Residuos en polos:

El próximo teorema nos da una manera alternativa de calcular residuos en polos:

Teorema: Sea z_0 una singularidad aislada de la función f. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) z_0 es un polo de orden m de f;

b) f puede ser escrita como: $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ $(m \in \mathbb{N})$,

donde φ es analítica en z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$.

Más aún, si a) y b) son verdaderos, entonces:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \qquad \left(\text{cuando } m=1: \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0)\right).$$

Dem: a) $\Rightarrow$ b). f tiene una representación

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad (b_m \neq 0), \quad 0 < |z-z_0| < R.$$

Definimos la función:

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z), & \text{si } z \neq z_0 \\ b_m, & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Entonces φ tiene la representación:

$$\varphi(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \dots + b_1 (z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}$$

en todo el disco $|z-z_0| < R$ $\therefore$ φ es analítica en todo el disco y en particular en z_0. Además, $\varphi(z_0) = b_m \neq 0$ y tenemos que $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$.

b) ⇒ a) Sabemos $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, con φ analítica y no nula en z_0.

$$\therefore\ \varphi(z)=\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+\frac{\varphi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots+\frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1}$$
$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\qquad |z-z_0|<R.$$

Luego:

$$f(z)=\overbrace{\frac{\underset{\neq 0}{\varphi(z_0)}}{(z-z_0)^m}+\frac{\varphi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{\varphi''(z_0)/2!}{(z-z_0)^{m-2}}+\dots+\frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z-z_0}}^{\text{parte principal}}$$
$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m},\quad \text{en } 0<|z-z_0|<R.$$

$\Rightarrow$ f tiene un polo de orden m en z_0.

Además, $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\dfrac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}}$. //

<u>Ejemplos:</u> 1) $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+1}$ tiene singularidades aisladas en $z=i$ y $z=-i$.

$z^2+1=(z-i)(z+i)$

- $z_0=i$: $\quad f(z)=\dfrac{\frac{z+4}{z+i}}{z-i}$, $\quad \varphi(z)=\dfrac{z+4}{z+i}$, es analítica en $z_0=i$

y $\varphi(i)=\dfrac{i+4}{2i}\neq 0 \Rightarrow z_0=i$ es un polo simple.

Además, $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\varphi(i)=\dfrac{i+4}{2i}=\dfrac{1}{2}-2i$

- $z_0=-i$: $\quad f(z)=\dfrac{\frac{z+4}{z-i}}{z+i}$, $\quad \varphi(z)=\dfrac{z+4}{z-i}$, es analítica en $(-i)$ y: $\varphi(-i)=\dfrac{-i+4}{-2i}\neq 0$

$\Rightarrow$ $z_0=-i$ es un polo simple, $\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)=\varphi(-i)=\dfrac{-i+4}{-2i}=\dfrac{1}{2}+2i$.

2) $f(z)=\dfrac{z^3+2z}{(z-i)^3}$ $\rightsquigarrow$ única singularidad en $z=i$.

Si $\varphi(z)=z^3+2z$ entonces $\varphi(i)=i^3+2i=-i+2i=i\neq 0$. Luego, $z_0=i$ es un polo de orden 3 de f. Además:

$$\varphi(z)=z^3+2z$$
$$\varphi'(z)=3z^2+2$$
$$\varphi''(z)=6z.$$

$$\therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{\varphi''(i)}{2!} = \frac{6i}{2} = 3i.$$

¿Qué pasa si consideramos: $g(z) = \dfrac{z^3+z}{(z-i)^3}$? ¡es la única singularidad.

Si tomamos $\varphi(z) = z^3+z$ entonces: $\varphi(i) = 0$ $\boxed{\text{OJO}}$.

Pero: $z^3+z = z(z^2+1) = z(z-i)(z+i) = (z-i)(z^2+iz)$

$$\therefore \quad g(z) = \frac{(z-i)(z^2+iz)}{(z-i)^3} = \frac{z^2+iz}{(z-i)^2}.$$

Con $\varphi(z) = z^2+iz$ se tiene $\varphi(i) = -1+(-1) = -2 \neq 0$, sirve.

Entonces g tiene un polo de orden 2 en $z_0 = i$, y:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} g(z) = \varphi'(i) = 3i.$$

$\varphi'(z) = 2z+i$

$\varphi'(i) = 2i+i$
$= 3i$

Ahora podemos probar:

<u>Teorema</u>: Si z_0 es un polo de f, entonces:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

<u>Dem</u>: Supongamos que f tiene un polo de orden m en z_0.

Entonces $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ con φ analítica y no nula en z_0.

$$\therefore \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m}{\lim_{z\to z_0}\varphi(z)} = \frac{0}{\underbrace{\varphi(z_0)}_{\neq 0}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

¿Cómo se comporta f cerca de las otras singularidades?

Singularidades removibles:

Teorema: Si z_0 es una singularidad removible de f, entonces f es acotada y analítica en un disco punteado $0<|z-z_0|<\varepsilon$.

Teorema (de Riemann): Sea f acotada y analítica en algún disco punteado $0<|z-z_0|<\varepsilon$. Si f no es analítica en z_0 entonces z_0 es una singularidad removible de f.

Singularidades esenciales:

→ cerca de una sing. esencial la función toma valores arbitrariamente cercanos a cualquier número

Teorema: Sea z_0 singularidad esencial de f, y sea $w_0 \in \mathbb{C}$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall \delta > 0$ $\exists$ $z \in \mathbb{C} /$ $0<|z-z_0|<\delta$ y $|f(z)-w_0|<\varepsilon$.

(de Casorati-Weierstrass).

Capítulo 7: Aplicaciones de los residuos.

Evaluación de integrales impropias.

Recordemos que si f es continua en $0 \leq x < \infty$, entonces:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx.$$

Si el límite existe, se dice que la integral impropia converge.

Si f es continua en todo $\mathbb{R}$, se define:

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R_2\to\infty} \int_0^{R_2} f(x)\,dx,$$

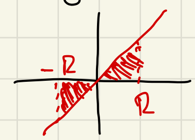
y cuando ambos límites existen, la integral converge.

También se define el valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ como:

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx .$$

Si la integral en ⊛ converge, entonces el V.P. existe y coincide con el valor de la integral.

Pero, puede existir el V.P. y no ser convergente la integral en ⊛. (Ejemplo: $f(x) = x$).



¿Qué ocurre si $f(x)$ es una función par? $(f(-x) = f(x)\ \forall x)$.

Supongamos que el V.P. existe. Como el gráfico de f es simétrico respecto del eje Y, se tiene:

$$\int_{-R}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \,, \qquad \int_{0}^{R} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx .$$

Luego:
$$\int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R_1}^{R_1} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-R_2}^{R_2} f(x)\,dx .$$

Haciendo $R_1, R_2 \longrightarrow \infty$, el límite en la derecha existe y entonces el de la izquierda también. Así:

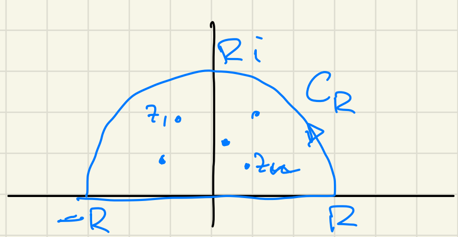
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx .$$

Más aún,
$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right].$$

Veremos a continuación métodos para calcular integrales impropias usando residuos.

(f función racional).

Idea:



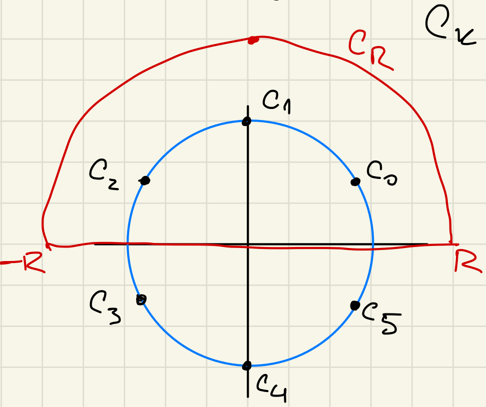
$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$.

Consideremos $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$, que tiene singularidades en los ceros de z^6+1, o sea, las raíces sextas de -1.

Estas son:

$$c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right], \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$



c_0, c_1, c_2 están en el semiplano superior y no hay ninguna singularidad en el eje real.

Para $R > 1$, c_0, c_1 y c_2 están en el interior de la región semicircular determinada por el segmento $z = x$, $-R \le x \le R$, y la mitad superior C_R de la circunferencia $|z| = R$, desde R a $-R$.

Luego, por el Teorema de los residuos:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname*{Res}_{z=c_k} f(z).$$

¿Cómo calcular los residuos? Sabemos que:

φ es analítica y no nula en c_k

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{6}(z-c_j)} = \frac{\varphi(z)}{z-c_k} \quad (k=0,1,2), \quad \text{con } \varphi(z) = \frac{1}{\prod_{j\neq k}(z-c_j)} \neq 0$$

Cada c_k es un polo simple de f y $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c_k} f(z) = \varphi(c_k) = \frac{1}{\prod_{j\neq k}(c_k-c_j)}$

Para evaluar $\varphi(c_k)$:

En general, si $g(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-a_j)$, con los a_i todos distintos.

Entonces:
$$g'(z) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j\neq k}(z-a_j) \Rightarrow \boxed{g'(a_k) = \prod_{j\neq k}(a_k-a_j)} \quad (*)$$

$\left(n=3: \quad g'(z) = (z-a_2)(z-a_3) + (z-a_1)(z-a_3) + (z-a_1)(z-a_2) \rightarrow g'(a_1) = (a_1-a_2)(a_1-a_3).\right)$

Luego: $\operatorname*{Res}_{z=c_k} f(z) = \varphi(c_k) = \dfrac{1}{\prod_{j\neq k}(c_k - c_j)} \overset{(*)}{=} \dfrac{1}{g'(c_k)}$ con $g(z) = z^6+1$

$\therefore g'(z) = 6z^5$.

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=c_k} f(z) = \frac{1}{6c_k^5}.$$

Ahora: $c_k^6 + 1 = 0 \Rightarrow c_k^5 \cdot c_k = -1 \Rightarrow c_k^5 = -\dfrac{1}{c_k}$, y así:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=c_k} f(z) = -\frac{c_k}{6}}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\left(-\frac{c_0}{6} - \frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{6}\right) \\
&= -\frac{\pi i}{3}\left[e^{i\frac{\pi}{6}} + i + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right] \\
&= -\frac{\pi i}{3}\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)i + i\right) \qquad i\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 2i \\
&= -\frac{\pi i}{3}\cdot 2i = \frac{2\pi}{3}. \qquad (R>1).
\end{aligned}$$

Veamos que: $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$. $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$.

Para $R>1$ y $z \in C_R$: $|z^6+1| \geq \big||z|^6 - 1\big| = R^6 - 1$.

$$\therefore |f(z)| = \frac{1}{|z^6+1|} \leq \frac{1}{R^6-1}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{R^6-1}\cdot \underbrace{\pi R}_{\text{long}(C_R)} = \frac{\pi R}{R^6-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\therefore \int_{C_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Luego, $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{2\pi}{3}$, o sea, V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi}{3}$.

Como $f(z)$ es par, resulta: $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}}$

Digresión: una manera más fácil de calcular los residuos del ejemplo anterior:

Proposición: Sean f y g funciones analíticas en z_0. Si:

$$f(z_0) \neq 0, \quad g(z_0) = 0 \quad y \quad g'(z_0) \neq 0,$$

entonces z_0 es un polo simple de $\frac{f(z)}{g(z)}$ y:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(CREER) (PERO SE PUEDE USAR).

En ese ejemplo: $\operatorname*{Res}_{z=c_k} \frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{6z^5\big|_{z=c_k}} = \frac{1}{6c_k^5}.$

Integrales impropias con sen y cos:

Se pueden usar los residuos para calcular integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\operatorname{sen}(ax)\,dx \quad o \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx, \qquad a > 0.$$

Aquí asumimos que f es una función racional, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde q no tiene ceros reales.

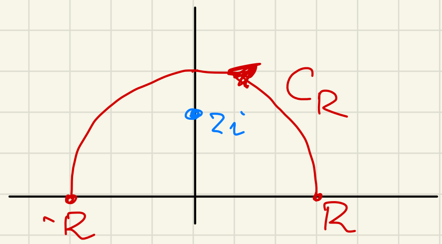
No podemos usar el método anterior, pues $|\operatorname{sen} az| \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y $|\cos az| \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

La idea es usar:
$$\int_{-R}^{R} f(x)\cos(ax)\,dx + i\int_{-R}^{R} f(x)\,\operatorname{sen}(ax)\,dx = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx$$

junto con: $|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay}$ → acotada en el semiplano $y \geq 0$.

Ejemplo: calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,dx$.

Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2} \rightsquigarrow f(z)\cdot e^{i2z}$ tiene singularidades aislados en $\pm 2i$.



Para $R>2$, $z_0 = 2i$ está en el interior del semicírculo limitado por el segmento $z = x$ $(-R \le x \le R)$ y la semicircunferencia C_R dada por $|z| = R$, recorrida de R a $-R$.

Entonces:
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i2x}}{(x^2+4)^2}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{i2z}}{(z^2+4)^2}\,dz = 2\pi i \cdot \underbrace{\operatorname*{Res}_{z=2i}\left[f(z)\cdot e^{i2z}\right]}_{=:B}.$$

Calculemos B: $\quad f(z)\cdot e^{i2z} = \dfrac{e^{i2z}}{(z^2+4)^2} = \dfrac{\varphi(z)}{(z-2i)^2}$, con $\varphi(z) = \dfrac{e^{i2z}}{(z+2i)^2}$.

Como $\varphi(2i) \neq 0$, $2i$ es un polo de orden 2 de $f(z)\cdot e^{i2z}$.

$g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}\, e^{i2z} \longrightarrow$ sus únicas singularidades son cuando $z^2+4 = 0$, o sea, $z = \pm 2i$.

Me interesa $z = 2i$ $(\operatorname{Im} z > 0)$.

$$\left(z^2+4 = (z-2i)(z+2i)\right)$$

$$g(z) = \frac{\left.\dfrac{e^{i2z}}{(z+2i)^2}\right) = \varphi(z) \to \text{analítica en } 2i.}{(z-2i)^2}, \quad \varphi(2i) = \frac{e^{-4}}{(4i)^2} \neq 0.$$

$\therefore$ $2i$ es un polo de orden 2, y además:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} g(z) = \varphi'(2i).$$

Si g es analítica en z_0 y $g(z_0) = 0$, entonces se puede escribir:

$g(z) = (z-z_0)^k \cdot h(z)$, donde $k \in \mathbb{N}$ y h es analítica y no nula en z_0.

El residuo vale: $B = \dfrac{\varphi'(2i)}{1!}$

$$\left(\varphi(z) = \frac{e^{i2z}}{(z+2i)^2} \Rightarrow \varphi'(z) = \frac{2i e^{i2z}(z+2i)^2 - e^{i2z}\cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4} \right.$$

$$\left. = \frac{2i e^{i2z}}{(z+2i)^2} - \frac{2e^{i2z}}{(z+2i)^3} \right)$$

$$\therefore \ \varphi'(2i) = \frac{2i e^{-4}}{-16} - \frac{2e^{-4}}{-64i} = -\frac{1}{8e^4} i - \frac{1}{32e^4} i = -\frac{5}{32e^4} i .$$

$$\Rightarrow \boxed{B = -\frac{5}{32e^4} i}$$

Luego:
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i2x}}{(x^2+4)^2}\,dx + \int_{C_R} f(z)e^{i2z}\,dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{5}{32e^4} i\right) = \frac{5\pi}{16e^4}.$$

Tomando parte real:
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,dx + \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i2z}\,dz = \frac{5\pi}{16e^4}.$$

Ahora, si $z \in C_R$: $|z^2+4| \geq \left| |z|^2 - 4 \right| = R^2 - 4 \quad (R>2).$

$$\therefore \ |f(z)| \leq \frac{1}{(R^2-4)^2}.$$

Además: $|e^{i2z}| = e^{-2y} \leq 1$ ($y \geq 0$). Luego:

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i2z}\,dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{i2z}\,dz \right| \leq \underbrace{\frac{1}{(R^2-4)^2} \cdot \pi R}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0} \qquad (\pi R = \ell(C_R)).$$

Luego: $$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{5\pi}{16e^4}$$

Como el integrando es par: $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{5\pi}{32e^4}.$$

——— o ———

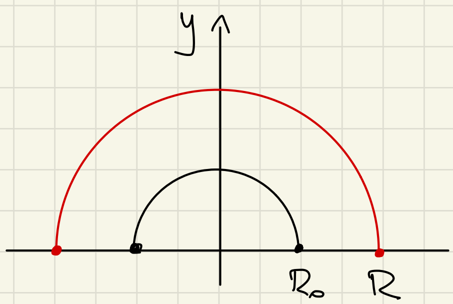
Algunas veces, para poder evaluar algunas de estas integrales, necesitaremos el siguiente resultado:

Teorema (de Jordan): Supongamos que:

a) f es analítica en todos los puntos del semiplano superior $y \geq 0$ que son exteriores a una circunferencia $|z| = R_0$,

b) C_R denota una semicircunferencia $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, $R > R_0$,

c) para cada $R > R_0$, $\exists M_R > 0$ / $|f(z)| \leq M_R$ $\forall z \in C_R$, y $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$.



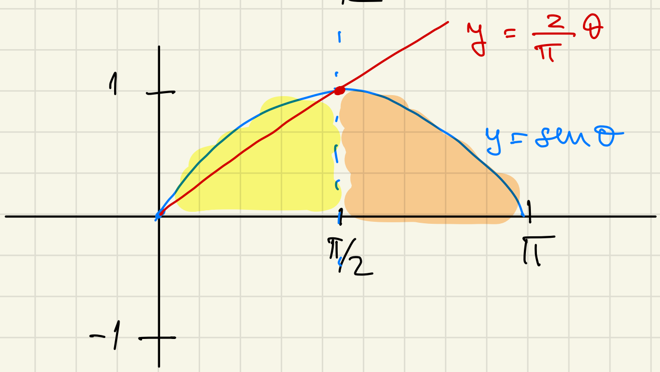
Entonces, para cada $a > 0$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{iaz}\, dz = 0.$$

Dem: veamos primero la desigualdad de Jordan:

$$\int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta < \frac{\pi}{R} \quad (R > 0).$$

En efecto:



$\Rightarrow$ $\mathrm{sen}\,\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Para $R > 0$: $$e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta} \leq e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\, d\theta = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}), \quad R > 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{2R} \quad (R > 0).$$

Como el gráfico de $y = \mathrm{sen}\,\theta$ es simétrico respecto de la recta vertical $\theta = \pi/2$, vale que: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{R} \quad (R>0)$.

Ahora, para probar el teorema: $\quad z = Re^{i\theta}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$.

$$\int_{C_R} f(z)\, e^{iaz}\, dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) \exp(iaRe^{i\theta})\, Rie^{i\theta}\, d\theta.$$

Ahora: $\quad |f(Re^{i\theta})| \leq M_R$ y $\quad |\exp(iaRe^{i\theta})| \leq e^{-aR\,\text{sen}\,\theta}$,

y por la desigualdad de Jordan:

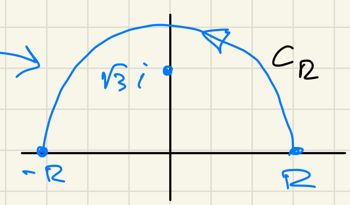
$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\, dz\right| \leq M_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-aR\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta \leq M_R\, R \cdot \frac{\pi}{aR} = \underbrace{M_R \frac{\pi}{a}}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0}.$$

Como $M_R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, el teorema vale. //

<u>Ejemplo</u>: calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,2x}{x^2+3}\, dx$

Si $f(z) = \dfrac{z}{z^2+3}$, f tiene singularidades aisladas en $\pm\sqrt{3}\,i$
(sólo $\sqrt{3}\,i$ en semiplano superior).

Sea $R > \sqrt{3}$, y consideramos la curva:



$$f(z)e^{i2z} = \frac{\varphi(z)}{z-\sqrt{3}\,i}, \text{ con } \varphi(z) = \frac{z\,e^{i2z}}{z+\sqrt{3}\,i},$$

con φ analítica en $\sqrt{3}\,i$ y $\varphi(\sqrt{3}\,i) = \dfrac{\sqrt{3}\,i \cdot e^{-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}\,i} = \dfrac{1}{2e^{2\sqrt{3}}} \neq 0$

$\therefore$ $z_0 = \sqrt{3}\,i$ es un polo simple de f, con residuo $= \dfrac{1}{2e^{2\sqrt{3}}}$.

Por Teorema de los Residuos:

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\,e^{i2x}}{x^2+3}\, dx + \int_{C_R} f(z)e^{i2z}\, dz = \frac{i\pi}{e^{2\sqrt{3}}}.$$

Tomando partes imaginaria:

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\,\text{sen}(2x)}{x^2+3}\, dx + \text{Im} \int_{C_R} f(z)e^{i2z}\, dz = \frac{\pi}{e^{2\sqrt{3}}}.$$

$$\left| \operatorname{Im} \int_{C_R} f(z) e^{i2z}\, dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z) e^{i2z}\, dz \right| \quad (*)$$

Notar que: $z \in C_R \Rightarrow |f(z)| \leq \dfrac{R}{R^2-3}$ y $|e^{i2z}| \leq e^{-2y} \leq 1$. $\quad y \geq 0$

Como $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{R}{R^2-3} = 0$, el teorema anterior nos dice que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i2z}\, dz = 0 .$$

Luego:

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{\underbrace{x^2+3}_{\text{es par}}}\, dx = \frac{\pi}{e^{2\sqrt{3}}} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+3}\, dx = \frac{\pi}{2e^{2\sqrt{3}}} \ //$$

Notar que si en $(*)$ acotamos como en ejemplos anteriores se obtiene:

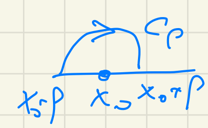
$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{i2z}\, dz \right| \leq \frac{R}{R^2-3} \cdot \pi R = \frac{\pi R^2}{R^2-3} \xrightarrow[R\to\infty]{} \pi \neq 0$$

$\left(\therefore \text{ no se puede deducir que } \int_{C_R} (\cdots) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \right)$.

Teorema: Supongamos que:

a) f tiene un polo simple en $z = x_0 \in \mathbb{R}$, con un desarrollo en serie de Laurent válido en $0 < |z - x_0| < R_2$, con residuo B,

b) C_ρ denota la semicircunferencia superior de $|z - x_0| = \rho$, con $\rho < R_2$, recorrida en sentido horario.



Entonces: $$\lim_{\rho\to 0} \int_{C_\rho} f(z)\, dz = -B\pi i .$$

Dem: $$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-x_0)^n}_{=: g(z)} + \frac{B}{z-x_0} \qquad (0 < |z-x_0| < R_2)$$

$$\therefore \int_{C_\rho} f(z)\, dz = \int_{C_\rho} g(z)\, dz + B \int_{C_\rho} \frac{dz}{z-x_0} .$$

g es continua en $|z - x_0| < R_2$ $\therefore$ g es acotada en $|z - x_0| \leq \rho_0$, con $\rho < \rho_0 < R_2$.

$\therefore\ \exists M \geq 0 \ / \quad |g(z)| \leq M \quad$ si $\quad |z - x_0| \leq \rho_0$.

Luego: $\left| \int_{C_\rho} g(z)\,dz \right| \leq M \cdot \overset{\ell(C_\rho)}{\pi\rho} \Longrightarrow \int_{C_\rho} g(z)\,dz \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. (1)

Por otro lado, $-C_\rho$ se parametriza por: $z = x_0 + \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Entonces:

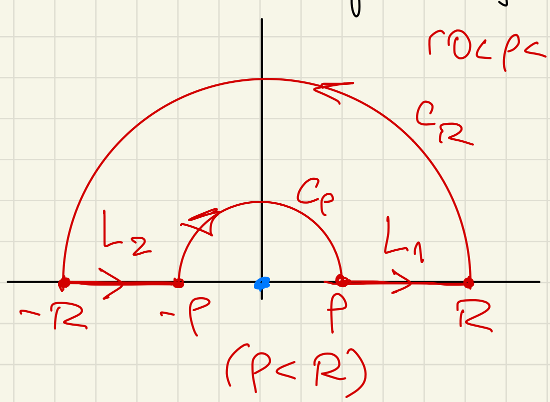
$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = -\int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = -\int_0^{\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \cdot \rho i e^{i\theta}\,d\theta = -i\pi$$

$$\therefore \lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = -i\pi. \quad (2)$$

De (1) y (2) sale el teorema. //

<u>Ejemplo</u>: calculemos la integral de Dirichlet: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Vamos a integrar $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ sobre la curva dada en el dibujo:



$(0 < \rho < R)$ Se agrega la semicircunferencia C_ρ para esquivar la singularidad $z = 0$ de f.

Por Cauchy - Goursat:

$$\left(\int_{L_1} + \int_{C_R} + \int_{L_2} + \int_{C_\rho} \right) f(z)\,dz = 0,$$

o bien:

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

Parametrizaciones $\longrightarrow L_1: \quad z = r, \quad \rho \leq r \leq R$.

$\searrow -L_2: \quad z = -r, \quad \rho \leq r \leq R$.

$$\Rightarrow \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{-L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\rho^R \frac{e^{ir}}{r} dr - \int_\rho^R \frac{e^{-ir}}{r} dz =$$

$$= \int_\rho^R \frac{e^{ir} - e^{-ir}}{r} dr = \int_\rho^R \frac{2i \operatorname{sen} r}{r} dr = 2i \int_\rho^R \frac{\operatorname{sen} r}{r} dr.$$

Entonces:

$$2i \int_\rho^R \frac{\operatorname{sen} r}{r} dr = -\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (*)$$

Por otro lado:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z}\left[1 + \frac{(iz)}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots\right] = \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} z + \frac{i^3}{3!} z^2 + \cdots \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1 .$$

$z = 0$ es un polo simple.

Por el teorema:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i .$$

Además, si $z \in C_R$: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Por Jordan: $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$

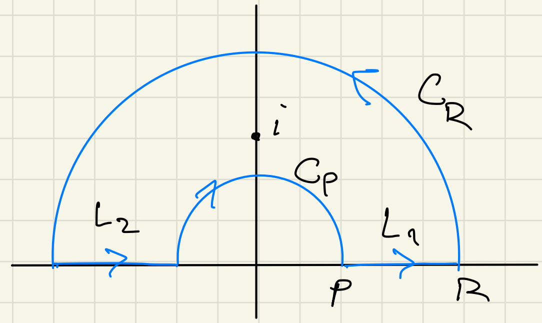
Haciendo $\rho \to 0$, $R \to \infty$ en $(*)$:

$$2i \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} r}{r} dz = \pi i \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} r}{r} dr = \frac{\pi}{2}}.$$

Ejemplo: probar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$.

El integrando tiene singularidades en $0, \pm i$. Usamos una curva como antes:

$C = L_1 + C_R + L_2 + C_\rho$



$0 < \rho < 1 < R$.

No podemos usar la rama principal del logaritmo. Usaremos la rama definida en:

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \neq 0,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\},$$

y ahí definimos la rama: $\ell(z) = \log|z| + i\theta$, con $z = |z|e^{i\theta} \in G$.

Notar que: $\begin{cases} \ell(x) = \log x, & \text{si } x > 0 \\ \ell(x) = \log|x| + i\pi, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Sea $f(z) = \dfrac{\ell(z)}{1+z^2}$, entonces:

$$\left.\begin{aligned} \int_C f(z)\,dz = {} & \int_\rho^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}\, Rie^{i\theta}\,d\theta \\ & + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\log|x| + i\pi}{1+x^2}\,dx + \int_\pi^0 \frac{\log\rho + i\theta}{1+\rho^2 e^{2i\theta}}\,\rho i e^{i\theta}\,d\theta \end{aligned}\right] (*)$$

El único polo de $f(z)$ dentro de C es $z = i$, y es un polo simple:

$$f(z) = \frac{\frac{\ell(z)}{z+i}}{z-i} \quad \therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{\ell(i)}{2i} = \frac{\frac{\pi}{2}i}{2i} = \frac{\pi}{4}.$$

T. Residuo.

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2} i.$$

Por otro lado:

$$\int_\rho^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\overset{\log(-x)}{\overset{\shortparallel}{\log|x|}} + i\pi}{1+x^2}\,dx \xrightarrow{u=-x,\ du=-dx} = 2\int_\rho^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \pi i \int_\rho^R \frac{dx}{1+x^2}.$$

Haciendo: $\rho \to 0^+$, $R \to +\infty$, se llega a: $\to$ en $(*)$

$$\frac{\pi^2 i}{2} = 2\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$
$$+\, i \lim_{R\to\infty} R\int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta - i\lim_{\rho\to 0^+} \rho\int_0^\pi \frac{\log \rho + i\theta}{1+\rho^2 e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta$$

Pero: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ (ejercicio).

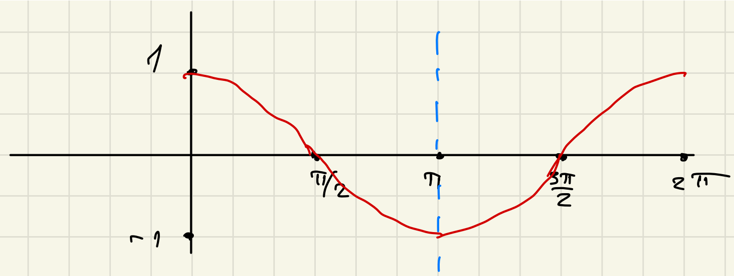
Además, para $r>0$, :

$$\left| r\int_0^\pi \frac{\log r + i\theta}{1+r^2e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta \right| \leq \frac{r\cdot|\log r|}{|1-r^2|}\int_0^\pi d\theta + \frac{r}{|1-r^2|}\underbrace{\int_0^\pi \theta\,d\theta}_{=\pi^2/2}$$

$|1+r^2e^{2i\theta}| \geq |1-r^2|$

$$= \underbrace{\frac{\pi r\,|\log r|}{|1-r^2|} + \frac{r\pi^2}{2\,|1-r^2|}}_{\text{tiende a } 0 \text{ para } r\to 0^+ \text{ y para } r\to+\infty.}$$

Entonces: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$ //.



Ejemplo: probar que, para $a>1$, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

Si $z = e^{i\theta}$ entonces $\bar z = \frac{1}{z}$ y entonces:

$$a + \cos\theta = a + \frac{1}{2}(z+\bar z) = a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+2az+1}{2z}$$

Así: $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} = -i\int_C \frac{dz}{z^2+2az+1}$,

donde C es la circunferencia unidad positiva.

$$\left(\int_C \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a+\cos\theta)\cancel{e^{i\theta}}}\, i\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta = i\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}\,d\theta \right).$$

Resolvamos: $z^2+2az+1=0 \Rightarrow z = \dfrac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$.

Llamemos: $\alpha = -a + (a^2-1)^{1/2}$, $\beta = -a-(a^2-1)^{1/2}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ $(\alpha\neq\beta)$

Como $a>1$ se tiene: $|\alpha|<1$, $|\beta|>1 \therefore$ sólo α está en el interior de C, y α es un polo simple. Luego:

$$\int_C \frac{dz}{z^2+2az+1}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z)$$

$$\left(f(z) = \frac{1}{z^2+2az+1} = \frac{\frac{1}{z-\beta}}{z-\alpha} \right)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{\alpha-\beta}$$

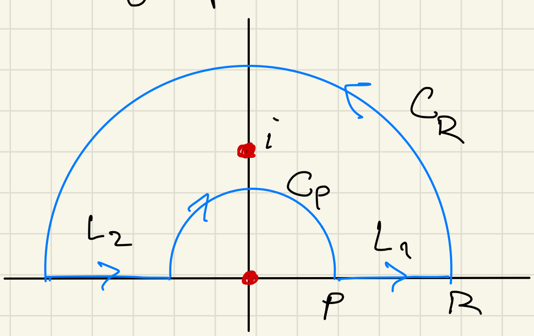
$$= 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Entonces:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = -i\int_C \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad //$$

Ejemplo: Probar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(1-a)\pi}{4\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}$ $(-1<a<3)$.

Sea $f(z) = \dfrac{z^a}{(z^2+1)^2} = \dfrac{\exp(a\,\ell(z))}{(z^2+1)^2}$, con $\ell(z)$ la misma rama del ejemplo anterior. Integramos f sobre la misma curva.



$C = L_1 + C_R + L_2 + C_\rho$

(f tiene singularidades en $0, \pm i$).

$0<\rho<1<R$.

$$\int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \int_{C_\rho} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

Notar que: $f(z) = \dfrac{\frac{\exp(a\,\ell(z))}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}$, $\dfrac{\exp(a\,\ell(z))}{(z+i)^2} =: \varphi(z)$ $\rightarrow$ i es un polo de orden 2.

φ es analítica en i y $\varphi(i)\neq 0$.

$\therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \varphi'(i).$

$$= \frac{\exp\left((a-1)\ell(i)\right)}{-8i}\left[a\cdot 2i - 2i\right]$$

$$= \frac{e^{(a-1)\frac{\pi}{2}i}}{-8i}\, 2i(a-1)$$

$$= -\frac{1}{4}\, e^{a\frac{\pi}{2}i}(-i)(a-1)$$

$$= \frac{i(a-1)}{4}\, e^{a\frac{\pi}{2}i}.$$

$$\varphi(z) = \frac{z^a}{(z+i)^2}$$

$$\varphi'(z) = \frac{a z^{a-1}(z+i)^2 - z^a\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$\varphi'(z) = \frac{z^{a-1}}{(z+i)^3}\left[a(z+i) - 2z\right]$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} L_1: & z = r,\ \rho \le r \le R \\ -L_2: & z = -r,\ \rho \le r \le R. \end{cases}$$

$$\int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz - \int_{-L_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_\rho^R \frac{\exp[a\cdot\log r]}{(r^2+1)^2}\,dr + \int_\rho^R \frac{\exp[a(\log r + i\pi)]}{(r^2+1)^2}\,dr$$

$$= \int_\rho^R \frac{r^a}{(r^2+1)^2}\,dr + e^{ia\pi}\cdot\int_\rho^R \frac{r^a}{(r^2+1)^2}\,dr$$

$$= (1+e^{ia\pi})\int_\rho^R \frac{r^a}{(r^2+1)^2}\,dr.$$

Luego, en (*):

$$(1+e^{ia\pi})\int_\rho^R \frac{r^a}{(r^2+1)^2}\,dr + \int_{C_\rho} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{i(a-1)}{4}e^{ia\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi(1-a)}{2}e^{ia\frac{\pi}{2}}.$$

Veamos que: $\displaystyle\int_{C_\rho} f(z)\,dz \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$ y $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$

Notar que $|z^a| = r^a$ si $z = r\cdot e^{i\theta}$.

Además, si $z \in C_\rho$: $|z^2+1| \geq ||z|^2-1| = 1-\rho^2$ $(\rho<1)$

y si $z \in C_R$: $|z^2+1| \geq R^2-1$ $(R>1)$.

$$\therefore \left| \int_{C_\rho} \frac{z^a}{(z^2+1)^2}\,dz \right| \leq \frac{\rho^a}{(1-\rho^2)^2}\pi\rho = \frac{\pi\rho^{a+1}}{(1-\rho^2)^2} \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

(pues $a+1>0$).

Además:

$-1<a<3 \Rightarrow 0<a+1<4$

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^a}{(z^2+1)^2}\,dz \right| \leq \frac{R^a}{(R^2-1)^2}\pi R = \frac{\pi R^{a+1}}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

(pues $a+1<4$)

Así, tomando límite $\rho\to 0^+$ y $R\to+\infty$:

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{(r^2+1)^2}\,dr = \frac{1}{1+e^{ia\pi}}\frac{\pi(1-a)}{2}e^{ia\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(1-a)}{2}\frac{e^{ia\pi/2}}{1+e^{ia\pi}}\cdot\frac{e^{-ia\pi/2}}{e^{-ia\pi/2}}$$

$\boxed{¿a=1?}$

$$= \frac{\pi(1-a)}{2}\frac{1}{e^{-ia\pi/2}+e^{ia\pi/2}} = \frac{\pi(1-a)}{4}\cdot\frac{1}{\cos(a\pi/2)}$$

$$\lim_{a\to 1}\frac{1-a}{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} \underset{L'H}{=} \lim_{a\to 1}\frac{-1}{-\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cdot\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{\pi}}.$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{r^a}{(r^2+1)^2}\,dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}, \quad \text{si } a=1.$$

— o —

$$\int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^2}\,dr = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{r}{(r^2+1)}\,dr = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2(r^2+1)}\Big|_0^R$$

$$\int \frac{r}{(r^2+1)^2}\,dr = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{u}$$

$\boxed{\begin{array}{l} u=r^2+1 \\ du=2r\,dr\end{array}}$ $= -\dfrac{1}{2(r^2+1)}+C$.

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2(R^2+1)}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1/2.$$

Ceros de funciones analíticas.

Supongamos que f es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$. Sabemos que $\exists\, f^{(n)}(z_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición: Se dice que z_0 es un cero de orden m de f (con $m \in \mathbb{N}$) si:

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

$$\text{y } \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

(*) IR A PÁGINA SIGUIENTE

Teorema: Sea f analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:

a) f tiene un cero de orden m en z_0.

b) existe una función g, que es analítica y no nula en z_0, tal que:

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z).$$

(*) ¿Puede darse $f^{(m)}(z_0) = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$?

f analítica en $z_0 \Rightarrow f$ tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en z_0 en un disco $|z - z_0| < \varepsilon$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

$f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n \Rightarrow f(z) = 0$ $\forall z \,/\, |z - z_0| < \varepsilon$.

$\Rightarrow f \equiv 0$ en un disco centrado en 0.

← VOLVER A LA PÁGINA ANTERIOR

Dem: a) $\Rightarrow$ b) Como f es analítica en z_0, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que f tiene un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1} + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^{m+2} + \dots$$

$$= (z-z_0)^m \underbrace{\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2 + \dots \right]}_{\overset{!!}{g(z)}}$$

en $|z-z_0|<\varepsilon$.

Como la serie es convergente en $|z-z_0|<\varepsilon$, resulta que g es analítica en z_0, y además: $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$, y listo.

b) $\Rightarrow$ a) Como g es analítica en z_0, tiene un desarrollo en serie de potencias

$$g(z) = g(z_0) + \frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots$$

en algún disco $|z-z_0|<\varepsilon$. Como $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, llegamos a:

$$f(z) = g(z_0)\cdot(z-z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^{m+2} + \dots$$

para $|z-z_0|<\varepsilon$, y entonces éste es el desarrollo en series de Taylor para f en ese disco. Como no hay potencias $(z-z_0)^j$ con $j<m$, se tiene que:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad y$$

$$f^{(m)}(z_0) = m!\, g(z_0) \neq 0 \therefore \quad z_0 \text{ es un cero de orden } m.$$

//

Ejemplo: El polinomio $f(z)=z^4-1$ tiene un cero en $z_0=1$. ¿De qué orden es?

$$f(z) = z^4-1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)\underbrace{(z+1)(z^2+1)}_{g(z)}$$

$g(z)$, con $g(1)\neq 0$ y analítica.

$\Rightarrow$ $z_0=1$ es un cero de orden 1.

Otra manera: $f(z)=z^4-1 \Rightarrow f(1)=0$.

$f'(z)=4z^3 \Rightarrow f'(1)=4\neq 0$

Ahora veremos que si f no es idénticamente 0, entonces todos los ceros de f son aislados. Es decir, si z_0 es un cero de f entonces $\exists\, \varepsilon>0 \;/\; f(z)\neq 0$ si $0<|z-z_0|<\varepsilon$. (y $f\not\equiv 0$)

<u>Teorema</u>: Si f es analítica en z_0 y $f(z_0)=0$ pero f no es idénticamente 0 en ningún entorno de z_0, entonces $\exists\, \varepsilon>0 \;/\; f(z)\neq 0$ si $0<|z-z_0|<\varepsilon$.

<u>Dem</u>: Como $f\not\equiv 0$, z_0 es un cero de orden m para algún $m\in\mathbb{N}$. Entonces: $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ con g analítica y no nula en z_0.

Como g es continua y $g(z_0)\neq 0$ entonces $\exists\, \varepsilon>0 \;/\; g(z)\neq 0$ si $|z-z_0|<\varepsilon$. Luego, $f(z)\neq 0$ si $0<|z-z_0|<\varepsilon$. //

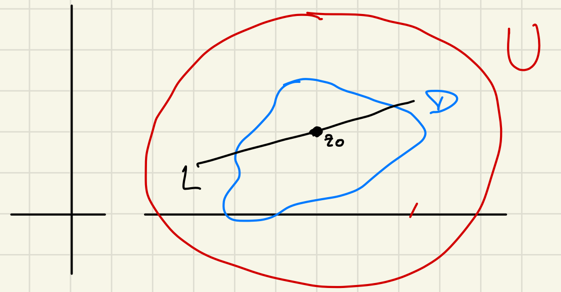
¿Qué ocurre cuando hay ceros no aislados?

Teorema: Dados una función f y un punto z_0, supongamos que:

a) f es analítica en un disco $B_R(z_0) =: U$.

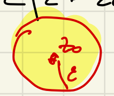
b) $f(z) = 0$ para todo z en un dominio D que contiene a z_0, o bien, en un segmento L que contiene a z_0.

Entonces $f \equiv 0$ en U.



Dem: Notemos primero que $f \equiv 0$ en un abierto V / $z_0 \in V \subseteq U$.

En efecto, si esto no ocurriera para ningún V, entonces $f(z) \neq 0$ $\forall z \,/\, 0 < |z - z_0| < \varepsilon$ (p/ algún $\varepsilon > 0$) (por Teorema anterior).



Pero esto contradice la hipótesis b).

Como $f \equiv 0$ en V, tenemos que $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, y esto dice que la serie de Taylor de f centrada en 0 es nula.

Pero este desarrollo en serie también vale para f en todo U, pues f es analítica allí $\therefore$ $f \equiv 0$ en U. //

Relación entre ceros y polos.

Teorema: Supongamos que:

a) dos funciones f y g son analíticas en un punto z_0,

b) $f(z_0) \neq 0$ y g tiene un cero de orden m en z_0.

Entonces $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0.

Dem: Como g tiene un cero de orden m en z_0, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad aislada en z_0

Sabemos además que $g(z) = (z-z_0)^m h(z)$ para alguna función h analítico y no nulo en z_0. Entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m h(z)} = \frac{f(z)/h(z)}{(z-z_0)^m}.$$ Si $\varphi(z) := \frac{f(z)}{h(z)}$,

entonces φ es analítico y no nulo en z_0. Luego, $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0. //

Ejemplo: La función $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$ tiene una singularidad en $z_0 = 0$.

Si $g(z) = 1-\cos z$, entonces:

$$g(z) = 1-\cos z \Rightarrow g(0) = 0$$
$$g'(z) = \operatorname{sen} z \Rightarrow g'(0) = 0$$
$$g''(z) = \cos z \Rightarrow g''(0) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow z_0 = 0$ es un cero de orden 2 de g.

Entonces $z_0 = 0$ es un polo de orden 2 de f. //

Teorema: Sean f y g analíticos en z_0. Si

$f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$,

entonces z_0 es un polo simple de $\frac{f(z)}{g(z)}$, y $\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Dem: Notar que z_0 es un cero de orden 1 de g.

Entonces: $\longrightarrow$ (i) $g(z) = (z-z_0) h(z)$ con h analítica y no nula en z_0.

$\searrow$ (ii) z_0 es un polo simple de $f(z)/g(z)$.

Además, $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{z-z_0}$, con $\varphi(z) = \frac{f(z)}{h(z)}$. Como el polo es simple, vale que: $\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \varphi(z_0) = \frac{f(z_0)}{h(z_0)}$. Pero:

$g'(z) = h(z) + (z-z_0) h'(z_0) \Rightarrow g'(z_0) = h(z_0)$, y listo. //

Ejemplo: La función $\cot g\, z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

tiene singularidades aisladas en los ceros de $g(z) = \operatorname{sen} z$.

Es decir, en los puntos $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora: $\cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$, $g(n\pi) = 0$, $g'(n\pi) = \cos(n\pi)$
$= (-1)^n \neq 0$.

$\therefore$ $n\pi$ es un polo simple $\forall n \in \mathbb{Z}$, y más aún,

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} \cot g(z) = \frac{\cos(n\pi)}{g'(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1.$$

Ejemplo: $p(z) = \dfrac{z}{z^4+4}$ tiene una singularidad en $z_0 = 1+i$, que es un cero de z^4+4. Si hacemos $f(z) = z$, $g(z) = z^4+4$, tenemos que: $f(1+i) = 1+i \neq 0$, $g(1+i) = 0$, $g'(i+1) = 4(1+i)^3 \neq 0$

$\Rightarrow$ z_0 es un polo simple de p.

El residuo es:

$$\operatorname*{Res}_{z=1+i} p(z) = \frac{f(1+i)}{g'(1+i)} = \frac{1+i}{4(1+i)^3} = \frac{1}{4(1+i)^2} = \frac{1}{4 \cdot 2i} = -\frac{1}{8} i.$$

¿Otra manera?

$$\frac{z}{z^4+4} = \frac{z}{(z-(1+i))\underbrace{q(z)}_{\text{pol. de grado 3}}} \qquad \varphi(z) = \frac{z}{q(z)}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=1+i} p(z) = \varphi(1+i) = \frac{1+i}{q(1+i)}.$$

$z^4+4 \;\; \underline{\big|\, z-(1+i)}$

más complicado.

Repaso: $\mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}) = \{$ polinomios con coeficientes complejos de grado $\leq n\}$.

por ejemplo: $n=3$: $z+z^2 \in \mathcal{P}_{\leq 3}(\mathbb{C})$

$-2z^3 \in$ "

$z^4 \notin$ " .

$\mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$-espacio vectorial.

$p \in \mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C}) \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m, \quad m \leq n.$

Una base de $\mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{C})$ es $\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \to \dim = n+1$.

$\mathcal{P}(\mathbb{C}) =$ ~~todos~~ los polinomios $\to \mathbb{C}$- e.v.

Una base es: $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\} \to \dim = \infty$.

Esta es base de todas las series

Capítulo 8: Series y transformada de Fourier.

La idea en este capítulo es poder escribir a funciones de cierto espacio como una serie que involucra a las funciones $\operatorname{sen}(nx)$, $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

Primero recordamos un poco de álgebra lineal.

Teorema (Desigualdad de Besse):
Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ es una base ortonormal de un espacio producto interno $(V, \langle , \rangle)$, entonces $\forall v \in V$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n\rangle|^2$ converge. Más aún, vale la desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Corolario (Teorema de Riemann-Lebesgue):

Con las mismas hipótesis del Teorema anterior, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \langle v, e_n \rangle = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Ahora algo de análisis:

Definición (convergencia puntual): Sea $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b]$. Decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, es decir, para cada $x \in [a,b]$ y para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\ N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N(\varepsilon, x) \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Definición (convergencia uniforme): Sea $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b]$. Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que: $n \geq N(\varepsilon) \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$.

Notar que: convergencia uniforme $\implies$ convergencia puntual.

Pero la recíproca no vale.

—— o ——

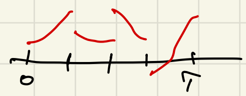
Definición de Series de Fourier:

Consideraremos funciones del siguiente espacio:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódicas y continuas a trozos. Es decir,

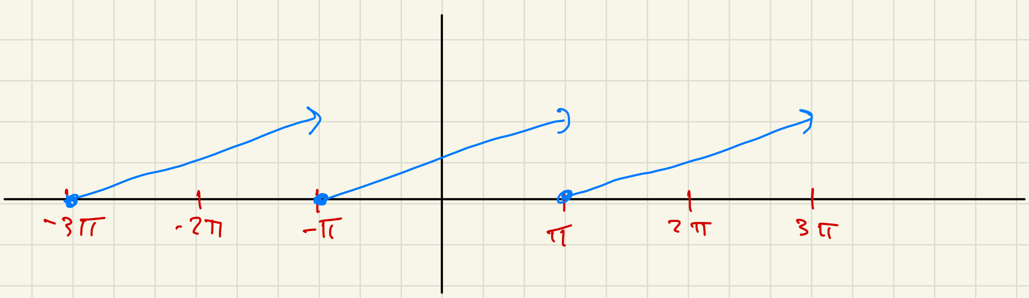
i) $\exists\, T>0 \;/\; f(x+T)=f(x) \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

ii) Existen puntos $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k=T$ en $[0,T]$ tales que $f\big|_{(t_i,t_{i+1})}$ es continua. (Puede no estar definida en t_i).
Además, $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\exists \lim\limits_{x\to T^-} f(x)$

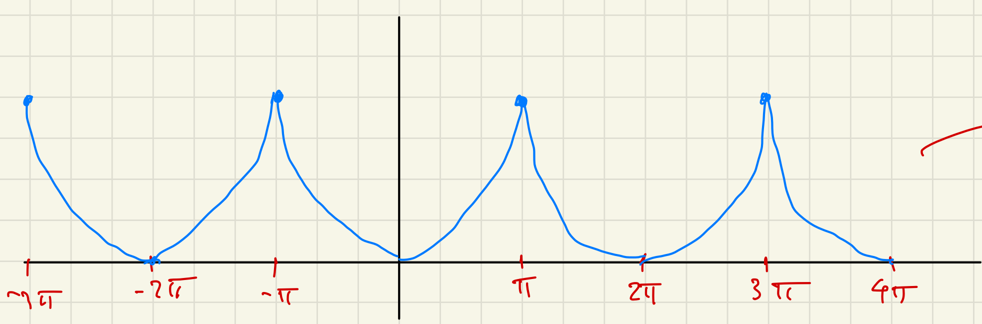


Asumiremos primero que $T=2\pi$, por lo que si conocemos f en un intervalo de longitud 2π, la conoceremos en todo $\mathbb{R}$. Luego, asumiremos $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ (si $f(-\pi)\neq f(\pi)$, f tiene discontinuidades en $\pm\pi$).

Teorema: La sucesión de funciones $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \ldots\right\}$ forma una sucesión ortonormal en el espacio $V:=\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C} \mid f \text{ es continua a trozos}\}$. El producto interno considerado en V es: $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx$.



Como $\lim\limits_{x\to(-\pi)^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$, la extensión periódica de f a todo $\mathbb{R}$ presenta discontinuidades en todos los puntos: $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.



Esta extensión es continua en $\mathbb{R}$.

Dem: Usando las propiedades ~~básicas~~ de la integral se prueba que $(V, \langle , \rangle)$ es un espacio producto interno.

Veamos que el conjunto del enunciado es ortonormal:

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha.$

- $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = 1.$

fácil.

- $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(nx) \right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = 0$

$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$

- $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx) \right\rangle = 0$

- $\langle \operatorname{sen}(nx), \operatorname{sen}(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - 0\right) = 1.$$

- $\underset{(n \neq m)}{\langle \operatorname{sen}(nx)}, \operatorname{sen}(mx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right] dx$$

$\cancel{\cos(mx)\cos(nx)} + \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) - \cancel{\cos(mx)\cos(nx)} + \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)$

$$= 0.$$

- $\langle \operatorname{sen}(nx), \cos(mx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)\right] dx$$

$$= 0 \quad (\text{para } \forall m, n)$$

- $\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(2nx))\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi + 0\right) = 1.$$

- $\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx$
  $(n \neq m)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]\,dx$$

$$= 0. \quad //$$

Se puede probar que $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \ldots \}$ es una base ortonormal del espacio V. Luego, si $f \in V$, vale que:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad a_0, a_n, b_n \in \mathbb{C}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

¿Qué significa la tilde? Primero necesitamos un teorema.

Teorema (Dirichlet): Si $f \in V$ (y ciertas hipótesis extra) entonces para $x \in [-\pi, \pi]$ la serie de Fourier de f converge al valor:

$$\frac{1}{2}\left(f(x-) + f(x+)\right), \text{ donde}$$

$$f(x-) = \lim_{y \to x^-} f(y), \quad f(x+) = \lim_{y \to x^+} f(y).$$

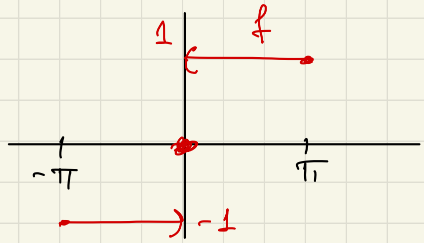
Más aún, en los extremos $x = \pm\pi$ la serie converge a:

$$\frac{1}{2}\left(f(\pi-) + f(\pi+)\right).$$

Volviendo a: $f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$.

En las discontinuidades, la serie converge al valor dado por el Teorema de Dirichlet. En los puntos x donde f es continua, la serie converge a $f(x)$ y $\sim$ significa $=$.

Ejemplo:



La serie de Fourier de f converge a $f(x)$ $\forall x \in (-\pi,\pi)-\{0\}$

En 0, la serie converge a:

$\frac{1}{2}\left(f(0-)+f(0+)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0.$

En $x = \pm\pi$, la serie converge a 0.

Pero... ¿Cómo calculamos los coeficientes a_n y b_n?

Por un lado, $f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$.

Por otro lado, se tiene $f = \sum_k \langle f, e_k\rangle e_k$ (vale en todo esp. producto interno con $\{e_i\}$ BON)

$$= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum \langle f, \cos(nx)\rangle \cos(nx) + \sum \langle f, \operatorname{sen}(nx)\rangle \operatorname{sen}(nx)$$

$(V, \langle,\rangle)$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. b.o.n

$V = \sum a_j e_j$.

$\langle V, e_k\rangle = \sum_j a_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{=\delta_{jk}} = a_k$

$V = \sum_j \langle v, e_j\rangle e_j$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \langle f, \cos(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

y

$$b_n = \langle f, \operatorname{sen}(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

Pero, si escribimos: $\frac{a_0}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\,a_0)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\,a_0)\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

nuevo, $a_0 := \sqrt{2}\,a_0$

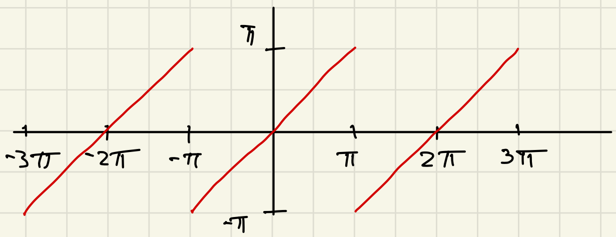
Por lo tanto, escribiremos: $\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),}$

Con: $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots}$

SERIE DE FOURIER.

Ejemplo: determinar la serie de Fourier para:

$$f(x) = x \quad \text{en} \quad (-\pi, \pi), \quad f(x) = f(x+2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Calculemos a_n y b_n con las fórmulas anteriores.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{v'}\, dx = \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\, dx$$

$(n \neq 0)$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen}(n\pi) \right) - \frac{1}{\pi n} \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2 \pi} \left(\cos(n\pi) - \cos(-n\pi) \right) = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{v'}\, dx$$

$(n \neq 0)$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

$\cos(n\pi) = (-1)^n.$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) - \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right) + \frac{1}{\pi n} \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

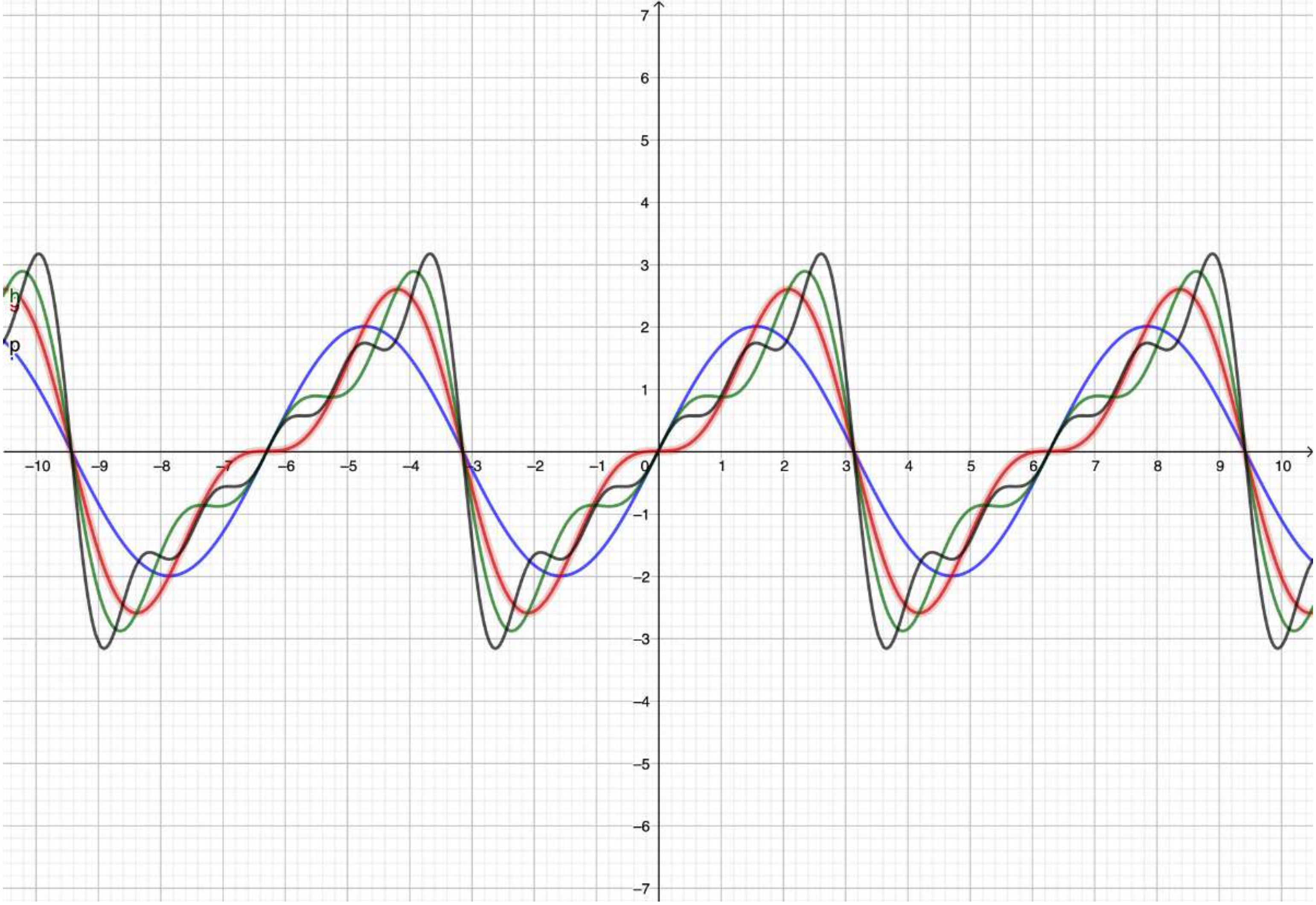
$$= -\frac{2}{n} (-1)^n - \frac{1}{\pi n^2} \left(\cos(n\pi) - \cos(n\pi) \right)$$

$$= -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Luego: $\displaystyle f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$

Para $x \neq (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$: $\displaystyle f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$

Para $x = (2k+1)\pi$, la serie converge a: $\displaystyle \frac{1}{2} (\pi + (-\pi)) = 0.$



En general, podemos deducir la serie de Fourier para la función $f(x) = ax+b$, $x \in [-\pi,\pi]$ (periódica):

$$f(x) = ax+b \sim b - 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

<u>Ejemplo</u>: hallar la serie de Fourier para:

$$f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi,\pi), \quad f(x) = f(x+2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Conviene pasar a números complejos:

$$a_n + i\, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{inx}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}\, dx.$$

Entonces:

$$a_n + i b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{e^{(1+in)x}}{1+in}\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(1+in)}\left(e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi(1+in)}\left(e^{\pi}\cdot e^{in\pi} - e^{-\pi}\cdot e^{-in\pi}\right) \qquad \left(e^{in\pi} = (-1)^n = e^{-in\pi}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi}\cdot \operatorname{senh}(\pi)\cdot \frac{1-in}{1+n^2}$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\operatorname{senh}(\pi) + i\left(-\frac{2(-1)^n n}{\pi(1+n^2)}\cdot \operatorname{senh}(\pi)\right).$$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\operatorname{senh}(\pi), \quad b_n = -\frac{2(-1)^n n}{\pi(1+n^2)}\cdot \operatorname{senh}(\pi)}$$

En particular, $a_0 = \frac{2}{\pi}\operatorname{senh}(\pi)$.

Luego: $$f(x) \sim \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left(\cos(nx) - n\operatorname{sen}(nx)\right).$$

Es decir, $f(x) =$ [la serie] si $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

En los puntos $x = (2k+1)\pi$, la serie converge a:

$$\frac{1}{2}\left(f(\pi) + f(-\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right) = \cosh(\pi).$$

Usando esta expresión, podemos calcular la suma de ciertas series. Por ejemplo: evaluando en $x = 0$:

$$1 = e^0 = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2}{\pi}\operatorname{senh}(\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\operatorname{senh}(\pi)}\cdot\left(1 - \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{cosech}(\pi) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

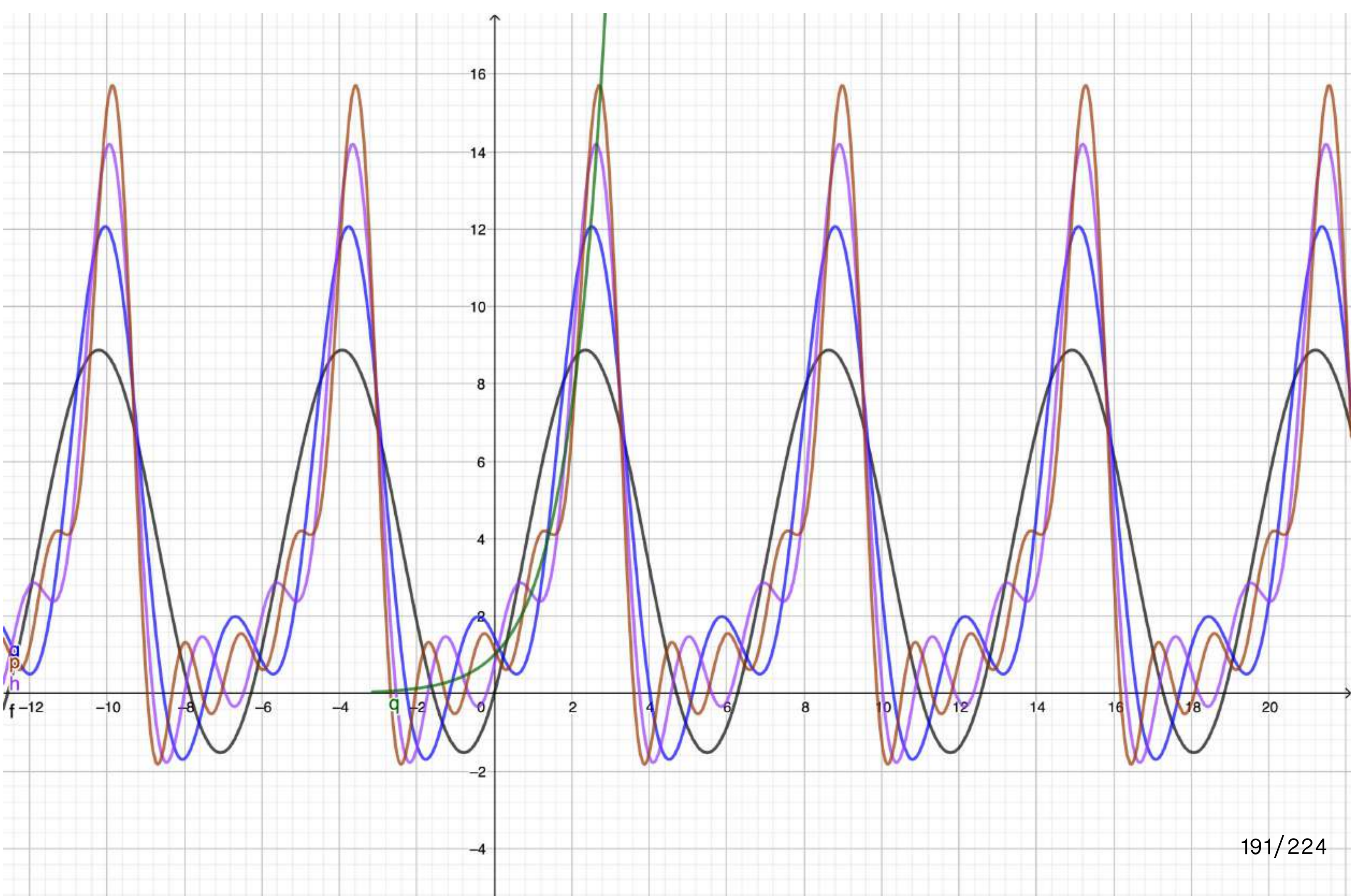
¿Qué pasa si evaluamos en $x=\pi$? Sabemos que converge a $\cosh(\pi)$. Luego:

$$\cosh(\pi) = \frac{\text{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\,\text{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left(\overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n} - \overbrace{n\,\text{sen}(n\pi)}^{=0}\right)$$

$$= \frac{\text{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\,\text{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\,\text{senh}(\pi)}\cdot\left(\cosh(\pi) - \frac{\text{senh}(\pi)}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\text{cotgh}(\pi) - \frac{1}{2}$$



Ahora podemos considerar funciones periódicas con otros períodos.
Supongamos que el período es $2T$:

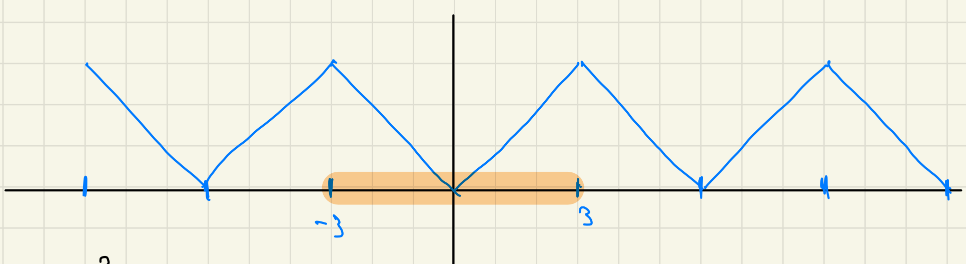
$$x \longmapsto \frac{\pi x}{T}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right), \quad -T<x<T,$$

donde:
$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx.$$

Ejemplo: calcular la serie de Fourier de:
$$f(x) = |x|, \quad -3\le x\le 3, \qquad f(x) = f(x+6) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notar que f es continua en $\mathbb{R}$:



$$\int_{-a}^{a} (f.\text{par}) = 2\cdot\int_{0}^{a} (f.\text{par}).$$

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}|x|\,dx = 3.$$

Para $n \geq 1$.
$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \overbrace{|x|\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}^{\text{par}}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}_{v'}dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[x\cdot\frac{3}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{3}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right)\Big|_0^3 = \frac{6}{(n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\therefore \quad a_n = \begin{cases} 0 & , \text{ si } n \text{ es par} \\ -\dfrac{12}{(n\pi)^2} & , \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad , \; n \geq 1 .$$

O bien: $\quad a_{2k} = 0 \quad \forall k \geq 1, \qquad a_{2k+1} = -\dfrac{12}{(2k+1)^2 \pi^2}, \quad k \geq 0.$

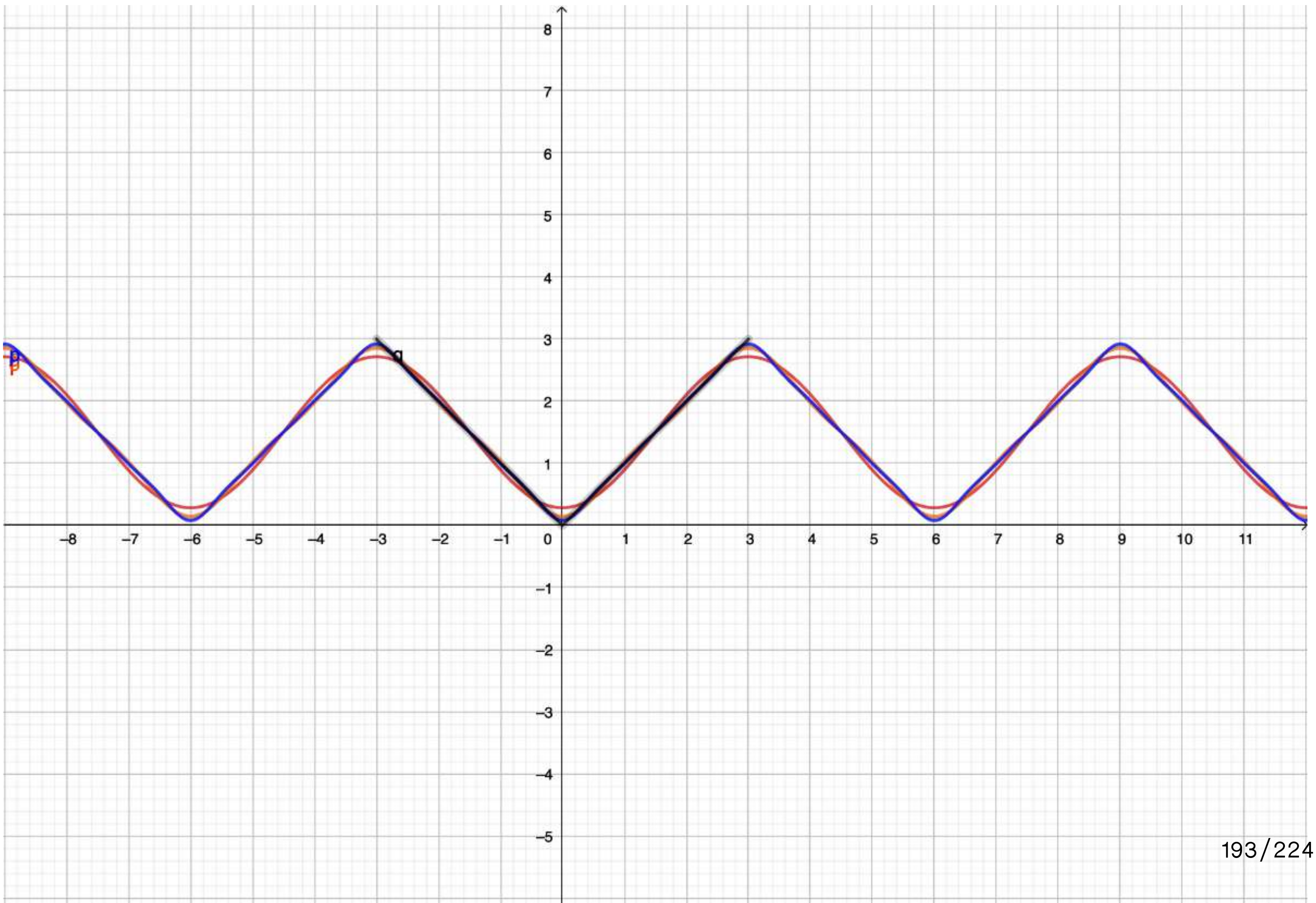
Ahora: $\quad b_n = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_{-3}^{3} \underbrace{|x| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}_{\text{impar}} = 0 \quad \forall n.$

Luego,

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)}{3} \pi x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $x = 0$: $\quad \dfrac{3}{2} = \dfrac{12}{\pi^2} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{12}$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$



Series de Fourier de funciones pares e impares.

Supongamos que: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$,

$x \in [-\pi, \pi]$.

<u>Proposición</u>: a) Si f es par entonces $b_n = 0 \ \forall n$.

b) Si f es impar entonces $a_n = 0 \ \forall n$.

y asumamos f continua en $[-\pi, \pi]$.

<u>Dem</u>: a) Sea f par, y calculemos b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \operatorname{sen}(nx)}_{\text{continua}} dx = \frac{1}{\pi} [F_n(\pi) - F_n(-\pi)], \text{ para}$$

una función F_n tal que $F_n'(x) = f(x) \operatorname{sen}(nx) \to$ es una función impar.

Podemos suponer $F_n(0) = 0$. Entonces:

$$\frac{d}{dx} (F_n(x) - F_n(-x)) = f(x) \operatorname{sen}(nx) - f(x) \operatorname{sen}(nx) = 0 \quad \forall x \ \therefore \ F_n(x) - F_n(-x) = c.$$

Como $F_n(0) = 0$, resulta $c = 0$ y $\therefore$ $F_n(x) = F_n(-x) \ \forall x$.
(F_n par).

Luego, $b_n = 0$.

Si f es continua a trozos, notar que si $0 < t_i < \pi$ es una discontinuidad de f, entonces $-t_i$ también lo es, y usando esto se prueba también $b_n = 0$.

b) La demostración es similar (ejercicio). //.

<u>Ejemplo</u>: determinar la serie de Fourier de

$$f(x) = x^2, \ -\pi \le x \le \pi, \quad f(x) = f(x + 2\pi) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como f es par, sabemos que $b_n = 0 \ \forall n$. Calculemos a_n.

(continua en $\mathbb{R}$).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2 .$$

y si $n \neq 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \overset{\text{par}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

$$\left[\ \int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx = x^2\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \int \underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}}_{v'}\,dx\right.$$

$$= x^2\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{2}{n}\left[-x\cdot\frac{\cos(nx)}{n} + \int\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right]$$

$$\left.= x^2\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{2}{n^2}\,x\cdot\cos(nx) - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\ \right]$$

$$\therefore\ a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\cdot\pi\cdot\cos(n\pi)\right) = (-1)^n\frac{4}{n^2} .$$

Luego,
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx), \qquad x\in[-\pi,\pi] .$$

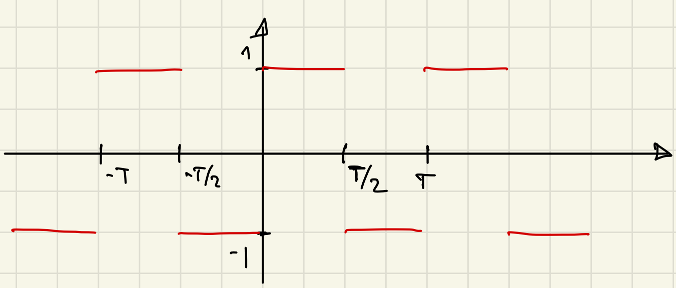
Haciendo $x=0$:
$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \left(= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\right)$$

Si hacemos $x=\pi$:
$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6} .$$

Ejemplo: Sea
$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -T/2 \le x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \le x < T/2 \end{cases}, \quad f(x) = f(x+T)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$



Se puede pensar que f un circuito eléctrico que alterna entre dos valores con período T.

Busquemos la serie de Fourier correspondiente a f. Como f es impar, los coeficientes a_n se anulan $\forall n$. Para b_n:

$$b_n = \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T/2}\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)}^{\text{par}} dx$$

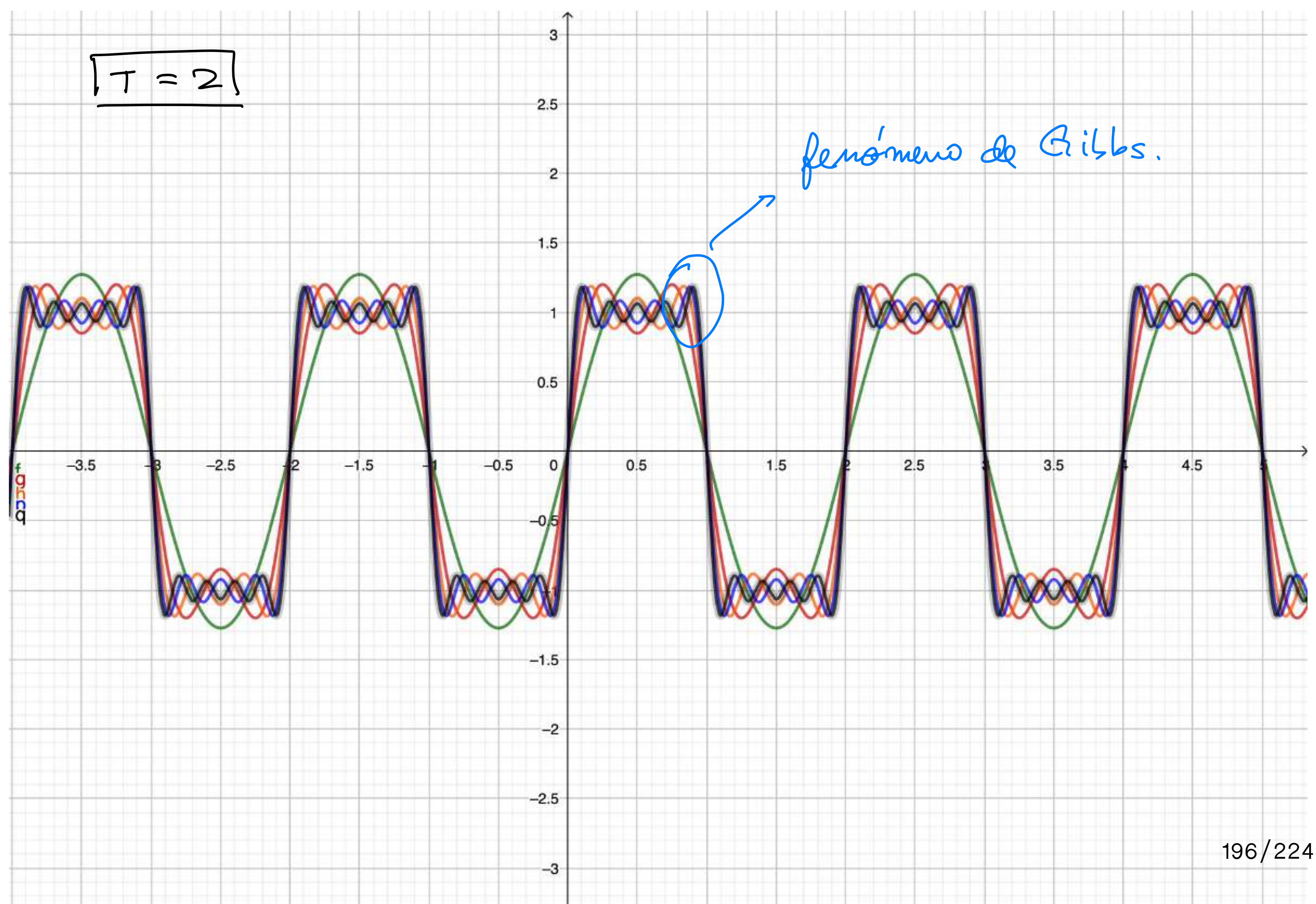
$$= \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \left(-\frac{T}{2n\pi} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right)\Bigg|_0^{T/2}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cdot \left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impar}. \end{cases}$$

Luego: $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\omega x) + \frac{\operatorname{sen}(3\omega x)}{3} + \dots\right)$

donde $\omega = 2\pi/T$ se llama la frecuencia angular.

La serie converge a $f(x)$ si $x \neq \frac{nT}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, y a 0 si $x = \frac{nT}{2}$.



Series de Fourier complejas.

$(a_n, b_n \in \mathbb{R})$

Supongamos que: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Podemos escribir: $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$

$$\operatorname{sen}(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$\therefore \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-inx} \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde: $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Usando las expresiones para a_n y b_n podemos escribir:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Esta es la forma compleja de la serie de Fourier de f, que puede ser más fácil de calcular.

Series de Fourier para funciones definidas en $[0, \pi]$

continua a trozos

Supongamos que tenemos una función $f: [0, \pi] \to \mathbb{C}$. Para obtener su serie de Fourier, podríamos extenderla de manera arbitraria a una función continua a trozos definida en $[-\pi, \pi]$. Hay dos maneras naturales:

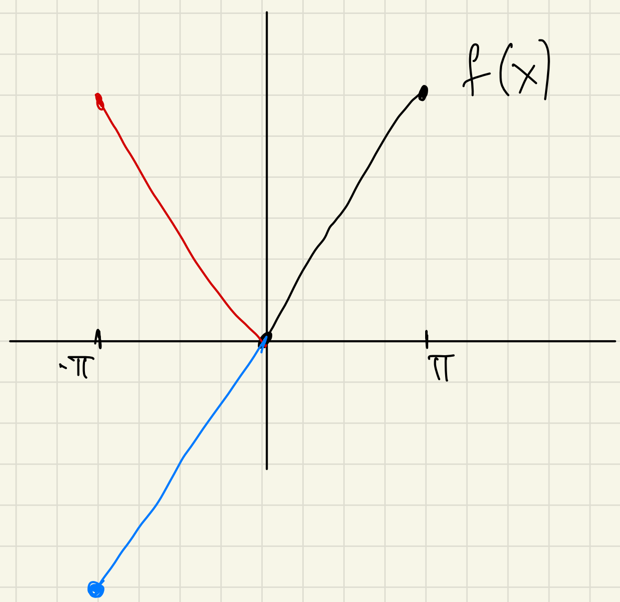
(i) $f(x) = f(-x)$, $x \in [-\pi, 0]$.

(ii) $f(x) = -f(-x)$, $x \in [-\pi, 0]$

En (i), f definida en $[-\pi,\pi]$ es par y su serie de Fourier contiene sólo los términos $\cos(nx)$.
En (ii), f definida en $[-\pi,\pi]$ es impar y su serie de Fourier contiene sólo los términos $\operatorname{sen}(nx)$.

<u>Ejemplo</u>: determinemos las series de Fourier de senos y de cosenos de $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t^2+t$.

Si la extendemos de manera par, obtenemos que los coeficientes de la serie son:
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2+t)\cos(nt)\,dt\,,\quad b_n=0.$$
Si la extendemos de manera impar, los coeficientes son:
$$a_n'=0,\quad b_n'=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2+t)\operatorname{sen}(nt)\,dt.$$



(i) $f(x)=f(-x)$ par

(ii) $f(x)=-f(-x)$ impar.

Podemos calcular a_n y b_n' juntos:

$$a_n + i b_n' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^2+t) e^{int} \, dt$$ (ejercicio).

Aplicando integración por partes dos veces se llega a:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi+1}{n^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\right], \quad b_n' = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2+\pi}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right]$$

y $a_0 = 2\left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2}\right]$.

Luego, la serie par para f es:

$$\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi+1}{n^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\right)\cos(nt), \quad t \in (0,\pi),$$

mientras que la serie impar es:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi^2+\pi}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\operatorname{sen}(nt), \quad t \in (0,\pi).$$

¿Por qué encontramos dos series distintas para f?

Cuando estamos considerando sólo el intervalo $[0,\pi]$, la sucesión de funciones $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \ldots$

ya no es más una base.

En cambio, las sucesiones $\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos(2x), \cos(3x), \ldots$

y $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(3x), \ldots$ son, separadamente, bases.

Propiedades de las series de Fourier.

Veamos primero cómo se comportan con respecto a la derivación y a la integración.

Teorema (derivación):

Si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y su derivada f' es continua a trozos en $(-\pi,\pi)$, y si f se desarrolla en serie de Fourier como

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right)$$

entonces f' se desarrolla en serie de Fourier como

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n a_n \operatorname{sen}(nx) + n b_n \cos(nx)\right]$$

En cambio, el teorema para integrar series de Fourier se aplica a funciones más generales.

Teorema (integración):

Si f es continua a trozos en $[-\pi,\pi]$ y tiene una serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right)$$

entonces, para cada $x \in [-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{b_n}{n}\left(\cos(nx) - \cos(n\pi)\right)\right].$$

La serie en la derecha converge uniformemente a f.

OJO: la serie en el teorema no es una serie de Fourier, por el término $a_0(x+\pi)/2$.

Teorema: Sean $f, g : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$ y $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt < \infty$.

Si a_n, b_n son los coeficientes de Fourier de f y α_n, β_n los de g, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2}\pi a_0 \alpha_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

Corolario: (Parseval):

Si $f : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$, y tiene coeficientes de Fourier a_n, b_n, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \pi \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Ejemplo: Dada la serie de Fourier

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt),$$

deducir el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Usamos Parseval:

$$L.I. = \int_{-\pi}^{\pi} (t^2)^2 dt = 2 \int_0^{\pi} t^4 dt = 2 \frac{\pi^5}{5}.$$

$$L.D. = \pi \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \right) = \pi \left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) \pi^5$$

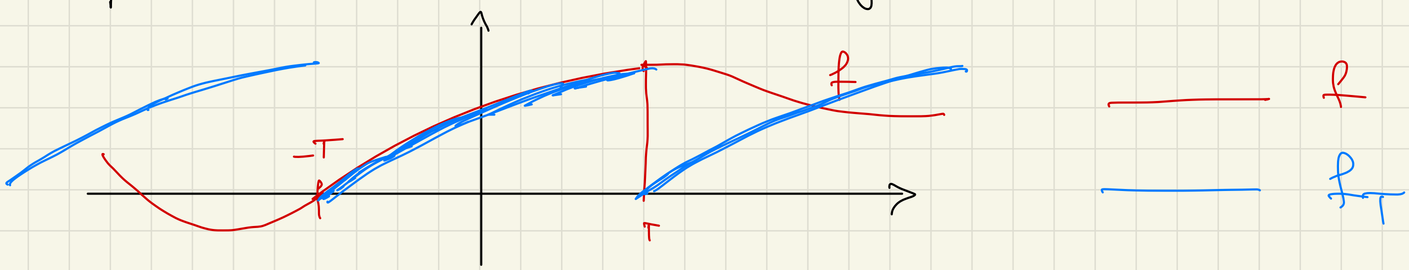
$$= \frac{1}{8} \frac{4}{45} \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$$

Transformada de Fourier.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua a trozos con límites laterales finitos en cada punto. Asumamos por simplicidad que en un punto de discontinuidad x_0 el valor de f en ese punto es el promedio del salto: $f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+) + f(x_0-)\right)$.

Para cada número real $T > 0$, sea $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la extensión $2T$-periódica de $f|_{[-T,T]}$, es decir:

$$f_T(x) = f(x) \quad \text{si } x \in [-T,T], \quad \text{y} \quad f(x+2T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Ya sabemos que: $\forall x \in (-T,T)$,

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi}{T}ix} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{\frac{n\pi}{T}ix}$$

La idea es que: "cuanto mayor es T, menor es la diferencia entre f y f_T". Debemos analizar qué sucede cuando $T \longrightarrow +\infty$:

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi}{T}ix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\overbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t)\, e^{-\frac{n\pi}{T}it}\, dt}^{=c_n}\Bigg) e^{\frac{n\pi}{T}ix}$$

$$= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-\frac{n\pi}{T}it}\, dt\right) e^{\frac{n\pi}{T}ix}.$$

Para cada $T > 0$ y $n \in \mathbb{Z}$ sea $\omega_{T,n} = \frac{n\pi}{T}$. Para cada $T > 0$, la sucesión $\{\omega_{T,n}\}_n$ divide a la recta real en intervalos de longitud constante $\Delta\omega_{T,n} = \omega_{T,n+1} - \omega_{T,n} = \pi/T$, que tiende a 0 cuando $T \longrightarrow \infty$

Con esta notación tenemos:

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\omega_{T,n} t}\, dt \right) e^{i\omega_{T,n} x} \frac{\Delta\omega_{T,n}}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_T(\omega_{T,n})\, e^{i\omega_{T,n} x} \cdot \Delta\omega_{T,n}.$$

donde $\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$.

La última suma se corresponde con una suma de Riemann (infinita) de $\hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega x}$. Si la integral (sobre $\mathbb{R}$) de esta función existe, entonces si hacemos $T \to \infty$ llegamos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega,$$

donde $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$.

Los pasos anteriores fueron formales, y no están aún bien justificados. De todos modos, nos sirven para dar la siguiente definición.

<u>Def:</u> Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. La transformada de Fourier de f es la función $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx.$$

Claramente, para algunas funciones f la integral de la definición puede no existir. Pero, por ejemplo, sí existe para funciones continuas a trozos en $\mathbb{R}$ y absolutamente integrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

También se prueba de manera rigurosa que:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega.$$

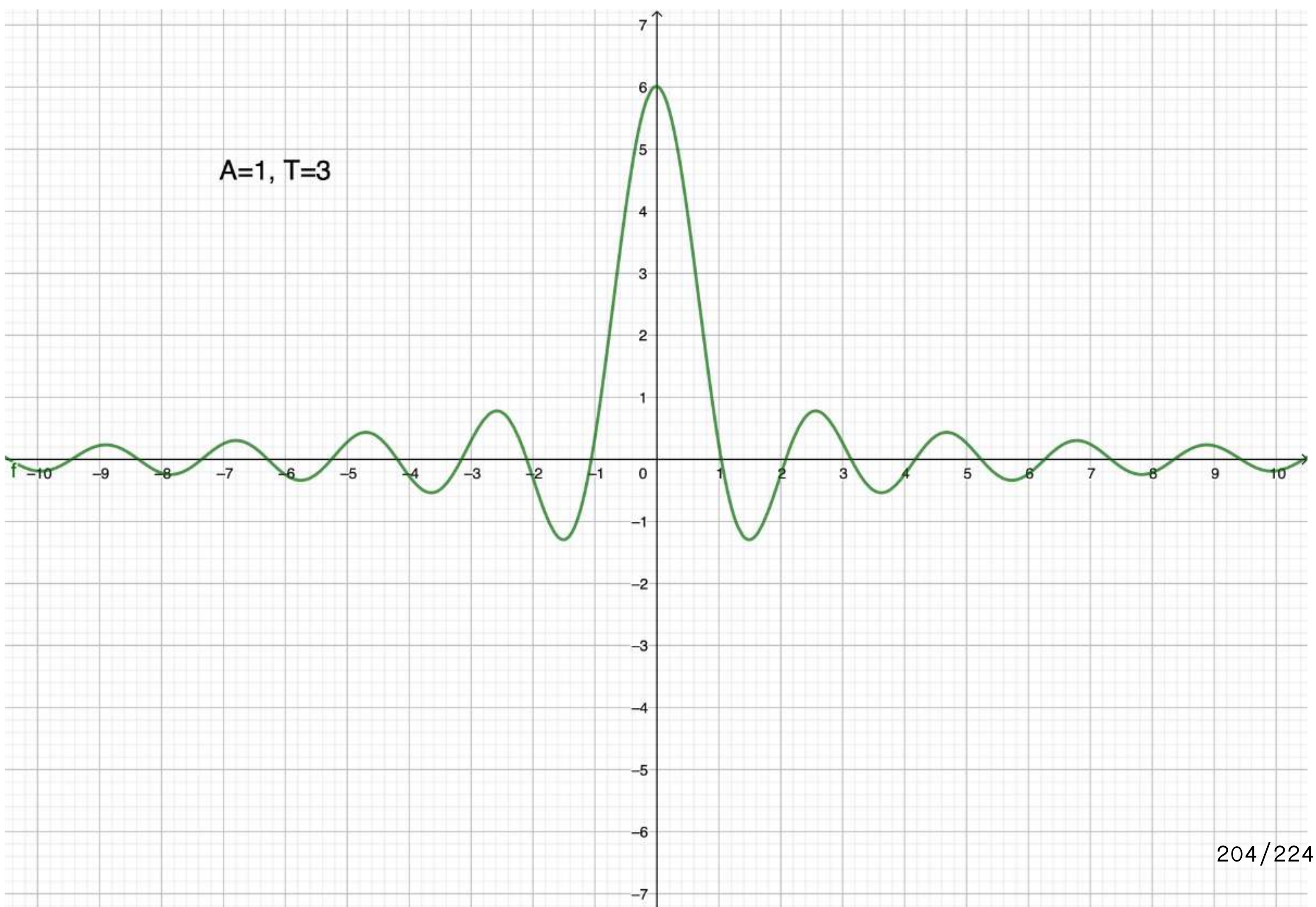
Esta fórmula se llama la transformada inversa de Fourier.

Ejemplo: calcular la transformada de Fourier de la función "pulso" dada por: $f(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} A\, e^{-i\omega t}\, dt$$

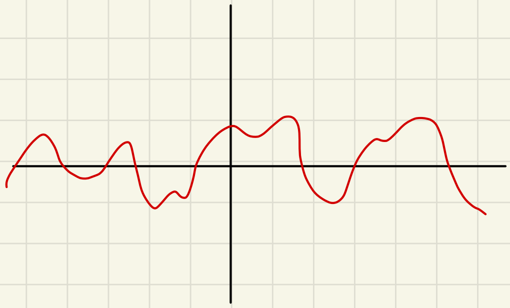
$$= -\frac{A}{i\omega}\, e^{-i\omega t}\Big|_{-T}^{T} = -\frac{A}{i\omega}\left(e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}\right) = \frac{A}{i\omega}\, 2i \cdot \operatorname{Im}\left(e^{i\omega T}\right)$$

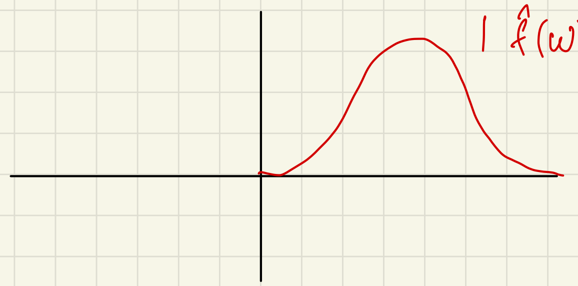
$$= \frac{2A}{\omega}\, \operatorname{sen}(\omega T).$$



$f \longrightarrow$ una onda

$\hat{f} \longrightarrow$ las frecuencias contenidas en F





A veces conviene descomponer la transformada en parte real e imaginaria: Si

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

se define

$$\hat{f}_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt \quad \longrightarrow \text{transf. Fourier en cosenos}$$

y

$$\hat{f}_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t)\, dt \quad \longrightarrow \quad \text{" \quad " \quad " senos.}$$

Entonces vale que:

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} [f(t) + f(-t)] \cos(\omega t)\, dt - i \int_0^{\infty} [f(t) - f(-t)] \operatorname{sen}(\omega t)\, dt.$$

Notar que:
- f impar $\Rightarrow$ $\hat{f}(\omega) \in i\mathbb{R}$.
- f par $\Rightarrow$ $\hat{f}(\omega) \in \mathbb{R}$.

También están las transformadas inversas:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos(\omega t)\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(\omega) \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega$$

Estas fórmulas nos dan otra manera de calcular ciertas integrales impropias reales.

Ejemplo: considerando la transformada de Fourier en senos y cosenos de la función $f(t) = e^{-at}$, $a > 0$, evaluar

$$\int_0^\infty \frac{\cos(kx)}{x^2+a^2}\,dx \,, \qquad \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}(kx)}{x^2+a^2}\,dx \,. \qquad (k>0).$$

Calculemos:

$$\hat{f}_c(\omega) + i\,\hat{f}_s(\omega) = \int_0^\infty e^{-at}\cos(\omega t)\,dt + i\int_0^\infty e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-at} e^{i\omega t}\,dt = \int_0^\infty e^{(-a+i\omega)t}\,dt$$

$$= \left.\frac{e^{(-a+i\omega)t}}{-a+i\omega}\right|_0^\infty = \frac{1}{a-i\omega} = \frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}.$$

$$\therefore \quad \hat{f}_c(\omega) = \frac{a}{a^2+\omega^2}\,, \qquad \hat{f}_s(\omega) = \frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Calculamos las inversas:

$$e^{-at} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a}{a^2+\omega^2}\cos(\omega t)\,d\omega$$

$$\text{y} \quad e^{-at} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{a^2+\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t)\,d\omega$$

Renombrando: $\omega \mapsto x$, $t \mapsto k$, queda:

$$\int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\cos(kx)\,dx = \frac{\pi}{2a}\,e^{-ak}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{a^2+x^2}\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-ak}.$$

Ejercicio: calcular las integrales con residuos.

Propiedades de la transformada:

Primero, veamos un teorema sobre integración.

Teorema (de la convergencia dominada de Lebesgue):

Sea f_h, $h \in \mathbb{R}$, una familia de funciones continuas a trozos.

Si:
1) $\exists$ una función g tal que $|f_h(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}$,
2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx < \infty$.
3) $\displaystyle\lim_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

entonces: $$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

$f_h(x) = \begin{cases} h, & x \in [0, 1/h) \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\,dx = 1$

$f_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ $\forall x$

Sea $G(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua a trozos y } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$.

↳ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

absolutamente integrable.

Teorema: Para $f \in G(\mathbb{R})$:
1) $\hat{f}(\omega)$ está definida $\forall \omega \in \mathbb{R}$.
2) $\hat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$.
3) $\displaystyle\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Dem: 1) $$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty.$$

$\therefore$ $\hat{f}(\omega)$ está definida $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

2) $$\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) e^{-i(\omega+h)x} - f(x) e^{-i\omega x} \right) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)\, e^{-i\omega x} \left(e^{-ihx} - 1 \right)}_{=:\, f_h(x)} dx$$

Es claro que $\lim_{h\to 0} f_h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Además: $|f_h(x)| = |f(x)| \underbrace{|e^{-i\omega x}|}_{=1} \cdot |e^{-ihx} - 1| \leq 2|f(x)|$. $\leq |e^{-ihx}| + 1 = 2$

La función $g(x) = 2|f(x)|$ se puede usar en el teorema anterior, y entonces:

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \rightarrow f \in G(\mathbb{R})$.

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\,dx = 0.$$

De allí: $\lim_{h\to 0} \hat{f}(\omega+h) = \hat{f}(\omega) \quad \therefore \hat{f}$ continua.

3) $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$.

$\therefore \lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0 \iff \lim_{\omega\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx = 0$ (y lo mismo con sen).

Esto último es consecuencia de Riemann-Lebesgue. //

<u>Teorema</u>: Sea $f \in G(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Denotemos $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, es decir, $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx$

Entonces, si $g(x) = f(ax+b)$ se tiene:

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{i\omega b/a} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

<u>Dem</u>: $\mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b) e^{-i\omega x}\,dx$

$\boxed{\begin{array}{l} t = ax+b \\ dt = a\,dx \end{array}}$

Para $a > 0$: $\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-b)/a}\,dt$

$$= \frac{e^{i\omega b/a}}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t/a}\,dt$$

$$= \frac{1}{a} e^{i\omega b/a} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad //$$

Con $a<0$ es similar.

18/11

Lema: Si f es continua a trozos y tiene derivada continua a trozos en cualquier intervalo finito, y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$ entonces:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-T}^{T} f(t+u)\,\frac{\operatorname{sen}(Ru)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\left[f(t+)+f(t-)\right],$$

$(=\pi f(t)$ si f es continua en $t)$.

donde T puede ser finito o infinito.

Teorema: (Teorema integral de Fourier)

Sea f continua a trozos tal que su derivada es continua a trozos en todo intervalo finito. Si f es absolutamente integrable, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$, entonces:

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{ix(t-u)}\,du\,dx,$$

donde la integral con respecto a x es en valor principal.

Dem: Notar que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)\,e^{-ixu}|\,du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\,du < \infty$.

Ahora:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{ix(t-u)}\,du\,dx \overset{\text{se puede justificar.}}{=} \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\int_{-R}^{R} e^{ix(t-u)}\,dx\,du$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\left.\frac{e^{ix(t-u)}}{i(t-u)}\right|_{x=-R}^{x=R} du$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{1}{i(t-u)}\left(e^{iR(t-u)} - e^{-iR(t-u)}\right) du$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{\operatorname{sen}(R(t-u))}{t-u}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= u-t\\ dv &= du\end{aligned}}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+v)\,\frac{\operatorname{sen} Rv}{v}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(t+)+f(t-)\right)$$ por el lema anterior. //

Es decir, recordando que $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$,

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, e^{ixt}\, du\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\, e^{ixt}\, dx \longrightarrow \text{transformada inversa}$$

Si f es continua, aplicar la transformada de Fourier y luego la transformada inversa da por resultado la función original f.

<u>Ejemplo</u>: hallar $\hat{f}$ para $f(x) = e^{-|x|}$ y verificar el teorema integral de Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot e^{-i\omega x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\omega)}\, dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} e^{x(1-i\omega)}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} e^{-x(1+i\omega)}\, dx$$

$e^{-R} \cdot e^{+i\omega R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$$= \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega} \right|_{-R}^{0} + \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{-x(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right|_{0}^{R}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1+i\omega+1-i\omega}{1+\omega^2}$$

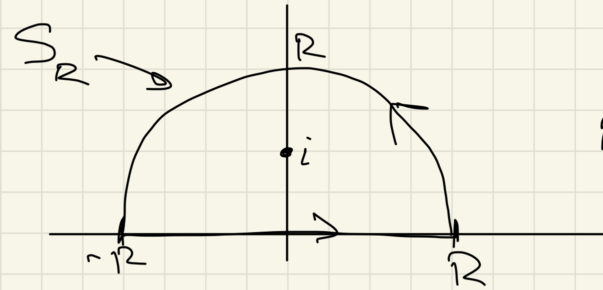
$$= \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Calculemos ahora la inversa. Primero consideremos $x \geq 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\, e^{i\omega x}\, dx$$

Usamos la curva

$C_R = S_R + [-R,R]$



$R > 1$.

Calculemos $\displaystyle\int_{C_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2}\, dz$. La función $f(z) = \dfrac{e^{izx}}{1+z^2}$ tiene un polo simple en $z = i$: $f(z) = \dfrac{\frac{e^{izx}}{z+i}}{z-i}$, y el residuo en $z=i$ es:

$$\frac{e^{i\cdot i x}}{2i} = \frac{e^{-x}}{2i}. \quad \text{Luego: } \int_{C_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-x}}{2i} = \pi \cdot e^{-x}.$$

Residuos.

Ahora:

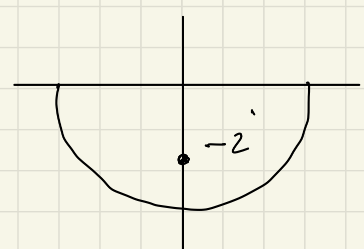
$$\int_{C_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2}\, d\omega + \int_{S_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2}\, dz,$$

y:

$$\left|\int_{S_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2}\, dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} \cdot \underbrace{e^{ixR(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}}_{\underbrace{e^{ixR\cos\theta}}_{|\cdot|=1} \cdot \underbrace{e^{-xR\operatorname{sen}\theta}}_{\leq 1}}\, iR \underbrace{e^{i\theta}}_{|\cdot|=1}\, d\theta\right| \leq \frac{R\cdot\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\cdot \pi e^{-x} = e^{-x} \quad ✓.$$

Si $x < 0$ conviene tomar:



y sale.

Si $x = 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\, \operatorname{arctg}(\omega)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1. \quad ✓$$

La transformada de Fourier compleja.

La condición $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ es muy restrictiva. Una manera de eliminar esta restricción, es pasar a la generalización de la transformada de Fourier como función de una variable compleja z.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua y tiene derivada continua a trozos. Supongamos que $g(t) := e^{yt} f(t)$ es absolutamente integrable para algún $y \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-ixu}\, du \right)}_{\hat{g}(x)} dx$$

$$e^{yt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iu(x+iy)}\, du\, dx$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x+iy)} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iu(x+iy)}\, du\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} e^{itz} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iuz}\, du\, dz.$$

donde la integración en el plano z es a lo largo de la recta $x+iy$, y fijo, $-\infty < x < \infty$, tal que $e^{yt} f(t)$ es absolutamente integrable. Más generalmente:

Teorema (V): Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua a trozos con derivada continua a trozos. Sea $f(t)e^{\gamma t}$ absolutamente integrable para algún $\gamma \in \mathbb{R}$.
Entonces:

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} e^{itz}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iuz}\,du\,dz.$$

donde la integración en el plano z es a lo largo de la recta $x+i\gamma$, $-\infty < x < \infty$.

Se define la transformada de Fourier compleja de f por:

$$\boxed{\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-iuz}\,du.}$$

Si f satisface las hipótesis del teorema, la transformada inversa es:

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} e^{itz}\hat{f}(z)\,dz \quad \text{p/ algún } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Se verifica que:
Si f es continua a trozos y:
- $|f(t)| \leq K e^{-bt}$, $0 \leq t < \infty$
- $|f(t)| \leq M e^{-at}$, $-\infty < t \leq 0$,

con $a<b$, entonces $\hat{f}(z)$ existe y es analítica en $a < \operatorname{Im} z < b$. Además,

$$\hat{f}'(z) = \int_{-\infty}^{\infty}[-iu f(u)]\,e^{-iuz}\,dz.$$

Ejemplo: calcular la transformada de Fourier compleja de

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (\omega > 0).$$

Como $|f(t)| \leq 1$ para $t \geq 0$ y $|f(t)| = 0$ para $t \leq 0$, podemos tomar $b = 0$, $a = -\infty$. Luego, $\hat{f}(z)$ es analítica en $-\infty < \operatorname{Im} z < 0$.

$$\hat{f}(z) = \int_0^\infty \operatorname{sen}(wu) \cdot e^{-izu}\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{iwu} - e^{-iwu}}{2i} e^{-izu}\, du$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(e^{iu(w-z)} - e^{-iu(w+z)}\right) du$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{iu(w-z)}}{i(w-z)} \Big|_0^\infty - \frac{e^{-iu(w+z)}}{-i(w+z)} \Big|_0^\infty \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{i(w-z)} + \frac{1}{i(w+z)}(-1) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w-z} + \frac{1}{w+z} \right) = \frac{1}{2} \frac{w+z+w-z}{w^2-z^2}$$

$$= \frac{w}{w^2-z^2}.$$

$e^{iu(w-(x+iy))} =$
$= e^{iu(w-x-iy)}$
$= e^{yu} \cdot e^{iu(w-x)}$
$(y<0)$.

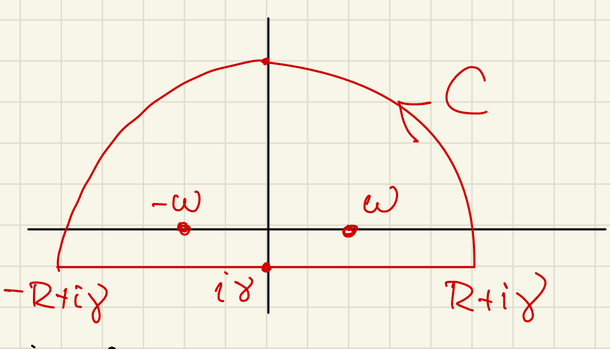
$e^{-iu(w+x+iy)} =$
$= e^{yu} e^{-iu(w+x)}$
$(y<0)$.

Verifiquemos la transformada inversa: sea $\gamma < 0$.

Para $t > 0$ calculamos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \frac{w e^{izt}}{w^2-z^2}\, dz, \text{ o bien, } \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{w e^{izt}}{w^2-z^2}\, dz,$$

donde C es:



w y $-w$ son polos simples:

$$\frac{w e^{izt}}{w^2-z^2} = -\frac{w e^{izt}/(w+z)}{z-w} \longrightarrow \text{residuo en } w = -\frac{w e^{iwt}}{2w} = -\frac{e^{iwt}}{2}$$

$$\frac{w e^{izt}}{w^2-z^2} = +\frac{w e^{izt}/(w-z)}{z-(-w)} \longrightarrow \text{residuo en } -w = \frac{w e^{-iwt}}{+2w} = +\frac{e^{-iwt}}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left(-\frac{e^{i\omega t}}{2}+\frac{e^{-i\omega t}}{2}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)$$

$$= \operatorname{sen}(\omega t).$$

Calculemos la integral sobre la semicircunferencia

$z = i\gamma + Re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi$:

$$|e^{izt}| = |e^{-\gamma t}\cdot e^{itR(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}| = e^{-\gamma t}\cdot e^{-Rt\operatorname{sen}\theta} \underset{t>0}{\le} e^{-\gamma t}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{|z-i\gamma|=R \\ \frown}} \frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\omega e^{-\gamma t}}{(R-\gamma)^2-\omega^2}\cdot\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Luego,
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R+i\gamma}^{R+i\gamma}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_C \frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz = \operatorname{sen}(\omega t) \checkmark.$$

Para $t \le 0$, consideramos:

Entonces:

$$\int_C \frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz = 0 \quad \text{(Cauchy - Goursat)}.$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{-R+i\gamma}^{R+i\gamma}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz + \int_{\substack{\text{semicir-}\\\text{cunferencia}}}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz}$$

En la semicircunferencia $z = i\gamma + Re^{i\theta}, \quad \pi \le \theta \le 2\pi$:

$$|e^{izt}| \le |e^{-\gamma t}e^{itR(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}| = e^{-\gamma t}\cdot e^{\underbrace{-tR}_{>0}\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{<0}} \le e^{-\gamma t}$$

$$\text{y:} \quad \left|\int_{\text{semicirc.}}\frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz\right| \le \frac{\omega e^{-\gamma t}}{(R-\gamma)^2-\omega^2}\,\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Luego, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \frac{\omega e^{izt}}{\omega^2-z^2}\,dz = 0$ si $t\leq 0$.

$\therefore$ recuperamos la función original f.

Propiedades:

Teorema: la transformada de Fourier compleja es lineal.
Es decir, si f_1 y f_2 son funciones con $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ analíticas en $a<\operatorname{Im} z<b$ y $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}[c_1f_1+c_2f_2]=c_1\mathcal{F}[f_1]+c_2\mathcal{F}[f_2]$$

fácil ($\int$ lineal).

Teorema: Si f tiene transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$, entonces $\mathcal{F}[f(t-a)]=e^{-iaz}\mathcal{F}[f(t)]$.

fácil (cambio de variables)

Teorema: Si f tiene transformada de Fourier $\hat{f}$, analítica en $a<\operatorname{Im} z<b$, y si $k\neq 0$ es una constante real, entonces: $\mathcal{F}[f(kt)]=\frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{z}{k}\right)$. Es analítica en $ka<\operatorname{Im} z<kb$ si $k>0$, o en $kb<\operatorname{Im} z<ka$ si $k<0$.

fácil (cambio de variable).

Teorema: Sea f continua con derivada continua a trozos.
Si $|f(t)|\leq Ke^{-bt}$, $|f'(t)|\leq Ke^{-bt}$, $0\leq t<\infty$, y
$|f(t)|\leq Me^{-at}$, $|f'(t)|\leq Me^{-at}$, $-\infty\leq t<0$, con $a<b$, entonces $\mathcal{F}[f]$ y $\mathcal{F}[f']$ son analíticos en $a<\operatorname{Im} z<b$ y $\mathcal{F}[f']=iz\,\mathcal{F}[f]$.

Dem: ya sabemos que $\mathcal{F}[f']$ y $\mathcal{F}[f]$ existen en $a < \operatorname{Im} z < b$. Para calcular $\mathcal{F}[f']$: y son analíticas

$$\mathcal{F}[f'](z) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-izt}\, dt$$

$$\int \underbrace{f'(t)}_{v} \underbrace{e^{-izt}}_{u} dt = \underbrace{f(t)\cdot e^{-izt}}_{\xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0} - \int f(t)\, e^{-izt}\cdot(-iz)\, dt$$

$$\therefore \quad \mathcal{F}[f'](z) = iz \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt = iz\, \mathcal{F}[f](z). \quad //$$

Más aún, si todas las derivadas $f^{(k)}$ son continuas y con derivada continua a trozos, y: $|f^{(k)}(t)| \le K e^{-bt}$, $0 \le t < \infty$, $|f^{(k)}(t)| \le M e^{-at}$, $-\infty < t \le 0$ entonces: $\mathcal{F}[f^{(n)}] = (iz)^n\, \mathcal{F}[f](z)$.

Teorema: Si f es continua a trozos con $|f(t)| \le K e^{-bt}$, $t \ge 0$, $|f(t)| \le M e^{-at}$, $t \le 0$, $a < b$, entonces, en la franja $a < \operatorname{Im} z < b$:

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{F}[f](z) = (-i)^n\, \mathcal{F}[t^n f(t)](z).$$

Dem: $\dfrac{d}{dz}\mathcal{F}[f](z) = \dfrac{d}{dz}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt$ (se puede derivar adentro de la integral)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-izt}\cdot(-it)\, dt$$

$$= -i\, \mathcal{F}[t f(t)](z)$$, y sigue inductivamente. //

Teorema: Sea f continua a trozos y definamos $h(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)\, du$. Si h y $h' = f$ satisfacen las cotas anteriores, entonces $\mathcal{F}[h] = \dfrac{1}{iz}\mathcal{F}[f]$.

Ahora veremos que la T. F. se lleva "bien" con respecto a la operación de convolución:

Sean f y g continuas a trozos tales que:

$$|f(t)| \leq K e^{-bt}, \quad |g(t)| \leq K e^{-bt}, \quad t \geq 0,$$

$$|f(t)| \leq M e^{-at}, \quad |g(t)| \leq M e^{-at}, \quad t \leq 0,$$

con $a < b$. Entonces $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$, $a < \gamma < b$, tal que $e^{\gamma t} f(t)$ y $e^{\gamma t} g(t)$ son absolutamente integrables.

Sea:
$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g(u)\, du}.$$

h se denomina la convolución de f y g y se denota $h = f * g$. Se puede ver que $e^{\gamma t} h(t)$ es continua a trozos y absolutamente integrable.

$f * g = g * f$.

Tomando transformada:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma t} h(t)\, e^{-izt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g(u)\, du\right] e^{-izt}\, dt$$

$$F\left[e^{\gamma t} h(t)\right] = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma(t-u)} f(t-u)\, e^{\gamma u} g(u)\, e^{-izt}\, du\, dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma u} g(u) \int_{-R}^{R} e^{\gamma(t-u)} f(t-u)\, e^{-izt}\, dt\, du$$

$v = t-u$, $dv = dt$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma u} g(u)\, e^{-izu} \int_{-R-u}^{R-u} e^{\gamma v} f(v)\, e^{-izv}\, dv\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma u} g(u)\, e^{-izu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma v} f(v)\, e^{-izv}\, dv\, du$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma v} f(v)\, e^{-izv}\, dv\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma u} g(u)\, e^{-izu}\, du\right)$$

$$= F\left[e^{\gamma t} f(t)\right] \cdot F\left[e^{\gamma t} g(t)\right],$$

y esto vale en $a - \gamma < \operatorname{Im} z < b - \gamma$. Por otro lado, notemos que:

$\left(|f(t)| \leq K e^{-bt} \Rightarrow |e^{\gamma t} f(t)| \leq K \cdot e^{-\overbrace{(b-\gamma)}t}, \text{ idem con } a-\gamma \right)$.

$$\mathcal{F}[e^{\gamma t} f(t)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma t} f(t)\, e^{-izt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-it(z+i\gamma)}\, dt$$

$$= \mathcal{F}[f(t)](z+i\gamma),$$

que es analítica en $a < \operatorname{Im}(z+i\gamma) < b$, es decir, en $a-\gamma < \operatorname{Im} z < b-\gamma$.

$$\therefore \quad \mathcal{F}[h](z+i\gamma) = \mathcal{F}[f](z+i\gamma) \cdot \mathcal{F}[g](z+i\gamma).$$

Si aplicamos la traslación $z+i\gamma \longrightarrow z$, resulta que:

$\mathcal{F}[h] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$ es válida en $a < \operatorname{Im} z < b$, y $\mathcal{F}[h]$ es analítica ahí. Es decir:

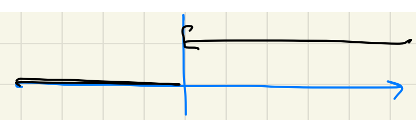
$$\boxed{\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}(g)}.$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]\right) = f*g$$

o bien: $\mathcal{F}^{-1}(G \cdot H) = \mathcal{F}^{-1}(G) * \mathcal{F}^{-1}(H)$.

Calculemos algunas transformadas.

<u>Ejemplo:</u> sea $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.



Entonces: $\mathcal{F}[u](z) = \int_0^{\infty} e^{-izt}\, dt = \left.\dfrac{e^{-izt}}{-iz}\right|_0^{\infty} = +\dfrac{1}{iz} = -\dfrac{i}{z}$, si $\operatorname{Im} z < 0$.

$e^{-it(x+iy)} = e^{-itx}\, \underbrace{e^{ty}}_{\to 0 \text{ si } y<0}$

<u>Ejemplo:</u> sea $f(t) = u(t) \cdot t^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces.

$$f^{(k)}(t) = u(t)\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, t^{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$f^{(k)}$ es continua si $1 \leq k \leq n-1$ y $f^{(n)}(t) = u(t) \cdot n!$ es continua a trozos.

Entonces: $\mathcal{F}[f^{(n)}](z) = \mathcal{F}[n!\, u(t)](z) = n!\, \mathcal{F}[u](z) = -\dfrac{n!\, i}{z} = \dfrac{n!}{iz}$

$$= (iz)^n\, \mathcal{F}[f] = (iz)^n\, \mathcal{F}[u(t) \cdot t^n]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}[u(t)\, t^n](z) = \frac{n!}{(iz)^{n+1}}.$$

$$= \int_0^{\infty} t^n e^{-itz}\, dt$$

$e^{(k-i(x+iy))t} = e^{-ixt} \cdot e^{(k+y)t}$

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(t) = u(t)\cdot e^{kt}$, $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{F}[f] = \int_0^\infty e^{kt} e^{-izt}\,dt = \int_0^\infty e^{(k-iz)t}\,dt = \left.\frac{e^{(k-iz)t}}{k-iz}\right|_0^\infty = \frac{1}{iz-k},$$

si $\operatorname{Im} z < -k$.

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & \text{si } t \geq a \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$

<u>Ejemplo:</u> sea $f(t) = u(t-a)e^{kt}$. Entonces:

$$f(t) = u(t-a)\, e^{k(t-a)} e^{ka} = e^{ka} g(t-a), \text{ donde}$$

$g(t) = u(t)e^{kt}$. Entonces:

$$\mathcal{F}[f] = e^{ka}\mathcal{F}[g(t-a)] = e^{ka} \cdot e^{-iaz}\mathcal{F}[g] = \frac{e^{ka} \cdot e^{-iaz}}{iz-k} \quad (\operatorname{Im} z < -k)$$

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(t) = u(t)\cos(\omega t)$, $\omega > 0$.

Recordemos que ya hemos calculado: $\mathcal{F}[u(t)\operatorname{sen}(\omega t)] = \dfrac{\omega}{\omega^2 - z^2}$.

Notar que: $u(t)\operatorname{sen}(\omega t) = \omega \displaystyle\int_0^t u(s)\cos(\omega s)\,ds$.

Entonces: $\mathcal{F}[u(t)\operatorname{sen}(\omega t)] = \dfrac{\omega}{iz}\mathcal{F}[u(t)\cos(\omega t)]$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[u(t)\cos(\omega t)] = \frac{iz}{\omega^2 - z^2}.$$

$\Big(\frac{d}{dt} u(t)\operatorname{sen}(\omega t) = u(t)\cos(\omega t)\,\omega$

$\omega\,\mathcal{F}[u(t)\cos(\omega t)] = iz \cdot \mathcal{F}[u(t)\operatorname{sen}(\omega t)]$

$= \frac{iz}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - z^2} \Big).$

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(t) = u(t)e^{-kt}\cos(\omega t)$. Entonces:

$$\mathcal{F}[f](z) = \int_0^\infty e^{-kt}\cos(\omega t)\, e^{-izt}\,dt = \int_0^\infty \cos(\omega t)\, e^{-i(z-ik)t}\,dt$$

$$= \mathcal{F}[u(t)\cos(\omega t)](z-ik)$$

$$= \frac{i(z-ik)}{\omega^2 - (z-ik)^2} = \frac{k+iz}{\omega^2 + (k+iz)^2}.$$

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(t) = u(t)\,t\operatorname{sen}(\omega t)$. Si $g(t) = u(t)\operatorname{sen}(\omega t)$, entonces $\mathcal{F}[g] = \dfrac{\omega}{\omega^2 - z^2}$. Por otro lado, sabemos que:

$$\frac{d}{dz}\mathcal{F}[g](z) = \int_{-\infty}^{\infty} [-i\,t\,g(t)]\, e^{-izt}\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,t\operatorname{sen}(\omega t)\, e^{-izt}\,dt$$

$$= -i\,\mathcal{F}[f]$$

$$\therefore \quad \mathcal{F}[f] = i \cdot \frac{d}{dz}\left(\mathcal{F}[g]\right) = i \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{\omega}{\omega^2 - z^2}\right) =$$

$$= i \cdot \frac{-\omega \cdot (-2z)}{(\omega^2 - z^2)^2} = \frac{2i\omega z}{(\omega^2 - z^2)^2}.$$

<u>Ejemplo:</u> Sea $\mathcal{F}[f] = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$, donde $f(t) = 0 \ \forall t < 0$.

Encontrar $f(t)$.

Sabemos que: $\mathcal{F}[u(t)] = -\dfrac{i}{z} \quad \therefore \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{z}\right] = i\,u(t)$.

Además: $\mathcal{F}[u(t)\operatorname{sen} t] = \dfrac{1}{1-z^2} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{z^2-1}\right] = -u(t)\operatorname{sen} t$.

Luego, podemos usar la convolución:

$t \geq 0$, $t - x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq t$

$$\mathcal{F}^{-1}\Big[\underbrace{\frac{1}{z(z^2-1)}}_{=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2-1}}\Big] = i\,u(t) * (-u(t)\operatorname{sen} t) = -i\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\cdot u(t-x)\operatorname{sen}(t-x)\,dx$$

$$= -i\int_0^t \operatorname{sen}(t-x)\,dx$$

$$= +i\int_0^t \operatorname{sen}(x-t)\,dx = i \cdot -\cos(x-t)\Big|_0^t = i\left(-1 + \cos(-t)\right)$$

$$= -i\,(1 - \cos t). \quad \text{para } t \geq 0$$

Es decir, $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{z(z^2-1)}\right] = -i\,u(t)\,(1 - \cos t)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} y' = ky \\ y(t) = Ce^{kt} \\ \hline y'' + y = 0 \begin{array}{l} \to y = \operatorname{sen} t \\ \to y = \cos t \end{array} \end{array}}$$

<u>Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.</u>

Consideremos la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \qquad (*)$$

Supongamos que f tiene transformada de Fourier $F[f]$. Aplicando la transformada en ambos miembros queda:

$$\left[a_n (iz)^n + a_{n-1}(iz)^{n-1} + \dots + a_1 (iz) + a_0\right] \underbrace{F[y]}_{\text{si existe}} = F[f].$$

Luego, $\mathcal{F}[y] = \dfrac{\mathcal{F}[f]}{P(iz)}$, donde P es el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 . \quad (**)$$

Supongamos que existe la transformada inversa $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{P(iz)}\right]$, es decir:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \frac{e^{izt}}{P(iz)}\, dz \ , \text{ para algún } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\dfrac{1}{P(iz)} = \mathcal{F}[g]$, por lo que
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y] &= \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]\\ &= \mathcal{F}[f*g]\end{aligned}$$

y entonces:
$$\begin{aligned} y(t) &= (f*g)(t)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\, du\end{aligned}$$

Se tiene el siguiente teorema:

<u>Teorema:</u> Sea f continua tal que el teorema integral de Fourier se aplica y sea $\hat{f}(z) = \mathcal{F}[f]$ analítica en alguna franja $a < \mathrm{Im}\, z < b$. Supongamos que $P(iz)$ no se anula en esta franja (P es el polinomio de $(**)$). Supongamos que $f(t) = \displaystyle\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \hat{f}(z)\, e^{itz}\, dz$ existe para algún γ con $a < \gamma < b$. Entonces:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \frac{\hat{f}(z)\, e^{izt}}{P(iz)}\, dz \quad \text{es una solución de } (*).$$

<u>Ejemplo:</u> resolver $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E_0\, e^{-|t|}$, con $L, R, E_0 \in \mathbb{R}_{>0}$

(es la ecuación de una corriente I en un circuito con voltaje input $E_0\, e^{-|t|}$.)

Aquí, $f(t) = E_0 e^{-|t|}$ y entonces

$$\hat{f}(z) = \frac{2E_0}{1+z^2}$$, que es analítica para $-1 < \operatorname{Im} z < 1$

El polinomio $P(iz) = izL + R$ tiene un cero en $\frac{iR}{L}$.

(debe ser $\left|\frac{iR}{L}\right| \geq 1 \Rightarrow R > L$)

Por teorema anterior:

$$I(t) = \frac{2E_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{(1+z^2)(\underbrace{izL+R}_{iL(z-iR/L)})}\, dz .$$

$izL + R = iL\left(z - \frac{iR}{L}\right)$

Se puede evaluar con residuos. Sea $t > 0$. Entonces, sumando en los polos $z_0 = i$ y $z_0 = iR/L$ en el semiplano superior, se tiene:

$$I(t) = \frac{2E_0}{2\pi} \cdot 2\pi i \left[\frac{e^{-t}}{2i(R-L)} + \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{iL\left(1 - \frac{R^2}{L^2}\right)}\right]$$

$$= \boxed{E_0 \left(\frac{e^{-t}}{R-L} + \frac{2L e^{-\frac{R}{L}t}}{L^2 - R^2}\right)}$$

Para $t < 0$, conviene tomar una curva en el semiplano inferior y entonces sólo se tiene en cuenta el polo $z_0 = -i$.

$$\therefore \quad I(t) = -\frac{2E_0}{2\pi} \cdot 2\pi i \frac{e^{t}}{-2i \cdot (R+L)} = \boxed{\frac{E_0 e^{t}}{R+L}}$$

En $t = 0$, la corriente $I(t)$ es continua y entonces

$$I(0) = \lim_{t \to} I(t) = \frac{E_0}{R+L} .$$

$$\left(\lim_{t \to 0^+} I(t) = E_0 \cdot \left(\frac{1}{R-L} + \frac{2L}{L^2 - R^2}\right) = E_0 \frac{-(R+L) + 2L}{L^2 - R^2} = \right.$$

$$\left. = E_0 \frac{-R - L + 2L}{L^2 - R^2} = E_0 \cdot \frac{L - R}{L^2 - R^2} = E_0 \cdot \frac{1}{L+R} . \right)$$

$I(t) = \frac{E_0 e^{t}}{R+L} \quad (t \leq 0)$, $\quad I'(t) = I(t)$.

$$LI' + RI = \frac{E_0 L e^{t}}{R+L} + \frac{E_0 R e^{t}}{R+L} = E_0 e^{t} = E_0 e^{-|t|} \quad (t \leq 0) \checkmark$$

→ Transformada de Laplace

(es cambiar iz en la T.F. por z).

THE END.

jueves

7/12
21/12 } martes.

10/12
24/12 } jueves

30/11, 2/12 11:00 hs
7/12 9/12
14/12 16/12
21/12