FAMAF

Funciones Complejas
Período | 2022-II
Práctico 3

Ej. 1 Usando la definición de derivada, determinar dónde existe $f'(z)$ y calcularla:

1. $f(z) = 3\mathfrak{Re}(z) + 4\mathfrak{Im}(z)i$,
2. $f(z) = \mathfrak{Im}(z)$,
3. $f(z) = \bar{z}$,
4. $f(z) = |z|^2$,
5. $f(z) = |z|$,
6. $f(z) = \mathfrak{Re}(z)^2$,
7. $f(z) = z^2\overline{z}$,
8. $f(z) = \dfrac{1}{z-2+3i}$,
9. $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$.
10. $f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z^2}}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$

Ej. 2 Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Evaluar

1. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(2z)}{z}$
2. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z^2)}{z}$
3. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z^2-z)}{z}$
4. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{f(z^2+1)}{(z-i)}$

Ej. 3 Demostrar la regla de L'Hôpital: Si f y g son funciones analíticas en w_0, $f(w_0) = g(w_0) = 0$ y $g'(w_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z\to w_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(w_0)}{g'(w_0)}.$$

Ej. 4 Resolver los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital y sin usarla:

1. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{4z^2+9z}{5z^2+8z}$
2. $\lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$
3. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$
4. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$
5. $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^2+3z-10}{z^2-z-2}$
6. $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^2-2z}{z^2-4z+4}$

Ej. 5 (Opcional) Sea f una función analítica en un conjunto abierto U. Definir la nueva función $g : \widetilde{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ donde $\widetilde{U}$ es el abierto $\{\overline{z} : z \in U\}$. Demostrar que g es una función analítica en $\widetilde{U}$ y que $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ para todo $z \in \widetilde{U}$.

Ej. 6 Si z es un número complejo, $x = \mathfrak{Re}(z)$ e $y = \mathfrak{Im}(z)$, usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para calcular $f'(z)$, en caso de que exista.

1. $f(z) = iz + 2$,
2. $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$,
3. $f(z) = \sqrt{xy}$
4. $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$,
5. $f(z) = 2xy + i(x^2+y^2)$,
6. $f(z) = 1 - y^2 + i(2xy - y^2)$,

Ej. 7 Dar un ejemplo de una función polinomial en $x = \mathfrak{Re}z$ e $y = \mathfrak{Im}z$ que sea diferenciable en todo punto de la parábola $y = x^2$ pero no en el resto de los puntos del plano complejo.

Ej. 8 Mostrar que ni $xy(x-y)$ ni $xy(x-2y)$ pueden ser la parte real de una función analítica

Funciones Analíticas

Ej. 9 Sea $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \notin D$. Introduciendo coordenadas polares (r,θ) en D, se tiene las nuevas funciones

$$U(r,\theta) := u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \quad V(r,\theta) := v(r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

de manera que $f(re^{i\theta}) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$.

1. Usar la regla de la cadena para mostrar que las derivadas parciales de u y v existen y son continuas en $z \in D$ si y sólo si lo mismo sucede para U y V.

2. Probar que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D si y sólo si U y V satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann polares* en D:
$$U_r = \frac{1}{r}V_\theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{r}U_\theta = -V_r.$$

3. Mostrar que si se cumplen las condiciones anteriores, entonces para $z = re^{i\theta} \in D$, se tiene
$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\big(U_r(r,\theta) + iV_r(r,\theta)\big) \\ &= \frac{1}{r}e^{-i\theta}\big(V_\theta(r,\theta) - iU_\theta(r,\theta)\big). \end{aligned}$$

Ej. 10 Verificar que las siguientes son funciones armónicas en sus dominios y hallar una armónica conjugada cuando sea posible:

1. $u(x,y) = 2x(1-y)$,
2. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$,
3. $u(x,y) = \operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$,
4. $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$,
5. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$,
6. $u(x,y) = \operatorname{Arg}(z)$.

Ej. 11 Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dos funciones analíticas en un dominio D tales que $f'(z) = g'(z)$ para todo $z \in D$. Mostrar que f y g difieren por una constante.

Ej. 12 Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que f' es constante. Probar que f es una función lineal; es decir, $f(z) = az + b$ para todo $z \in D$, donde a y b son constantes. ¿Puede generalizar este resultado considerando que f sea n veces diferenciable y la n-ésima derivada constante?

Ej. 13 (Opcional) Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $f = u + iv$, una función analítica en un abierto U y asuma que f es de clase $\mathcal{C}^2(U)$; esto es, las derivadas parciales de u y v de orden 1 y 2 existen y son continuas. Verificar que:

1. Ambas funciones u y v son funciones armónicas.

2. La función $f' : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ también es analítca.

Mas adelante se demostrara que f analítica en U implica que f es de clase $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Ej. 14 Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Probar que cualquiera de las condiciones siguientes implica que f es constante en D.

1. $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$,

2. $\operatorname{Re}(f(z)) = c$ para todo $z \in D$, con $c \in \mathbb{R}$,

3. $|f(z)| = cte$ para todo $z \in D$.

4. $\mathfrak{Im} f(z) = (\mathfrak{Re} f(z))^2$ para todo $z \in D$.

5. $\operatorname{Arg}(z) = cte$ para todo $z \in D$ donde $f(z) \neq 0$,

Ej. 15 (Opcional) Sea $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$, una curva regular; es decir, $\gamma'(t) = x'(t)+iy'(t) \neq 0$. Recordar que se definen respectivamente la *velocidad* y la *aceleración* de la curva γ como las funciones $\mathbf{v}, \mathbf{a} : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $\mathbf{v}(t) = \gamma'(t)$ y $\mathbf{a}'(t) = \gamma''(t)$. Recordar también que la *función de curvatura* de γ, $\kappa : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define como $\kappa(t) = ||\mathbf{a}^{\perp}(t)||/||\mathbf{v}(t)||^2$, donde $\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathrm{Proy}_{\mathbf{v}(t)}(\mathbf{a}(t))$; identificando a $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ como vectores del espacio euclidiano $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Mostrar que:

1. La curvatura de una circunferencia de radio R es constante e igual a $1/R$. Y reciprocamente, si γ es una curva en el plano complejo de curvatura constante $1/R$ entonces la trayectoria de γ está contenida en una circunferencia de radio R.
   [Hint: Para la vuelta, un candidato para el centro de la circunferencia es $\gamma(t) + \frac{1}{\kappa^2||\mathbf{v}(t)||^2}\mathbf{a}^{\perp}(t)$.]

2. El producto interno $\langle (a,b),(c,d)\rangle$ es igual a $\mathfrak{Re}((a+ib)\overline{(c+id)})$ y $\det((a,b),(c,d))$ es igual $-\mathfrak{Im}((a+ib)\overline{(c+id)})$, para todo par de puntos (a,b) y (c,d) de $\mathbb{R}^2$.

3. Si $w \in \mathbb{C}$ es no nulo, entonces w e iw es una base ortogonal de $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R}$ espacio vectorial con el producto interno $\langle w,z\rangle = \mathfrak{Re}(w\overline{z})$.

4. La norma de un número complejo w con respecto a este producto interno coincide con su módulo, es decir $\langle w,w\rangle = ||w||^2 = |w|^2$, y en consecuencia $||w.v|| = ||w||||v||$. Además, $\langle w.z, w.v\rangle$ es igual a $|w|^2\langle z,v\rangle$, para todo v, w y z en $\mathbb{C}$.

5. La función de curvatura κ es dada por $\kappa(t) = |\langle \mathbf{a}(t), i\mathbf{v}(t)\rangle|/|\mathbf{v}(t)|^3 = |\det(\mathbf{v}(t),\mathbf{a}(t))|/|\mathbf{v}(t)|^3$. Se define la función de *curvatura signada* de γ, denotada κ_s, por $\kappa_s(t) = \langle \mathbf{a}(t), i\mathbf{v}(t)\rangle/|\mathbf{v}(t)|^3$. Se sigue que $|\kappa_s| = \kappa$.

6. Si $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función 2 veces diferenciable y tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$ y si $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una curva regular cuya trayectoria está contenida en U entonces $\beta = f \circ \gamma$ es una curva regular y la función de curvatura signada de β está dada por
   $$\frac{1}{|f'(\gamma(t))|}\left(\mathfrak{Im}\left(\frac{f''(\gamma(t))}{f'(\gamma(t))}.T(t)\right) + \kappa_s(t)\right)$$
   Donde $T(t)$ es el número complejo de módulo 1 dado por $\gamma'(t)/||\gamma'(t)||$.

7. Sea w un punto arbitrario de plano complejo y sea γ una circunferencia de radio R con centro en w, con $R \neq |w|$. Usar GeoGebra para visualizar la curva β dada por la imagen de γ bajo la transformación de Möbius $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definida por $f(z) = 1/z$ y calcular su curvatura usando la fórmula anterior. ¿Qué puede decir cuando $R = |w|$?

8. Demostrar que la curva β del punto anterior es una circunferencia con centro en $\overline{w}/(|w|^2 - R^2)$ y radio $R/||w|^2 - R^2|$.