FUNCIONES COMPLEJAS

Período | 2022-II

Práctico 6

SERIES

Ej. 1 Mostrar que si una serie de números complejos converge absolutamente entonces la serie es convergente

Ej. 2 Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$, $\quad |z| < 1$, y haciendo $z = re^{i\theta}$, con $0 < r < 1$, en la fórmula anterior, deducir las siguientes igualdades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Ej. 3 Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y c es un número complejo, mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS$.

Ej. 4 Verificar que $e^z = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ej. 5 Hallar la serie de Maclaurin de la siguiente función e indicar su dominio de convergencia:

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9}\left(\frac{1}{1 + (z^4/9)}\right).$$

Ej. 6 Desarrollar en serie de Taylor las funciones $\cos z$ y $\sinh z$ centradas en $z_0 = \pi/2$ y $z_0 = \pi i$ respectivamente.

Ej. 7 Escribir la representación en serie de Maclaurin de $f(z) = \sin(z^2)$ y deducir que $f^{(4n)}(0) = 0$ y $f^{(2n+1)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ej. 8 Sean λ un complejo no nulo y n un entero no negativo. Se define el *coeficiente binomial* $\binom{\lambda}{n}$ como $\binom{\lambda}{0} = 1$ y $\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}$ si $n \geq 1$. Verificar que si $|z| < 1$ entonces

$$(1+z)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n$$

Ej. 9 Sea w un complejo tal que $|w|<1$. Dada la función f y el anillo D, escribir la representación en serie de Laurent centrada en el centro del anillo D de las siguientes funciones:

1. $\dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-1|<\infty\}$
2. $\tan(z)$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-\frac{\pi}{2}|<\pi\}$
3. $\dfrac{1}{z}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z-i|<\infty\}$
4. $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<1\}$
5. $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<\infty\}$
6. $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z+2|<1\}$
7. $\dfrac{w}{z-w}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: |w|<|z|<\infty\}$
8. $\dfrac{1}{(\tan(z))^2}-\dfrac{1}{z^2}$, $D=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<\frac{\pi}{2}\}$

Ej. 10 Tomando derivada en el desarrollo en serie de Maclaurin $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, para $|z|<1$, obtener las siguientes representaciones en el mismo disco abierto:

1. $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$,
2. $\dfrac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n$,

Ej. 11 Sea θ un ángulo entre $-\pi$ y π. Hallar el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados, y determinar el radio de convergencia de la serie obtenida.

1. $\frac{1}{z^2}$, en $z_0=-1$.
2. $\operatorname{Log} z$, en $z_0=i$.
3. $\frac{1}{1+i-\sqrt{2}z}$, en $z_0=0$.
4. $\operatorname{Arctan}(z)$, en $z_0=0$.
5. $z(\cos(z))^2$, en $z_0=\pi$.
6. $\sqrt{z}$, en $z_0=e^{i\theta}$.
7. $\frac{e^z}{1-z}$, en $z_0=0$.
8. ze^{2z}, en $z_0=-1$.

Ej. 12 Expandir la función $\dfrac{1}{(1+z^2)}$ en serie de Taylor para $|z|<1$ y en serie de Laurent para $|z|>1$.

Ej. 13 Expandir la función $\dfrac{1}{\operatorname{Log}(1+z)}$ en serie de Laurent centrada en $z_0=0$ y determinar la región de convergencia.

Ej. 14 Hallar la región de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n!}$,
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)z^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^{n(n+1)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{1+(1+i)^n}$.