m \in \mathbb{N}$.

Entonces: $$z^n = z^{-m} = (z^{-1})^m = \left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right)^m = \frac{1}{r^m} \cdot e^{-i(m\theta)} =$$
$$= r^n e^{i(n\theta)}. \quad //$$

Fórmula de De Moivre: $[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: resolvamos $z^2 = 1 + i$ usando la forma exponencial.

Hacemos $z = re^{i\theta}$ $\therefore$ $r^2 e^{i(2\theta)} = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

$\Rightarrow$ $r^2 = \sqrt{2}$ $\therefore$ $r = \sqrt[4]{2}$

y $2\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si:
- $k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow z_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\pi/8}$
- $k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{9}{8}\pi \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\,9\pi/8}$

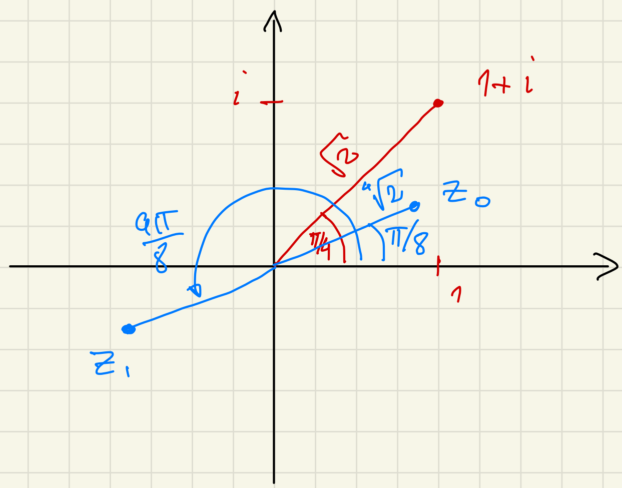
$\frac{17}{8}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{8}$

- $k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{17}{8}\pi \Rightarrow z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\,17\pi/8} = z_0$
- $k = 3 \Rightarrow \theta = \frac{25}{8}\pi \Rightarrow z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\,25\pi/8} = z_1$

Sigue así, y se obtienen siempre los valores z_0 y z_1.

$\therefore$ las únicas soluciones de $z^2 = 1+i$ son

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\pi/8} \quad \text{y} \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\,9\pi/8} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}\cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} = -z_0$$



Ejemplo: Para $n \in \mathbb{N}$, calcular las raíces n-ésimas de la unidad. Es decir, resolver $z^n = 1$.

Planteamos $z = re^{i\theta}$ $\therefore$ $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$

$$r^n e^{i(n\theta)} = 1 = 1\cdot e^{i0} \Longrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \iff r = 1 \quad (\text{pues } r>0) \\ e^{i(n\theta)} = e^{i\cdot 0} \iff n\theta = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{r = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}}$$

Luego, las raíces n-ésimas de la unidad son:

$$\boxed{z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k\in\mathbb{Z}.}$$

¿Cuántas hay? ¿Son infinitos?

$\underline{k=0}:$ $\quad z_0 = 1$ $\qquad\qquad z = e^{\frac{2k\pi}{n}}, \ k\in\mathbb{Z}$.

$\underline{k=1}:$ $\quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$\underline{k=2}:$ $\quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)} = z_1\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$\underline{k=3}:$ $\quad z_3 = e^{i\frac{6\pi}{n}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)} = z_2\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$\vdots$

En general: $\quad z_{k+1} = e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)} = z_k\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

$\vdots$

$\underline{k=n-1}:$ $\quad z_{n-1} = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

$\underline{k=n}:$ $\quad z_n = e^{i\frac{2n\pi}{n}} = e^{i2\pi} = 1 = z_0$

$\underline{k=n+1}:$ $\quad z_{n+1} = e^{i\frac{2(n+1)\pi}{n}} = e^{i2\pi}\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_1$

$\underline{k=n+2}:$ $\quad z_{n+2} = e^{i\frac{2(n+2)\pi}{n}} = e^{i2\pi}\cdot e^{i\frac{4\pi}{n}} = z_2$

sobre viven (sin repetir)

se repiten

Lo mismo ocurre para los k negativos.

En definitivo, los raíces n-ésimas de la unidad son:

$$\boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.} \longrightarrow \text{hay } n.$$

<u>Observación</u>: sea $n\in\mathbb{N}$ y sea G_n el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad.

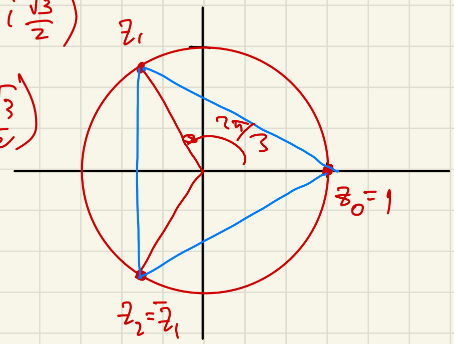
- $1\in G_n$.
- $z, w\in G_n \Rightarrow z\cdot w\in G_n$.
- $z\in G_n \rightarrow z^{-1}\in G_n$.

Entonces $(G,\cdot)$ es un ...

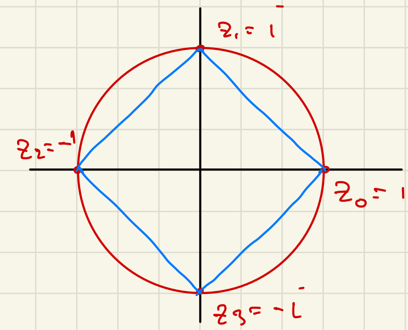
Ejemplos:

- $\underline{n=2}$: $\quad z^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = e^{i\,2\pi/2} = e^{i\pi} = -1. \end{cases}$

- $\underline{n=3}$: $\quad z^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = e^{i\,2\pi/3} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_2 = e^{i\,4\pi/3} = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$



- $\underline{n=4}$: $\quad z^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\pi/2} = i \\ z_2 = e^{i\frac{4\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1 \\ z_3 = e^{i\frac{6\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$



En general, las raíces n-ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia unidad, con uno de sus vértices en $z_0 = 1$.

Resolvamos ahora en general: $z^n = z_0$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ dado.

Si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, planteamos $z = re^{i\theta}$ y así:

$$r^n \cdot e^{i(n\theta)} = r_0 e^{i\theta_0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = r_0 \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[n]{r_0} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Igual que antes, sólo basta considerar $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Las soluciones son: $c_k = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Estos puntos determinan un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt[n]{r_0}$.

Ejemplo: resolver $z^3 = 8i$.

$$\left.\begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ 8i = 8 \cdot e^{i\pi/2} \end{array}\right\} \Rightarrow r^3 e^{i(3\theta)} = 8 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2. \end{array}\right.$$

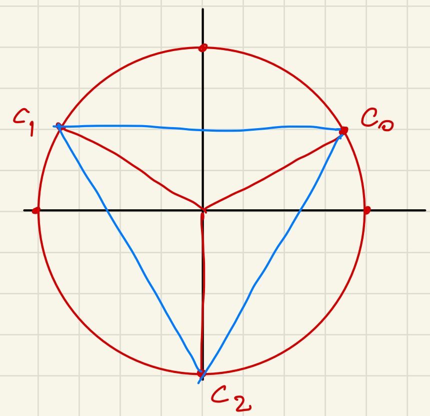
$$\Rightarrow \boxed{r = 2} \ \text{y} \ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

$\therefore$

$$c_0 = 2\, e^{i\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$c_1 = 2\, e^{i\,5\pi/6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$c_2 = 2\, e^{i\,9\pi/6} = 2e^{i\,3\pi/2} = -2i$$



En general, las raíces n-ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia unidad, con uno de sus vértices en $z_0 = 1$.

Resolvamos ahora en general: $z^n = z_0$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ dado.

Si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, planteamos $z = re^{i\theta}$ y así:

$$r^n \cdot e^{i(n\theta)} = r_0 e^{i\theta_0} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^n = r_0 \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[n]{r_0} \ \text{y} \ \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Igual que antes, sólo basta considerar $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Las soluciones son: $c_k = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Estos puntos determinan un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia de centro O y radio $\sqrt[n]{r_0}$.

Ejemplo: resolver $z^3 = 8i$.

$$\left.\begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ 8i = 8 \cdot e^{i\pi/2} \end{array}\right\} \Rightarrow r^3 e^{i(3\theta)} = 8 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k = 0,1,2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 2} \ y \ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

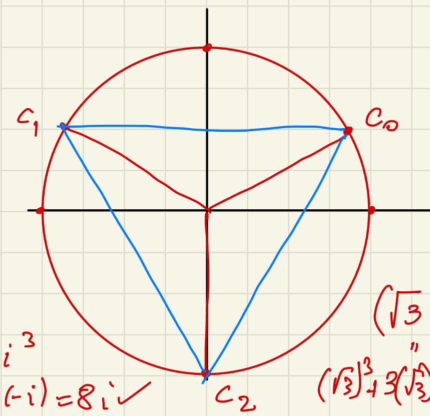
$\therefore$

$$c_0 = 2\, e^{i\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$c_1 = 2\, e^{i\, 5\pi/6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$c_2 = 2\, e^{i\, 9\pi/6} = 2e^{i\, 3\pi/2} = -2i$$

$(-2i)^3 = (-2)^3 \cdot i^3 = (-8) \cdot (-i) = 8i$ ✓



$(\sqrt{3} + i)^3 = ?$

$(\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 i + 3\sqrt{3}\, i^2 + i^3$

Ejemplo: resolver $z^4 = -16$.

$$\left.\begin{array}{l} z = re^{i\theta} \\ -16 = 16 \cdot (-1) = 16 \cdot e^{i\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow r^4 e^{i(4\theta)} = 16 \cdot e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi, \quad k = 0,1,2,3. \end{cases}$$

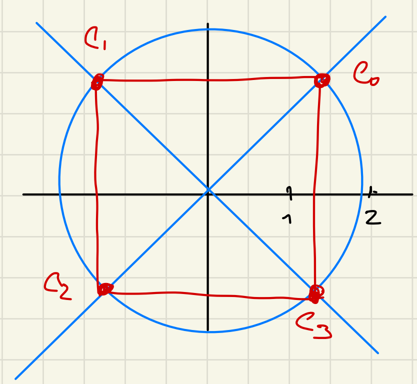
$$\Rightarrow r = \sqrt[4]{16} = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$c_0 = 2 \cdot e^{i\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$c_1 = 2 \cdot e^{i(\pi/4 + \pi/2)} = 2 \cdot e^{i\, 3\pi/4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$c_2 = 2 \cdot e^{i(\pi/4 + \pi)} = 2 \cdot e^{i\, 5\pi/4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$c_3 = 2 \cdot e^{i(\pi/4 + 3\pi/2)} = 2 \cdot e^{i\, 7\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Regiones en el plano complejo.

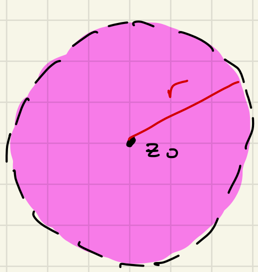
Nos interesa estudiar conjuntos de números complejos, y su proximidad métrica.

Definimos:

$$B_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \; r > 0.$$

$\hookrightarrow$ disco de centro z_0 y radio r.

Está formado por todos los puntos interiores a la circunferencia $|z - z_0| = r$, pero la circunferencia no está incluida.



$B_r(z_0)$

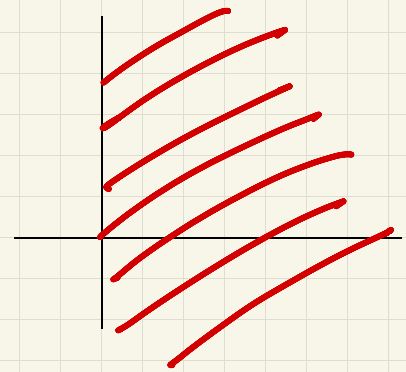
Definición: Sea $S \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto, y $z_0 \in \mathbb{C}$.
Diremos que:

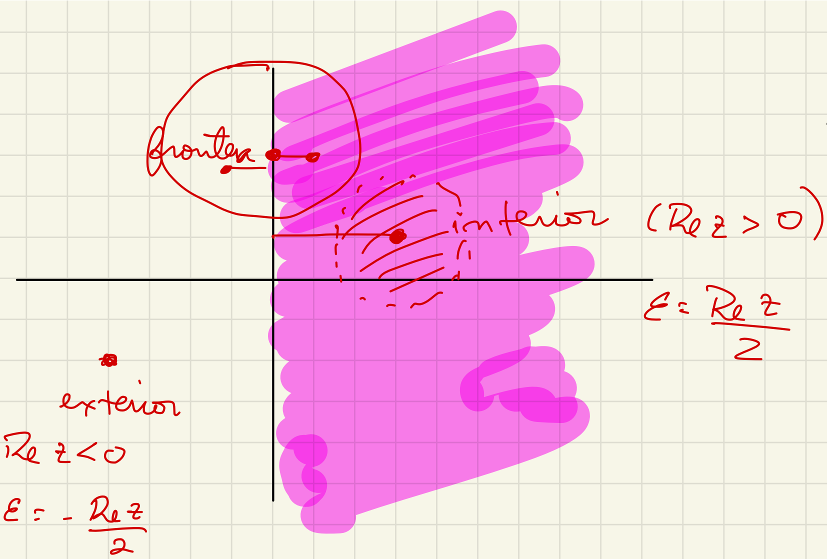
- z_0 es interior a S si $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B_\varepsilon(z_0) \subset S$.
- z_0 es exterior a S si $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B_\varepsilon(z_0) \cap S = \emptyset$
- z_0 es un punto de frontera de S si no es interior ni exterior a S (es decir, $\forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(z_0) \cap S \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(z_0) \cap S^c \neq \emptyset$)

Notar: z_0 interior a $S \Rightarrow z_0 \in S$; z_0 exterior a $S \Rightarrow z_0 \notin S$.

<u>Ejemplo:</u> Sea $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \}$.

- Sea $z_0 = a + ib$ con $a > 0$. Veamos que z_0 es interior a S. En efecto, probemos que si $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ entonces $B_\varepsilon(z_0) \subset S$



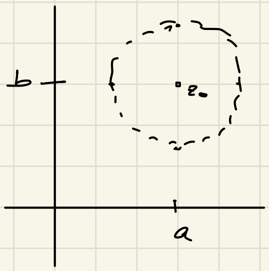


$S = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z \geq 0 \}$.

$[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$
↳ conjunto cerrado.

$[a, b]$

$(-\infty, 0)$ abierto.



Sea $z = x+iy \in B_\varepsilon(z_0)$, o sea, $|z-z_0| < \frac{a}{2}$.

Pero, $|\mathrm{Re}(z-z_0)| \le |z-z_0| < \frac{a}{2}$

$\Rightarrow |x-a| < \frac{a}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} < x-a < \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{2} < x} < \frac{3}{2}a.$

$(|u|<\alpha \Leftrightarrow -\alpha<u<\alpha)$

En particular, $x > 0 \therefore z \in S$

- Si $z_0 = a+ib$ con $a<0$, entonces z_0 es exterior a S.

De la misma manera se ve que si $\varepsilon = -\frac{a}{2} > 0$ entonces $B_\varepsilon(z_0) \cap S = \phi$.

- Si $z_0 = ib$ y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces z_0 es punto de frontera de S. En efecto: hay puntos de $B_\varepsilon(z_0)$ que están en S (por ej.: $z_0 = \frac{\varepsilon}{2} + ib$) y hay puntos de $B_\varepsilon(z_0)$ que no están en S (por ej.: $z = -\frac{\varepsilon}{2} + ib$).

<u>Definición</u>: Un subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice:

- <u>abierto</u> si todos sus puntos son interiores.
- <u>cerrado</u> si su complemento $S^c = \mathbb{C} - S$ es abierto.

Equivalentemente:

a) S es abierto $\Leftrightarrow$ S no contiene a ninguno de sus puntos de frontera.

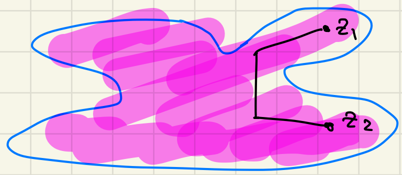
b) S es cerrado $\Leftrightarrow$ S contiene a todos sus puntos de frontera.

<u>Dem</u>: ejercicio.

Se define la <u>frontera de S</u> (∂S) como el conjunto de todos los puntos de frontera de S. La clausura de S ($\overline{S}$) es el conjunto cerrado $\overline{S} = S \cup \partial S$.

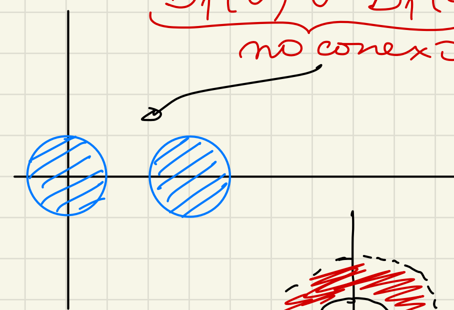
Ejemplo: $\partial B_\varepsilon(z_0) = \{|z-z_0| = \varepsilon\}$, $\overline{B_\varepsilon(z_0)} = \{|z-z_0| \le \varepsilon\}$, $B_\varepsilon(z_0)$ es abierta.

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice conexo si $\forall z_1, z_2 \in S$, existe una poligonal que los une, enteramente contenida en S.

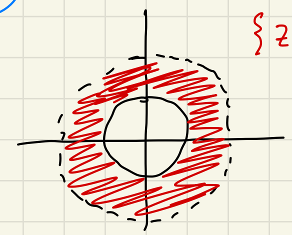


conexo.

$\underbrace{B_1(0) \cup B_1(3)}_{\text{no conexo.}}$



Un conjunto abierto y conexo se llama un dominio. Un dominio junto con algunos, ninguno o todos sus puntos de frontera se llama una región.

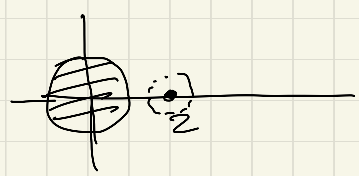


$\{z \mid 1 \le |z| < 2\}$ ni abierto ni cerrado.

Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice acotado si $\exists R > 0 / S \subset B_R(0)$.

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se dice un punto de acumulación de $S \subseteq \mathbb{C}$ si: $\left(B_\varepsilon(z_0) - \{z_0\}\right) \cap S \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$.

Ejemplo: $S = B_1(0) \cup \{2\}$. Entonces $2 \in \partial S$, pero no es punto de acumulación de S.



- El punto ∞.

Así como en $\mathbb{R}$ se consideran también los valores $+\infty, -\infty$, igualmente conviene agregar un punto ∞ al plano complejo. Sea $\infty \notin \mathbb{C}$, y definimos $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, denominado el plano complejo extendido. Una manera de visualizarlo es la esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x\| = 1\}$, vía la proyección estereográfica. (Ver dibujo)

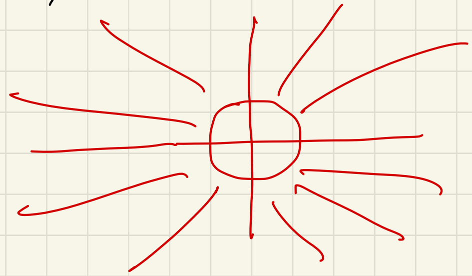
La proyección estereográfica es: $f: S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{1-z}(x+iy), & (x,y,z) \neq (0,0,1), \\ \infty, & (x,y,z) = (0,0,1). \end{cases}$

Tiene inversa:

$$f^{-1}: \overline{\mathbb{C}} \to S^2, \quad f^{-1}(x+iy) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right)$$

$$\text{y } f^{-1}(\infty) = (0,0,1).$$

Notar que los conjuntos $V_R = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \}$ se corresponden con casquetes en la esfera, alrededor del polo norte. Estos conjuntos V_R pueden ser considerados entonces como abiertos alrededor de ∞, similares a los $B_\varepsilon(z_0)$ alrededor de un $z_0 \in \mathbb{C}$.



Capítulo 2: Funciones, límites y derivadas.

Estudiaremos funciones $f: S \to \mathbb{C}$, donde $S \subseteq \mathbb{C}$. S se denomina el dominio de f. Cuando no se lo menciona explícitamente, se entiende que es el mayor subconjunto de $\mathbb{C}$ donde está definida f. Por ejemplo, si $f(z) = \frac{1}{z}$ entonces $\operatorname{Dom} f = \mathbb{C} - \{0\}$.

$\operatorname{Im} f = \{ w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in S, f(z) = w \}$.

Dada $f: S \to \mathbb{C}$ y $z = x+iy$ entonces $f(x+iy) = u + iv$. Los números reales u y v dependen de las variables reales x, y, por lo que podemos escribir:

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y).$$

$u: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$

$f(z) = z^2$.
$\operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$.
$\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$

Ejemplos: 1) $f(z) = z^2$. Entonces:

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + i2xy + \underbrace{(iy)^2}_{=-y^2} = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v(x,y)}.$$

2) $f(z) = \overline{z}$. Entonces: $f(x+iy) = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$.

3) $f(z) = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$. Entonces: $f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$.

Si se usan coordenadas polares (r,θ), entonces:

$$f(r\cdot e^{i\theta}) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta).$$

Por ejemplo: $f(z) = z + \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

$$f(r\cdot e^{i\theta}) = r\cdot e^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$= \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \begin{cases} u(r,\theta) = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v(r,\theta) = \left(r-\frac{1}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

Si $v \equiv 0$ entonces f es una función a valores reales. Por ej.,

$f(z) = |z|^2$, $f(z) = \mathrm{Re}\,z$.

Una función de la forma $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, donde $a_n, \dots, a_0$ son constantes complejas con $a_n \neq 0$, se llama un polinomio de grado n. Notar que $\mathrm{Dom}\,P = \mathbb{C}$. (Vamos a ver: $\mathrm{Im}\,P = \mathbb{C}$.)

Un cociente de polinomios $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ se llama una función racional, y se tiene: $\mathrm{Dom}\,f = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$.

La "raíz n-ésima" no define una función (sabemos que la ecuación $z^n = z_0$ tiene n soluciones distintas si $z_0 \neq 0$).

Pero en este caso podemos definir una función raíz n-ésima, eligiendo de una manera sistemática uno de los n-valores posibles.

Ejemplos:

1) Si $z \neq 0$, $z = r e^{i\theta}$, sabemos que $z^{1/2}$ tiene dos valores posibles: $z_1 = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$, $z_2 = -\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$, donde $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$.

Pero si elegimos sólo el valor positivo de $\pm\sqrt{r}$, podemos definir: $f(z) = f(re^{i\theta}) = \sqrt{r} \cdot e^{i\theta/2}$ $(r>0, -\pi < \theta \leq \pi)$.

También podemos definir $f(0) = 0$. Luego,

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}$.

2) De nuevo, para $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$, $z^{1/3}$ tiene 3 valores posibles:

$z_1 = \sqrt[3]{r}\, e^{i\theta/3}$, $z_2 = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\theta+2\pi)/3}$, $z_2 = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\theta+4\pi)/3}$.

Podemos definir entonces: $f(z) = f(r \cdot e^{i\theta}) = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\theta/3}$ (con $\theta = \mathrm{Arg}\, z$) y $f(0) = 0$, como la función raíz cúbica.

24/8.

A diferencia de las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no podemos graficar las funciones $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Para estudiarlas, podemos determinar las imágenes de ciertas curvas o regiones de $\mathbb{C}$.

Por ejemplo, sea $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$.

O bien, $f(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta}$.

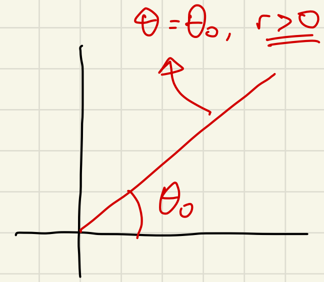
2) De nuevo, para $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$, $z^{1/3}$ tiene 3 valores posibles.

$z_1 = \sqrt[3]{r}\, e^{i\theta/3}$, $z_2 = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\theta+2\pi)/3}$, $z_2 = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\theta+4\pi)/3}$.

Podemos definir entonces: $f(z) = f(r \cdot e^{i\theta}) = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\theta/3}$ (con $\theta = \operatorname{Arg} z$) y $f(0) = 0$, como la función raíz cúbica.

24/8.

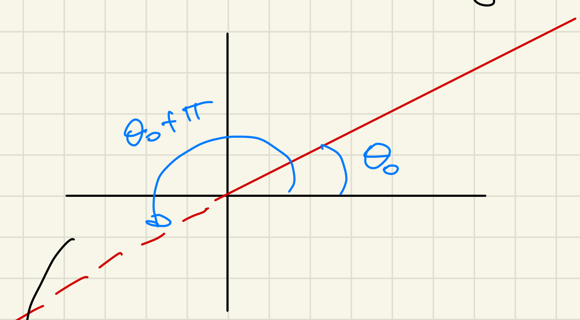
A diferencia de las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no podemos graficar las funciones $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Para estudiarlas, podemos determinar las imágenes de ciertas curvas o regiones de $\mathbb{C}$.



Por ejemplo, sea $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$.

O bien, $f(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta}$.

¿Cuál es la imagen por f de una recta por el origen?



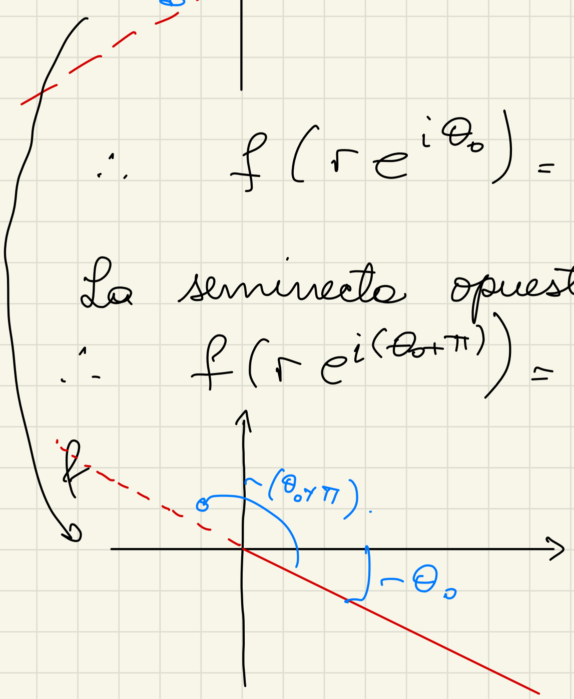
La semirrecta que forma un ángulo θ_0 con el eje real positivo está dada en coordenadas polares por:

$\theta = \theta_0$, $r > 0$.

$\therefore \; f(re^{i\theta_0}) = \dfrac{1}{re^{i\theta_0}} = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta_0} \longrightarrow$ semirrecta de ángulo $-\theta_0$.

La semirrecta opuesta tiene ecuación $\theta = \theta_0 + \pi$, $r > 0$.

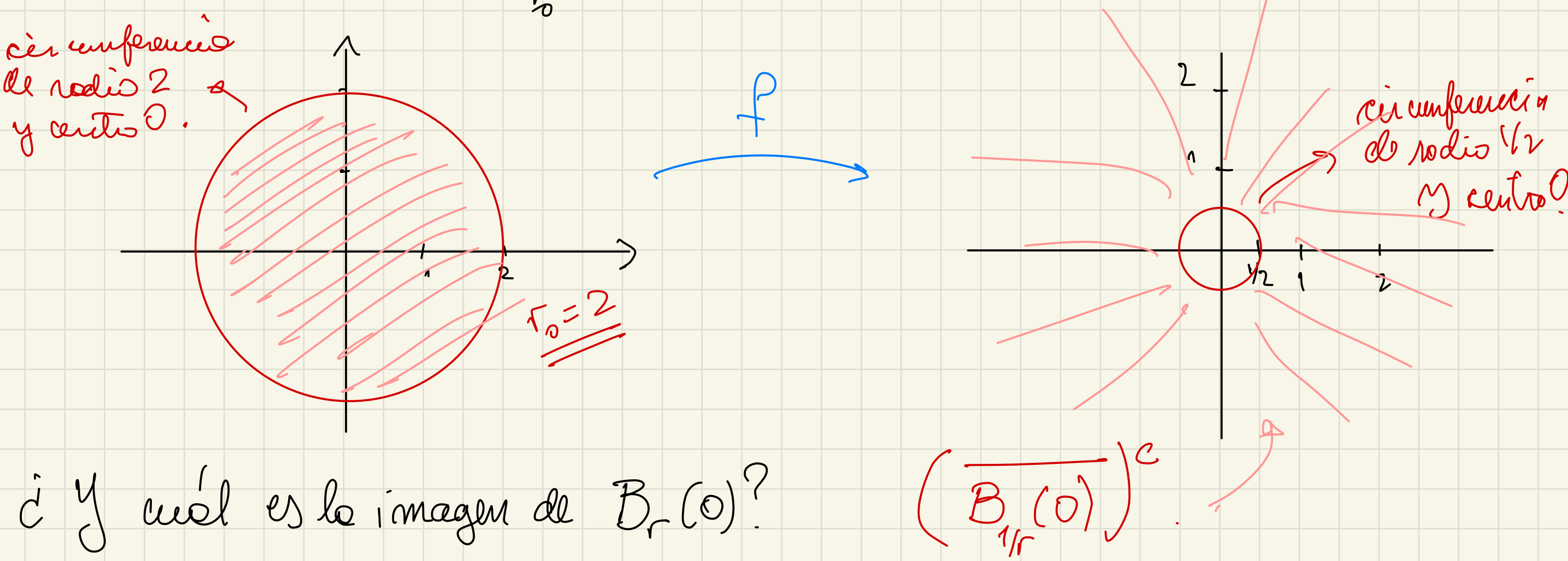
$\therefore \; f(re^{i(\theta_0+\pi)}) = \dfrac{1}{re^{i(\theta_0+\pi)}} = \dfrac{1}{r} e^{-i(\theta_0+\pi)} \longrightarrow$ semirrecta de ángulo $-(\theta_0+\pi)$.



La imagen de una recta L por el origen es otra recta por el origen, la reflejada de L en el eje real.

¿Cuál es la imagen por f de una circunferencia centrada en 0? Una tal circunferencia, de radio r_0, tiene ecuación: $r = r_0$, θ = arbitrario.

$$\therefore \quad f(r_0 e^{i\theta}) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta}$$ $\longrightarrow$ está a distancia $\frac{1}{r_0}$ del 0.



¿Y cuál es la imagen de $B_r(0)$?

Por último, ¿cuál es la imagen de una recta vertical u horizontal?

- recta vertical: $x = x_0$ fijo, y = arbitrario.

$$f(x_0 + iy) = \frac{1}{x_0 + iy} = \frac{x_0 - iy}{x_0^2 + y^2} = \frac{x_0}{x_0^2+y^2} - i\frac{y}{x_0^2+y^2}.$$

Sean $u = \dfrac{x_0}{x_0^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x_0^2+y^2}$. Elevando al cuadrado y sumando:

$$u^2 + v^2 = \frac{x_0^2}{(x_0^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x_0^2+y^2)^2} = \frac{x_0^2+y^2}{(x_0^2+y^2)^2} = \frac{1}{x_0^2+y^2} = \frac{u}{x_0} \quad (\text{si } x_0 \neq 0)$$

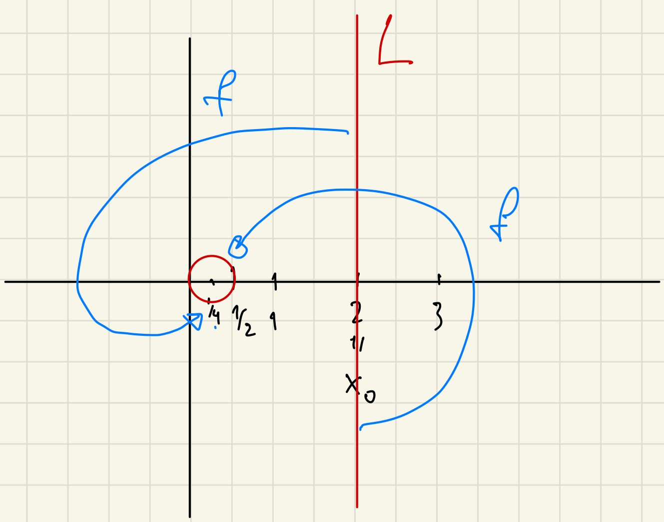
$$\Rightarrow \quad u^2 - \frac{1}{x_0}u + v^2 = 0.$$ Completando cuadrados:

$$\left(-\frac{1}{x_0}u = -2\frac{1}{2x_0}u\right)$$

$$u^2 - 2\cdot\frac{1}{2x_0}u + \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(u - \frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2$$ $\longrightarrow$ circunferencia centrada en $\left(\frac{1}{2x_0}, 0\right)$ de radio $\frac{1}{2|x_0|}$.

$\hookrightarrow$ pasa por el $(0,0)$.



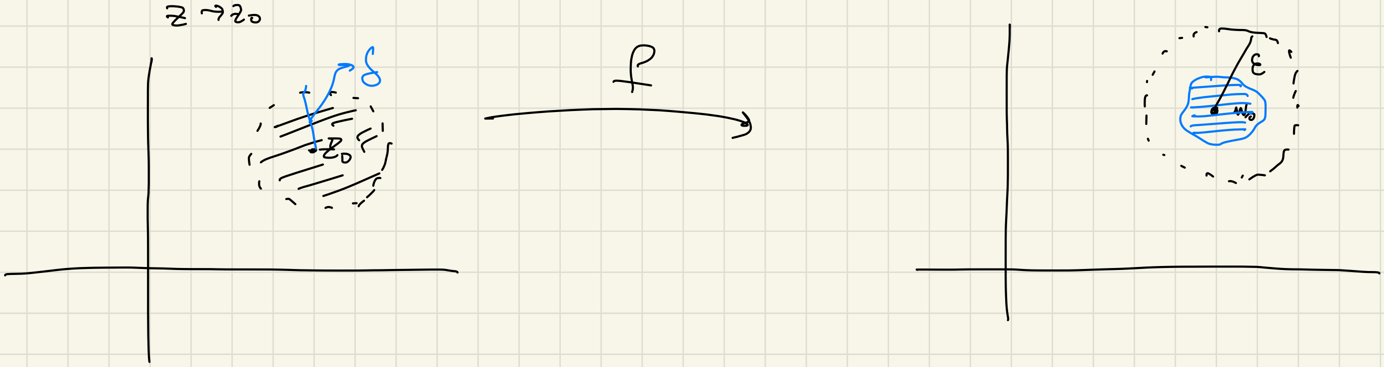
$$f(2+i) = \frac{1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - i\frac{1}{5}.$$

Límites

Definición: Sea f una función compleja definida en un disco punteado $B_R(z_0) - \{z_0\}$. Se dice que el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 es $W_0 \in \mathbb{C}$ si:

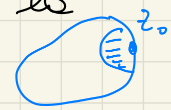
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /$ si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - W_0| < \varepsilon$.

Se denota $\lim_{z \to z_0} f(z) = W_0$.



Observaciones:

1) No es necesario que f esté definida en z_0, pero sí en todos los puntos de un disco punteado centrado en z_0. Si $f: S \to \mathbb{C}$ y z_0 es un punto interior de la región S, un tal disco punteado existe. Si $z_0 \in \partial S$, hay que pedir en la definición: $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in S$.



2) No existe la noción de límites laterales. Pero z se puede acercar a z_0 siguiendo diferentes trayectorias, y si el límite existe, se obtiene el mismo valor a través de c/u de ellos.

Ejemplo: probar que si $f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$ entonces $\lim\limits_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2}$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Queremos ver que $\exists \delta > 0$ tal que:

$0 < |z - 1| < \delta \implies \left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \varepsilon$. Pero:

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|\bar{z} - 1|}{2} = \frac{|z-1|}{2}.$$

$$\left(|\bar{z} - 1| = |\overline{z-1}| = |z-1| \right)$$

Tomando $\delta = 2\varepsilon$, se tiene que: $\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \frac{|z-1|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

Ejemplo: probar que no existe $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$

Si $z = t \in \mathbb{R}$, entonces: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\operatorname{Re} t}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{t} = \lim\limits_{t \to 0} 1 = 1$.

Si $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\operatorname{Re}(it)}{it} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$.

Como estos límites por las rectas dan distintos, $\nexists \lim\limits_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$

Relación con límites de funciones reales:

Teorema: Sea $f: S \to \mathbb{C}$, con $S \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Si $z_0 = x_0 + iy_0$ y $w_0 = u_0 + iv_0$, entonces:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ y } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 .$$

Dem: $\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ / $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Es decir, $\underbrace{0 < |(x-x_0) + i(y-y_0)|}_{|(x,y)-(x_0,y_0)|} < \delta \Rightarrow |(u(x,y)-u_0) + i(v(x,y)-v_0)| < \varepsilon$.

Por lo tanto, si $0 < |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta$ entonces:

$$|u(x,y) - u_0| = |\operatorname{Re}(f(z_0) - w_0)| \leq |f(z_0) - w_0| < \varepsilon .$$

Esto dice: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$. Igual para $v(x,y)$. ✓

$\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que:

$$0 < |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_1 \Rightarrow |u(x,y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

$$0 < |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_2 \Rightarrow |v(x,y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces: sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, vale que:

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |(u(x,y) - u_0) + i(v(x,y) - v_0)| \\ &\leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \quad // \end{aligned}$$

Este teorema permite probar el siguiente usando resultados del cálculo de varias variables reales.

Teorema: Si $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_1$, entonces:

a) $\lim_{z\to z_0} (f(z)+g(z)) = w_0 + w_1$

b) $\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = w_0 \cdot w_1$

c) si $w_1 \neq 0$, $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_0}{w_1}$

d) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.

Límites infinitos:

- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \forall M>0\ \exists \delta>0 \,/\, 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)|>M$.
- $\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N>0 \,/\, |z|>N \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$.
- $\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty \iff \forall M>0\ \exists N>0 \,/\, |z|>N \Rightarrow |f(z)|>M$.

Equivalentemente:

- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. (*)
- $\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0 \iff \lim_{z\to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = w_0$.
- $\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0$.

Por ejemplo, veamos (*):

$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon>0$, queremos ver: $\exists \delta>0 \,/\, 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{f(z)}\right|<\varepsilon$.

Sea $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, sabemos que $\exists \delta>0 \,/\, 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)|>M = \dfrac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{f(z)}\right| < \varepsilon$ ✓. Este $\delta>0$.

La demostración de $\Leftarrow$) y los demás límites es similar.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{z\to -1} \dfrac{iz+3}{z+1} = \infty$ pues $\lim\limits_{z\to -1} \dfrac{z+1}{iz+3} = \dfrac{0}{-i+3} = 0$

- $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{2z+i}{z+1} =$ pues $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2\cdot\left(\frac{1}{z}\right)+i}{\frac{1}{z}+1} =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{2}{z}+i}{\frac{1}{z}+1} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{2+iz}{\cancel{z}}}{\frac{1+z}{\cancel{z}}} = \lim_{z\to 0} \frac{2+iz}{1+z} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+1} = \lim_{z\to\infty} \frac{\frac{2z+i}{z}}{\frac{z+1}{z}} = \lim_{z\to\infty} \frac{2+\underbrace{\frac{i}{z}}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{z}}_{\to 0}} = \boxed{2}$$

Sucesiones

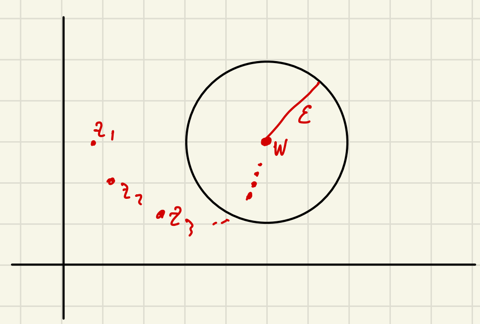
Una sucesión en $\mathbb{C}$ es una función $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$; se la denota $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Decimos que una sucesión converge a un límite w si:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n > n_0 \Rightarrow |z_n - w| < \varepsilon$.

Se denota: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$.

Si una sucesión no tiene límite, se dice que diverge.



De manera análoga que el teorema correspondiente para funciones, se prueba:

Teorema: Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ con $z_n = x_n + i y_n$, y sea $w = u + iv$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \iff \lim_{n\to\infty} x_n = u \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = v.$$

Dem: ejercicio.

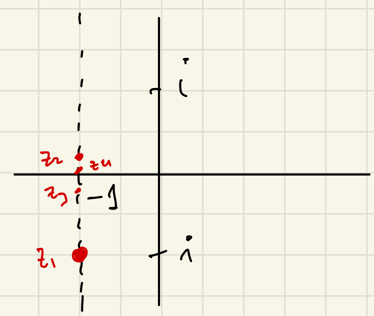
Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + i y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, si los límites existen.

Ejemplo: determinar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-1 + i\,\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

$x_n = -1 \ \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1.$

$y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \left(-1 + i\,\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) = -1.$



Pero hay que tener cuidado si usamos coordenadas polares.

Si $z_n = -1 + i\,\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, entonces: $r_n = |z_n| = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^4}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$, pero: si $\theta_n = \operatorname{Arg} z_n$ se tiene que

$\lim\limits_{n\to\infty} \theta_{2n} = \pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_{2n+1} = -\pi$ $\therefore \nexists \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$.

Continuidad

Definición: Una función f se dice continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ si:

1) $z_0 \in \text{Dom } f$

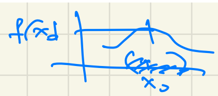
2) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

3) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

f es continua en una región D si es continua en todos los puntos de D. Valen las mismas propiedades que en $\mathbb{R}$:

- suma y producto de funciones continuas es continua → polinomios son continuos
- cociente de funciones continuas es continua donde el denominador no se anula. ↳ funciones racionales.
- composición de funciones continuas es continua.

Además:



Si f es continua en z_0 y $f(z_0) \neq 0$ entonces $\exists\, \delta > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ si $|z - z_0| < \delta$.

Dem: Sea $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$. Para este $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \dfrac{|f(z_0)|}{2}$.

Si fuera $f(z) = 0$ tendríamos $0 < |f(z_0)| < \dfrac{|f(z_0)|}{2}$, ABS.

$\therefore\ f(z) \neq 0 \ \ \forall z \ / \ |z - z_0| < \delta$. //

Teorema: Si $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces: f es continua en $z_0 \iff u$ y v son continuas en (x_0, y_0).

Otro resultado importante es:

<u>Teorema</u>: Si una función f es continua en una región R que es cerrada y acotada, entonces $\exists\, M \geq 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \forall\, z \in M.$$

Más aún, $M = f(z_0)$ para algún $z_0 \in R$.

<u>Dem</u>. La función $g: R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2} \qquad (f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y))$$

es continua. Entonces el resultado vale por cálculo en varias variables reales. //   26/8.

Derivadas

Sea f una función compleja y z_0 un punto interior de Dom f. Se dice que f es diferenciable en z_0 si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \qquad (h \in \mathbb{C}),$$

y se define la derivada de f en z_0 por

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(z) = z^2$, y calculemos su derivada en cualquier $z \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z^2} + \overbrace{2hz + h^2}^{h(2z+h)} - \cancel{z^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2z + h) = 2z$$

$$\therefore\ f'(z) = 2z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

$$f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

$$(df)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Ejemplo: ¿en qué puntos son diferenciables las funciones $f(z)=\bar z$, $g(z)=|z|^2$?

$|z|^2 = z\cdot\bar z$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\bar z}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar h}{h}$$

Si $h=t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\bar h}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1$

Si $h=it$, $t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\bar h}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{-it}{it} = -1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{h\to 0}$ p/ningún z

$\therefore \nexists f'(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$.

- $$\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)(\bar z+\bar h)-z\bar z}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{z\bar h+h\bar z+h\bar h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(z\frac{\bar h}{h}+\bar z+\bar h\right)$$

Si $h=t\in\mathbb{R} \Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to 0}\left(z\cdot\frac{t}{t}+\bar z+t\right) = z+\bar z$

Si $h=it$, $t\in\mathbb{R} \Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to 0}\left(z\cdot\frac{-it}{it}+\bar z-it\right) = -z+\bar z$

Si el límite $\exists$, debe ser:
$z+\bar z = -z+\bar z \Rightarrow z=-z$
$\Rightarrow z=0$.
$\therefore$ Si $z\neq 0$, $\nexists g'(z)$.
Pero, $\exists g'(0)$ y vale: $g'(0)=0$.

$$z+\bar z = -z+\bar z$$

$z=x+iy$: $\quad x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy} = \cancel{-x}-iy+\cancel{x}-iy$

$$2x = -2y\cdot i$$

$$2x+i\cdot 2y = 0 \Longrightarrow \boxed{x=y=0}$$

$$z+\bar z = -z+\bar z$$

$$2\operatorname{Re} z = -2i\operatorname{Im} y$$

Proposición: si f es diferenciable en z_0, entonces f es continua en z_0.

Dem: Igual que en $\mathbb{R}$:

cociente incremental con $h = z - z_0$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \overbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \cdot (z - z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0)$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0 \implies \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \quad //$$

$\therefore$ f es continua en z_0.

Reglas de derivación:

1) $f(z) = \text{constante} \implies f'(z) \equiv 0$.
2) $f(z) = z \implies f'(z) = 1$.
3) $g(z) = c \cdot f(z) \implies g'(z) = c \cdot f'(z)$.
4) $f(z) = z^n \; (n \in \mathbb{Z}) \implies f'(z) = n \cdot z^{n-1} \quad (z \neq 0 \text{ si } n \leq 0)$.

5) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

$(f \cdot g)'(z) = f'(z)\, g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{g(z)^2}$ $\boxed{\text{donde } g(z) \neq 0}$

$F(z) = (1-2z)^3$

$F'(z) = 3(1-2z)^2 \cdot (-2)$
$= -6(1-2z)^2$.

6) Si $F = f \circ g$ entonces $F'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$. Regla de la Cadena.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Sea $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, y supongamos que existe $f'(z_0)$, con $z_0 = x_0 + i y_0$. Luego,

$$\exists \; f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Calculemos primero este límite con $h = t \in \mathbb{R}$, $t \to 0$:

$$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+t) - f(z_0)}{t} \qquad z_0 + t = (x_0+iy) + t = (x_0+t)+iy$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{u(x_0+t, y_0) - u(x_0,y_0)}{t} + i \, \frac{v(x_0+t, y_0) - v(x_0,y_0)}{t} \right]$$

$$= u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0,y_0) \quad * \quad \left(u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Ahora lo calculamos con $h = it$, $t \in \mathbb{R}$, $t \to 0$:

$$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+it) - f(z_0)}{it} \qquad z_0 + it = x_0 + iy_0 + it = x_0 + i(y_0+t)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0+t) - u(x_0,y_0)}{it} + \cancel{i} \, \frac{v(x_0, y_0+t) - v(x_0,y_0)}{\cancel{i}t} \right]$$

$$= -i\, u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0) \quad **$$

De $*$ y $**$ resulta: $\boxed{\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}}$ en (x_0,y_0) $\longrightarrow$ Ecuaciones de Cauchy - Riemann

Tenemos así:

<u>Teorema</u>: Sea $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$.
Si existe $f'(z_0)$ con $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces existen las primeras derivadas parciales de u y v en (x_0,y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann: $\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$ en (x_0,y_0).

Más aún, $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$.

<u>Ejemplo</u>: Si $f(z) = z^2$, sabemos que $\exists\, f'(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = 2z$.

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+iy) = (x^2-y^2) + i\,2xy$$

$\therefore$ $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} u_x = 2x \\ v_y = 2x \end{matrix}\right\}$ ✓ vale C-R.

$\left.\begin{matrix} u_y = -2y \\ v_x = 2y \end{matrix}\right\}$ ✓

Ejemplo: si $f(z)=|z|^2$ entonces $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)\equiv 0$.

Luego: $\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 0 \end{cases}$ $\therefore$ las ecuaciones de C-R

se cumplen sólo si $x=y=0$ $\therefore$ $f'(z_0)$ <u>no</u> existe si $z_0 \neq 0$ (pero no podemos asegurar que $\exists f'(0)$).

Ejemplo: sea $f(z)=\begin{cases} \bar{z}^2/z, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$. Entonces

$$u(x,y)=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}, \quad v(x,y)=\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \text{ (ejercicio)}$$

Además, $u(0,0)=0=v(0,0)$. Por otro lado:

$$u_x(0,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1, \text{ y :}$$

$$v_y(0,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(0,h)-v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \therefore \quad \underset{\text{vale}}{u_x(0,0)=v_y(0,0)}.$$

También es fácil ver que: $u_y(0,0)=0=-v_x(0,0)$.

Luego, valen las ecuaciones de C-R en $(0,0)$. ¿$\exists f'(0)$?

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ (h\in\mathbb{C})}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\overbrace{\frac{\bar{h}^2}{h}}^{=f(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}^2}{h^2}$$

$h=t\in\mathbb{R}$, $t\to 0$: $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2}=1$

$h=it$, $t\in\mathbb{R}$, $t\to 0$: $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{(-it)^2}{(it)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{-t^2}=1$.

$h=t+it$, $t\in\mathbb{R}$, $t\to 0$: $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{(t-it)^2}{(t+it)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(t(1-i))^2}{(t(1+i))^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^2}(1-i)^2}{\cancel{t^2}(1+i)^2}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\neq 1$

$\therefore \nexists \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ y en consecuencia, $\nexists f'(0)$.

Moraleja: las ecuaciones de C-R son necesarias pero no suficientes p/ $\exists f'(z_0)$.

Veamos ahora que con hipótesis adicionales de continuidad, el recíproco del teorema anterior vale.

<u>Teorema</u>: Sea $f: D \to \mathbb{C}$, con $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Supongamos que u y v son continuamente diferenciables en D ($\exists\, u_x, u_y, v_x, v_y$ y son continuas). Entonces, si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0), la derivada $f'(z_0)$ existe y vale:

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0).$$

<u>Dem</u>: Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(z_0) \subset D$, y sea $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \varepsilon$, $h = s + it$. Entonces:

$$u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0,y_0) = [u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0+t)] + [u(x_0, y_0+t) - u(x_0,y_0)].$$

Aplicando el T.V.M. de funciones de una variable real a cada expresión entre corchetes, resulta que $\exists\, s_1, t_1 \in \mathbb{R}$ con $|s_1| < |s|$, $|t_1| < |t|$ y:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$(*) \begin{cases} u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0+t) = u_x(x_0+s_1, y_0+t)\cdot s \\ u(x_0, y_0+t) - u(x_0,y_0) = u_y(x_0, y_0+t_1)\cdot t \end{cases}$$

Sea
$$\begin{aligned} \varphi(s,t) &= [u_x(x_0+s, y_0+t) - u(x_0,y_0)] - [u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t] \\ &= [u(x_0+s, y_0+t) - u_x(x_0, y_0+t) + u(x_0, y_0+t) - u(x_0,y_0)] \\ &\quad - [u_x(x_0,y_0)\, s + u_y(x_0,y_0)\, t] \\ &= [u_x(x_0+s_1, y_0+t)\, s + u_y(x_0, y_0+t_1)\cdot t] - [u_x(x_0,y_0)\, s + u_y(x_0,y_0)\, t] \\ &= s\,[u_x(x_0+s, y_0+t) - u_x(x_0,y_0)] + t\,[u_y(x_0, y_0+t_1) - u_y(x_0,y_0)] \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{s+it\to 0} \frac{\varphi(s,t)}{s+it} = \lim_{s+it\to 0} \left\{ \frac{s}{s+it}\Big[\underbrace{u_x(x_0+s_1, y_0+t)}_{\to\, u_x(x_0,y_0)} - u_x(x_0,y_0)\Big] + \frac{t}{s+it}\Big[\underbrace{u_y(x_0, y_0+t_1)}_{\to\, u_y(x_0,y_0)} - u_y(x_0,y_0)\Big] \right\}$$

Como: $\begin{cases} |s| \leq |s+it| \\ |t| \leq |s+it| \\ |s_1| < |s| \\ |t_1| < |t| \end{cases}$ y u_x y u_y son continuos,

resulta que: $\boxed{\lim_{s+it \to 0} \frac{\varphi(s,t)}{s+it} = 0}$ (**).

Luego, $u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0,y_0) = u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t + \varphi(s,t)$

donde φ satisface (**). $\longrightarrow$ ver página que sigue

De manera similar,

$$v(x_0+s, y_0+t) - v(x_0,y_0) = v_x(x_0,y_0)s + v_y(x_0,y_0)t + \psi(s,t)$$

con $\lim_{s+it \to 0} \frac{\psi(s,t)}{s+it} = 0$.

De 3 páginas atrás:

$$u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0,y_0) = [u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0+t)] + [u(x_0, y_0+t) - u(x_0,y_0)]$$

(*) $\longrightarrow = u_x(x_0+s_1, y_0+t)s + u_y(x_0, y_0+t_1)t$

(☆) $\longrightarrow = \varphi(s,t) + u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t$

$$\Rightarrow u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0,y_0) = u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t + \varphi(s,t)$$

✓

Entonces:

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0+s, y_0+t)+i\, v(x_0+s, y_0+t) - u(x_0,y_0) - i\, v(x_0,y_0)}{s+it}$$

$$= \frac{u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t + \varphi(s,t) + i\left[v_x(x_0,y_0)s + v_y(x_0,y_0)t + \psi(s,t)\right]}{s+it}$$

$$\xrightarrow{C-R} = \frac{u_x(x_0,y_0)s - v_x(x_0,y_0)t + \varphi(s,t) + i\left[v_x(x_0,y_0)s + u_x(x_0,y_0)t + \psi(s,t)\right]}{s+it}$$

$$= \frac{u_x(x_0,y_0)(s+it) + i\, v_x(x_0,y_0)(s+it) + \varphi(s,t) + i\,\psi(s,t)}{s+it}$$

$$= u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0) + \frac{\varphi(s,t)+i\,\psi(s,t)}{s+it} \xrightarrow[s+it\to 0]{} 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$$

Luego, $\exists\ f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$. //.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(x+iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{son continuamente diferenciables en todo } \mathbb{C}$$

Además: $\begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = -e^x \operatorname{sen} y \\ v_x = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

$\therefore$ vale C-R en todo $\mathbb{C}$.

Luego, f es diferenciable en todo $\mathbb{C}$ y:

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$$
$$= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = f(x+iy)$$

$$\therefore\ f'(z) = f(z)\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo: usando C-R pudimos ver que $f(z) = |z|^2$ no tiene derivada en $z \neq 0$. Pero en $z = 0$:

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) \equiv 0 \end{cases}$$ son continuamente diferenciables,

$$\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 0 \end{cases} \quad \therefore \text{ vale C-R en } z = 0.$$

Por Teorema: $\exists\, f'(0) = u_x(0,0) + i\, v_x(0,0) = 0$.

Ejercicio: si $f(x+iy) = x^2 + iy^2$, determinar todos los puntos donde f es diferenciable.

Vamos a usar C-R: $\begin{cases} u(x,y) = x^2 \\ v(x,y) = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} u_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$

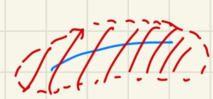
u y v son cont. diferenciables

$\therefore$ vale C-R $\iff$ $\boxed{x = y}$. Por Teorema, $\exists\, f'(x+ix) = u_x(x,x) + i\, v_x(x,x) = 2x$

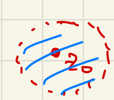
Funciones analíticas.

Def: Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$, se dice que f es analítica en U si f es diferenciable en todo punto de U.

Cuando se habla de una función analítica en un conjunto S que no es abierto, se entiende que f es analítica en un abierto que contiene a S.



En particular, f es analítica en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si f es analítica en algún $B_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$.



Por ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, pero $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún punto ($\exists\, f'(0)$, pero $\nexists$ en ningún entorno de 0)

Una función entera es una función analítica en todo $\mathbb{C}$ (por ejemplo, los polinomios).

Si una función f no es analítica en z_0, pero es analítica en algún punto de cada entorno de z_0, se dice que z_0 es una singularidad de f. Por ejemplo, $f(z)=\frac{1}{z}$ tiene una singularidad en $z=0$, pero $f(z)=|z|^2$ no tiene singularidades, pues no es analítica en ningún punto.

<u>Proposición</u>: si $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica, con U abierto, entonces f es continua en U.

<u>Propiedades</u>: si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y $f, g: U \to \mathbb{C}$ son analíticas, entonces:

- $f+g$ y $f \cdot g$ son analíticas.
- $\frac{f}{g}$ es analítica en U, si $g(z) \neq 0 \; \forall z \in U$.

Además, la composición de funciones analíticas es analítica.

<u>Teorema</u>: si $f: D \to \mathbb{C}$ con D un dominio (abierto conexo), y $f'(z)=0 \; \forall z \in D$ entonces f es constante en D.

<u>Dem</u>: sea $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, donde u y v satisfacen C-R en todo D. Entonces:

$0=f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y) \Rightarrow u_x \equiv 0,\; v_x \equiv 0$ en D.

Además, por C-R: $u_y \equiv 0$, $v_y \equiv 0$ en D.

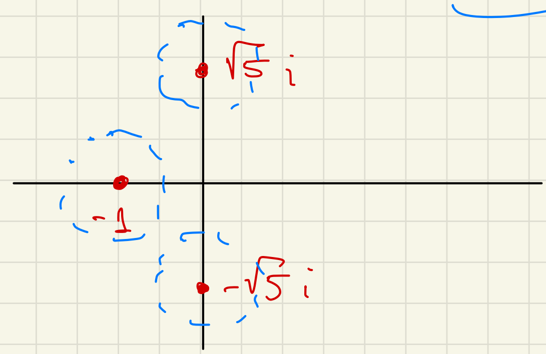
Ejemplo: ¿dónde es analítica

$$f(z)=\frac{z^2+3}{(z+1)(z^2+5)}\ ?$$

z^2+3 y $(z+1)(z^2+5)$ son analíticos en todo $\mathbb{C}$ (i.e., son enteros).

$$(z+1)(z^2+5)=0 \iff \begin{array}{l} z=-1 \\ z=\sqrt{5}\,i \\ z=-\sqrt{5}\,i. \end{array}$$

$$f \text{ es analítica en } \mathbb{C}-\underbrace{\{-1,\sqrt{5}\,i,-\sqrt{5}\,i\}}_{\text{son singularidades de } f}.$$



Como D es conexo, esto implica que $u=$ cte, $v=$ cte. //

Ejercicio: si f y $\bar{f}$ son ambos analíticos en un dominio D (abierto conexo), probar que f es constante.

- $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$
  C-R: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$
- $\bar{f}(z)=\bar{f}(x+iy):=\tilde{u}(x,y)+i\,\tilde{v}(x,y)$
  C-R: $\tilde{u}_x=\tilde{v}_y$, $\tilde{u}_y=-\tilde{v}_x$

$$\bar{f}(z)=\overline{f(z)}=\overline{u(x,y)+i\,v(x,y)}=u(x,y)-i\,v(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\tilde{u}=u\\ \tilde{v}=-v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tilde{u}_x=u_x,\ \tilde{u}_y=u_y\\ \tilde{v}_x=-v_x,\ \tilde{v}_y=-v_y\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_x=v_y,\ u_x=-v_y \Rightarrow u_x=v_y=0 \\ u_y=-v_x,\ u_y=v_x \Rightarrow u_y=v_x=0 \end{array}$$

$f=$ cte.
$\Uparrow$
$f'(z)=0\ \forall z$
$\Uparrow$ TeO

Funciones armónicas

Sea $f: D \to \mathbb{C}$ analítica, con $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y si $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, supongamos que u y v son continuamente diferenciables en D. (de clase C^2)

Por Cauchy-Riemann: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ en D $\circledast$.

Derivando ambas ecuaciones en $\circledast$ respecto de x:

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}.$$

Derivando ahora $\circledast$ respecto de y:

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Como u y v son de clase C^2, vale: $u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$.

Luego, sumando: $\boxed{\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{array}}$

<u>Definición</u>: una función $h: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U abierto) que satisface $\boxed{h_{xx} + h_{yy} = 0}$ en U se dice <u>armónica</u>.

$\hookrightarrow$ ecuación de Laplace. $\longrightarrow$ $\Delta h = 0$.

Estas funciones son importantes en matemática aplicada. Por ejemplo, la temperatura $T(x,y)$ de una lámina delgada ubicada en el plano xy es armónica (por lo general).

<u>Ejemplo</u>: $h(x,y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$ es armónica en cualquier abierto de $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{array}{l} h_{xx} = e^{-x} \operatorname{sen} y \\ h_{yy} = -e^{-x} \operatorname{sen} y \end{array}\right\} \Rightarrow h_{xx} + h_{yy} = 0 \quad /\!\!/$$

Tenemos entonces:

Teorema: si $f: D \to \mathbb{C}$ es analítica, $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ con u y v de clase C^2, entonces u y v son funciones armónicas.

Ejemplo: $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$. Además,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z^2|^2} = \frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Luego, $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ y $v(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ son armónicas en todo abierto de $\mathbb{R}^2$ que no contenga al $(0,0)$.

Definición: si $u, v: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son armónicas en un dominio D y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces se dice que v es armónica conjugada de u. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Teorema: una función $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$, con u y v de clase C^2, es analítica en un dominio D si y sólo si v es una armónica conjugada de u.

(Después veremos que estos teoremas valen también sin asumir continuamente diferenciable).

$$\begin{cases} u_x = 2x \Rightarrow u_{xx} = 2 \\ u_y = -2y \Rightarrow u_{yy} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = 2y \Rightarrow v_{xx} = 0 \\ v_y = 2x \Rightarrow v_{yy} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: $f(z) = z^2 \therefore \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$

$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$

Luego, v es conjugada armónica de u.

Pero, u no es conjugada armónica de v, pues:

$$f(x,y) = 2xy + i\,(x^2-y^2) \quad \text{no es analítica.}$$

$\Big($ $U(x,y) = 2xy$, $\quad V(x,y) = x^2-y^2$.

$$\left.\begin{aligned} U_x &= 2y \\ V_y &= -2y \end{aligned}\right\} \text{ son } \neq \quad \therefore \text{ no cumplen C-R en un abierto.}$$ $\Big)$

Ejemplo: sea $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\begin{array}{l|l} u_x = -6xy & u_y = 3y^2 - 3x^2 \\ u_{xx} = -6y & u_{yy} = 6y \end{array} \quad \therefore \; u \text{ es armónica.}$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

Tratemos de determinar si posee alguna función armónica conjugada, $v(x,y)$.

$u(x,y) = y^3 - 3x^2y$. ¿Posee armónica conjugada v?

C-R: $\quad u_x = v_y$, $\quad u_y = -v_x$.

$$v_y = u_x = -6xy \;\Longrightarrow\; v(x,y) = -3xy^2 + g(x).$$

integro respecto de y

$$\Longrightarrow \quad v_x = -3y^2 + g'(x).$$

C-R: $\quad v_x = -u_y \;\Longrightarrow\; \cancel{-3y^2} + g'(x) = \cancel{-3y^2} + 3x^2$

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 3x^2 \;\Longrightarrow\; g(x) = x^3 + C.$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C}$$

$$\therefore \quad f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) = (y^3 - 3x^2y) + i\,(x^3 - 3xy^2 + C)$$

$$f(z)=f(x+iy)=(y^3-3x^2y)+i(x^3-3xy^2+c).$$

Si $y=0$: $\quad f(x)=i(x^3+c)$.

Esto sugiere: $\boxed{f(z)=i(z^3+c)}$

Efectivamente, esta f funciona.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$f(x+iy)=i\left((x+iy)^3+c\right)$$

$$=i\left(x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3+c\right)$$

$$=i\left(x^3+i\cdot 3x^2y-3xy^2-iy^3+c\right)$$

$$=\underbrace{(y^3-3x^2y)}_{=\,u(x,y)}+i\underbrace{(x^3-3xy^2+c)}_{=\,v(x,y)}.$$

Capítulo 3: Funciones elementales.

Recordemos la función $f(z)=f(x+iy)=e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y)$.

Ya vimos que $\exists\, f'(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$, y vale $f'(z)=f(z)$.

Si además, $z=x\in\mathbb{R}$ $(y=0)$, se tiene:

$$f(x)=e^x(\cos 0+i\,\text{sen}\,0)=e^x.$$

Es decir, coincide con la función exponencial real usual.

Entonces, se define la función exponencial compleja,

$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, por:

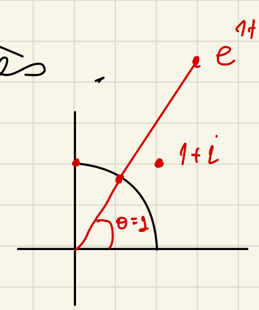
$$\exp z=e^z:=e^x(\cos y+i\,\text{sen}\,y),\quad \text{para } z=x+iy.$$

$\therefore\ \dfrac{d}{dz}(e^z)=e^z\quad\forall z\in\mathbb{C}.$ (exp es entera, es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$).

Cuando z es imaginario puro, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$e^{i\theta} = e^0 \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

que coincide con la notación que usábamos antes.



Ejemplo:
- $\exp(1+i) = e^1 \cdot (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$
- $\exp\left(2 - \frac{\pi}{2} i\right) = e^2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= e^2 \left(\cos\frac{\pi}{2} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = -e^2 \cdot i$

Propiedades:

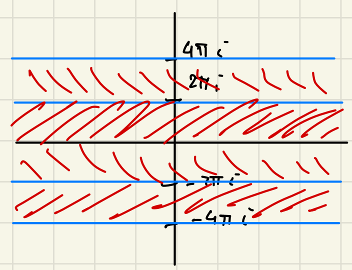
(1) $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$. $\quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

En efecto: $\quad z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$.

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{i y_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{i y_2}$$
$$= \left(e^{x_1} \cdot e^{x_2}\right) \cdot \left(e^{i y_1} \cdot e^{i y_2}\right)$$
$$= e^{x_1 + x_2} \cdot e^{i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}.$$

(2) exp es periódica de período $2\pi i$, o sea:

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$



En efecto: $\quad e^{z + 2\pi i} = e^z \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} = e^z$. ✓

(3) $\dfrac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2)$ $\quad$ (ejercicio).

(4) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$ y $(\exp z)^n = \exp(nz)$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Forma polar de exp: $\quad$ si $z = x + iy$,

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad \therefore \quad \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$$
$$\operatorname{Im} e^z = e^x \operatorname{sen} y.$$

$$\Rightarrow \quad |e^z| = e^x, \quad \arg(e^z) = \{\, y + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \,\}.$$

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Notar que: $|e^z| = e^x > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\therefore$ $\boxed{e^z \neq 0 \, \forall z \in \mathbb{C}}$.

Esto dice que: $\boxed{\text{Imagen}(\exp) \subseteq \mathbb{C} - \{0\}}$.

Veamos ahora que, en realidad, tenemos un $\boxed{=}$.

Dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, y veamos que: $\exists\, z \in \mathbb{C} \,/\, \boxed{e^z = w}$ → resolver esta ecuación

Escribamos $z = x + iy$, $w = \rho \cdot e^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leq \pi, \rho > 0)$.

Entonces:
$$e^x \cdot e^{iy} = \rho \cdot e^{i\theta}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = \rho, & \longrightarrow \quad x = \log \rho. \\ y = \theta + 2n\pi, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

($\log = \ln$)

Vale entonces: $e^z = w = \rho \cdot e^{i\theta} \iff \boxed{z = \log \rho + i(\theta + 2n\pi), \, n \in \mathbb{Z}}$.

Esto dice que $\mathbb{C} - \{0\} \subseteq \text{Imagen}(\exp)$, por lo que:

$$\boxed{\text{Imagen}(\exp) = \mathbb{C} - \{0\}}.$$

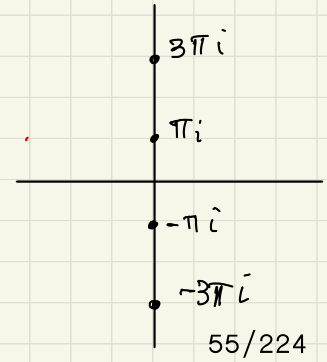
Más aún, para cada $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ existen infinitos valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

<u>Ejemplo</u>: determinar todos los $z \in \mathbb{C} \,/\, e^z = -1$.

$w = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow \rho = 1, \; \theta = \pi.$

$$\Rightarrow z = \log 1 + i(\pi + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{z = (2n+1)\pi \cdot i, \quad n \in \mathbb{Z}.}$$



Ejemplo: Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ / $e^z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

Si $z = x + iy$ entonces: $e^x \cdot e^{iy} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$\Rightarrow e^x = 2$, $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, $x = \log(2)$, $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $z = \log(2) + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funciones trigonométricas.

Para $x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

Podemos despejar de ahí: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Generalizando a $z \in \mathbb{C}$, se define:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},} \qquad \boxed{\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.}$$

Propiedades:

cos par   sen impar.

- $\cos(-z) = \cos z$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.
- cos y sen son funciones enteras, y sus derivadas son:

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z.$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

- Cuando z es imaginario puro, $z=iy$:

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y.$$

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = -i\cdot\frac{e^{-y}-e^{y}}{2} = i\cdot\operatorname{senh} y.$$

- Relación fundamental:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} + 2 + \cancel{e^{-2iz}}\right) - \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} - 2 + \cancel{e^{-2iz}}\right) = \boxed{1}. \checkmark$$

- Como en el caso real, valen las fórmulas:

1) $\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen} z_1\cdot\cos z_2 + \cos z_1\cdot\operatorname{sen} z_2$
2) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cdot\cos z_2 - \operatorname{sen} z_1\cdot\operatorname{sen} z_2$
3) $\operatorname{sen}\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z.$

1) $$\operatorname{sen} z_1\cdot\cos z_2 + \cos z_1\cdot\operatorname{sen} z_2 = \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{1}{4i}\Big[e^{i(z_1+z_2)} + \cancel{e^{i(z_1-z_2)}} - \cancel{e^{-i(z_1-z_2)}} - e^{-i(z_1+z_2)}$$
$$+ e^{i(z_1+z_2)} - \cancel{e^{i(z_1-z_2)}} + \cancel{e^{-i(z_1-z_2)}} - e^{-i(z_1+z_2)}\Big]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right)$$

$$= \operatorname{sen}(z_1+z_2).$$

3) es inmediato usando

2) $\cos(z_1+z_2) = \operatorname{sen}\left(z_1+z_2+\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \operatorname{sen} z_1 \cdot \underbrace{\cos\left(z_2+\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\| \\ \operatorname{sen}(z_2+\pi) \\ \| \\ -\operatorname{sen} z_2}} + \cos z_1 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(z_2+\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\| \\ \cos z_2}}$$

$$= -\operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2 + \cos z_1 \cdot \cos z_2 \quad \checkmark$$

Parte real e imaginaria de $\operatorname{sen} z$, $\cos z$:

Notemos primero que si $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y$$

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i \operatorname{senh} y.$$

Luego:

$$\cos(z) = \cos(x+iy)$$
$$= \cos x \cdot \cos(iy) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(iy)$$
$$= \cos x \cdot \cosh y - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x+iy)$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \operatorname{sen}(iy)$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \operatorname{senh} y.$$

De aquí resulta:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x\cdot\cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{senh}^2 y$$
$$= \cos^2 x\cdot\cosh^2 y + (1-\cos^2 x)\operatorname{senh}^2 y$$
$$= \cos^2 x\,(\underbrace{\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y}_{=1}) + \operatorname{senh}^2 y$$
$$= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y,$$

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x\cdot\cosh^2 y + \cos^2 x\cdot\operatorname{senh}^2 y$$
$$= \operatorname{sen}^2 x\cdot\cosh^2 y + (1-\operatorname{sen}^2 x)\cdot\operatorname{senh}^2 y$$
$$= \operatorname{sen}^2 x\cdot(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y$$
$$= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

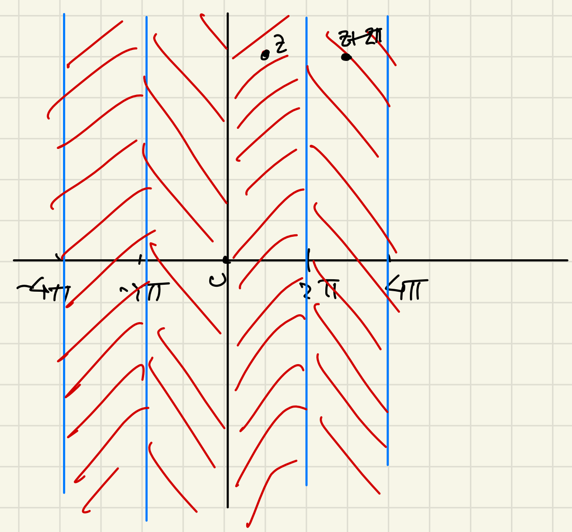
Notar que: $\operatorname{senh} y \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$ $\therefore$ $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ <u>no</u> están acotados en $\mathbb{C}$, a diferencia de sen y cos en $\mathbb{R}$.

---

sen z y cos z son periódicas, de período 2π:

$\operatorname{sen}(z+2\pi) =$
$= \operatorname{sen} z\cdot\cos 2\pi + \cos z\cdot\operatorname{sen} 2\pi$
$= \operatorname{sen} z$ ✓

$\cos(z+2\pi) =$
$= \cos z\cdot\cos 2\pi - \operatorname{sen} z\operatorname{sen} 2\pi$
$= \cos z.$



• ¿Dónde se anulan $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$?

Buscamos todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que: $\cos z = 0$.

$$\Rightarrow \quad 0 = |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \qquad (z = x + iy)$$

$$\therefore \quad \cos x = 0 \quad y \quad \underbrace{\operatorname{senh} y = 0}_{\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0 \iff \underline{\underline{y=0}}} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, & n \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Para $\operatorname{sen} z = 0$:

$$0 = |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \qquad (z = x + iy)$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} x = 0 \quad y \quad \operatorname{senh} y = 0 \iff \begin{cases} x = n\pi, & n \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Los ceros de sen y cos complejos son los mismos de sen y cos reales.

• Las otras funciones trigonométricas se definen de la manera usual:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

tg y sec son analíticas excepto en los ceros de cos, mientras que cotg y cosec son analíticas excepto en los ceros de sen. Valen las mismas fórmulas de derivación que para las funciones análogas <u>en $\mathbb{R}$</u>.

$$\cos(\pi i) = \frac{e^{i(\pi i)} + e^{-i(\pi i)}}{2} = \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = \cosh \pi.$$

$$\cos(\pi + i) = \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cdot \cos i - \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} \cdot \operatorname{sen} i = -\cos i = -\cosh 1.$$

Ejemplo: hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen: $\cos z = 2$.

1º forma: usando parte real e imaginaria.

Si $z = x+iy$: $\quad \cos x \cdot \cosh y - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \cosh y = 2 \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen: $\cos z = 2$.

1º forma: usando parte real e imaginaria.

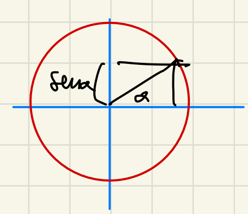
Si $z = x+iy$: $\quad \cos x \cdot \cosh y - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \cosh y = 2 & (1) \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y = 0 & (2) \longrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ o } \operatorname{senh} y = 0. \end{cases}$$

Si $\operatorname{senh} y = 0 \Rightarrow 1 = \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y \Rightarrow \cosh y = 1$

$\Rightarrow$ en (1): $\cos x = 2$, no tiene solución pues $x \in \mathbb{R}$.

Si $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



$\Rightarrow \cos x = (-1)^k \overset{(1)}{\Rightarrow} \underbrace{(-1)^k}_{=1} \cdot \underbrace{\cosh y}_{>0} = \underbrace{2}_{>0}$

$\therefore\ k = 2n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cosh y = 2.$

$$\cosh y = 2 \Rightarrow e^{y} + e^{-y} = 4 \Rightarrow e^{y} + \frac{1}{e^{y}} = 4$$

$$\overset{\times e^{y}}{\Longrightarrow} (e^{y})^2 + 1 = 4e^{y} \Rightarrow (e^{y})^2 - 4\cdot e^{y} + 1 = 0$$

ecuación cuadrática en e^{y}.

Bashkara:

$$e^{y} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ $e^{y} = 2 \pm \sqrt{3}$ (ambos positivos).

$$\Rightarrow y = \log(2 \pm \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow z = 2n\pi + i\log(2+\sqrt{3})$$

o $z = 2n\pi + i\log(2-\sqrt{3})$, $n \in \mathbb{Z}$.

2ª forma: por definición:

$$\cos z = 2.$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4$$

$$e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 4$$

$$(e^{iz})^2 + 1 = 4e^{iz}$$

$$(e^{iz})^2 - 4\cdot e^{iz} + 1 = 0$$

Resolvemos:

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \quad (\text{ambos} > 0).$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ iz = -y+ix \end{array}\right) \Rightarrow e^{-y}\cdot e^{ix} = \underbrace{(2\pm\sqrt{3})}_{>0}\cdot e^{i0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\log(e^{-y}) = \log(2\pm\sqrt{3})$$

$$-y = \log(2\pm\sqrt{3})$$

$$y = -\log(2\pm\sqrt{3})$$

$$y = \log\left[(2\pm\sqrt{3})^{-1}\right]$$

$$\frac{1}{2\pm\sqrt{3}} = \frac{1}{2\pm\sqrt{3}}\,\frac{2\mp\sqrt{3}}{2\mp\sqrt{3}} = \frac{2\mp\sqrt{3}}{4-3} = 2\mp\sqrt{3} = 2\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = \log(2\pm\sqrt{3})$$

En $\mathbb{R}$: $\log a = b \iff e^b = a$.

La función logaritmo

Recordemos cómo se resuelve la ecuación $e^z = w$ para $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ dado. Si $z = x + iy$, $w = \rho \cdot e^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leq \pi, \rho > 0)$ entonces:

$$e^x \cdot e^{iy} = \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log \rho \\ y = \theta + 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Luego, z es alguno de los siguientes (infinitos) valores:

$$\boxed{z = \log \rho + i(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

Definiremos entonces:

$$\boxed{\log w = \log \rho + i(\theta + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}} \quad (*)$$

Es una función multivaluada, o bien, un conjunto:

$$\log w = \log |w| + i \arg w.$$

Ejemplo: Si $w = -1-\sqrt{3}i$ entonces $w = 2 \cdot e^{-i2\pi/3}$

$$\therefore \log(-1-\sqrt{3}i) = \log 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

$$= \log 2 + \frac{6n-2}{3}\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- ¿Qué pasa si hacemos $\exp(\log w)$?

$w = |w| \cdot e^{i\theta}$

$$\exp(\log w) = \exp(\log|w| + i(\theta + 2n\pi)) = e^{\log|w|} \cdot e^{i(\theta+2n\pi)}$$
$$= |w| \cdot e^{i\theta} = w.$$

- ¿Qué pasa si hacemos $\log(e^z)$?

Si $z = x+iy$, entonces: $e^z = e^x \cdot e^{iy}$

$$\therefore \log(e^z) = \log(e^x) + i(y + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$= x + iy + 2n\pi i$$
$$= z + 2n\pi i.$$

Definición: el valor principal de $\log z$ (o el logaritmo principal de z) se obtiene cuando tomamos $n=0$ en $(*)$, y se denota $\text{Log}\, z$:

$$\text{Log}(z) = \log \rho + i\theta, \quad z = \rho e^{i\theta}, \ -\pi < \theta \leq \pi.$$

Es decir: $$\boxed{\text{Log}(z) = \log|z| + i \,\text{Arg}\, z.}$$

$$\therefore \log z = \text{Log}\, z + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

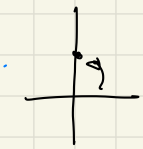
Ejemplo: si $z = t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, entonces $z = t \cdot e^{i0}$, y así:

$\operatorname{Log} t = \underbrace{\log t}_{}$ función usual $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pero si $z = t < 0$, entonces $z = (-t) \cdot e^{i\pi}$, y así:

$\operatorname{Log} t = \log(-t) + \pi i$. $\longrightarrow$ ir a página siguiente.

$\operatorname{Log} i = \log 1 + i \cdot \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} i$.



Ramas del logaritmo.

Vimos que: $\log z = \log|z| + i \arg z$, $z \neq 0$.

Si $\theta = \operatorname{Arg} z$ entonces $\log z = \log|z| + i(\theta + 2n\pi)$,

para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario y restrinjamos z al dominio

$\{ z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi \}$ $(= \mathbb{C} - \{\text{semirrecta}\})$

Ejemplo: • Comparemos $\operatorname{Log}[(1+i)^2]$ con $2\operatorname{Log}(1+i)$.

$\operatorname{Log}[(1+i)^2] = \operatorname{Log}(2i) = \log 2 + i \cdot \operatorname{Arg}(2i) = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$.

$2\operatorname{Log}(1+i) = 2 \cdot \left(\log\sqrt{2} + i \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4}\right) = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$.

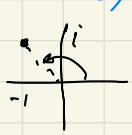
$=$

• Comparemos $\operatorname{Log}[(-1+i)^2]$ con $2\operatorname{Log}(-1+i)$.

$\operatorname{Log}[(-1+i)^2] = \operatorname{Log}(-2i) = \log 2 + i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$

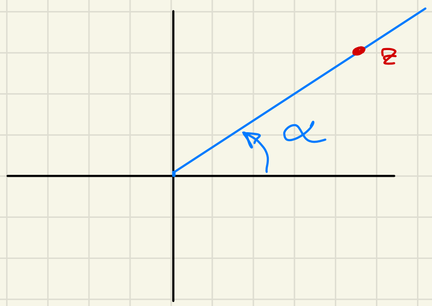
$2\operatorname{Log}(-1+i) = 2 \cdot \left(\log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) = \log 2 + i\frac{3\pi}{2}$

$\neq$



$\operatorname{Log} z \in \mathbb{R} \iff \log|z| + i\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Arg} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}_{>0}$.

$\operatorname{Log} z \in i\mathbb{R} \iff \log|z| + i\operatorname{Arg} z \in i\mathbb{R} \iff \log|z| = 0 \iff |z| = 1$



En este caso, la función

$$\log z := \log r + i\theta, \quad \text{donde}$$

$$z = r\cdot e^{i\theta} \quad (r = |z| > 0, \quad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi),$$

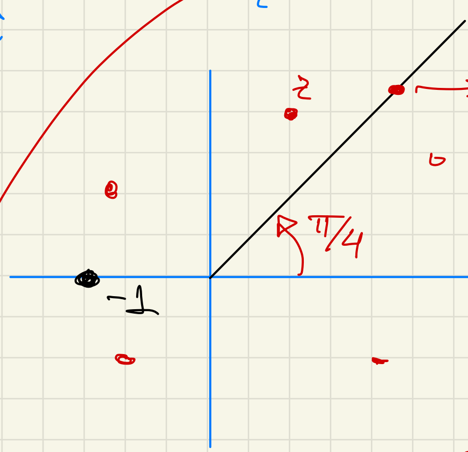
está bien definida y tiene funciones componentes (en coordenadas polares):

$$u(r,\theta) = \log r, \quad v(r,\theta) = \theta.$$

Esta función $\log z$ es continua en su dominio, pero si se agrega la semirrecta $\theta = \alpha$ deja de serlo, pues si z está en la semirrecta, hay puntos cercanos a z con $v \sim \alpha$, pero también hay otros con $v \sim \alpha + 2\pi$.

Ejemplos:

$\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\quad \left\{ z \in \mathbb{C} - \{0\} \;\middle|\; \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} + 2\pi \quad (*) \right\}$



$\longrightarrow \arg = \underbrace{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} + 4\pi, \ldots}$

ninguno de estos valores cumple la desigualdad (*).

conjunto $= \mathbb{C} - \{\text{semirrecta}\}$.

rama del logaritmo en este dominio:

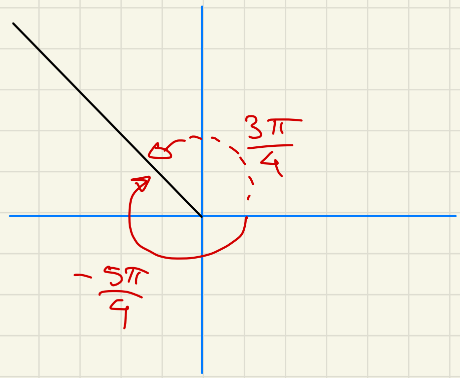
$$\log(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi.$$

$$(-1 = 1\cdot e^{i\pi})$$

$$\frac{\pi}{4} < \pi < \frac{\pi}{4} + 2\pi$$

Ejemplo:

Si $\alpha = -\frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left\{ z \in \mathbb{C} - \{0\} \,\middle|\, -\frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\}$.



Con la rama del log definida aquí, ¿cuánto vale $\log(-1)$?

$$-1 = 1 \cdot e^{i(-\pi)} \longrightarrow -\frac{5\pi}{4} < -\pi < \frac{3\pi}{4}.$$

$$\therefore \log(-1) = \log 1 + i(-\pi) = -\pi i.$$

Veamos que la función $\log z = \log r + i\theta$ es analítica en el dominio $\{r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$.

Para esto, vamos a usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann polares:

$f(r,\theta) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ es analítica $\Leftrightarrow \begin{cases} r u_r = v_\theta \\ u_\theta = -r v_r \end{cases}$.

(u y v de clase C^1)

Más aún, $f'(r,\theta) = e^{-i\theta}\left(u_r(r,\theta) + i\, v_r(r,\theta)\right)$.

En este caso: $\begin{cases} u(r,\theta) = \log r \\ v(r,\theta) = \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \\ v_\theta = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_\theta = 0 \\ v_r = 0 \end{cases}$.

Luego, vale C-R polar, y más aún:

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i v_r) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i \cdot 0\right) = \frac{1}{r \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

en el dominio de esta rama.

Es decir, $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$, para $|z|>0$, $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$.

En particular, $\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$, para $|z|>0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

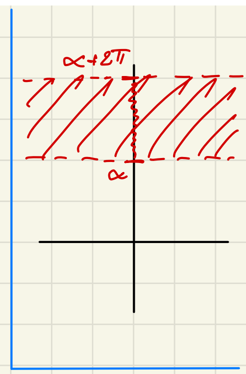
Cada una de estas funciones logaritmo, analíticas en un dominio del plano, se llama una rama del logaritmo.

La función $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, se denomina la rama principal del logaritmo.

Ejercicio: 1) Verificar que $\log(i^2) = 2\log i$, si se usa la rama definida en $\{r>0, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}\}$.

2) Verificar que $\log(i^2) \neq 2\log i$, si se usa la rama definida en $\{r>0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}\}$.

Propiedades:



- Ya vimos que: $\exp(\log z) = z$ $\forall z \neq 0$,
  pero: $\log(\exp z) = z + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.

Nos restringimos a un dominio de la forma $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$. Entonces,

si $z = x+iy \in U_\alpha$ entonces:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \quad \therefore \quad e^z \in \{w = re^{i\theta} \mid r>0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}.$$

Si log es la rama del logaritmo definida aquí, entonces:

$$\log(e^z) = \overbrace{\log(e^x)}^{\text{en } \mathbb{R}} + iy$$

$$= x + iy = z \quad \therefore \log(e^z) = z.$$

(z en la franja horizontal)

• También vale: $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2 ,$$

en el sentido siguiente: si se especifican dos de los valores involucrados, existe un valor del tercero que satisface la igualdad.

En efecto:

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \overbrace{\log(|z_1 \cdot z_2|)}^{\text{en } \mathbb{R}} + i \arg(z_1 \cdot z_2)$$

$$= \log|z_1| + \log|z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2)$$

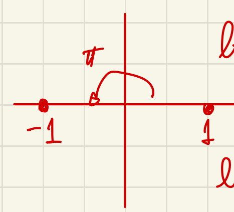
$$= (\log|z_1| + i \arg z_1) + (\log|z_2| + i \arg z_2)$$

$$= \log z_1 + \log z_2 .$$

Ejemplo: $z_1 = z_2 = -1 \quad \therefore \quad z_1 z_2 = 1$

$$\log(-1) = (2n+1)\pi i \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\log(1) = 2m\pi i \qquad (m \in \mathbb{Z})$$



$\log(-1) = \log|-1| + i(\pi + 2n\pi)$

$\log 1 = \log|1| + i(0 + 2m\pi)$

Si elegimos $\log z_1 = \pi i$ y $\log z_2 = -\pi i$, se satisface

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \underbrace{\log z_1}_{(\pi i)} + \underbrace{\log z_2}_{+ (-\pi i) = 0} \quad \text{si se elige } \log(1) = 0 .$$

Notar que: $\quad \mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(1) = 0$

pero: $\quad \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 = \mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) = \pi i + \pi i = 2\pi i$ $\quad \neq$

• Otra propiedad: $\boxed{z^n = \exp(n \log z) , \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z \neq 0,}$

para cualquier valor de $\log z$ que se escoja.

En efecto: $z^n = [\exp(\log z)]^n = \exp(n \log z)$.

Además, para $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left[\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)\right]^n = \exp(\log z) = z \text{ , para}$$

cualquier valor que tomemos de $\log z$.

Es decir, $\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$ es una raíz n-ésima de z.

Podemos escribir:

$$\boxed{z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)} \longrightarrow \text{tiene } n\text{-valores distintos.}$$

Potencias con exponentes complejos:

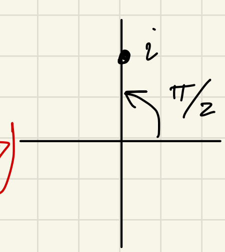
Motivados por lo visto recién para z^n y $z^{1/n}$, se define, para $z \neq 0$ y $c \in \mathbb{C}$:

$$z^c = \exp(c \log z), \text{ para alguna función logaritmo.}$$

Ejemplo: dar todos los valores posibles de i^{-2i}.

$$i^{-2i} = \exp(-2i \cdot \log i)$$

$$= \exp\left(-2i \cdot \left(\overset{=0}{\log|i|} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)\right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$



$$= \exp\left(-\cancel{2}i \cdot i \cdot \frac{4n+1}{\cancel{2}}\pi\right)$$

$$= \exp((4n+1)\pi), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{todos los resultados} \in \mathbb{R})$$

Eligiendo una rama del logaritmo, obtenemos una rama de z^c, que es una función analítica en su dominio.

Calculemos la derivada de una rama de z^c.

Fijemos la rama del logaritmo $\log z = \log r + i\theta$, en $\{r>0,\ \alpha<\theta<\alpha+2\pi\}$. Entonces:

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz}\left(\exp(c\log z)\right) = \exp(c\log z)\cdot\frac{c}{z}$$

$$= c\cdot\frac{\exp(c\log z)}{\exp(\log z)} = c\cdot\exp(c\log z - \log z)$$

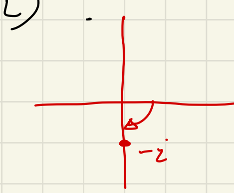
$$= c\cdot\exp((c-1)\log z)$$

$$= c\cdot z^{c-1}. \qquad (|z|>0,\ \alpha<\arg z<\alpha+2\pi).$$

El valor principal de z^c se obtiene cuando se usa Log en la definición: $z^c = \exp(c\,\mathrm{Log}\,z)$ $(|z|>0,\ -\pi<\arg z<\pi)$.

Ejemplo: Determinar el valor principal de $(-i)^i$.

$$(-i)^i = \exp\left(i\cdot\mathrm{Log}(-i)\right) = \exp\left(i\cdot\left(\overbrace{\log 1}^{=0} - \frac{\pi}{2}i\right)\right) = e^{\pi/2}.$$



Ejemplo: Determinar la rama principal de $z^{2/3}$.

Su dominio es $\{z\in\mathbb{C}-\{0\} \mid -\pi<\arg z<\pi\}$ y vale: $z^{2/3} = \exp\left(\frac{2}{3}\,\mathrm{Log}\,z\right)$.

Si $z = r\cdot e^{i\theta}$, $r>0$, $-\pi<\theta<\pi$:

$$z^{2/3} = \exp\left(\frac{2}{3}\cdot(\log r + i\theta)\right) = \exp\left(\frac{2}{3}\log r + i\,\frac{2}{3}\theta\right)$$

$$= \exp\left(\log(r^{2/3}) + i\,\frac{2}{3}\theta\right) = r^{2/3}\cdot e^{i\frac{2}{3}\theta}. \quad //$$

Dado $c \in \mathbb{C} - \{0\}$, la función exponencial con base c se define por:

$$c^z = \exp(z \cdot \log c)$$

para alguna función logaritmo.

Cuando se usa $\operatorname{Log} c$, se obtiene la rama principal de c^z.

Una vez fijado el valor de $\log c$, c^z es una función analítica en $\mathbb{C}$ (es entera), y su derivada es:

$$\frac{d}{dz} c^z = \frac{d}{dz} \exp(z \cdot \log c) = \exp(z \cdot \log c) \cdot \log c$$

$$= c^z \cdot \log c.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dz} c^z = c^z \cdot \log c}.$$

Rama principal de i^z: $\quad i^z = \exp(z \cdot \operatorname{Log} i) = \exp\left(\frac{\pi}{2} i z\right) \quad \left(i^2 = e^{\pi i} = -1\right).$

Funciones hiperbólicas

Se define: $\quad \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

cosh y senh son funciones enteras, y vale:

$$\boxed{\frac{d}{dz} \cosh z = \operatorname{senh} z}, \qquad \boxed{\frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \cosh z}.$$

Se relacionan con cos y sen de la siguiente manera:

$$\cosh z = \cos(iz), \qquad \operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz).$$

Sigue valiendo: $\quad \cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$

Además, si $z = x+iy$,

$$\cosh z = \cosh x \cdot \cos y + i \,\mathrm{senh}\, x \cdot \mathrm{sen}\, y$$
$$\mathrm{senh}\, z = \mathrm{senh}\, x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \mathrm{sen}\, y$$
verificar

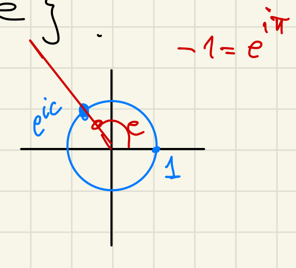
y: $$|\cosh z|^2 = \mathrm{senh}^2 x + \cos^2 y$$
$$|\mathrm{senh}\, z|^2 = \mathrm{senh}^2 x + \mathrm{sen}^2 y.$$
verificar.

<u>Ejercicio</u>: probar que cosh y senh son periódicas de período $2\pi i$, y determinar los ceros de ambas funciones.

<u>Acción de funciones elementales sobre algunos conjuntos.</u>

¿Cuál es la imagen de una recta horizontal o vertical por $\exp(z)$?

H = recta horizontal $= \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y = c = \text{cte} \}$.

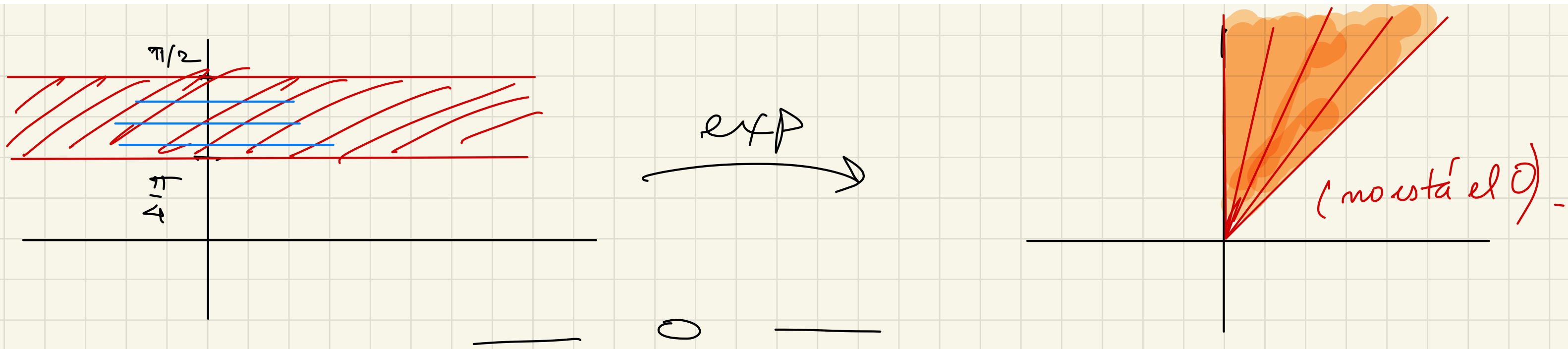


$$\therefore \quad \exp(x+ic) = \underbrace{e^x}_{\text{real positivo}} \cdot \underbrace{e^{ic}}_{\text{complejo unitario fijo}}$$

Luego, $\exp(H) = \{ z = r \cdot e^{ic} \mid r > 0 \}$ = una semirrecta con origen en 0 que forma un ángulo c c/el eje real positivo.

<u>Ejemplo</u>: ¿cuál es la imagen por exp de la franja horizontal

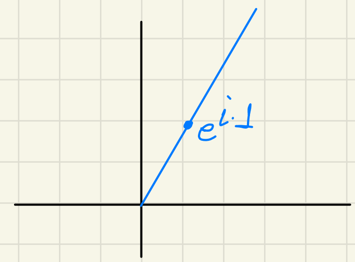
$$A = \left\{ z = x+iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2} \right\} ?$$



— o —

$A = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid 1 \leq y \leq 15 \}$.

$\exp(A) = \mathbb{C} - \{0\}$.

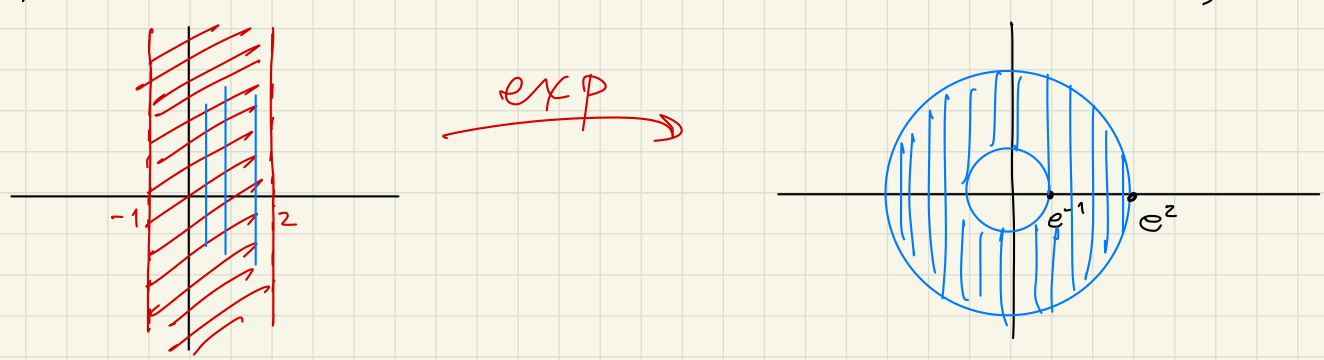


V = recta vertical $= \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x = c = cte \}$.

$\exp(c+iy) = \underbrace{e^{c}}_{\text{real} > 0 \text{ fijo}} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\text{complejo unitario variable}}$ ⇒ recorre la circunferencia de centro 0 y radio 1.

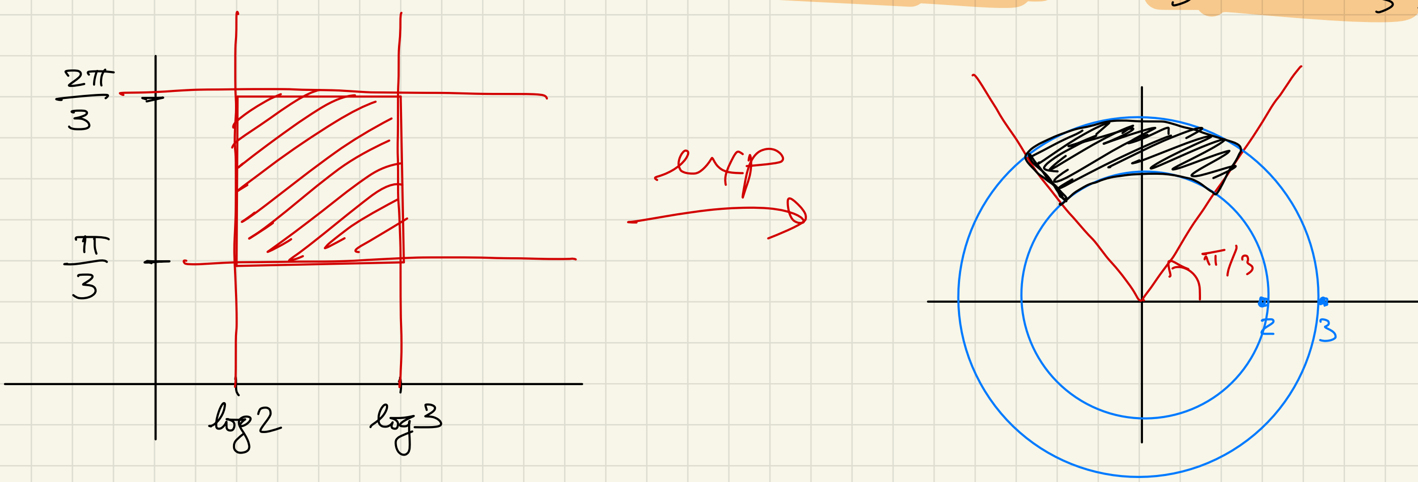
$\therefore \exp(V) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = e^{c} \}$ = circunferencia de centro 0 y radio e^{c}.

Ejemplo: ¿cuál es la imagen por exp de la franja vertical $A = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid -1 \leq x \leq 2 \}$?



Ejemplo: ¿cuál es la imagen por exp del rectángulo

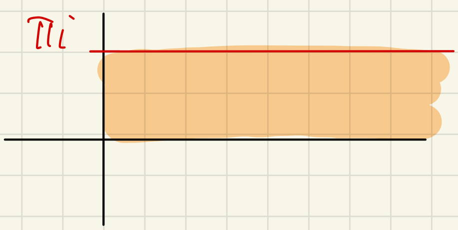
$$R = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid \log 2 < x < \log 3, \ \frac{\pi}{3} < y < \frac{2\pi}{3} \} ?$$



$\exp(A) = ?$, donde

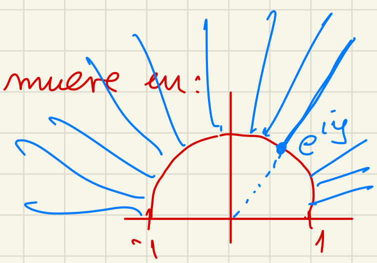
- $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \}$.
- $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \}$.

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0, \ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi \}.$$



$z = x+iy, \quad x \geq 0, \ 0 \leq y \leq \pi.$

$e^z = \underbrace{e^x}_{\geq 1} e^{iy}$ → se muere en:



$\Rightarrow \exp(A) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, \ \operatorname{Im} z \geq 0 \}.$

$\Big(e^z = \underbrace{e^x}_{\geq 1} \cdot e^{iy} = e^x \cos y + i \underbrace{e^x \operatorname{sen} y}_{\geq 0}$ ✓

$W \in \mathbb{C} \mid |W| \geq 1, \ \operatorname{Im} W \geq 0$, busco $z \in A \ / \ e^z = W$.

$e^x \cdot e^{iy} = W$

$\Rightarrow x = \log |W| \geq 0$ (pues $|W| \geq 1$).

Además: $\operatorname{Im} W = |W| \cdot \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen} y = \frac{\operatorname{Im} W}{|W|} \geq 0 \Rightarrow \exists! \, y \in [0, \pi] \ / \ \operatorname{sen} y = \frac{\operatorname{Im} W}{|W|}$. ✓ $\Big)$

Para $\underline{\cos z}$: ¿cuál es la imagen de rectas verticales y horizontales?

$H = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y = c = ct \}$ (horizontal)

$$\cos(x+ic) = \cos x \cdot \cos(ic) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(ic)$$
$$= \cos x \cdot \cosh c - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} c.$$

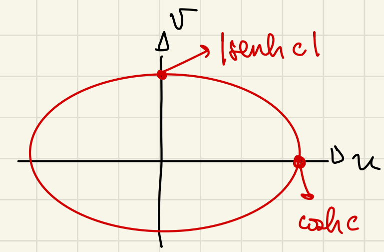
Si $c = 0$: la imagen es: $\cos(x+i0) = \cos x$ $\therefore$ $\cos(H) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{Re} z \in [-1,1] \\ \operatorname{Im} z = 0 \end{array} \right\}$ ($\cosh c = 1$, $\operatorname{senh} c = 0$)

Si $c \neq 0$, llamemos $u = \operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cdot \cosh c$

$v = \operatorname{Im}(\cos z) = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} c$

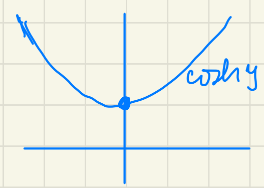
Como $\cosh c \neq 0$ y $\operatorname{senh} c \neq 0$, podemos calcular:

$$\left(\frac{u}{\cosh c}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{senh} c}\right)^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$



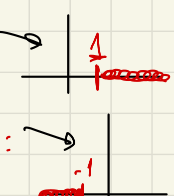
$\therefore$ la imagen es una elipse de semiejes $\cosh c$ y $|\operatorname{senh} c|$

$V = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x = c = ct \}$. (vertical).



$$\cos(c+iy) = \cos c \cdot \cosh y - i \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{senh} y$$

Si $\operatorname{sen} c = 0$: $c = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi + iy) = (-1)^k \cosh y$: $\begin{cases} k \text{ par:} \\ k \text{ impar:} \end{cases}$



Si $\cos c = 0$. $c = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} + iy\right) = -i(-1)^k \underbrace{\operatorname{senh} y}_{\text{suryectiva}} \to$ Imagen $= i\mathbb{R}$.

Si $\operatorname{sen} c \neq 0$ y $\cos c \neq 0$, sean: $u = \operatorname{Re}(\cos z) = \cos c \cdot \cosh y$

$v = \operatorname{Im}(\cos z) = -\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{senh} y$

$$\therefore \left(\frac{u}{\cos c}\right)^2 - \left(\frac{v}{\operatorname{sen} c}\right)^2 = \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

$\to$ hipérbola

$\therefore$ la imagen es: una rama de esta hipérbola.