Funciones Complejas

Período | 2022-II

Práctico 8

Ej. 1 (Repaso) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función períodica tal que existe su período fundamental T. Mostrar que cualquier período de f es un múltiplo entero de T.

Ej. 2 Sean a, b, c y λ números reales positivos tales que $b/c \in \mathbb{Q}$ y $0<\lambda<2\pi$. Determinar si las siguientes funciones son períodicas y de ser posible, dar el período fundamental:

1. $\cos(at)$
2. $\cos(t+\lambda)$
3. $\cos(t+\lambda)-\cos(t)$
4. $\sin(bt)+\sin(ct)$
5. $|\cos(t)|+|\sin(t)|$
6. $\sin(t^2)$
7. $\sin(t)\cos(t)$
8. $(\cos(t))^2$
9. $(\cos(t))^4+(\sin(t))^4$

Ej. 3 Sean $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f_1(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x\in\mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x\notin\mathbb{Z} \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x\in\mathbb{Q} \text{ y } x\notin\mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \text{ o } x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Estudiar si f_1, f_2 y f_1+f_2 son funciones períodicas y de ser posible, dar su período fundamental.

Ej. 4 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función períodica. Mostrar que si es continua, entonces es acotada. Mostrar además que si f es diferenciable con período fundamental T, entonces su derivada $f^{'}$ también es períodica con período fundamental T.

Ej. 5 Sean $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ números reales positivos distintos. Mostrar que el conjunto de $2m$ funciones $\{\cos(t_k x), \sin(t_k x) : 1\le k\le m\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ej. 6 (Opcional) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ números enteros positivos distintos y sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_k\cos\left(\frac{2\pi}{a_k}x\right)+\beta_k\sin\left(\frac{2\pi}{a_k}x\right)\right)$$

donde α_k y β_k son constantes reales, no ambas nulas. Demostrar que f es una función períodica con período fundamental $T=\mathrm{mcm}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Ej. 7 Determinar la serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas con periódo fundamental L definidas sobre un intervalo del tipo $[a, a+L)$:

1. $H(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } -\pi\le x<0 \\ 1, & \text{si } 0\le x<\pi \end{cases}$
2. $f(x)=x$, $-1\le x<1$
3. $f(x)=x$, $0\le x<2$.
4. $f(x)=x^2$, $-\pi\le x<\pi$.
5. $M(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } -\pi\le x<0 \\ x, & \text{si } 0\le x<\pi \end{cases}$
6. $T(x)=\begin{cases} x, & \text{si } 0\le x<\pi \\ \pi, & \text{si } \pi\le x<2\pi \end{cases}$
7. $\cos(x)$, $0\le x<\pi$.
8. $|\sin(x)|$, $-\pi\le x<\pi$.
9. $Q(x)=\begin{cases} x, & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2, & \text{si } 0\le x<3. \end{cases}$
10. $f(x)=\begin{cases} \sin(+\frac{x}{2}), & \text{si } 0\le x\le\pi \\ \sin(-\frac{x}{2}), & \text{si } \pi<x<2\pi \end{cases}$

Análisis de Fourier

Ej. 8 Sea λ un número real no nulo y sea f la función periódica definida por $f(x) = e^{\lambda x}$, si $-\pi \leq x < \pi$ y $f(x+2\pi) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Verificar que la serie de Fourier de f está dada por

$$\frac{\sinh(\pi\lambda)}{\pi}\left\{\frac{1}{\lambda} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}(\lambda\cos(nx) - n\sin(nx))\right\}.$$

Usar la anterior serie de forma apropiada para verificar que:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{2\lambda}\operatorname{csch}(\lambda\pi) - \frac{1}{2\lambda^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{\lambda}\operatorname{csch}(\lambda\pi)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{2\lambda}\coth(\lambda\pi) - \frac{1}{2\lambda^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2+n^2} = \frac{\pi}{\lambda}\coth(\lambda\pi)$

Ej. 9 Sea f la función periódica definida por

$$\begin{cases} \pi^2, & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ (x-\pi)^2, & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

y $f(x) = f(x+2\pi)$. Dar la serie de Fourier de f y usarla de forma apropiada para verificar que:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Ej. 10 Para las siguientes funciones definidas en el intervalo dado, extenderlas periódicamente en una forma par y en una forma impar para dar la respectiva serie de Fourier en cosenos y la serie de Fourier en senos:

1. $f(x) = 1 - x$, $0 < x \leq 1$
2. $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 2$
3. $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \leq x \leq \pi$
4. $f(x) = \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$
5. $f(x) = x\sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$
6. $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$

Ej. 11 Sea f la función periódica definida por $f(x) = x$, si $-\pi \leq x < \pi$ y $f(x+2\pi) = f(x)$ para cualquier x en $\mathbb{R}$, cuya serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Integrar la anterior serie para mostrar que si $x \in (-\pi, \pi)$, entonces

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos(kx).$$

¿Qué puede decir de la igualdad cuando $x = \pm\pi$.

Ej. 12 Sea f la función periódica definida por $f(x) = |x|$, si $-\pi \leq x < \pi$ y $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Verificar que la serie de Fourier de f está dada por

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2},$$

e integrando esta serie, mostrar que la serie de Fourier de la función periódica g definida por

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x(\pi + x), \text{ si} & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x(\pi - x), \text{ si} & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

y $g(x) = g(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Usar los anteriores resultados para mostrar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.