Funciones Complejas

Período 2022-II

Práctico 2

Funciones, Límites y Continuidad

Ej. 1 Sea z_n una sucesión de números complejos. Demostrar:

1. El límite $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.
2. Si el límite $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |w|$. ¿Qué puede decir de la recíproca?

Ej. 2 Sea w un complejo de módulo 1 y z_n la sucesión definida por $z_n = n(\sqrt[n]{w} - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $\lim_{n\to\infty} z_n = i\,\mathrm{Arg}(w)$.

Ej. 3 Considerar la sucesión z_n definida recursivamente por $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_n = (z_{n-1} + z_{n-2})/2$ si $n \geq 3$. Dar una fórmula explícita para la sucesión, concluir que es una sucesión convergente y dar el límite de la sucesión.

Ej. 4 Considerar la sucesión z_n definida por $z_n = \sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i}$. Mostrar que el límite de la sucesión es 0.

Ej. 5 Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y expresarlas en la forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

1. $f(z) = z^2 + z - 1$,
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$,
3. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$,
4. $f(z) = \dfrac{iz^2 + 2z + 5}{z^4 + 3z^2 - 4}$,
5. $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$.
6. $f(z) = \dfrac{2z^2 + 3}{|z-1|}$.
7. $f(z) = \dfrac{z\overline{z}}{z^2 + \overline{z}^2}$,
8. $f(z) = (z^2 - \overline{z}^2 + 1)^{-1}$,
9. $f(z) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$,
10. $f(z) = \dfrac{\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z)^3}{i - \mathfrak{Re}(z)^2 - i\mathfrak{Re}(z)^2\mathfrak{Im}(z)^2}$,

Ej. 6 Sea $A = \{z : |z| > 1\}$ y considerar $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(z) = (z + z^{-1})/2$. Mostrar que f es inyectiva y su imagen es el conjunto $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, dar la inversa de f.

Ej. 7 Sea $D = \{z : |z| < 1\}$ y sea $c \in \mathbb{C}$ con $|c| < 1$. Mostrar que $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (z + c)/(1 + \overline{c}z)$ satisface $f(D) = D$.

Ej. 8 Sean $a, b \in \mathbb{C}$ números complejos con $a \neq 1$ y considerar la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = az + b$. Mostrar que f tiene un único punto fijo y que geométricamente f es una rotación en el plano complejo con respecto a un punto z_0 seguida por una homotecia con respecto a z_0.

Ej. 9 Computar los siguientes límites

1. $\lim_{z\to i}[2z^2 - iz^3 + z\,\mathrm{Arg}(\overline{z})]$,
2. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z)^2}{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^4}$
3. $\lim_{z\to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z + i}$
4. $\lim_{z\to i} \dfrac{z^4 + 1}{z + i}$,
5. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$
6. $\lim_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}^2}{z}$
7. $\lim_{z\to 0} \left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)^2$
8. $\lim_{z\to -i} \dfrac{z^4 - 1}{z + i}$,
9. $\lim_{z\to -i} \dfrac{z^2 - 1}{z + i}$,
10. $\lim_{z\to i} \dfrac{z^2 + i}{z^4 - 1}$,
11. $\lim_{z\to 2i} \dfrac{z^2 - iz + 2}{z^2 + 4}$,
12. $\lim_{z\to 1} \dfrac{\sqrt{z} - 1}{z - 1}$

Ej. 10 Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(z) = 3z^2 + 2z$. Mostrar que $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ es igual a $6z_0 + 2$.

Ej. 11 Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i}, & \text{si } z \neq 2i, \\ 3+4i, & \text{si } z = 2i. \end{cases}$$

Probar que el límite de $f(z)$ existe cuando z tiende a $2i$ y determinar su valor. ¿Es f una función continua y si no lo es, cómo modificaría la definición de f para que si lo sea?

Ej. 12 Para cada una de las siguientes funciones $f : K \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ encontrar, en caso de ser posible, el valor máximo y mínimo de $|f|$, $\mathfrak{Re}(f)$ y $\mathfrak{Im}(f)$:

1. Si $f(z) = z - \frac{1}{z}$ y K es la circunferencia centrada en el origen de radio 2,
2. Si $f(z) = z^3 + 2iz$ y K es es la clausura del disco abierto con centro en el origen y radio 1,
3. Si $f(z) = \frac{z^3}{z^2-1}$ y K es la circunferencia centrada en el origen de radio 3,
4. Si $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ y K es es la clausura del disco abierto con centro en el origen y radio 1.
5. Si $f(z) = z$ y K es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| + 4|z-1| = 25\}$.

Ej. 13 Sea D un domino en el plano complejo (es decir un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$ conexo) y sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua. Demostrar:

1. Si f satisface que $|f(z)^2 - 1| < 1$ para todo $z \in D$, entonces $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in D$ ó $|f(z) + 1| < 1$ para todo $z \in D$.
2. Si f satisface que $1 = \exp(\mathfrak{Re} f(z)) \exp(i \mathfrak{Im} f(z))$ para todo $z \in D$, entonces f es constante y más aún $f(z) = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
3. Si la imagen de f no corta el eje imaginario y además satisface $f(z)^2 = z$ para todo $z \in D$, entonces $f(z) = \sqrt{z}$ para todo $z \in D$ ó $f(z) = -\sqrt{z}$ para todo $z \in D$.

Ej. 14 Sea L una recta en el plano complejo. Visualizar la imagen de L bajo la función raíz cuadrada principal $f(z) = z^2$ cuando

1. L es una recta horizontal.
2. L es una recta vertical.
3. L tiene ecuación $\mathfrak{Im}(z) = \sqrt{3}\mathfrak{Re}(z)$.

Según lo observado, conjeturar que forma tiene dicha imagen y probar la afirmación. ¿Puede extender los resultados obtenidos a otro tipo de rectas en el plano complejo?

Ej. 15 Considerar la función $f(z) = \frac{1}{z}$. Visualizar la imagen de los siguientes conjuntos bajo la función f, conjeturar su forma y demostrar dichas afirmaciones:

1. La circunferencia de radio r centrada en 0,
2. Una circunferencia de radio r centrada en a con $a \in \mathbb{R}$.
3. el sector $\{z : 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}\}$,

Dibujar las curvas $|f(z)| =$ constante y $\operatorname{Arg}(f(z)) =$ constante y verificar que son ortogonales donde se intersecan.