

Ej. 1 Calcular las siguientes integrales:

1. $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt,$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2ti} dt.$
3. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t-i}$
4. $\int_2^3 \frac{3+i(5-2t)}{5+i(5-2t)} dt$
5. $\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{2e^{it}-1} dt$
6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} ie^{it}\sqrt{e^{it}} dt$
7. $\int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{1+4e^{2it}} dt$
8. $\int_0^{e^\pi} \exp(i \operatorname{Log}(t)) dt$

Ej. 2 Mostrar que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Ej. 3 Calcular $\int_C \frac{z+2}{z} dz$, donde C es:

1. la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$,
2. la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$,
3. la circunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
4. la semicircunferencia $z = 2e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

Ej. 4 Sea $\gamma : [0, \pi] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = te^{it}$. Evaluar

1. $\int_\gamma z dz,$
2. $\int_\gamma \bar{z} dz,$
3. $\int_\gamma |z| dz,$
4. $\int_\gamma \sqrt{z} dz.$

Ej. 5 Sea C la circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$, recorrida en sentido antihorario. Mostrar que

1. $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$
2. $\int_C (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n \in \mathbb{Z} - \{0\}).$

Ej. 6 (Opcional) Sea $w : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Demostrar que

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt.$$

Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y sea $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ una curva suave. Supongamos que M es una cota superior de $|f \circ \gamma|$. Usar el resultado anterior para deducir (la *ML inequality*) que

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M \operatorname{Longitud}(\gamma).$$



Ej. 7 Sea C el arco de la circunferencia $|z| = 2$ que yace en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, mostrar que

$$1. \left| \int_C \frac{z-2}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{4}{15}\pi, \quad 2. \left| \int_C \frac{dz}{z^2-1} \right| \leq \frac{1}{3}\pi, \quad 3. \left| \int_C \frac{z+4}{z^3-1} dz \right| \leq \frac{6}{7}\pi.$$

Ej. 8 Sea r un real positivo y $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = re^{it}$. Verificar que

$$\left| \int_{\gamma} e^{iz^2} dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}.$$

Ej. 9 Sea $\gamma : [0, \pi] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la curva definida por $\gamma(t) = e^{1+it}$. Verificar que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{Log}(z)} dz \right| \leq e \operatorname{Ln}(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$$

Ej. 10 Mostrar, con ayuda de una primitiva, que para todo camino C que vaya de un punto z_1 a un punto z_2 vale

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

Ej. 11 Sea $\gamma : (-\infty, \infty) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = t + (1-t)i$. Mostrar que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+4} dz = \frac{1}{2}\pi$$

Ej. 12 Sea C el cuadrado cuyos lados están determinados por las líneas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ recorrido en sentido antihorario. Calcular las integrales siguientes:

$$1. \int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{i\pi}{2}} dz, \quad 2. \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz, \quad 3. \int_C \frac{z}{2z+1} dz, \quad 4. \int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz.$$

Ej. 13 Hallar el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del círculo $|z-i| = 2$ recorrido en sentido positivo en los casos:

$$1. g(z) = \frac{1}{z^2+4}, \quad 2. g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}.$$



Ej. 14 Sea C la circunferencia $|z| = 3$, recorrida en sentido antihorario. Mostrar que si

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz, \quad |w| \neq 3,$$

entonces $g(2) = 8\pi i$. ¿Cuánto vale $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

Ej. 15 Sea la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

1. Mostrar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale:

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

2. Escribir la integral anterior en términos de θ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

Ej. 16 Sea C la circunferencia $|z| = 4$, recorrida en sentido antihorario. Mostrar que

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz = 2\pi i.$$

Ej. 17 Haciendo uso de que $4 + \sin^2(\theta)$ es igual a $(2 + i \sin(\theta))(2 - i \sin(\theta))$, calcular:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \sin^2(\theta)} d\theta,$$

Ej. 18 Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2e} \pi.$$

Ej. 19 Sea b un número real positivo. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \cos(2b\pi t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{b^2 \pi^2}}.$$

Ej. 20 Sea f entera y supongamos que $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ está acotada superiormente. Mostrar que f es constante. [Hint: Aplicar el Teorema de Liouville a $g(z) = \exp(f(z))$.]