Capítulo 4: Integrales.

Estudiaremos integrales de funciones complejas a lo largo de curvas en $\mathbb{C}$. En la definición de curva, distinguimos entre el objeto geométrico de dimensión 1 en el plano y su parametrización, que es una función $[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Def: una curva parametrizada es una función $w:[a,b] \to \mathbb{C}$.
Escribiendo $w(t) = u(t) + i v(t)$, diremos que w es continua si u y v son continuas, y que w es derivable si u y v lo son, y en ese caso se define: $w'(t) = u'(t) + i v'(t)$.
(Para $t=a$, $t=b$, se entiende derivadas laterales).

Propiedades:

1) $\dfrac{d}{dt}(z_0 \cdot w(t)) = z_0 \cdot w'(t)$.

2) $\dfrac{d}{dt}(w_1(t) + w_2(t)) = w_1'(t) + w_2'(t)$

3) $\dfrac{d}{dt}(w_1(t) \cdot w_2(t)) = w_1'(t) \cdot w_2(t) + w_1(t) \cdot w_2'(t)$

4) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{w_1(t)}{w_2(t)}\right) = \dfrac{w_1'(t) w_2(t) - w_1(t) w_2'(t)}{(w_2(t))^2}$ $\quad (w_2(t) \neq 0)$.

5) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{z_0 \cdot t}\right) = z_0 \cdot e^{z_0 t}$

Dem: Veamos (3): $\quad w_1(t) = u_1(t) + i v_1(t)$, $w_2(t) = u_2(t) + i v_2(t)$

$w_1 \cdot w_2 = (u_1 \cdot u_2 - v_1 \cdot v_2) + i(u_1 v_2 + v_1 u_2)$.

$$
\begin{aligned}
(w_1 \cdot w_2)' &= (u_1 u_2 - v_1 v_2)' + i(u_1 v_2 + v_1 u_2)' \\
&= u_1' u_2 + u_1 u_2' - v_1' v_2 - v_1 v_2' + (u_1' v_2 + u_1 v_2' + v_1' u_2 + v_1 u_2')i \\
&= u_1'(u_2 + i v_2) + u_2'(u_1 + i v_1) + i\left[v_1'(u_2 + i v_2) + v_2'(u_1 + i v_1)\right] \\
&= w_1' \cdot w_2 + w_2' \cdot w_1 .
\end{aligned}
$$

Los demás, ejercicio. //

Hay propiedades del análisis real que no valen, como por ejemplo, el teorema del valor medio:

Sea $w(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces:

$w(2\pi) - w(0) = 0$, pero $w'(t) = i e^{it} \neq 0 \ \forall t$.

Integral de una curva parametrizada: $w(t) = u(t) + i v(t)$,

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt .$$

Es decir:

$$\operatorname{Re} \int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} w(t)\,dt$$

$$\operatorname{Im} \int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im} w(t)\,dt$$

(siempre que existan).

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (1+it)^2\,dt &= \int_0^1 \left((1-t^2) + i\,2t\right) dt \\
&= \int_0^1 (1-t^2)\,dt + i \cdot \int_0^1 2t\,dt \\
&= t - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + i\ t^2\Big|_0^1 \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + i \cdot 1 = \frac{2}{3} + i . \ //
\end{aligned}
$$

Propiedades de la integral:

1) $\int_a^b (c\, w_1(t) + d\, w_2(t))\, dt = c \cdot \int_a^b w_1(t)\, dt + d \int_a^b w_2(t)\, dt \quad \forall c, d \in \mathbb{C}$.

2) $\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^c w(t)\, dt + \int_c^b w(t)\, dt$.

3) Si $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ es continua y $W : [a,b] \to \mathbb{C}$ satisface $W'(t) = w(t)\ \forall t$ entonces: $\int_a^b w(t)\, dt = W(b) - W(a)$.

4) $\left| \int_a^b w(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|\, dt$.

__Dem:__ (1), (2) y (3): ejercicio.

Veamos (4): Si $\int_a^b w(t)\, dt = 0$, vale.

Si $\int_a^b w(t)\, dt \neq 0$, lo escribimos en forma polar:

$$\int_a^b w(t)\, dt = r \cdot e^{i\theta}, \quad r > 0.$$

$$\Rightarrow \quad r = \int_a^b e^{-i\theta} w(t)\, dt \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \quad r = \mathrm{Re} \int_a^b e^{-i\theta} w(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} w(t)\right) dt$$

Pero: $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} w(t)\right) \leq |e^{-i\theta} w(t)| = |w(t)|$

$\therefore \quad r \leq \int_a^b |w(t)|\, dt$, es decir, $\left| \int_a^b w(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|\, dt$. //

__Ejemplo:__ $\int_0^{\pi/4} e^{it}\, dt = ?$

(i) $\int_0^{\pi/4} e^{it}\, dt = \int_0^{\pi/4} (\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t)\, dt$ (por definición)

$= \int_0^{\pi/4} \cos t\, dt + i \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\, t\, dt$

$= \mathrm{sen}\, t \Big|_0^{\pi/4} + i\, (-\cos t) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$.

(ii) buscando una primitiva de e^{it}.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{it}}{i}\right) = \frac{1}{i} \cdot e^{it} \cdot i = e^{it}.$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi/4} e^{it}\, dt \underset{\text{Barrow}}{=} \left.\frac{e^{it}}{i}\right|_0^{\pi/4} = \frac{1}{i}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i0}\right)$$

$$= -i\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Def: una curva parametrizada $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice **diferenciable** si $w'(t)$ existe y es continua en $[a,b]$, y además $w'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$.

Diremos que w es **diferenciable a trozos** si w es continua en $[a,b]$ y $\exists$ $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ tales que $w(t)$ es diferenciable en $[t_{k-1}, t_k]$.

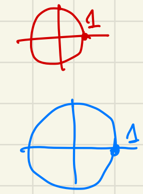
Def: dos curvas $w_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $w_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ se dicen <u>equivalentes</u> si $\exists$ $h : [c,d] \to [a,b]$ biyectiva, continuamente diferenciable y con $h'(t) > 0$ $\forall t$, tal que

$$w_2(t) = w_1(h(t)).$$

(la trayectoria es la misma, pero recorrida a otra velocidad).

Ejemplo: $w_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $w_1(t) = e^{it}$.

$w_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $w_2(t) = e^{2it}$,



son equivalentes, tomando $h(t) = 2t$.

La <u>longitud</u> de una curva diferenciable $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ es:

$$L(w) = \int_a^b |w'(t)|\, dt.$$

<u>Observación</u>: dos curvas equivalentes tienen la misma longitud.

<u>Dem</u>: $w_2(t) = w_1(h(t))$ con $h'(t) > 0 \Rightarrow w_2'(t) = w_1'(h(t)) \cdot h'(t)$.

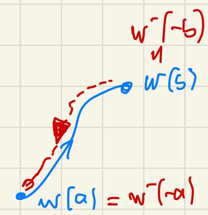
$$L(w_2) = \int_c^d |w_2'(t)|\, dt = \int_c^d |w_1'(h(t))| \cdot \overbrace{h'(t)}^{>0}\, dt$$

$u = h(t)$
$du = h'(t)\, dt$

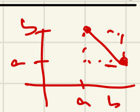
$$= \int_{h(c)}^{h(d)} |w_1'(u)| \cdot du = \int_a^b |w_1'(u)|\, du = L(w_1). \quad //$$

16/9.

<u>Pregunta</u>: Dada una curva $w : [a,b] \to \mathbb{C}$, ¿cómo hacemos para recorrerla en el sentido inverso?



<u>Solución</u>:



$$\begin{cases} \bullet\ w^- : [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{C}, & w^-(t) = w(-t) \\ \bullet\ w^- : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, & w^-(t) = w(a+b-t) \end{cases}$$

Una curva $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice <u>cerrada</u> si $w(a) = w(b)$.

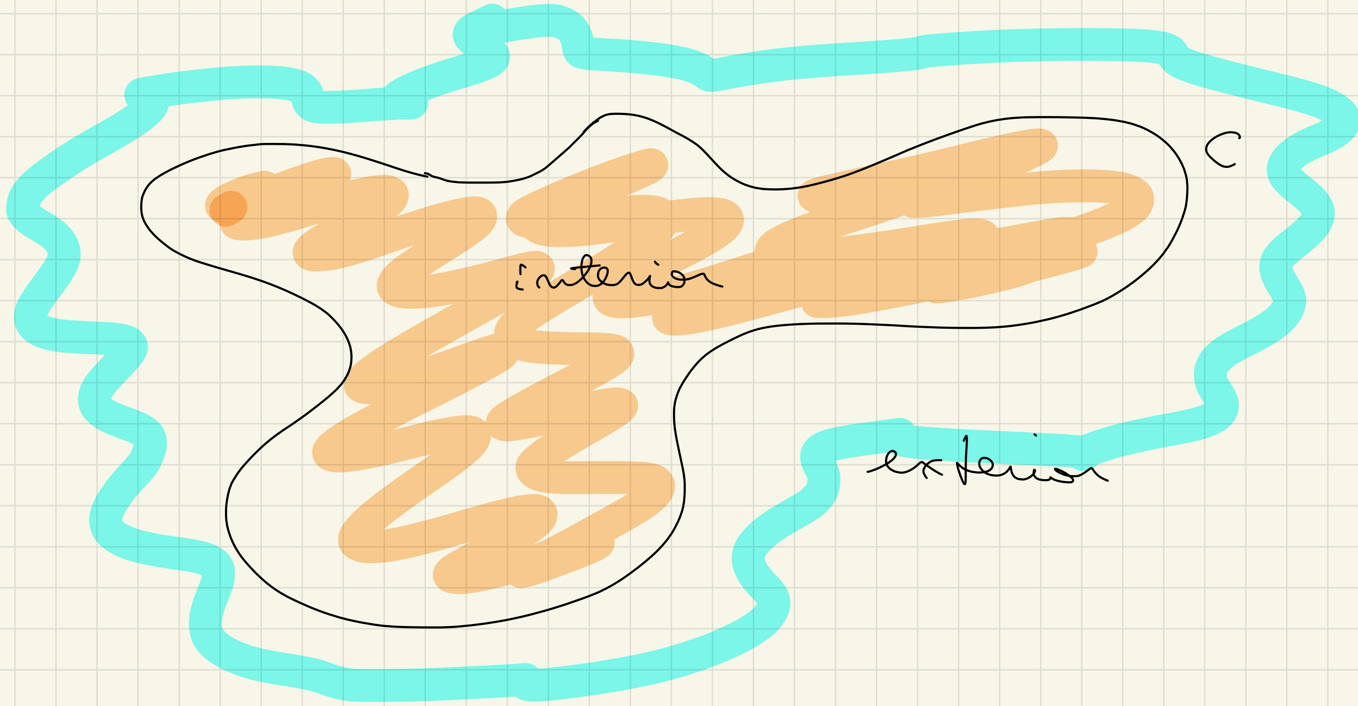
La curva es <u>simple</u> si no se corta, es decir, si:

$t_1 \neq t_2 \Rightarrow w(t_1) \neq w(t_2)$.

Una curva cerrada es <u>simple</u> si: $w(t_1) = w(t_2) \Rightarrow$

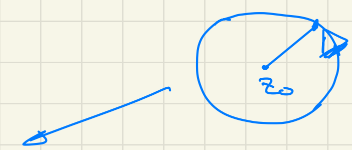
$\Rightarrow t_1 = t_2$ o $t_1 = a, t_2 = b$.

<u>Teorema de Jordan</u>: toda curva cerrada simple es la frontera de dos dominios del plano, uno acotado (el interior) y otro no acotado (el exterior).



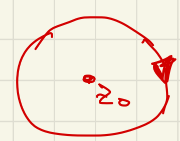
Ejemplo: ¿Cómo podemos parametrizar la circunferencia

$C_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$?



- En sentido antihorario (o positivo):

$$w(t) = z_0 + r \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

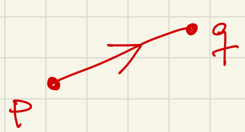


- En sentido horario (o negativo):

$$w(t) = z_0 + r \cdot e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Notar que: $w(t) = z_0 + r \cdot e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$, es otra parametrización de $C_r(z_0)$, donde se la recorre dos veces positivamente (no es simple).

Ejemplo: ¿Cómo parametrizar el segmento que une p con q?



$$w(t) = t(q-p) + p, \quad t \in [0,1].$$
$$= (1-t)p + tq$$

Integrales de línea.

Def: Sea C una curva en $\mathbb{C}$ parametrizada por $z:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ diferenciable a trozos, y sea f una función continua sobre C. Se define la integral de f a lo largo de C como:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt.$$

Observación: Si $z_1:[c,d]\to\mathbb{C}$ es una parametrización equivalente de C, entonces el valor de $\int_C f(z)\,dz$ no cambia.

En efecto: sea $h:[c,d]\to[a,b]$ biyectiva, cont. diferenciable con $h'(t)>0\ \forall t$ tal que $z_1(t)=z(h(t))$. $(\therefore z_1'(t)=z'(h(t))\cdot h'(t))$

Luego,

$$\int_c^d f(z_1(t))\cdot z_1'(t)\,dt = \int_c^d f(z(\underbrace{h(t)}_{u}))\cdot z'(\underbrace{h(t)}_{u})\cdot \underbrace{h'(t)\,dt}_{du}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=h(t)\\ du=h'(t)dt\end{array}}$$

$$= \int_a^b f(z(u))\cdot z'(u)\cdot du$$

//

Observación: Si C es una curva en $\mathbb{C}$, y $-C$ es la misma curva recorrida en sentido opuesto, entonces:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

Dem: sea $z:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ una parametrización de C (diferenciable). Entonces, $z^-:[a,b]\to\mathbb{C}$, $z^-(t)=z(a+b-t)$ es una parametrización de $-C$.

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_a^b f(z^{-}(t))\,(z^{-})'(t)\,dt$$

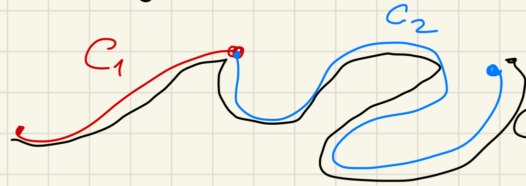
$$= \int_a^b f(z(\underbrace{a+b-t}_{u}))\cdot z'(\underbrace{a+b-t}_{u})\cdot \underbrace{(-1)\,dt}_{du}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = a+b-t \\ du = -dt \end{array}}$$

$$= \int_b^a f(z(u))\cdot z'(u)\,du$$

$$= -\int_a^b f(z(u))\cdot z'(u)\,du = -\int_C f(z)\,dz. \quad //$$

<u>Def:</u> sean C_1 y C_2 curvas en $\mathbb{C}$ tales que el punto final de C_1 coincide con el punto inicial de C_2. A la curva obtenida al recorrer primero C_1 y luego C_2 la denotaremos $C_1 + C_2$.



<u>Propiedad:</u> $$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

<u>Dem:</u> Sea $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ una parametrización de C_1+C_2. Luego, $\exists\, c\in(a,b)$ / $z|_{[a,c]}$ es una parametrización de C_1 y $z|_{[c,b]}$ es una parametrización de C_2. Entonces:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_a^c f(z(t))\cdot z'(t)\,dt + \int_c^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

$$= \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz. \quad //$$

<u>Propiedad:</u> $$\int_C (z_0 f(z) + z_1 g(z))\,dz = z_0\int_C f(z)\,dz + z_1\int_C g(z)\,dz.$$

(Ejercicio).

Propiedad: Si C es una curva de longitud L y $|f(z)| \leq M \ \forall z \in C$ entonces: $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq M \cdot L$.

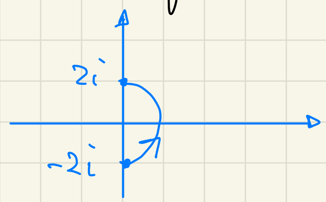
Dem: Sea $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de C. Entonces:

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{\leq M} \cdot |z'(t)|\,dt$$

$$\leq M \cdot \int_a^b |z'(t)|\,dt = M \cdot L. \quad //$$

→ ir a página siguiente

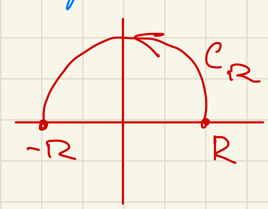
Ejemplo: Calcular $I = \int_C \bar{z}\,dz$, donde C es la mitad derecha de la circunferencia $|z|=2$, recorrida de $z=-2i$ a $z=2i$.



$z(t) = 2e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejemplo: sea C_R la semicircunferencia $z = R \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$, desde $z=R$ hasta $z=-R$, con $R>3$. Probar que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz = 0 \quad (\text{sin calcular la integral}).$$



Sea $z \in C_R$: $\quad |z+1| \leq |z|+1 = R+1$

$(|a-b| \geq ||a|-|b||) \longrightarrow \quad |z^2+4| \geq \left||z|^2-4\right| = R^2-4 > 0.$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ |z^2+9| \geq \left||z|^2-9\right| = R^2-9 > 0.$

$\therefore \left| \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)} \right| \leq \frac{R+1}{(R^2-4)(R^2-9)} := M_R$. Como $L(C_R) = \pi R$, vale:

$$\left| \int_{C_R} \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz \right| \leq \frac{\pi R(R+1)}{(R^2-4)(R^2-9)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

← volver.

Una parametrización de C es: $z(t)=2e^{it}$, $t\in[-\pi/2,\pi/2]$, con $z'(t)=2ie^{it}$. Entonces:

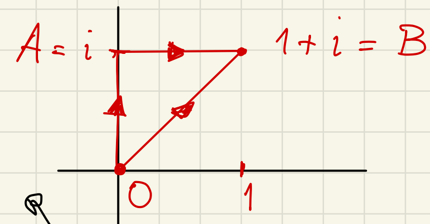
$$I=\int_C \bar{z}\,dz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\overline{2e^{it}}\cdot 2ie^{it}\,dt = 4i\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-it}e^{it}\,dt = 4i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{4\pi i}$$

(Notar que para $z\in C$, vale $z\bar{z}=4 \Rightarrow \bar{z}=\frac{4}{z} \Rightarrow \int_C \frac{dz}{z}=\pi i$).

Ejemplo: sean $O=$ cero, $A=i$, $B=1+i$, y sean:

$C_1=\overline{OA}+\overline{AB}$, $C_2=\overline{OB}$. Veamos que: $\int_{C_1}f(z)\,dz\neq\int_{C_2}f(z)\,dz$,

para $f(z)=y-x-i\cdot 3x^2$, $z=x+iy$.



Parametrización de $\overline{OA}$: $z_1(t)=it$, $t\in[0,1]$

" " $\overline{AB}$: $z_2(t)=(1-t)\cdot i+t(1+i)=t+i$

" " $\overline{OB}$: $z_3(t)=t(1+i)$, $t\in[0,1]$

Entonces: $\int_{C_1}f(z)\,dz=\int_{\overline{OA}}f(z)\,dz+\int_{\overline{AB}}f(z)\,dz$

$\boxed{f(z)=y-x-i3x^2 \quad (z=x+iy)}$

$\left[\begin{array}{l}u_x=v_y\,,\ -1\neq 0\\ u_y=-v_x\end{array}\right.$

$$=\int_0^1 f(z_1(t))\,z_1'(t)\,dt+\int_0^1 f(z_2(t))\,z_2'(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 t\cdot i\,dt+\int_0^1(1-t-i3t^2)\,dt$$

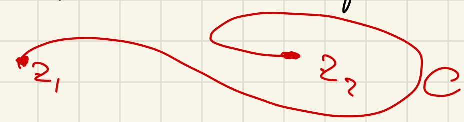
$$=i\cdot\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

y: $\int_{C_2}f(z)\,dz=\int_0^1 f'(z_3(t))\,z_3'(t)\,dt=\int_0^1 -i\cdot 3t^2\cdot(1+i)\,dt$

$$=-i(1+i)=1-i.$$

$\therefore\ \int_{C_1}f(z)\,dz\neq\int_{C_2}f(z)\,dz \longrightarrow$ la integral depende de la curva elegida para unir los dos puntos extremos.

Ejemplo: sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fijos y C un arco que los une. Veamos ahora que $\int_C z\, dz$ no depende de la curva C que une z_1 con z_2.



En efecto, sea $I = \int_C z\, dz$, y sea $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de C. Entonces:

$$I = \int_a^b z(t) \cdot z'(t)\, dt.$$

"$u = z(t)$
$du = z'(t)\, dt$"

Notemos que: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z(t)^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot z(t) \cdot z'(t) = z(t) \cdot z'(t)$.

$$\therefore\ I = \left.\frac{z(t)^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{2}\left(z(b)^2 - z(a)^2\right) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 - z_1^2\right) \to \text{independiente de } C.$$

Más adelante veremos por qué.

Definición: si f es una función continua en un dominio D (= abierto conexo), una primitiva de f es una función F (necesariamente analítica) que satisface: $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$.

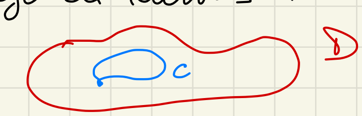
Ejercicio: probar que si F y G son primitivas de f en D, entonces $\exists\, c \in \mathbb{C} \ /\ G(z) = F(z) + c \quad \forall z \in D$. (se usa conexo.)

Teorema: Sea $f : D \to \mathbb{C}$ continua, con D un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f tiene una primitiva F en D,

b) las integrales de f a lo largo de curvas contenidas en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor,

c) las integrales de f a lo largo de curvas cerradas contenidas en D valen siempre 0.



$\int_C f(z)\, dz = 0$

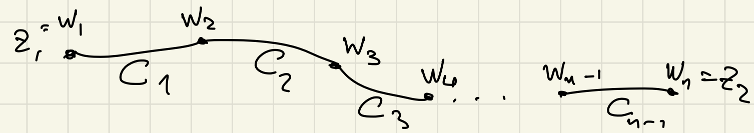
Dem: a) $\Rightarrow$ b) Sea C una curva diferenciable (contenida en D) que une z_1 con z_2, parametrizada por $z:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Entonces: $\frac{d}{dt}\left(F(z(t))\right) = F'(z(t))\cdot z'(t) = f(z(t))\cdot z'(t)$.

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = F(z(t))\Big|_a^b = F(z_2)-F(z_1).$$

$\downarrow$ no depende de C.

Si C es diferenciable a trozos:



$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{C_k} f(z)\,dz$$

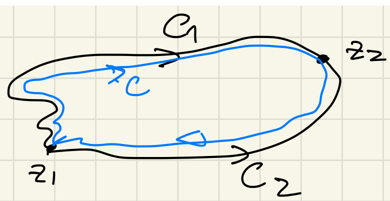
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[F(w_{k+1})-F(w_k)\right] = F(w_n)-F(w_1) = F(z_2)-F(z_1)$$ ✓

por lo visto arriba

$$F(\cancel{w_2}) - F(w_1) + F(\cancel{w_3}) - F(\cancel{w_2}) + \dots + F(w_n) - F(\cancel{w_{n-1}})$$

$$F(w_4) - F(\cancel{w_3})$$

b) $\Rightarrow$ c).



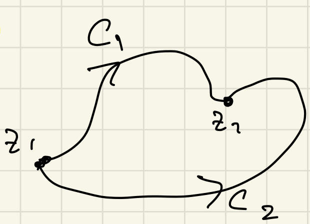
lazo = C.

lo parto en 2 con z_2: C_1 y C_2 (van de z_1 a z_2)

$\therefore C = C_1 + (-C_2)$.

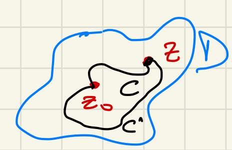
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz \underset{b)}{=} 0$$ ✓

c) $\Rightarrow$ b)



$\therefore C = C_1 + (-C_2)$ es una curva cerrada.

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



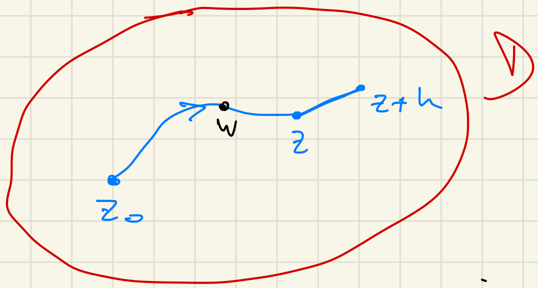
b) $\Rightarrow$ a) Fijemos $z_0 \in D$ y para $z\in D$ se define: $F(z) = \int_C f(w)\,dw$, donde C es cualquier curva diferenciable a trozos de z_0 a z.

F está bien definida por (b).

Queremos ver que $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in D$. Sea $h \in \mathbb{C}$ / el segmento de z a $z+h$ está contenido en D.

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(w)\,dw - \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = \underbrace{\int_{z}^{z+h}}_{} f(w)\,dw.$$

a lo largo del segmento que une z con $z+h$.



Podemos escribir:

$$f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\,dw \left(= \frac{1}{h} \cdot f(z) \cdot \underbrace{\int_{z}^{z+h} dw}_{=h} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} \left(f(w) - f(z) \right) dw$$

Como f es continua en z, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que:

$|w - z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Luego, si $|h| < \delta$:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

$\forall \varepsilon > 0$. , o sea: $F'(z) = f(z)$. //.

Notación: cuando la integral no depende del camino utilizado para unir z_1 con z_2, escribiremos simplemente $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

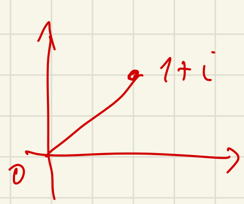
Ejemplo: $f(z) = z^2$ tiene primitiva $F(z) = \frac{z^3}{3}$ en todo $\mathbb{C}$.

Luego: $$\int_0^{1+i} z^2\,dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3\right)$$

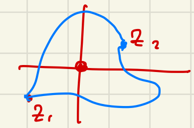
$$= \frac{1}{3}\left(1 + 3i - 3 - i\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2 + 2i\right)$$

para cualquier camino de 0 a $1+i$.



Ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z^2}$ tiene primitiva $F(z) = -\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.



Luego, para $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, se tiene:

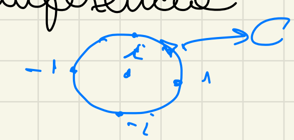
$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = -\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}$$

, para todo camino de z_1 a z_2 que no pase por $z = 0$.

En particular, $\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$, cuando C es la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, recorrida positivamente.

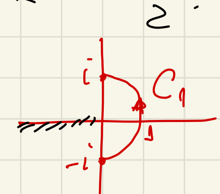
Notemos que no se puede calcular $\int_C \frac{dz}{z}$, con la misma C, usando el mismo método. En efecto, no existe una primitiva de $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ (log es continua y analítica sólo cuando quitamos una semirrecta saliendo de 0).

Ejemplo: calculemos $\int_C \frac{dz}{z}$ donde C es la circunferencia unidad recorrida positivamente.



1) Sea C_1 la mitad derecha de C: $z = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Entonces $\operatorname{Log} z$ es una primitiva de $\frac{1}{z}$, y entonces:



$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log} z \Big|_{-i}^{i} = \operatorname{Log}(i) - \operatorname{Log}(-i) =$$

$$= \log 1 + i\frac{\pi}{2} - \left(\log 1 - i\frac{\pi}{2}\right) = \pi i.$$

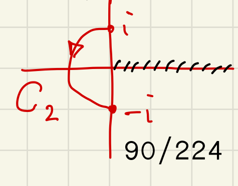
$(C_1 \subseteq \operatorname{Dom}(\operatorname{Log}))$

2) Sea C_2 la mitad izquierda de C: $z = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Aquí podemos considerar la rama del logaritmo:

$$\log z = \log r + i\theta, \quad \text{con } r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

que es una primitiva de $\frac{1}{z}$. Entonces:



$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{i}^{-i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{i}^{-i} = \log(-i) - \log(i)$$

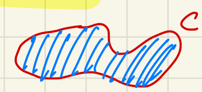
$$= \log 1 + i\,\frac{3\pi}{2} - \left(\log 1 + i\,\frac{\pi}{2}\right) = \pi i.$$

$$\therefore \quad \int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{dz}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

Teorema de Cauchy-Goursat.

Este teorema nos dará otras condiciones para asegurar que $\int_C f(z)\,dz = 0$ donde f es continua y C una curva cerrada simple.

Supongamos que C está parametrizada por $z(t)$, $t \in [a,b]$, recorrida positivamente, y asumamos que f es analítica en todos los puntos de C y sus puntos interiores.



Entonces: $\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$

Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, entonces:

$$f(z(t)) \cdot z'(t) = \big(u(x(t),y(t)) + i\,v(x(t),y(t))\big) \cdot \big(x'(t) + i\,y'(t)\big),$$

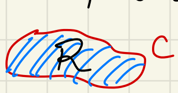
y así:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b (u \cdot x' - v y')\,dt + i \int_a^b (u y' + v x')\,dt$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i \int_C (v\,dx + u\,dy) \quad \left(\text{integrales de línea en } \mathbb{R}^2\right)$$

Recordemos el Teorema de Green: si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son de clase C^1 en la región R formada por C y sus puntos interiores, entonces:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$



Entonces, si f' es continua en R entonces podemos usar Green y se tiene:

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_R (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i \iint_R (u_x - v_y)\,dx\,dy.$$

Pero, por Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$\therefore$ $\boxed{\int_C f(z)\,dz = 0}$ si f es analítica y f' es continua en R.

Además, $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz = 0$ $\therefore$ no importa la orientación.

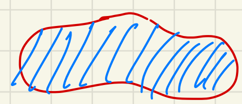
Esto fue probado por Cauchy. Pero luego, Goursat probó que la hipótesis de f' continua puede ser omitida.

Entonces tenemos:

Teorema de Cauchy-Goursat:

Sea C una curva cerrada simple y f una función analítica sobre C y en todos los puntos interiores a C. Entonces:

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \quad (S/D).$$



R

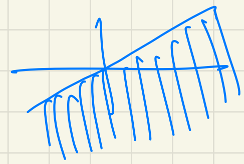
Ejemplo: $\int_C \operatorname{sen}(z^2)\,dz = 0$ para toda curva cerrada simple C en $\mathbb{C}$, pues $\operatorname{sen}(z^2)$ es una función entera.

Definición: un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ se dice simplemente conexo si toda curva cerrada simple contenida en D encierra sólo puntos de D. Si un dominio no es simplemente conexo, se dice múltiplemente conexo.

D

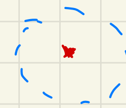
<u>Ejemplos</u>: Son simplemente conexos:

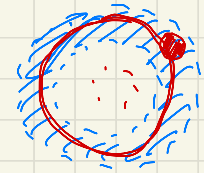
- un disco $B_r(z_0)$,
- $\mathbb{C}$,
- un semiplano abierto.



No son simplemente conexos:

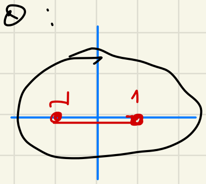
- un disco punteado: $B_r(z_0) - \{z_0\}$,
- un anillo: $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$,

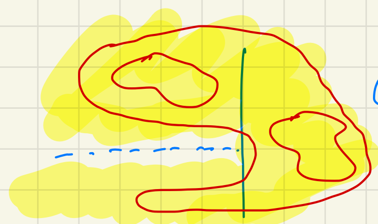




El teorema de Cauchy-Goursat sigue valiendo para curvas cerradas no simples cuando estamos en un dominio simplemente conexo:

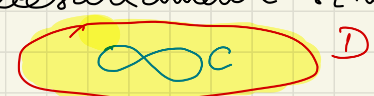
$\mathbb{C} - [-1, 1]$: no simp-conexo





$\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$. sí es simp-conexo

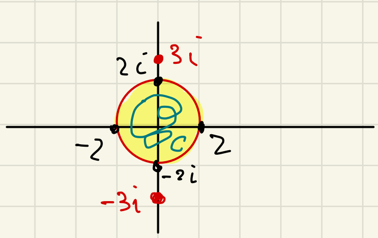
<u>Teorema</u>: Si $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y D es un dominio simplemente conexo, entonces $\int_C f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en D (no necesariamente simple)



5/10

<u>Ejemplo</u>: Si C denota cualquier curva cerrada en el disco $B_2(0)$, entonces $\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5}\,dz = 0$.

En efecto, $B_2(0)$ es simplemente conexo y la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5}$ tiene singularidades $z = \pm 3i$, que están afuera del disco $\therefore$ $f(z)$ es analítica en $B_2(0)$.



$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5} \to$ singularidades en $\pm 3i$.

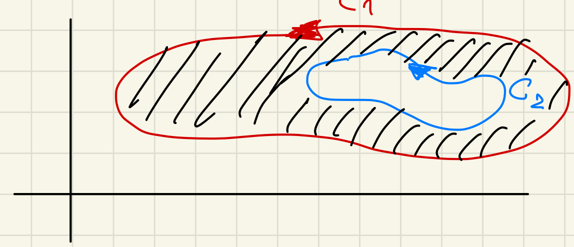
Corolario: toda función analítica $f: D \to \mathbb{C}$ con D dominio simplemente conexo admite primitiva en D.

Dem: consecuencia del teorema sobre primitivas. //

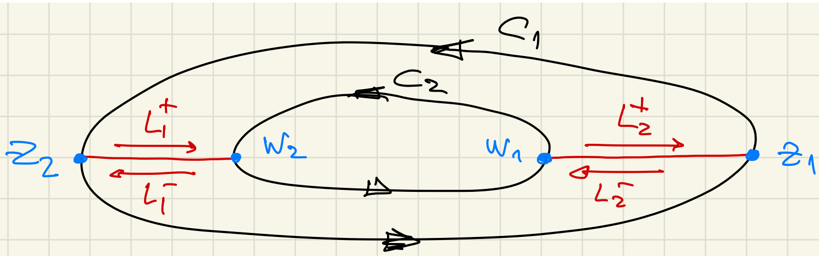
En particular, como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, toda función entera admite primitiva.

Corolario: Sean C_1 y C_2 curvas cerradas simples, positivamente orientadas, donde C_2 es interior a C_1. Si la función f es analítica en la región cerrada acotada por estas curvas, entonces:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



Dem:



C_1^+, C_2^+

C_1^-, C_2^-

Sean $\gamma_1 = C_1^+ \text{ (de } z_1 \text{ a } z_2) + L_1^+ \text{ (de } z_2 \text{ a } w_2) + (-C_2^+) \text{ (de } w_2 \text{ a } w_1) + L_2^+ \text{ (de } w_1 \text{ a } z_1)$

$\gamma_2 = L_2^- \text{ (de } z_1 \text{ a } w_1) + (-C_2^-) \text{ (de } w_1 \text{ a } w_2) + L_1^- \text{ (de } w_2 \text{ a } z_2) + C_1^- \text{ (de } z_2 \text{ a } z_1)$.

γ_1 y γ_2 son curvas cerradas simples $\therefore$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1^+} f(z)\,dz + \cancel{\int_{L_1^+} f(z)\,dz} - \int_{C_2^+} f(z)\,dz + \cancel{\int_{L_2^+} f(z)\,dz} = 0.$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \cancel{\int_{L_2^-} f(z)\,dz} - \int_{C_2^-} f(z)\,dz + \cancel{\int_{L_1^-} f(z)\,dz} + \int_{C_1^-} f(z)\,dz = 0$$

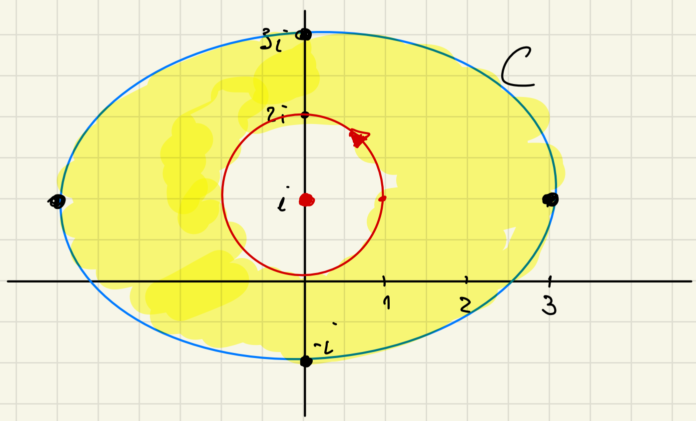
Sumando:

Sumando: $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$.

Este corolario se conoce como el **principio de deformación de caminos**

Ejemplo: calcular $\int_C \frac{dz}{z-i}$, donde C es la elipse

$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, positivamente orientada.



$f(z) = \frac{1}{z-i} \to$ singularidad en $z=i$.

Sea C_1 la circunferencia: $z = i + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Por el princ. de deformación de caminos:

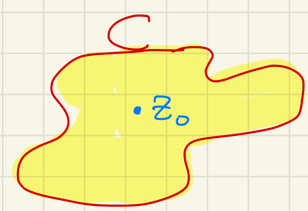
$$\int_C \frac{dz}{z-i} = \int_{C_1} \frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{i}+e^{i\theta}\cancel{-i}}\, i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i.$$

La fórmula integral de Cauchy.

Teorema: Sea f analítica en el interior y en los puntos de una curva cerrada simple C, orientada positivamente. Si z_0 es un punto interior a C, entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

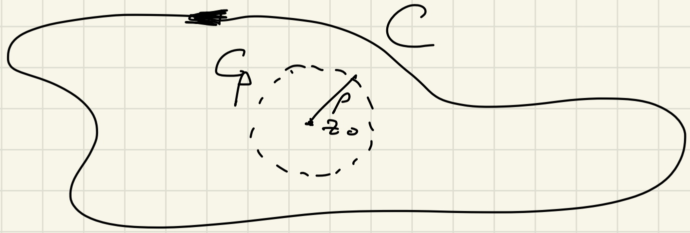


Esta expresión se conoce como la **fórmula integral de Cauchy**. Establece que los valores de f en el interior de C quedan determinados por los valores de f sobre C.

Dem: Sea z_0 interior a C.

1) f analítica en $z_0 \Rightarrow f$ continua en z_0. Luego, dado un $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0 \,/\; |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

2) Elegimos $\rho>0$ tal que: $\rho<\delta$ y la circunferencia $C_\rho := \{ z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0| = \rho\}$ esté contenida en el interior de C.



3) $\displaystyle\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ (ejercicio).

4) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$ por principio de deformación de caminos.

Con todo esto, podemos calcular:

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - f(z_0)\cdot 2\pi i \right| = \left| \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - f(z_0)\cdot \int_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_0} \right|$$

$$= \left| \int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right|$$

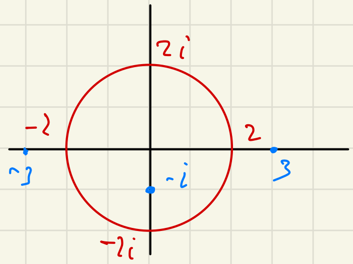
$$\leq \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot \ell(C_\rho) \qquad \left(\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \quad \forall z\in C_\rho \right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Vale $\forall \varepsilon>0$ $\therefore$ $$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0).}$$ //

Podemos usar la fórmula integral de Cauchy para calcular el valor de ciertas integrales.

Ejemplos: 1) Sea C la circunferencia $|z| = 2$, positivamente orientada. Calcular $\int_C f(z)\,dz$, donde $f(z) = \underbrace{\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}}_{\text{Singularidades en: } \pm 3 \text{ y } -i}$.



Podemos escribir:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}, \quad g(z) = \frac{z}{9-z^2}.$$

$z_0 = -i$.

$$= 2\pi i \cdot g(-i)$$

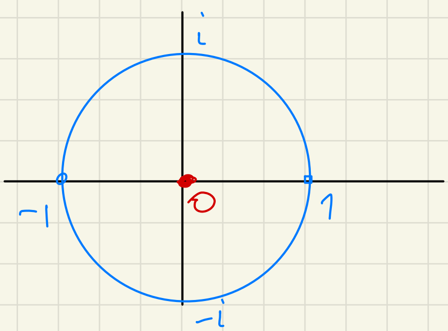
$$= 2\pi i \cdot \frac{-i}{9-(-1)}$$

$$= \frac{\pi}{5}.$$

$$\int_C \frac{z}{z^2+1}\,dz = \int_C \frac{z}{(z-i)(z+i)}\,dz$$

$$\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}$$

2) Sea C la circunferencia $|z|=1$, positivamente orientada. Calcular $\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz$, donde $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+9}$



$\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ con $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+9}$

$$\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_C \frac{\frac{\cos z}{z^2+9}}{z-0}\,dz$$

$$= 2\pi i \cdot f(0)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\pi i}{9}.$$

Extensión de la fórmula integral de Cauchy:

<u>Teorema</u>: Con las mismas hipótesis anteriores, vale:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw. \qquad (S/D)$$

Más generalmente, por inducción se prueba:

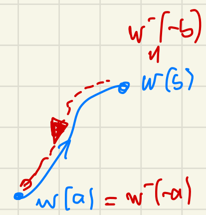
$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

<u>Ejemplo</u>: Sea C la circunferencia $|z| = 1$ y $f(z) = \exp(2z)$, entonces:

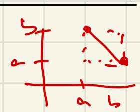
$$\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-0)^{3+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{2\pi i}{3!} \cdot 8 = \frac{8\pi i}{3}$$

$\left(f'(z) = 2\exp(2z),\ f''(z) = 4\exp(2z),\ f'''(z) = 8\exp(2z) \right)$

<u>Pregunta</u>: Dada una curva $w : [a,b] \to \mathbb{C}$, ¿cómo hacemos para recorrerla en el sentido inverso?



<u>Solución</u>:



$$\begin{cases} \bullet\ w^- : [-b, -a] \to \mathbb{C}, & w^-(t) = w(-t) \\ \bullet\ w^- : [a, b] \to \mathbb{C}, & w^-(t) = w(a+b-t) \end{cases}$$

Una curva $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice <u>cerrada</u> si $w(a) = w(b)$.

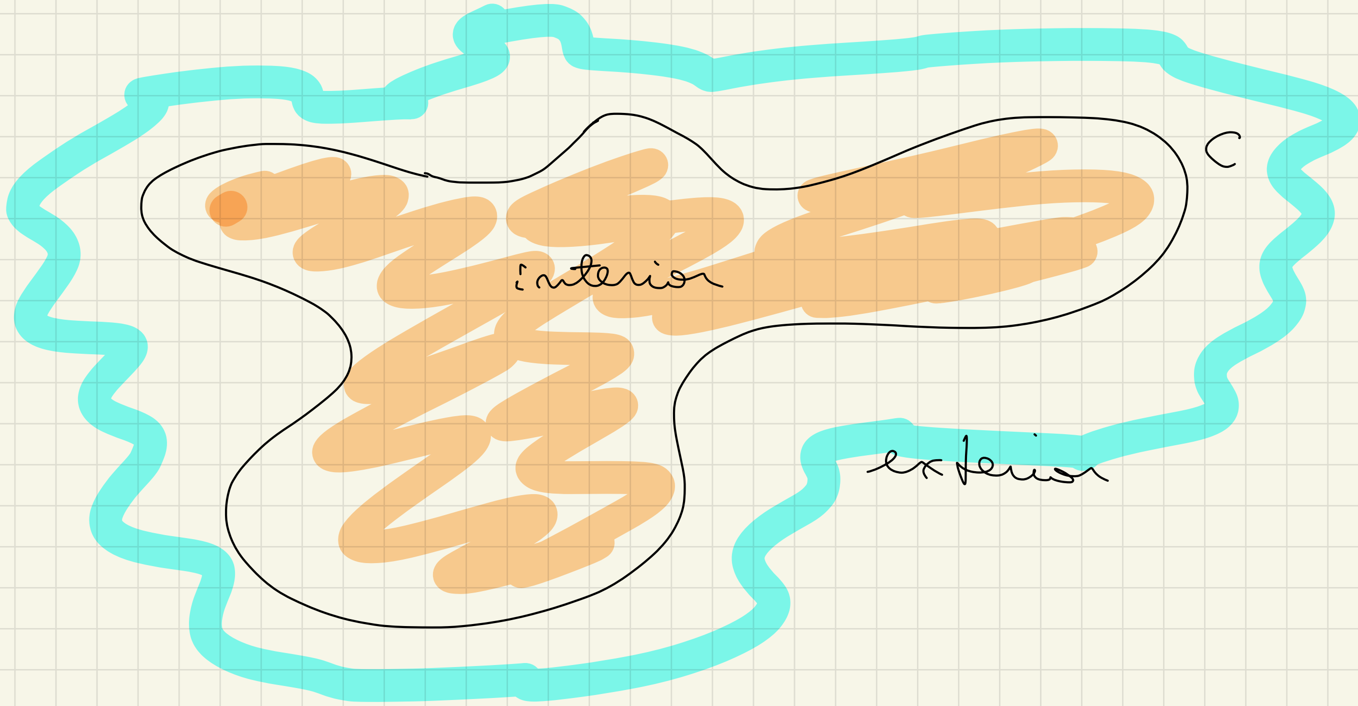
La curva es <u>simple</u> si no se corta, es decir, si:

$t_1 \neq t_2 \Rightarrow w(t_1) \neq w(t_2)$.

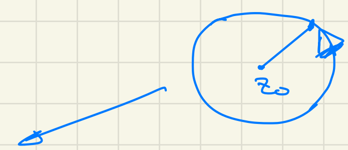
Una curva cerrada es <u>simple</u> si: $w(t_1) = w(t_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad t_1 = t_2$ o $t_1 = a,\ t_2 = b$.

<u>Teorema de Jordan</u>: toda curva cerrada simple es la frontera de dos dominios del plano, uno acotado (el interior) y otro no acotado (el exterior).

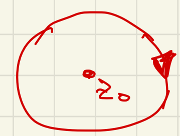


<u>Ejemplo</u>: ¿Cómo podemos parametrizar la circunferencia $C_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$?



- En sentido antihorario (o positivo):

$$w(t) = z_0 + r \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

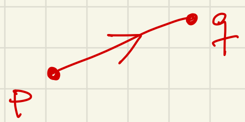


- En sentido horario (o negativo):

$$w(t) = z_0 + r \cdot e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Notar que: $w(t) = z_0 + r \cdot e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$, es otra parametrización de $C_r(z_0)$, donde se la recorre dos veces positivamente (no es simple).

<u>Ejemplo</u>: ¿Cómo parametrizar el segmento que une p con q?



$$w(t) = t(q-p) + p, \quad t \in [0,1].$$
$$= (1-t)p + tq$$

Integrales de línea.

Def: Sea C una curva en $\mathbb{C}$ parametrizada por $z:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciable a trozos, y sea f una función continua sobre C. Se define la integral de f a lo largo de C como:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)).\,z'(t)\,dt.$$

Observación: Si $z_1:[c,d]\to \mathbb{C}$ es una parametrización equivalente de C, entonces el valor de $\int_C f(z)\,dz$ no cambia.

En efecto: sea $h:[c,d]\to[a,b]$ biyectiva, cont. diferenciable con $h'(t)>0\ \forall t$ tal que $z_1(t)=z(h(t))$. $\left(\therefore z_1'(t)=z'(h(t))\cdot h'(t)\right)$

Luego,

$$\int_c^d f(z_1(t)).\,z_1'(t)\,dt = \int_c^d f(z(\underbrace{h(t)}_{u})).\,z'(\underbrace{h(t)}_{u}).\,\underbrace{h'(t)\,dt}_{du}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=h(t)\\ du=h'(t)dt\end{array}}$$

$$= \int_a^b f(z(u)).\,z'(u).\,du$$

//

Observación: Si C es una curva en $\mathbb{C}$, y $-C$ es la misma curva recorrida en sentido opuesto, entonces:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

Dem: sea $z:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ una parametrización de C (diferenciable). Entonces, $z^-:[a,b]\to\mathbb{C}$, $z^-(t)=z(a+b-t)$ es una parametrización de $-C$.

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_a^b f(z^{-}(t))\,(z^{-})'(t)\,dt$$

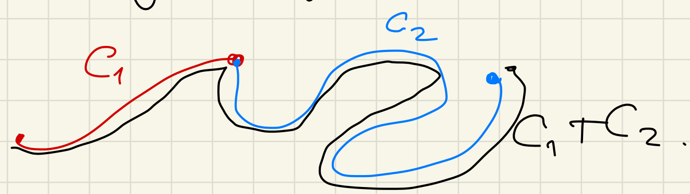
$$= \int_a^b f(z(\underbrace{a+b-t}_{u}))\cdot z'(\underbrace{a+b-t}_{u})\cdot \underbrace{(-1)\,dt}_{du}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = a+b-t \\ du = -dt \end{array}}$$

$$= \int_b^a f(z(u))\cdot z'(u)\,du$$

$$= -\int_a^b f(z(u))\cdot z'(u)\,du = -\int_C f(z)\,dz. \quad //$$

<u>Def</u>: Sean C_1 y C_2 curvas en $\mathbb{C}$ tales que el punto final de C_1 coincide con el punto inicial de C_2. A la curva obtenida al recorrer primero C_1 y luego C_2 la denotaremos $C_1 + C_2$.



<u>Propiedad</u>: $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

<u>Dem</u>: Sea $z:[a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de C_1+C_2. Luego, $\exists\, c \in (a,b)$ / $z|_{[a,c]}$ es una parametrización de C_1 y $z|_{[c,b]}$ es una parametrización de C_2. Entonces:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_a^c f(z(t))\cdot z'(t)\,dt + \int_c^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$$

$$= \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz. \quad //$$

<u>Propiedad</u>: $\displaystyle\int_C (z_0 f(z) + z_1 g(z))\,dz = z_0 \int_C f(z)\,dz + z_1 \int_C g(z)\,dz.$

(Ejercicio).

Propiedad: Si C es una curva de longitud L y $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in C$ entonces: $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq M \cdot L$.

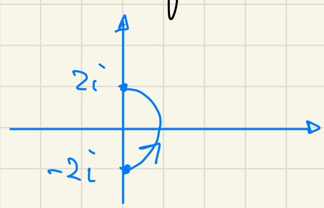
Dem: Sea $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de C. Entonces:

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{\leq M} \cdot |z'(t)|\,dt$$

$$\leq M \cdot \int_a^b |z'(t)|\,dt = M \cdot L. \quad //$$

→ ir a página siguiente

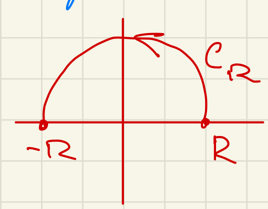
Ejemplo: Calcular $I = \int_C \bar{z}\,dz$, donde C es la mitad derecha de la circunferencia $|z| = 2$, recorrida de $z = -2i$ a $z = 2i$.



$z(t) = 2e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejemplo: sea C_R la semicircunferencia $z = R \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$, desde $z = R$ hasta $z = -R$, con $R > 3$. Probar que:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz = 0 \quad \text{(sin calcular la integral)}.$$



Sea $z \in C_R$: $\quad |z+1| \leq |z| + 1 = R + 1$

$(|a-b| \geq ||a| - |b||) \longrightarrow |z^2+4| \geq ||z|^2 - 4| = R^2 - 4 > 0$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad |z^2+9| \geq ||z|^2 - 9| = R^2 - 9 > 0$.

$\therefore \left| \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)} \right| \leq \frac{R+1}{(R^2-4)(R^2-9)} := M_R$. Como $L(C_R) = \pi R$, vale:

$$\left| \int_{C_R} \frac{z+1}{(z^2+4)(z^2+9)}\,dz \right| \leq \frac{\pi R (R+1)}{(R^2-4)(R^2-9)} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

← volver.

Una parametrización de C es: $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, con $z'(t) = 2ie^{it}$. Entonces:

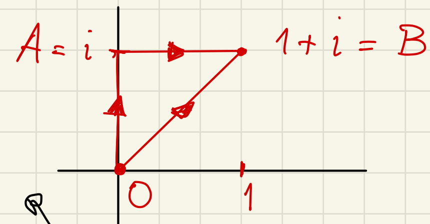
$$I = \int_C \bar{z}\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{2e^{it}} \cdot 2ie^{it}\,dt = 4i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-it}e^{it}\,dt = 4i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{4\pi i}$$

(Notar que para $z \in C$, vale $z\bar{z} = 4 \Rightarrow \bar{z} = \frac{4}{z} \Rightarrow \int_C \frac{dz}{z} = \pi i$).

Ejemplo: sean O = cero, $A = i$, $B = 1+i$, y sean:

$C_1 = \overline{OA} + \overline{AB}$, $C_2 = \overline{OB}$. Veamos que: $\int_{C_1} f(z)\,dz \neq \int_{C_2} f(z)\,dz$,

para $f(z) = y - x - i\cdot 3x^2$, $z = x+iy$.



Parametrización de $\overline{OA}$: $z_1(t) = it$, $t \in [0,1]$

" " $\overline{AB}$: $z_2(t) = (1-t)\cdot i + t(1+i) = t+i$

" " $\overline{OB}$: $z_3(t) = t(1+i)$, $t \in [0,1]$

Entonces: $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{\overline{OA}} f(z)\,dz + \int_{\overline{AB}} f(z)\,dz$

$$= \int_0^1 f(z_1(t))\,z_1'(t)\,dt + \int_0^1 f(z_2(t))\,z_2'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot i\,dt + \int_0^1 (1 - t - i\,3t^2)\,dt$$

$$= i\cdot\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$f(z) = y - x - i\,3x^2$ ($z = x+iy$)

$\left[\begin{array}{l} u_x = v_y, \ -1 \neq 0 \\ u_y = -v_x \end{array}\right.$

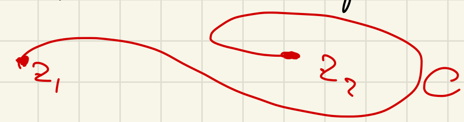
y: $\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^1 f'(z_3(t))\,z_3'(t)\,dt = \int_0^1 -i\cdot 3t^2\cdot(1+i)\,dt$

$$= -i(1+i) = 1 - i.$$

$\therefore$ $\int_{C_1} f(z)\,dz \neq \int_{C_2} f(z)\,dz$ $\longrightarrow$ la integral depende de la curva elegida para unir los dos puntos extremos.

Ejemplo: sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fijos y C un arco que los une.

Veamos ahora que $\int_C z\, dz$ no depende de la curva C que une z_1 con z_2.



En efecto, sea $I = \int_C z\, dz$, y sea $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de C. Entonces:

$$I = \int_a^b z(t) \cdot z'(t)\, dt .$$

"$u = z(t)$
$du = z'(t)\, dt$"

Notemos que: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z(t)^2}{2} \right) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot z(t) \cdot z'(t) = z(t) \cdot z'(t)$.

$$\therefore\ I = \left. \frac{z(t)^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{2}\left(z(b)^2 - z(a)^2\right) = \frac{1}{2}\left(z_2^2 - z_1^2\right) \to \text{independiente de } C.$$

Más adelante veremos por qué.

Definición: si f es una función continua en un dominio D (= abierto conexo), una primitiva de f es una función F (necesariamente analítica) que satisface: $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$.

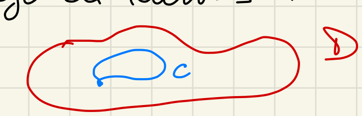
Ejercicio: probar que si F y G son primitivas de f en D, entonces $\exists\, c \in \mathbb{C} \ /\ G(z) = F(z) + c \quad \forall z \in D$. (se usa conexo.)

Teorema: Sea $f : D \to \mathbb{C}$ continua, con D un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f tiene una primitiva F en D,

b) las integrales de f a lo largo de curvas contenidas en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor,

c) las integrales de f a lo largo de curvas cerradas contenidas en D valen siempre 0.



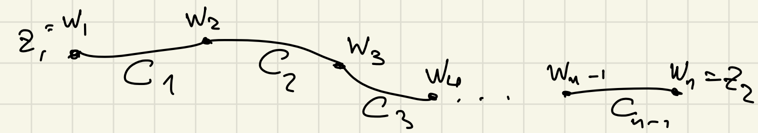
$\int_C f(z)\, dz = 0$

Dem: a) $\Rightarrow$ b) Sea C una curva diferenciable que une z_1 con z_2, parametrizada por $z:[a,b] \to \mathbb{C}$.

Entonces: $\dfrac{d}{dt}\Big(F(z(t))\Big) = F'(z(t)) \cdot z'(t) = f(z(t)) \cdot z'(t)$.

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = F(z(t))\Big|_a^b = \underbrace{F(z_2) - F(z_1)}_{\text{no depende de } C}.$$

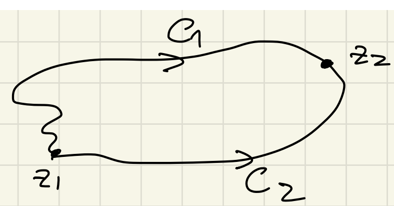
Si C es diferenciable a trozos:



$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{C_k} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \big[F(w_k) - F(w_{k-1}) \big] = F(w_n) - F(w_1) = F(z_2) - F(z_1)$$

b) $\Rightarrow$ c).



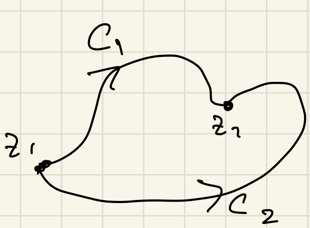
lazo $= C$.

lo parto en 2 con z_2: C_1 y C_2.

$\therefore\ C = C_1 + (-C_2)$.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz \underset{a)}{=} 0$$

c) $\Rightarrow$ b)



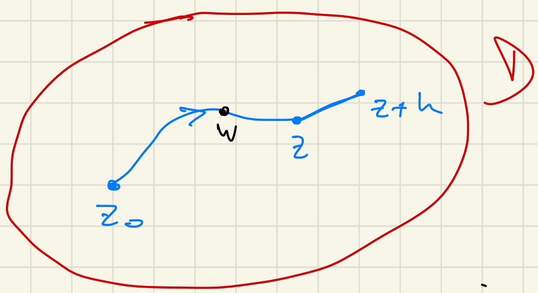
$\therefore\ C = C_1 + (-C_2)$ es una curva cerrada.

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

b) $\Rightarrow$ a) Fijemos $z_0 \in D$ y para $z \in D$ se define: $F(z) = \int_C f(w)\,dw$, donde C es cualquier curva diferenciable a trozos de z_0 a z.

Queremos ver que $F'(z) = f(z) \ \forall z \in D$. Sea $h \in \mathbb{C}$ / el segmento de z a $z+h$ está contenido en D.

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(w)\,dw - \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = \int_{z}^{z+h} f(w)\,dw.$$



Podemos escribir:

$$f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,dw$$

$$\therefore \quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \left(f(w) - f(z)\right) dw$$

Como f es continua en z, dado $\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0$ tal que:

$$|w - z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon. \qquad \text{Luego, si } |h| < \delta:$$

$$\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{h}\cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

o sea: $F'(z) = f(z)$. //.

<u>Notación</u>: cuando la integral no depende del camino utilizado para unir z_1 con z_2, escribiremos simplemente $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

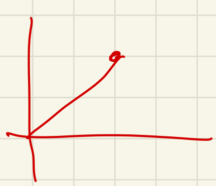
<u>Ejemplo</u>: $f(z) = z^2$ tiene primitiva $F(z) = \frac{z^3}{3}$ en todo $\mathbb{C}$.

Luego:
$$\int_0^{1+i} z^2\,dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 + i^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 3i - 3 - i\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2 + 2i\right)$$

para cualquier camino de 0 a $1+i$.



Definición: si f es una función continua en un dominio D = abierto convexo, una **primitiva** de f es una función F (necesariamente analítica) que satisface: $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in D$.

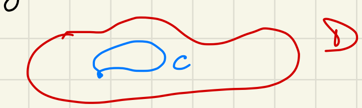
Ejercicio: probar que si F y G son primitivas de f en D, entonces $\exists c \in \mathbb{C}$ / $G(z) = F(z) + c$ $\forall z \in D$. ← se usa convexo.

Teorema: Sea $f: D \to \mathbb{C}$ continua, con D un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f tiene una primitiva F en D,

b) las integrales de f a lo largo de curvas contenidas en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor,

c) las integrales de f a lo largo de curvas cerradas contenidas en D valen siempre 0.



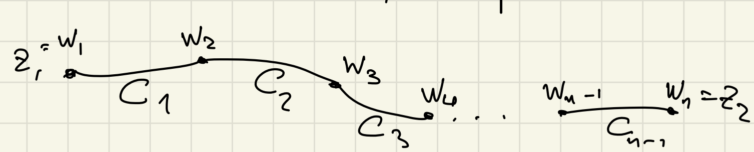
$\int_C f(z)\,dz = 0$.

Dem: a) $\Rightarrow$ b) Sea C una curva diferenciable (contenida en D) que une z_1 con z_2, parametrizada por $z: [a,b] \to \mathbb{C}$.

Entonces: $\dfrac{d}{dt}\Big(F(z(t))\Big) = F'(z(t)) \cdot z'(t) = f(z(t)) \cdot z'(t)$.

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = F(z(t))\Big|_a^b = \underbrace{F(z_2) - F(z_1)}_{\text{no depende de } C}.$$

Si C es diferenciable a trozos:



$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{C_k} f(z)\,dz$$

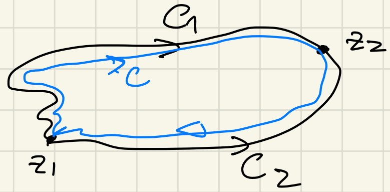
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \Big[F(w_{k+1}) - F(w_k)\Big] = F(w_n) - F(w_1) = F(z_2) - F(z_1).$$

por lo visto arriba

$\cancel{F(w_2)} - F(w_1) + \cancel{F(w_3)} - \cancel{F(w_2)} + \ldots + F(w_n) - \cancel{F(w_{n-1})}$

$F(w_4) - \cancel{F(w_3)}$

b) ⇒ c)



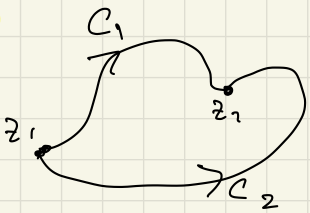
lazo $= \underline{C}$.

lo parto en 2 con z_2: C_1 y C_2 (van de z_1 a z_2)

$\therefore\ C = C_1 + (-C_2)$.

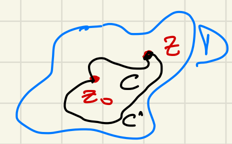
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz \underset{b)}{=} 0 \quad ✓$$

c) ⇒ b)



$\therefore\ C = C_1 + (-C_2)$ es una curva cerrada.

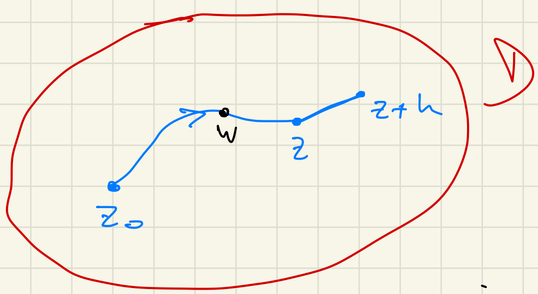
$$\int_C f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



b) ⇒ a) Fijemos $z_0 \in D$ y para $z \in D$ se define: $F(z) = \int_C f(w)\,dw$, donde C es cualquier curva diferenciable a trozos de z_0 a z. F está bien definida por (b).

Queremos ver que $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in D$. Sea $h \in \mathbb{C}$ / el segmento de z a $z+h$ está contenido en D.

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(w)\,dw - \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = \underbrace{\int_z^{z+h}}_{\text{a lo largo del segmento que une } z \text{ con } z+h} f(w)\,dw.$$



Podemos escribir:

$$f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,dw \left(= \frac{1}{h}\cdot f(z)\cdot \underbrace{\int_z^{z+h} dw}_{=h} \right)$$

$$\therefore\ \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(w) - f(z))\,dw$$

Como f es continua en z, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$|w - z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Luego, si $|h| < \delta$:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{h}\cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

, o: $F'(z) = f(z)$.

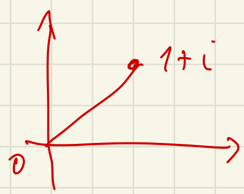
Notación: cuando la integral no depende del camino utilizado para unir z_1 con z_2, escribiremos simplemente $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

Ejemplo: $f(z) = z^2$ tiene primitiva $F(z) = \frac{z^3}{3}$ en todo $\mathbb{C}$.

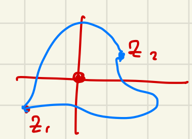
Luego: $\int_0^{1+i} z^2\,dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 + i^3\right)$

$$= \frac{1}{3}(1 + 3i - 3 - i)$$

$$= \frac{1}{3}(-2 + 2i)$$ para cualquier camino de 0 a $1+i$.



Ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z^2}$ tiene primitiva $F(z) = -\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.



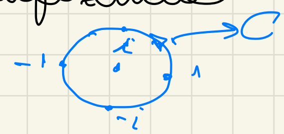
Luego, para $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, se tiene:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\left.\frac{1}{z}\right|_{z_1}^{z_2} = -\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1},$$ para todo camino de z_1 a z_2 que no pase por $z = 0$.

En particular, $\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$, cuando C es la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, recorrida positivamente.

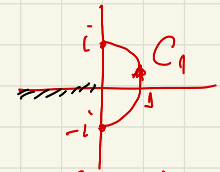
Notemos que no se puede calcular $\int_C \frac{dz}{z}$, con la misma C, usando el mismo método. En efecto, no existe una primitiva de $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ (log es continua y analítica sólo cuando quitamos una semirrecta saliendo de 0).

Ejemplo: calculemos $\int_C \frac{dz}{z}$ donde C es la circunferencia unidad recorrida positivamente.



1) Sea C_1 la mitad derecha de C: $z = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Entonces $\operatorname{Log} z$ es una primitiva de $\frac{1}{z}$, y entonces:



$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log} z \Big|_{-i}^{i} = \operatorname{Log}(i) - \operatorname{Log}(-i) =$$

$$= \log 1 + i\frac{\pi}{2} - \left(\log 1 - i\frac{\pi}{2}\right) = \pi i.$$

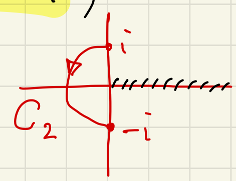
$(C_1 \subseteq \operatorname{Dom}(\operatorname{Log}))$

2) Sea C_2 la mitad izquierda de C: $z = e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Aquí podemos considerar la rama del logaritmo:

$$\log z = \log r + i\theta, \quad \text{con } r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

que es una primitiva de $\frac{1}{z}$. Entonces:



$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{i}^{-i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{i}^{-i} = \log(-i) - \log(i)$$

$$= \log 1 + i\frac{3\pi}{2} - \left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \pi i.$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{dz}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

Teorema de Cauchy-Goursat.

Este teorema nos dará otras condiciones para asegurar que $\int_C f(z)\,dz = 0$ donde f es continua y C una curva cerrada simple.

Supongamos que C está parametrizada por $z(t)$, $t \in [a,b]$, recorrida positivamente, y asumamos que f es analítica en todos los puntos de C y sus puntos interiores.

Entonces: $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt$

Si $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ y $z(t)=x(t)+i\,y(t)$, entonces:

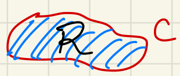
$$f(z(t))\cdot z'(t) = \big(u(x(t),y(t))+i\,v(x(t),y(t))\big)\cdot\big(x'(t)+i\,y'(t)\big),$$

y así:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b (u\cdot x' - v y')\,dt + i\int_a^b (u y' + v x')\,dt$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$ (integrales de línea en $\mathbb{R}^2$)

Recordemos el Teorema de Green: si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son de clase C^1 en la región R formada por C y sus puntos interiores, entonces: $\displaystyle\int_C P\,dx+Q\,dy = \iint_R (Q_x-P_y)\,dx\,dy$.



Entonces, si f' es continua en R entonces podemos usar Green y se tiene:

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_R (-v_x-u_y)\,dx\,dy + i\iint_R (u_x-v_y)\,dx\,dy.$$

Pero, por Cauchy-Riemann: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$

$\therefore$ $\boxed{\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0}$ si f es analítica y f' es continua en R.

Además, $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz = 0$ $\therefore$ no importa la orientación.

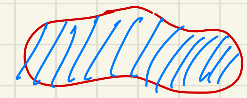
Esto fue probado por Cauchy. Pero luego, Goursat probó que la hipótesis de f' continua puede ser omitida.

Entonces tenemos:

Teorema de Cauchy-Goursat:

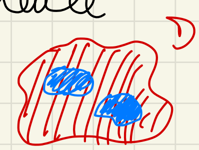
Sea C una curva cerrada simple y f una función analítica sobre C y en todos los puntos interiores a C. Entonces:

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \qquad (S/D).$$



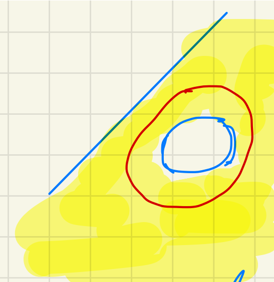
<u>Ejemplo</u>: $\int_C \operatorname{sen}(z^2)\,dz = 0$ para toda curva cerrada simple C en $\mathbb{C}$, pues $\operatorname{sen}(z^2)$ es una función entera.

<u>Definición</u>: un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ se dice **simplemente conexo** si toda curva cerrada simple contenida en D encierra sólo puntos de D. Si un dominio no es simplemente conexo, se dice múltiplemente conexo.

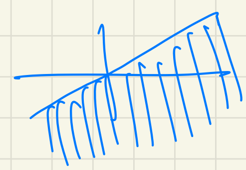


<u>Ejemplos</u>: Son simplemente conexos:

- un disco $B_r(z_0)$,
- $\mathbb{C}$,
- un semiplano abierto.

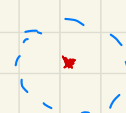


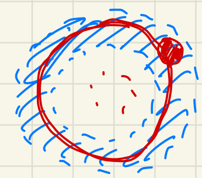
no simpl-conexo



No son simplemente conexos:

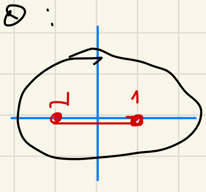
- un disco punteado: $B_r(z_0)-\{z_0\}$,
- un anillo: $\{z\in\mathbb{C} \mid r_1<|z|<r_2\}$,

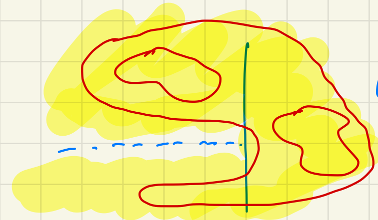




El teorema de Cauchy-Goursat sigue valiendo para curvas cerradas no simples cuando estamos en un dominio simplemente conexo:

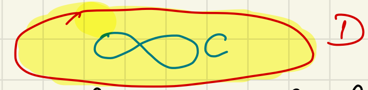
$\mathbb{C}-[-1,1]$:
no simp-conexo





$\mathbb{C}-\{z\in\mathbb{R} \mid z\le 0\}$.
sí es simp-conexo

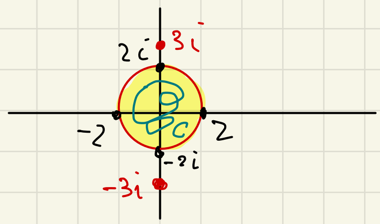
Teorema: Si $f: D \to \mathbb{C}$ es analítica y D es un dominio simplemente conexo, entonces $\int_C f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en D (no necesariamente simple)



5/10

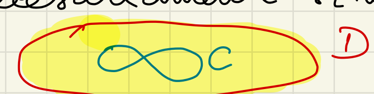
Ejemplo: Si C denota cualquier curva cerrada en el disco $B_2(0)$, entonces $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5}\,dz = 0$.

En efecto, $B_2(0)$ es simplemente conexo y la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5}$ tiene singularidades $z = \pm 3i$, que están afuera del disco $\therefore$ $f(z)$ es analítica en $B_2(0)$.



$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5} \to$ singularidades en $\pm 3i$.

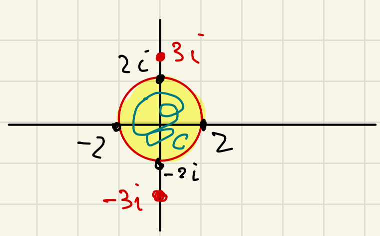
Teorema: Si $f: D \to \mathbb{C}$ es analítica y D es un dominio simplemente conexo, entonces $\int_C f(z)\,dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en D (no necesariamente simple)



5/10

Ejemplo: Si C denota cualquier curva cerrada en el disco $B_2(0)$, entonces $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5}\,dz = 0$.

En efecto, $B_2(0)$ es simplemente conexo y la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5}$ tiene singularidades $z = \pm 3i$, que están afuera del disco $\therefore$ $f(z)$ es analítica en $B_2(0)$.



$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2+9)^5} \to$ singularidades en $\pm 3i$.

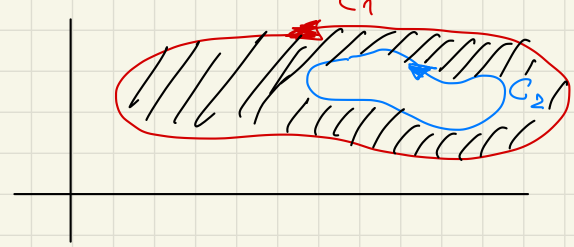
<u>Corolario</u>: toda función analítica $f: D \to \mathbb{C}$ con D dominio simplemente conexo admite primitiva en D.

<u>Dem</u>: consecuencia del teorema sobre primitivas. //

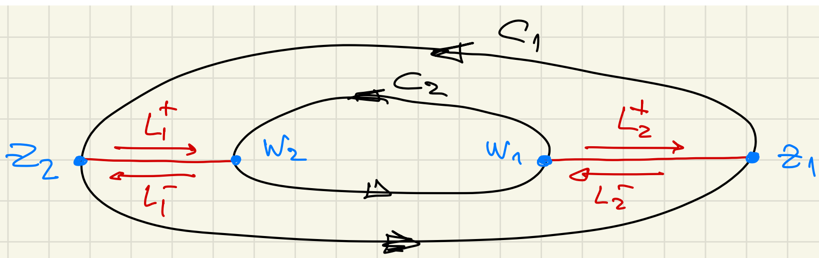
En particular, como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, toda función entera admite primitiva.

<u>Corolario</u>: Sean C_1 y C_2 curvas cerradas simples, positivamente orientadas, donde C_2 es interior a C_1. Si la función f es analítica en la región cerrada acotada por estas curvas, entonces:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$



<u>Dem</u>:



↺ $C_1^+,\ C_2^+$

↻ $C_1^-,\ C_2^-$

Sean $\gamma_1 = C_1^+$ (de z_1 a z_2) $+ L_1^+$ (de z_2 a w_2) $+ (-C_2^+)$ (de w_2 a w_1) $+ L_2^+$ (de w_1 a z_1)

$\gamma_2 = L_2^-$ (de z_1 a w_1) $+ (-C_2^-)$ (de w_1 a w_2) $+ L_1^-$ (de w_2 a z_2) $+ C_1^-$ (de z_2 a z_1).

γ_1 y γ_2 son curvas cerradas simples $\therefore$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1^+} f(z)\,dz + \cancel{\int_{L_1^+} f(z)\,dz} - \int_{C_2^+} f(z)\,dz + \cancel{\int_{L_2^+} f(z)\,dz} = 0.$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \cancel{\int_{L_2^-} f(z)\,dz} - \int_{C_2^-} f(z)\,dz + \cancel{\int_{L_1^-} f(z)\,dz} + \int_{C_1^-} f(z)\,dz = 0$$

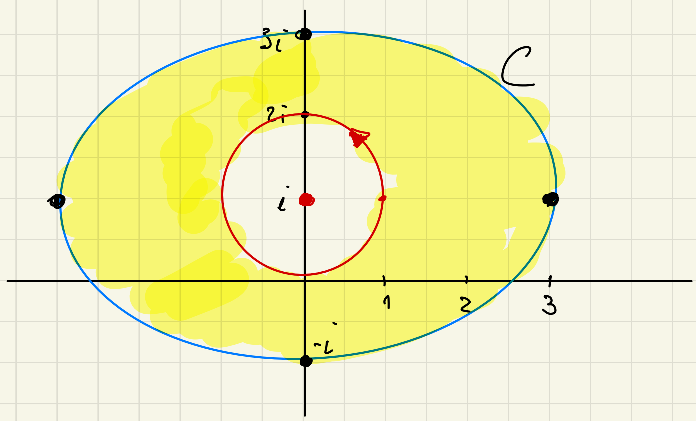
Sumando:

Sumando: $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$.

Este corolario se conoce como el principio de deformación de caminos.

Ejemplo: calcular $\int_C \frac{dz}{z-i}$, donde C es la elipse

$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$, positivamente orientada.



$f(z)=\frac{1}{z-i} \rightarrow$ singularidad en $z=i$.

Sea C_1 la circunferencia: $z=i+e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$

Por el princ. de deformación de caminos:

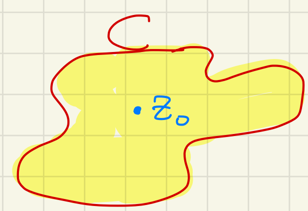
$$\int_C \frac{dz}{z-i} = \int_{C_1}\frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\cancel{i}+e^{i\theta}\cancel{-i}}\, ie^{i\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i.$$

La fórmula integral de Cauchy.

Teorema: Sea f analítica en el interior y en los puntos de una curva cerrada simple C, orientada positivamente. Si z_0 es un punto interior a C, entonces:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

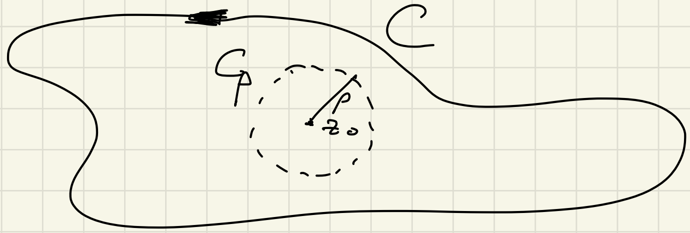


Esta expresión se conoce como la fórmula integral de Cauchy. Establece que los valores de f en el interior de C quedan determinados por los valores de f sobre C.

Dem: Sea z_0 interior a C.

1) f analítica en $z_0 \Rightarrow f$ continua en z_0. Luego, dado un $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 /$ $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

2) Elegimos $\rho > 0$ tal que: $\rho < \delta$ y la circunferencia $C_\rho := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho \}$ esté contenida en el interior de C.



3) $$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad \text{(ejercicio)}.$$

4) $$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$ por principio de deformación de caminos.

Con todo esto, podemos calcular:

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \cdot 2\pi i \right| = \left| \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \cdot \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} \right|$$

$$= \left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right|$$

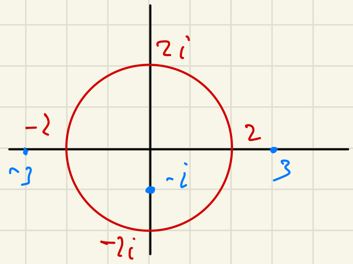
$$\leq \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \ell(C_\rho) \qquad \left(\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \quad \forall z \in C_\rho \right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Vale $\forall \varepsilon > 0$ $\therefore$ $$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0).}$$ //

Podemos usar la fórmula integral de Cauchy para calcular el valor de ciertas integrales.

Ejemplos: 1) Sea C la circunferencia $|z| = 2$, positivamente orientada. Calcular $\int_C f(z)\,dz$, donde $f(z) = \underbrace{\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}}_{\text{Singularidades en: } \pm 3 \text{ y } -i}$.



Podemos escribir:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}, \quad g(z) = \frac{z}{9-z^2}.$$

$z_0 = -i$.

$$= 2\pi i \cdot g(-i)$$

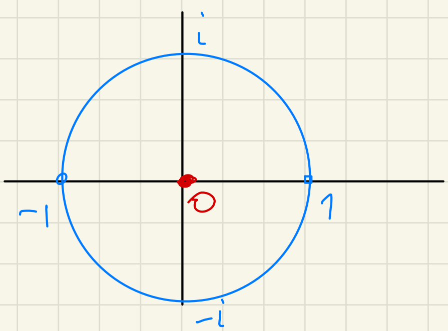
$$= 2\pi i \cdot \frac{-i}{9-(-1)}$$

$$= \frac{\pi}{5}.$$

$$\int_C \frac{z}{z^2+1}\,dz = \int_C \frac{z}{(z-i)(z+i)}\,dz$$

$$\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}$$

2) Sea C la circunferencia $|z|=1$, positivamente orientada. Calcular $\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz$, donde $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+9}$



$\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz$ con $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+9}$

$$\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz = \int_C \frac{\frac{\cos z}{z^2+9}}{z-0}\,dz$$

$$= 2\pi i \cdot f(0)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{9} = \frac{2\pi i}{9}.$$

Extensión de la fórmula integral de Cauchy:

Teorema: Con las mismas hipótesis anteriores, vale:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw. \qquad (S/D)$$

Más generalmente, por inducción se prueba:

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw \quad , \; n = 0,1,2,\dots}$$

Ejemplo: Sea C la circunferencia $|z|=1$ y $f(z)=\exp(2z)$, entonces:

$$\int_C \frac{\exp(2z)}{z^4}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-0)^{3+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{2\pi i}{3!} \cdot 8 = \frac{8\pi i}{3}$$

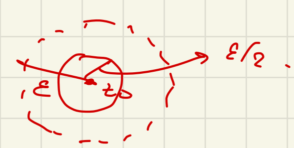
$\left(f'(z) = 2\exp(2z),\ f''(z) = 4\exp(2z),\ f'''(z) = 8\exp(2z) \right)$

Consecuencias:

Teorema: Si una función f es analítica en un punto dado, entonces sus derivadas $f^{(n)}$ de todos los órdenes son también analíticas en ese punto.

Dem: Si f es analítica en z_0, entonces $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que f es analítica en $B_\varepsilon(z_0)$. Si $C_0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \frac{\varepsilon}{2} \}$, entonces f es analítica en C_0 y en todos sus puntos interiores. Sabemos que:

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{(w-z)^3}\, dw \quad \forall z \in B_{\varepsilon/2}(z_0).$$



Como $\exists\, f''(z) = (f')'(z)\ \forall z \in B_{\varepsilon/2}(z_0)$, esto nos asegura que f' es analítica en z_0. Como f' es analítica, resulta f'' analítica, y así... //

Corolario: Si una función $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica en un punto $z=x+iy$, entonces u y v tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en z.

f analítica $\Rightarrow$

Dem: f' analítica $\Rightarrow f'$ continua, y $f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y$

$\therefore$ u_x, v_x, u_y, v_y continuas. $\rightarrow$ u, v son C^1.

f'' analítica $\Rightarrow f''$ continua, y $f''=u_{xx}+iv_{xx}=v_{yx}-iu_{yy}$

$\therefore$ derivadas de segundo orden continuas. $\rightarrow$ u y v son C^2.

Y así sucesivamente. //

Teorema (de Morera): Sea $f: D\to\mathbb{C}$ continua, con D un dominio. Si $\int_C f(z)\,dz=0$ para toda curva cerrada en D, entonces f es analítica.

Dem: La hipótesis asegura que f tiene una primitiva en D, es decir, $\exists$ F analítica en D / $F'=f$. Como f es la derivada de F, resulta que f es analítica. //

Dem: La hipótesis asegura que f tiene una primitiva en D, es decir, $\exists\, F$ analítica en D / $F' = f$. Como f es la derivada de F, resulta que f es analítica //

7/10

Desigualdad de Cauchy.

Sea f analítica en $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$, y sea C_R la circunferencia $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$, recorrido en sentido positivo. Si $|f(z)| \leq M_R \quad \forall z \in C_R$, entonces:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!\, M_R}{R^n}.$$

En particular, para $n = 1$, $\quad |f'(z_0)| \leq \dfrac{M_R}{R}$.

Dem: Por la fórmula integral de Cauchy, sabemos que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Pero: $\quad \left| \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| \leq \dfrac{M_R}{R^{n+1}} \quad \forall z \in C_R$

$$\begin{aligned} \therefore \quad |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot \underbrace{2\pi R}_{\text{longitud de } C_R} \\ &= \frac{n! \cdot M_R}{R^n} \quad // \end{aligned}$$

Esta desigualdad tiene consecuencias importantes.

Teorema de Liouville:

Si f es entera y acotada en $\mathbb{C}$ entonces f es constante.

Dem: f acotada en $\mathbb{C} \Rightarrow \exists M>0 / \quad |f(z)| \leq M \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Fijemos un $z_0 \in \mathbb{C}$. Como f es entera, resulta que f es analítica en $\overline{B_R(z_0)}$ $\forall R>0$, y entonces, por la desigualdad de Cauchy:

$$0 \leq |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \quad \forall R>0.$$

Haciendo $R \to +\infty$, obtenemos que $f'(z_0)=0$. Como $z_0 \in \mathbb{C}$ es arbitrario, resulta $f' \equiv 0$.

$\mathbb{C}$ conexo $\Rightarrow$ f = constante. //

Polinomios:

$p \in \mathbb{R}[x] = \{$ polinomios c/ coef. en $\mathbb{R}\}$

- $p(x) = ax^2+bx+c$, ¿cuándo se anula?

$\Delta := b^2-4ac$: discriminante.

- Si $\Delta > 0 \rightarrow$ hay dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0 \rightarrow$ hay una raíz real doble.
- Si $\Delta < 0 \rightarrow$ no se anula en $\mathbb{R}$ (hay raíces complejas conjugadas).

- $q(x) = ax^3+bx^2+cx+d \in \mathbb{R}[x]$, ¿cuándo se anula?

Todo polinomio cúbico (o de grado impar) posee al menos una raíz.

$\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} q(x) = -\infty$

$\Rightarrow q$ es suryectivo.

En general, si x_1 es una raíz de algún $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ entonces: $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$

$$p(x) = a_n (x - x_1) \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{podría o no tener raíces reales.}}$$

$$p(x) = x^4 - 1$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$
$$= (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{no se factoriza más en } \mathbb{R}.}$$

Teorema Fundamental del Álgebra:

Todo polinomio no constante P con coeficientes en $\mathbb{C}$ posee al menos una raíz (es decir, $\exists z_0 \in \mathbb{C} / p(z_0) = 0$).

Dem: Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Supongamos por el absurdo que $p(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Luego, la función $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ está definida y es analítica en todo $\mathbb{C}$.

1º etapa

Probaremos a continuación que f es acotada.

2º etapa.

En efecto, sea $r(z) = \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |z|^j$. Podemos escribir:

$$a_n z^n = p(z) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j \implies |a_n||z|^n \leq |p(z)| + \left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\right| \leq |p(z)| + r(z).$$

Para $|z| \geq 1$ y $j < n$ se tiene: $|z|^j \leq |z|^{n-1}$

$$\therefore \quad r(z) \leq \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \right)}_{=:S} \cdot |z|^{n-1} = S \cdot |z|^{n-1}.$$

Sea ahora $R = \max\left\{ 1, \dfrac{2S}{|a_n|} \right\}$ y $z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \geq R$.

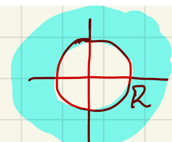
Luego, vale que: $r(z) \leq S \cdot |z|^{n-1}$ y $|z| \geq \dfrac{2S}{|a_n|}$ $\therefore$ $S \leq \dfrac{|a_n|}{2} |z|$.

$$\Longrightarrow r(z) \leq \frac{|a_n|}{2} \cdot |z|^n.$$

Así:
$$|a_n| \, |z|^n \leq |p(z)| + r(z) \leq |p(z)| + \frac{|a_n|}{2} |z|^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} \cdot |z|^n, \quad \text{para } |z| \geq R.}$$

Luego: $|f(z)| \leq \dfrac{2}{|a_n|} \cdot \dfrac{1}{|z|^n} \leq \dfrac{2}{|a_n| \cdot R^n}$, $\quad |z| \geq R$.



Esto dice que f es acotada en $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R \}$.

Pero f es continua en $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R \}$ $\therefore$ f es acotada en este disco. Luego, f es acotada en $\mathbb{C}$.

3º etapa

Por Teorema de Liouville, resulta $f \equiv cte$, o sea, $p(z) = cte$, ABS.

Luego, $\exists z_0 \in \mathbb{C} \,/\, p(z_0) = 0$. //

Corolario: todo polinomio p con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado $n \geq 1$ se puede factorizar como:
$$p(z) = a_n (z - z_1) \cdots (z - z_n), \quad z_i \in \mathbb{C}.$$

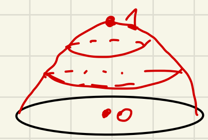
Además, un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces.

Principio del módulo máximo:

Aceptaremos sin demostración el siguiente resultado:

Teorema: si $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y no constante, donde D es un abierto conexo, entonces $|f(z)|$ no alcanza un valor máximo en D. Es decir, $\nexists\ z_0 \in D$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall z \in D$.

Notar la diferencia con funciones diferenciables de variables reales. Por ejemplo: $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, definida en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x,y)| < 1\}$, tiene $|f(x,y)|$ máximo en $(x,y) = (0,0)$.

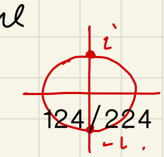


Corolario: Sea $R \subseteq \mathbb{C}$ una región cerrada y acotada. Si $f : R \to \mathbb{C}$ es continua y es analítica no constante en el interior de R, entonces el valor máximo de $|f(z)|$ se alcanza en un punto de ∂R, y nunca en su interior.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1 - z^2$. Determinar el valor máximo de $|f(z)|$ en el disco cerrado $\overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Por el corolario, sabemos que el máximo de $|f(z)|$ se alcanza en $C := \partial \overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

$\underset{(z \in C)}{|f(z)|} = |1 - z^2| \leq 1 + |z|^2 = 2$, y para $z = \pm i$ se tiene $|f(\pm i)| = |1 - (-1)| = 2$ $\therefore$ el máximo se alcanza en $\pm i$.



1) $f(z) = 1 - z^2$ en $B_1(0)$ (bola abierta).

Se satisface $|f(z)| \leq 2 \quad \forall z \in B_1(0)$

pero nunca $|f(z)| = 2$ (con $z \in B_1(0)$).

2) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ en $B_1(0)$ (no es continua en $\overline{B_1(0)}$).

$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\frac{2n-1}{n^2}}$$

$$= \frac{n^2}{2n-1}$$

$\left|f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \therefore \quad f$ no está acotada en $B_1(0)$

Capítulo 5: Series de potencias.

Una serie infinita de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a $S \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n\to\infty} S_N = S$, donde $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$. Escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

Por lo visto para sucesiones, vale que: si escribimos $z_n = x_n + i y_n$, $S = X + iY$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

Corolario: Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Dem: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen. Como son series reales, sabemos que: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Luego, $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. //

Definición: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

Vale que: absolutamente convergente $\Rightarrow$ convergente (ejercicio).

Definición: una serie de potencias es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, donde a_n $(n \geq 0)$ y z_0 son constantes complejas.

Ejemplo: Probemos que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ si $|z|<1$.

Sea $S_N = 1 + z + z^2 + \dots + z^N$.

$\Rightarrow \quad z \cdot S_N = z + z^2 + z^3 + \dots + z^{N+1}$.

Restando: $\quad (1-z) S_N = 1 - z^{N+1} \Rightarrow \boxed{S_N = \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}}$

$$S_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{N+1}}{1-z}. \text{ Y: } \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| = \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

(pues $|z|<1$)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Notar que si $|z|>1$ entonces $|z|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

si $|z|=1$ $\Rightarrow |z|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\therefore \quad z^n$ no converge a 0 y así $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ diverge $(|z|\geq 1)$.

Teorema de Taylor: Sea f analítica en $B_{R_0}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R_0\}$. Entonces f admite la representación en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in B_{R_0}(z_0), \text{ donde}$$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \geq 0$. Es decir, esta serie converge a $f(z)$ $\forall z \in B_{R_0}(z_0)$.

$$S_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{N+1}}{1-z} \quad \text{y:} \quad \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| = \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

(pues $|z|<1$)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

si $|z|=1$
$\Rightarrow |z|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Notar que si $|z|>1$ entonces $|z|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

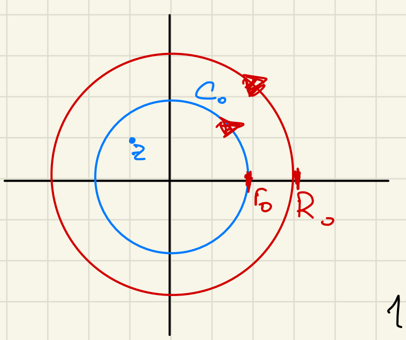
$\therefore$ z^n no converge a 0 y así $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ diverge ($|z|\geq 1$).

<u>Teorema de Taylor</u>: Sea f analítica en $B_{R_0}(z_0)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<R_0\}$.
Entonces f admite la representación en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in B_{R_0}(z_0), \text{ donde}$$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n\geq 0$. Es decir, esta serie converge a $f(z)$ $\forall z\in B_{R_0}(z_0)$.

<u>Dem</u>: consideremos primero el caso $z_0=0$.
Sean $z\in B_{R_0}(0)$ y $r_0>0$ / $|z|<r_0<R_0$. Sea C_0 la circunferencia de centro 0 y radio r_0, positivamente orientada.



Por la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z}\,ds.$$

Por otro lado:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{s}}, \quad \text{y usamos:} \quad \frac{1}{1-c} = 1+c+\cdots+c^{N-1}+\frac{c^N}{1-c}$$

$(c\neq 1)$.

$$\therefore \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\cdot\left[1+\frac{z}{s}+\left(\frac{z}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{s}\right)^{N-1}+\frac{(z/s)^N}{1-(z/s)}\right]$$

$$= \frac{1}{s}+\frac{z}{s^2}+\frac{z^2}{s^3}+\boxed{\cdots}+\frac{z^{N-1}}{s^N}+\frac{1}{(s-z)s^N}z^N$$

$\times f(s)$ $\qquad \hookrightarrow \dfrac{z^k}{s^{k+1}}$

$$\frac{z^k}{s^{k+1}}f(s) = \frac{f(s)}{s^{k+1}}z^k$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)}{s^{k+1}}z^k\,ds = z^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)}{s^{k+1}}\,ds$$

$= z^k.$

$$\frac{z^k}{s^{k+1}} f(s) = \frac{f(s)}{s^{k+1}} z^k .$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s^{k+1}} z^k \, ds = z^k \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s^{k+1}} \, ds .$$

$$= z^k \cdot \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

(fórmula integral de Cauchy p/ derivadas).

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z}\, ds .$$

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s} + \frac{f(s)}{s^2} z + \frac{f(s)}{s^3} z^2 + \dots + \frac{f(s)}{s^N} z^{N-1} + \frac{f(s)}{(s-z)s^N} z^N$$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s}\, ds}_{= f(0)} + \underbrace{\frac{z}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s^2}\, ds}_{= z\cdot f'(0)} + \underbrace{\frac{z^2}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s^3}\, ds}_{+\, z^2 \cdot \frac{f''(0)}{2!}} + \dots + \underbrace{\frac{z^{N-1}}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{s^N}\, ds}_{+ \dots + z^{N-1} \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}} + \rho_N(z)$$

Multiplicamos por $f(s)$ e integramos sobre C_0, recordando que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\, ds = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad , n \geq 0 .$$

Obtenemos:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!} z^{N-1} + \rho_N(z) ,$$

donde $\rho_N(z) = \dfrac{z^N}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_0} \frac{f(s)}{(s-z)s^N}\, ds .$

Sea $r := |z|$. Entonces, si $s \in C_0$, tenemos: $|s-z| \geq \big||s| - |z|\big| = r_0 - r > 0$.

Si M es el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C_0, entonces:

$$\left| \frac{f(s)}{(s-z)s^N} \right| \leq \frac{M}{(r_0 - r) r_0^N}$$

$$\Rightarrow |\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \frac{M}{(r_0-r)r_0^N} \cdot \overbrace{2\pi r_0}^{\text{longitud de } C_0} = \frac{M r_0}{r_0 - r} \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \left(\text{pues } \frac{r}{r_0} < 1\right).$$

Luego, $\lim_{N\to\infty} P_N(z)=0$, y así se tiene que:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n, \quad \text{para } |z|<R_0. \qquad (z_0=0).$$

Supongamos ahora $z_0\in\mathbb{C}$ arbitrario:

f analítica en $|z-z_0|<R_0 \Rightarrow f(z+z_0)$ es analítica para $|(z+z_0)-z_0|<R_0$, es decir, $|z|<R_0$.

Sea entonces $g(z)=f(z+z_0)$; por la primera parte vale:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n, \quad |z|<R_0$$

Pero: $g^{(n)}(0)=f^{(n)}(z_0)$ $\therefore$ $f(z+z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n \quad (|z|<R_0)$.

Reemplazando $z+z_0$ por z, resulta:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R_0 //$$

Observaciones:

- Cuando $z_0=0$, la serie se suele llamar de MacLaurin.
- Cuando f es entera, se puede tomar R_0 arbitrariamente grande $\therefore$ la representación es válida $\forall z\in\mathbb{C}$.

Ejemplos:

1) $f(z)=e^z$ y satisface $f^{(n)}(z)=e^z \ \forall z\in\mathbb{C}$ y $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\therefore f^{(n)}(0)=1 \ \forall n\in\mathbb{N}$. Luego:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

2) Desarrollo en serie de MacLaurin de $f(z)=z^2\cdot e^{3z}$ (f es entera).

$$e^{3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}z^n$$

Luego, $f(z) = z^2 \cdot e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$

De aquí se deduce: $f(0) = f'(0) = 0$.

3) Si $f(z) = \operatorname{sen} z$, entonces: $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

$f^{(2n)}(z) = \pm \operatorname{sen} z$.

$f^{(2n+1)}(z) = \pm \cos z$.

$$\therefore \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

De la misma manera, se ve:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Además: $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ $\therefore$

$$\operatorname{senh} z = -i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} (i^2)^{n+1}}_{= (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+2} = 1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Otra forma para $\cos z$:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left[1 + (-1)^n\right]}_{\begin{cases} = 0 & (n \text{ impar}) \\ = 2 & (n \text{ par}) \end{cases}} i^n z^n .$$

$(n = 2m)$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \cdot \cancel{2}\, i^{2m} z^{2m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} (-1)^m z^{2m} . \quad //$$

Usando $\cosh z = \cos(iz)$, resulta:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

4) Ya sabemos que: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1.$ ⊛

Si $f(z) = \frac{1}{1-z}$ $(|z|<1)$, entonces tenemos que:

$f^{(n)}(0) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pues los coeficientes son todos $=1$.

Además: $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z|<1.$ $\left(\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}\right)$

Por otro lado, reemplazando z por $(1-z)$ en ⊛ $(\therefore |z-1|<1)$,

se tiene: $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad |z-1|<1.$

Serie de Maclaurin de $\frac{1}{1-5z}$.

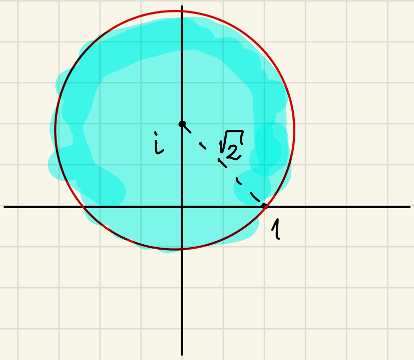
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-5z} = \sum_{n=0}^{\infty} (5z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot z^n, \quad |5z|<1.$$

$$\boxed{|z| < \frac{1}{5}}$$

5) Determinar el desarrollo en serie de potencias de:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{alrededor de } z_0 = i.$$



Como la distancia entre $z_0 = i$ y la singularidad $z=1$ es $\sqrt{2}$, el desarrollo en serie será valido para $|z-i| < \sqrt{2}$.

Queremos que aparezcan potencias de $z-i$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}}.$$

$$\left| \frac{z-i}{1-i} \right| = \frac{|z-i|}{|1-i|} = \frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1 \implies |z-i| < \sqrt{2}$$

para que se pueda usar la serie geométrica.

Entonces: $$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^{n+1}} \cdot (z-i)^n,$$

para $|z-i| < \sqrt{2}$.

Potencias negativas de $z - z_0$:

Si f no es analítica en z_0, no podemos escribir a $f(z)$ como una serie de potencias centrada en z_0. Sin embargo, por lo general se puede hallar una serie en la que aparecen potencias negativas de $(z-z_0)$.

Veamos algunos ejemplos:

1) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ no es analítica en $z_0 = 0$. Pero, podemos escribir:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\therefore \quad \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots, \qquad |z| > 0.$$

2) $f(z) = z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right)$ no es analítica en $z_0 = 0$. Pero:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \implies \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\, z^{2n}}, \quad z \neq 0.$$

$$\implies f(z) = z^3 \cdot \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^3}{(2n)!\, z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-3}}, \quad z \neq 0.$$

$$= z^3 + \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-3}} = z^3 + \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!\, z^{2n-1}}.$$

3) $f(z) = \dfrac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ (no es analítica en 0, $\pm i$). Desarrollamos alrededor de 0.

dividiendo polinomios.

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1+z^2}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} 2z^2+1 & z^2+1 \\ \hline -\,2z^2 \;\; 2 & 2 \\ \hline -1 & \end{array}$$

De $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$ se deduce: $\dfrac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$

$$\implies \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \cdots$$

$$\implies 2 - \frac{1}{1+z^2} = 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \cdots$$

Y así:
$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots, \qquad 0 < |z| < 1.$$

Series de este estilo se llaman series de Laurent.

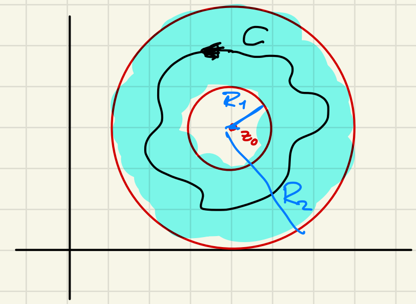
Tenemos el siguiente teorema:

<u>Teorema de Laurent</u>: Sea f analítica en el anillo:
$A(z_0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, y sea C una curva cerrada simple positiva alrededor de z_0 contenida en el anillo. Entonces, para todo $z \in A(z_0; R_1, R_2)$, $f(z)$ tiene la representación:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2,$$

donde: $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (n \geq 0)$$

y $$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz. \qquad (n \geq 1).$$



Reemplazando n por $-n$ en los b_n, podemos escribir:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2,$$

donde $$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}, \qquad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

($c_n = a_n$ si $n \geq 0$, $c_n = b_{-n}$ si $n < 0$).

Este es el desarrollo en series de Laurent de f en el anillo.

Veamos nuevamente b_n, lo podemos escribir:

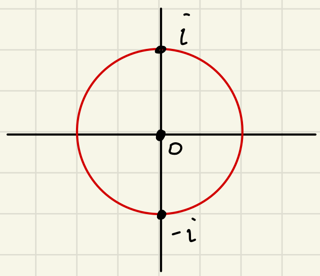
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z - z_0)^{n-1}\, dz. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Si f fuera analítica en todo el disco $|z - z_0| < R_2$, entonces por Cauchy-Goursat se tiene $b_n = 0$ $\forall n$, y así se recupera la serie de Taylor para f.

Más ejemplos:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ tiene singularidades en 0 y $\pm i$.

Busquemos el desarrollo en series de Laurent en $A := A(0;0,1)$.
$= B_1(0) - \{0\}$.



$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-z^2)} =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n \qquad \text{pues } 0<|z|<1$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{2n+1} \quad (0<|z|<1).$$

---

2) $f(z) = e^{1/z}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Como $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}, \qquad z \neq 0.$$

Esta es la serie de Laurent de f alrededor de 0.

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

Esto nos dice que $b_n = \dfrac{1}{n!}$ $\forall n \geq 1$. En particular, $b_1 = 1$

y $b_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C e^{1/z}\,dz \quad \therefore \quad \int_C e^{1/z}\,dz = 2\pi i$

$\forall$ curva cerrada simple positiva C
que rodea al 0

3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ ya está en forma de serie de Laurent con $z_0 = i$.

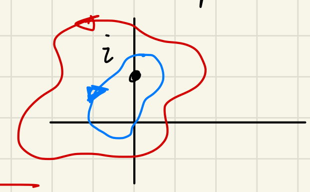
Es decir: $\dfrac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n$, $0 < |z-i| < \infty$,

donde:
$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = -2 \\ 0, & \text{si } n \neq -2. \end{cases}$$

Además, sabemos que:
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}},$$

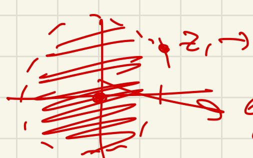
donde C es, por ejemplo, la circunferencia $|z-i| = R$ recorrida positivamente.

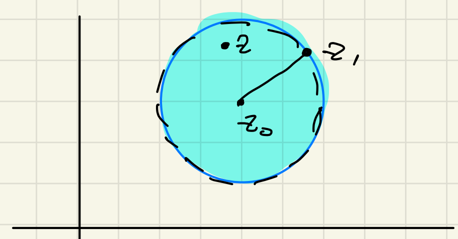
Luego:
$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq -2 \\ 2\pi i, & \text{si } n = -2. \end{cases}$$



— o —

<u>Teorema</u>: Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge cuando $z = z_1$ (con $z_1 \neq z_0$) entonces es absolutamente convergente en todo punto z tal que $|z - z_0| < R_1$, donde $R_1 = |z_1 - z_0|$.





$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$: $\boxed{z=1}$ no converge

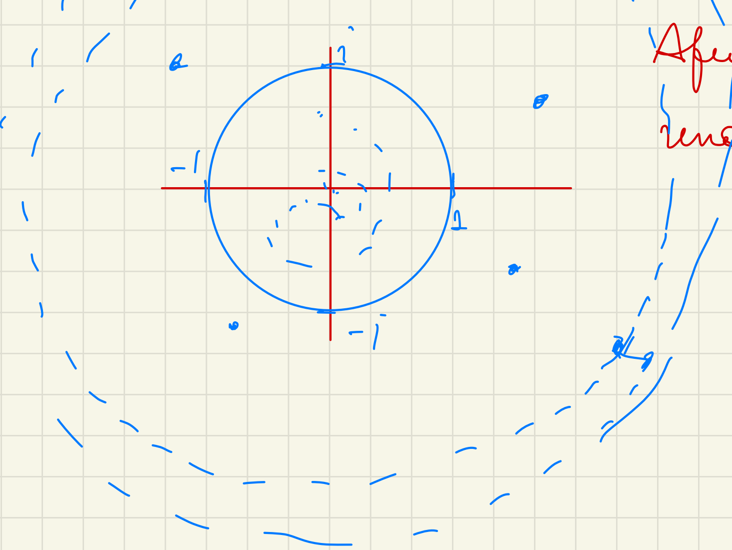
$\boxed{z=-1}$ sí converge

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, pero no absolut.

<u>Dem</u>: Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ converge, con $z_1 \neq z_0$.
Entonces los términos $a_n (z_1 - z_0)^n$ están acotados, es decir,
$\exists\, M > 0 \;/\; |a_n (z_1 - z_0)^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ (ver página siguiente).
Sea ahora $z \in \mathbb{C} \;/\; |z - z_0| < R_1$, y definamos: $\rho = \dfrac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$.
Entonces:
$$|a_n (z-z_0)^n| = |a_n (z_1 - z_0)^n| \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^n \leq M \cdot \rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n > n_0 \Rightarrow |a_n| < 1$.



Afuera del disco unidad, queda una cantidad de términos.

Puedo tomar como M a:

$$M = \max\{1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|\} + 1$$

Listo.

Pero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M\rho^n$ es geométrica y converge pues $\rho < 1$.

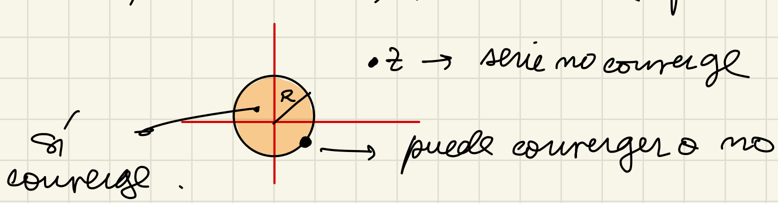
Luego, por el criterio de comparación para series reales, obtenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n|$ converge en el disco

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} M\rho^n}_{} < \infty$$

$|z - z_0| < R_1$. //

Es decir, la serie converge absolutamente en un disco abierto centrado en z_0. El radio del mayor círculo donde esto ocurre se denomina el radio de convergencia de la serie, y el disco es el disco de convergencia. (el radio puede ser $= \infty$, para f entera).

Si z_2 es exterior a este disco, entonces la serie no puede converger en $z = z_2$.



Entonces tenemos:

Teorema: dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, existe un número R, $0 \leq R \leq \infty$, llamado el radio de convergencia, tal que la serie converge absolutamente si $|z-z_0| < R$ y diverge si $|z-z_0| > R$.

Para calcular R:

- si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, vale: $R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, vale: $R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Ej: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}$ $\left(a_n = \frac{1}{4^n}\right)$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow \boxed{R = 4}$

Sea R el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, y sean

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R.$$

La función resto es: $\rho_N(z) = S(z) - S_N(z)$.

Como $\lim_{N\to\infty} S_N(z) = S(z)$, resulta $\lim_{N\to\infty} \rho_N(z) = 0$, $|z-z_0| < R$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ N > N_\varepsilon \Rightarrow |\rho_N(z)| < \varepsilon$.

Cuando la elección del N_ε depende sólo de ε y no del punto z en el disco de convergencia, se dice que la convergencia es uniforme en ese disco.

Teorema: Si z_1 es un punto en el disco de convergencia $|z-z_0|<R$ de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, entonces la serie es uniformemente convergente en el disco cerrado $|z-z_0| \leq R_1$, donde $R_1 = |z_1 - z_0|$.

Corolario: Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ entonces S es continua en el disco de convergencia.

Dem: se sabe que si una sucesión de funciones continuas $\to a_n (z-z_0)^n$ converge uniformemente entonces la función límite es continua //.

¿Qué ocurre con las series de Laurent?

Consideremos una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$.

Llamemos $w = \frac{1}{z-z_0}$, entonces la serie queda

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$. Supongamos que esta serie converge en el disco $|w| < R$. Luego, $\frac{1}{|z-z_0|} < R \Rightarrow \boxed{|z-z_0| > \frac{1}{R}}$.

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge en el exterior de la circunferencia $|z-z_0| = \frac{1}{R}$.

Ej. ¿dónde converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}$?
$w = \frac{1}{z} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n w^n \to$ tiene $R = \frac{1}{2} \to$ la serie original converge en: $|z|>2$

Si una serie de Laurent $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ es válida en un anillo $R_1 < |z-z_0| < R_2$, entonces ambas series convergen absoluta y uniformemente a una función continua en ese anillo.

Integración y derivación de series de potencias.

Teorema: Sea R el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, y sea C una curva contenida en el disco $B_R(z_0)$.
Si $g(z)$ es una función continua sobre C, entonces:

$$\int_C g(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_C g(z) (z-z_0)^n \, dz .$$

(En particular, la integral de una serie es la serie de las integrales). (S / D).

Corolario: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ es analítica en todo punto z de su disco de convergencia.

Dem: Usamos el Teorema de Morera: sea C una curva cerrada contenida en el disco de convergencia, y sea $g(z) \equiv 1$. Luego, si $\underset{\text{continua.}}{S(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, se tiene:

$$\int_C S(z)\, dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz \underset{\text{teo.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C \underbrace{(z-z_0)^n}_{\text{analítica en el disco}} dz = 0$$

→ Cauchy-Goursat. en un abierto simplemente conexo.

$\Rightarrow S$ es analítica. ✓ //

Dem: Usamos el Teorema de Morera: sea C una curva cerrada contenida en el disco de convergencia, y sea $g(z) \equiv 1$. Luego, si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, se tiene:
continua.

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz \underset{\text{teo.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C \underbrace{(z-z_0)^n}_{\text{analítica en el disco}} dz = 0$$

→ Cauchy-Goursat. en un abierto simplemente conexo.

$\Rightarrow S$ es analítica. ✓ /

19/10.

Ejemplo: Probar que la función:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 1, & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{es entera.}$$

Empezamos con la representación en serie: $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \quad (z \neq 0)$$

Esta serie converge a $f(z)$ cuando $z \neq 0$. Pero la serie también converge a $f(0) = 1$ cuando $z = 0$. Luego,

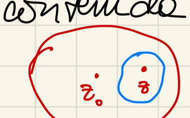
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \therefore f \text{ es entera.} \quad /$$

Ahora pasamos a la derivada:

Teorema: Si $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $|z-z_0| < R =$ radio de convergencia, entonces:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Dem: Sea $z \,/\, |z-z_0| < R$, y sea C alguna curva cerrada simple positivamente orientada que rodea a z y contenida en el disco de convergencia.



Definimos la función $g : C \to \mathbb{C}$, $g(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(s-z)^2}$, $s \in C$.

Como g es continua en C, podemos usar el teorema de la clase pasada:
$$\int_C g(s)\, S(s)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s) \cdot (s-z_0)^n ds .$$

Analizamos cada lado por separado:
$$\int_C g(s) \cdot S(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2}\, ds = S'(z)$$

(fórmula integral de Cauchy).

Para el otro miembro:
$$\int_C g(s) \cdot (s-z_0)^n ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2}\, ds = \frac{d}{dz} (z-z_0)^n = n\,(z-z_0)^{n-1}$$

Luego:
$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z-z_0)^{n-1} . \quad //$$

Ejemplo: ya vimos que $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, $|z-1|<1$.

Derivando obtenemos:
$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n\, (z-1)^{n-1}, \qquad |z-1|<1$$

o bien:
$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (n+1)\, (z-1)^n, \qquad |z-1|<1.$$

Multiplicación y división de series.

Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, ambas convergentes en un disco $|z-z_0|<R$. Entonces $f(z) \cdot g(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias en ese disco.

Para obtenerlo, hay que multiplicar formalmente término por término y luego agrupar los términos de igual potencia de $(z-z_0)$.

Ejemplo: Sea $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{1+z}$ f tiene una singularidad en $z=-1$, por lo que posee un desarrollo en serie de Maclaurin en $|z|<1$.

Recordemos que:

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 \cdots, \quad |z|<1.$$

Entonces, para $|z|<1$:

$$\frac{\operatorname{senh} z}{1+z} = \left(z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 + \cdots\right) \cdot \left(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots\right)$$

$$\frac{\operatorname{senh} z}{1+z} = \left(z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 + \cdots\right) \cdot \left(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots\right)$$

$$\begin{aligned} = \; & z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - z^6 + \cdots \\ & \qquad\qquad \frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{6} z^4 + \frac{1}{6} z^5 - \frac{1}{6} z^6 + \cdots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{120} z^6 + \cdots \end{aligned}$$

$$= z - z^2 + \frac{7}{6} z^3 - \frac{7}{6} z^4 + \frac{141}{120} z^5 - \frac{141}{120} z^6 + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{120 + 20 + 1}{120} = \frac{141}{120}$$

Supongamos ahora que $g(z) \neq 0$ en $|z-z_0|<R$. Luego, $f(z)/g(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias en $|z-z_0|<R$.

Esta serie se obtiene dividiendo formalmente las dos series (al menos para conocer los primeros términos).

Ejemplo: la función $\operatorname{senh} z$ se anula en $z = n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Luego, la función $\dfrac{1}{\operatorname{senh} z}$ tiene un desarrollo en serie de Laurent en $0<|z|<\pi$. Pero:

$$\frac{1}{\operatorname{senh} z} = \frac{1}{z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots} = \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots}\right).$$

Podemos dar los primeros términos de la serie de potencias correspondiente al paréntesis:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots \\ \cline{2-2}
-\left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right) & 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{7}{360}z^4-\cdots \\ \cline{1-1}
-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}-\cdots & \\
-\left(-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{(3!)^2}-\cdots\right) & \\ \cline{1-1}
\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right)z^4+\cdots & \\
\qquad = 7/360 &
\end{array}$$

$$\frac{1}{36}-\frac{1}{120} = \frac{10-3}{360} = \frac{7}{360}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots} = 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{7}{360}z^4-\cdots$$

y así:

$$\frac{1}{\operatorname{senh} z} = \frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{7}{360}z^3+\cdots \qquad (0<|z|<\pi).$$

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

números de Bernoulli

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$z \;\Big|\; z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$-\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \qquad 1 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{12} z^2 - \cdots$$

$$-\frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$-\left(-\frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{(2!)^2} - \frac{z^4}{2!\,3!}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) z^3 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{2 \cdot 6}\right) z^4$$

$$\frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{24} z^4$$

Capítulo 6: Residuos.

Recordemos que una función $f(z)$ se dice analítica en z_0 si existe $f'(z)$ para todo z en un abierto que contiene a z_0. ($=$ un entorno de z_0.)

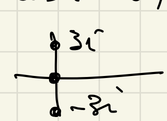
Si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de cada entorno de z_0, se dice que z_0 es una singularidad de f (o punto singular)

Nos concentraremos en un tipo particular de singularidades:

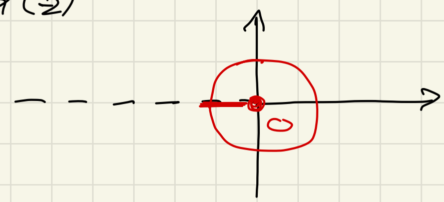
Una singularidad z_0 se dice aislada si $\exists\, \varepsilon > 0$ / f es analítica en todo punto del disco punteado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Ejemplo: $f(z) = \dfrac{z-1}{z^5(z^2+9)}$ tiene 3 puntos singulares: $0, \pm 3i$.

Todos son aislados.



En general, toda función racional $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ tiene sólo singularidades aisladas, pues $Q(z)$ tiene un número finito de ceros.

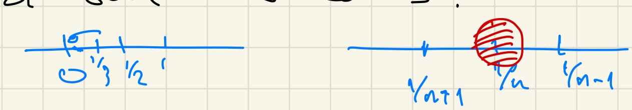


Ejemplo: La función $\operatorname{Log} z$ tiene una singularidad en $z=0$, pero no es aislada porque $\forall \varepsilon > 0$, el anillo $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ contiene puntos del eje real negativo, donde Log ni siquiera está definida.

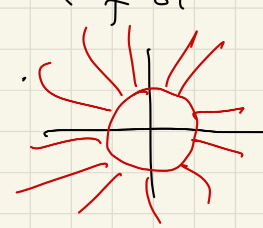
Ejemplo: Sea $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right)}$. No está definida en $z=0$ ni cuando $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0$, es decir, $\frac{\pi}{z} = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow z = \frac{1}{n}$ $(n \neq 0)$.

Tanto el 0 como los puntos $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, son singularidades de f.

Sin embargo, 0 no es una singularidad aislada, pues hay una sucesión de singularidades que converge a 0. Las singularidades $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, sí son aisladas.



También se puede definir cuándo el ∞ es un punto singular. Se dice que $z_0 = \infty$ es un punto singular aislado de f si $\exists R > 0$ tal que f es analítica en $R < |z| < \infty$.



Residuos.

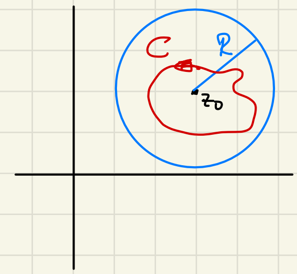
Si z_0 es un punto singular aislado de f, entonces $\exists R > 0$ tal que f es analítica en el anillo $0 < |z - z_0| < R$. Luego, hay un desarrollo en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_3}{(z-z_0)^3} + \dots$$

$$(0 < |z-z_0| < R).$$

Recordemos que:
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde C es cualquier curva cerrada simple alrededor de z_0 contenida en $0 < |z-z_0| < R$.



Para $n=1$:
$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz,$$

o bien
$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \cdot b_1.$$

Definición: el número b_1 es llamado el residuo de f en la singularidad aislada z_0, y se denota: $b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Es decir:
$$\boxed{\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).}$$
$\longrightarrow$ nos da una manera de calcular integrales.

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_C \frac{e^z - 1}{z^4}\, dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 1$, positivamente orientada.

La función $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, por lo que tiene un desarrollo de Laurent válido en $0 < |z| < \infty$.

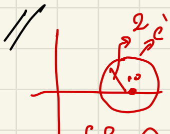
Calculemos el residuo:
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^z - 1}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!}.$$

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}z + \dots$$

El coeficiente de $\frac{1}{z}$ se obtiene cuando $n-4 = -1$, es decir, $\boxed{n=3}$.

$$\therefore \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Luego, $\displaystyle\int_C \frac{e^z - 1}{z^4} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$. //



$\int_C f = 0$

Ejemplo: probemos que $\displaystyle\int_C \cosh\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$, donde C es la circunferencia unidad positiva $|z| = 1$.

Notar que $f(z) = \cosh\left(\frac{1}{z^2}\right)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, y 0 es una singularidad aislada en el interior de C.

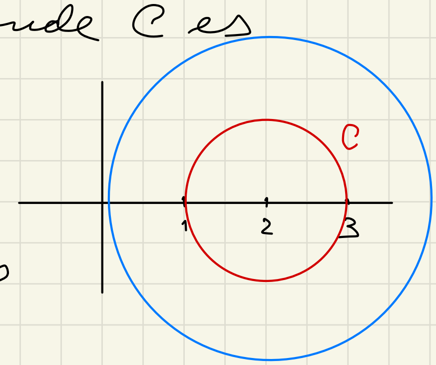
Buscamos el residuo:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{z^6} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty).$$

$$\therefore \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0 \Rightarrow \int_C \cosh\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0 \checkmark$$

Ejemplo: Calcular: $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-2)^5}$, donde C es la circunferencia positiva $|z-2| = 1$.



La función $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^5}$ tiene singularidades aisladas en $z = 0$ y $z = 2$. Luego, tiene un desarrollo de Laurent válido en $0 < |z-2| < 2$. Usemos la serie geométrica para determinarlo:

$$\frac{1}{z(z-2)^5} = \frac{1}{(z-2)^5} \cdot \frac{1}{2 + (z-2)} = \frac{1}{2(z-2)^5} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2(z-2)^5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{n-5}}{2^{n+1}}$$

Obtenemos $\frac{1}{z-2}$ cuando $n-5=-1$, es decir, $\boxed{n=4}$.

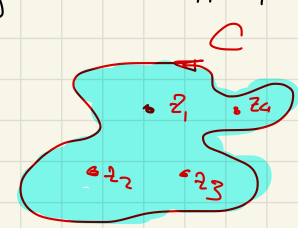
Luego, $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \frac{(-1)^4}{2^5} = \frac{1}{32}$, y entonces

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^5}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{32} = \frac{\pi i}{16}. \quad //$$

Si una función f tiene una cantidad finita de puntos singulares en el interior de una curva cerrada simple C, entonces todos esos puntos singulares son aislados. En este caso, la fórmula anterior que involucra residuos se generaliza de la siguiente manera:

Teorema (de los residuos de Cauchy):
Sea C una curva cerrada simple, recorrida positivamente. Si una función f es analítica sobre C y en el interior de C, excepto por una cantidad finita de puntos singulares $z_1, \ldots, z_n$ en el interior de C, entonces:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$



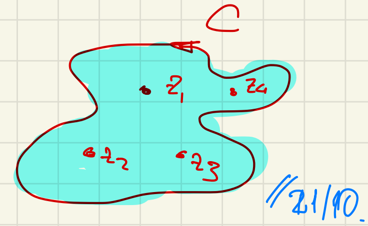
Ejemplo: calculemos $\int_C \frac{4z-5}{z(z-1)}\, dz$, donde C es la circunferencia $|z|=2$, positivo.

La función $f(z) = \frac{4z-5}{z(z-1)}$ tiene singularidades aisladas $z=0$ y $z=1$, ambas en el interior de C. Calculemos los residuos:

Teorema (de los residuos de Cauchy):

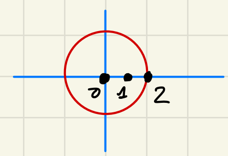
Sea C una curva cerrada simple, recorrida positivamente. Si una función f es analítica sobre C y en el interior de C, excepto por una cantidad finita de puntos singulares $z_1, \dots, z_n$ en el interior de C, entonces:

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$



//21/10.

Ejemplo: calculemos $\int_C \frac{4z-5}{z(z-1)}\, dz$, donde C es la circunferencia $|z|=2$, positivo.



La función $f(z) = \dfrac{4z-5}{z(z-1)}$ tiene singularidades aisladas $z=0$ y $z=1$, ambas en el interior de C. Calculemos los residuos:

$z_0 = 0$:

$$\frac{4z-5}{z(z-1)} = -\frac{4z-5}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\left(4 - \frac{5}{z}\right) \cdot \left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right) \quad (0<|z|<1).$$

El coeficiente de $\frac{1}{z}$ es 5 $\therefore$ $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 5$.

Por otro lado, en $z_0 = 1$: $\rightarrow$ busco el desarrollo de Laurent en $(z-1)$.

$$\frac{4z-5}{z(z-1)} = \frac{4z-5}{z-1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{4(z-1)-1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)}$$

$$\begin{array}{r|l} 4z-5 & z-1 \\ \hline 4z-4 & 4 \\ -1 & \end{array}$$

$$= \left(4 - \frac{1}{z-1}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

$$= \left(4 - \frac{1}{z-1}\right) \cdot \left[1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots\right] \quad (0<|z-1|<1)$$

El coeficiente de $\frac{1}{z-1}$ es -1 $\therefore$ $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1$.

Por el teorema:

$$\int_C \frac{4z-5}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right) = 2\pi i \cdot 4 = 8\pi i.$$

Otra manera: fracciones simples.

$$\frac{4z-5}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \Rightarrow 4z-5 = A(z-1) + Bz \Rightarrow \begin{array}{l} A = 5 \\ B = -1. \end{array}$$

$$\therefore \int_C \frac{4z-5}{z(z-1)}\,dz = \int_C \frac{5}{z}\,dz - \int_C \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i\, 5 - 2\pi i \cdot 1$$

ya están en serie de Laurent

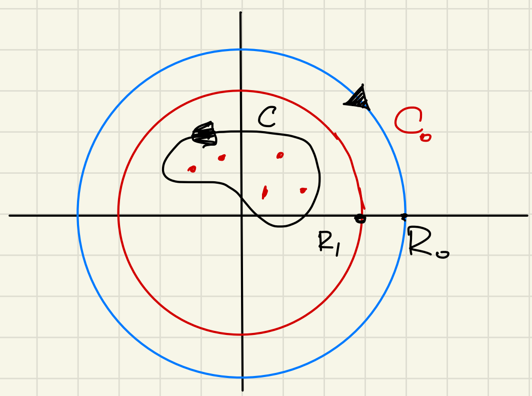
$$= 8\pi i.$$

Residuos en el infinito.

Supongamos que f es analítica en todo el plano, excepto por una cantidad finita de puntos singulares, todos interiores a una curva cerrada simple C, positivamente orientada.

Sea $R_1 > 0$ tal que C está contenida en el interior de la circunferencia $|z| = R_1$.

Por lo visto antes, el punto ∞ es un punto singular aislado de f.



Ahora sea C_0 una circunferencia $|z| = R_0$, con $R_0 > R_1$, recorrida en sentido horario. Se define el residuo en el infinito por:

$$\boxed{\int_{C_0} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)} . \quad (*)$$

(Se recorre C_0 en sentido horario para que ∞ "quede a la izquierda").

Como f es analítica en la región limitada por C y por C_0, vale el principio de deformación de caminos. Luego:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{-C_0} f(z)\,dz = -\int_{C_0} f(z)\,dz.$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\int_C f(z)\,dz = -2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).}$$

¿Cómo se calcula este residuo? Tomamos el desarrollo en serie de Laurent de f:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (R_1 < |z| < \infty),$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En la serie, reemplacemos z por $\frac{1}{z}$ y multipliquemos por $\frac{1}{z^2}$:

$$\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \qquad \left(0 < |z| < \frac{1}{R_1}\right).$$

y:

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Por otro lado:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_0} f(z)\,dz$$

$$\therefore \quad \boxed{\int_{C_0} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f(z)\right].} \quad (\ast\ast).$$

De $(\ast)$ y $(\ast\ast)$, resulta:

$$\left(+\ \int_C = -\int_{C_0}\right) \qquad \boxed{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]}$$

<u>Teorema:</u> Si f es analítica en todo el plano excepto por una cantidad finita de puntos singulares interiores a una curva cerrada simple C, positivamente orientada, entonces:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Este teorema puede ser más conveniente que el teorema de los residuos de Cauchy, pues involucra el cálculo de un solo residuo.

Ejemplo: Calcular $\int_C \frac{z^2(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=3$, recorrida positivamente.

Sea $f(z)$ el integrando, entonces las singularidades de f son: $1+z=0 \Rightarrow z=-1$

$1+2z^4=0 \Rightarrow z^4=-\frac{1}{2} \Rightarrow |z|=\frac{1}{2^{1/4}}<1<3$.

hay una cantidad finita de soluciones.

$\therefore$ hay una cantidad finita de singularidades y están todas en el interior de C.

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1/z^3\cdot(1-3\cdot 1/z)}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{z^4}\right)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\frac{1}{z^3}\cdot\frac{z-3}{z}}{\frac{z+1}{z}\cdot\frac{z^4+2}{z^4}}$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z-3}{\frac{(z+1)(z^4+2)}{z}}=\frac{1}{z}\overbrace{\frac{z-3}{(z+1)(z^4+2)}}^{g(z)}$$

$a_0=g(0)=\frac{-3}{1\cdot 2}=-\frac{3}{2}$

$\left(=\frac{1}{z}\cdot(a_0+a_1z+a_2z^2+\dots)=a_0\frac{1}{z}+a_1+a_2\cdot z+\dots\right)$

$=-\frac{3}{2}+a_1z+a_2z^2+\dots$ en $|z|<1/\sqrt[4]{2}$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{z}+a_1+a_2z+\dots \quad \text{en } 0<|z|<1.$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3\pi i$$

Ejemplo: calculemos de nuevo $\int_C \overbrace{\frac{4z-5}{z(z-1)}}^{f(z)}\,dz$, calculando un solo residuo.

$$\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\frac{4}{z}-5}{\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\frac{4-5z}{z}}{\frac{1-z}{z^2}}=\frac{4-5z}{z(1-z)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{4-5z}{1-z}$$

$=(4+a_1z+a_2z^2+\dots)$

analítica en 0.

$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right]=4. \Rightarrow \int_C=2\pi i\cdot 4=8\pi i$

Diferentes tipos de singularidades aisladas:

Si f tiene una singularidad aislada en z_0 entonces tiene un desarrollo en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \dots}_{\text{parte principal}} \qquad (0<|z-z_0|<R)$$

Se definen 3 tipos de singularidades, en términos de la parte principal.

(1) Singularidades removibles:

z_0 es singularidad removible cuando $b_n = 0 \ \forall n$. Luego:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \qquad (0<|z-z_0|<R).$$

Si definimos $f(z_0) = a_0$, entonces la expresión en serie vale para: $|z-z_0|<R$

$\therefore$ f es analítica en z_0 y en todo el disco $|z-z_0|<R$.

b) Singularidades esenciales:

z_0 se dice una singularidad esencial de f si $b_n \neq 0$ para una cantidad infinita de valores de n.

c) Polos de orden m:

z_0 se dice un polo de f si hay una cantidad finita de n tales que: $b_n \neq 0$. En este caso, hay un $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$.

Se dice que z_0 es un polo de orden m, y así:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \qquad (0<|z-z_0|<R)$$

($m=1$ $\leadsto$ polo simple).

($b_m \neq 0$, pero algunos de los b_j con $j<m$ pueden anularse).

Ejemplos:

1) Si $f(z)=\dfrac{1-\cosh z}{z^2}$, $z_0=0$ es la única singularidad.

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left[1-\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right]=\frac{1}{z^2}\left(-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}-\cdots \qquad (0<|z|<\infty).$$

$\therefore$ $z_0=0$ es una singularidad removible, y si se define $f(z)=-1/2$, f resulta analítica.

2) Si $f(z)=e^{1/z}$, tenemos que: $\left(e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots \longrightarrow z_0=0 \text{ es singularidad esencial.}$$

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ $\longrightarrow$ singularidades en 0 y en 1.

$z_0=0$: $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)$, $\quad 0<|z|<1$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots \rightsquigarrow z_0=0 \text{ es polo de orden } 2.$$

$z_0=1$: $f(z)=\dfrac{-1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z^2}$ se obtiene derivando la serie de $\frac{1}{z}$.

$$=-\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n, \qquad |z-1|<1.$$

$$=-\frac{1}{z-1}\left(1-2(z-1)+3(z-1)^2-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{z-1}+2-3(z-1)+\cdots$$

$\rightsquigarrow$ $z_0=1$ es un polo simple.