Examen de Ecuaciones Diferenciales I
8 de julio 2022

Parte Teórica:

(1) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dados $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$.
(a) Calcular las iteraciones de Picard para este problema.
(b) Usar lo anterior para probar que la solución del problema $x' = Ax, x(t_0) = x_0$, es única y está dada por

$$x(t) = \lim_{j \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k \right) x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde convergencia es uniforme sobre cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(2) Sea $F : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ una función de clase C^1, que cumple

$$F(0) = I_n, \quad \text{y} \quad F(t+s) = F(t)F(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Probar que existe una única matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $F(t) = e^{tA}$.
Ayuda: proponer $A = F'(0)$.

(3) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando correctamente.
(a) Existe una matriz real A, 2×2, tal que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, tiene por solución a $(x(t), y(t)) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t})$.
(b) La ecuación $y'' + 2y' + 2y = \cos(t)$ posee una única solución periódica.
(c) El punto $(0, 0)$ es un centro estable del sistema $\dot{x} = -y - x^3$, $\dot{y} = x$.

Parte Práctica:

(1) Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hallar una solución de la ecuación diferencial $2x' = \sqrt{|x|}$, que cumpla $x(t_0) = x_0$, y que esté definida para todo $t \in \mathbb{R}$. ¿Para cuáles puntos (t_0, x_0) dicha solución es única?

(2) Considerar el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\dot{x} = y, \quad \ddot{y} = x - y + \dot{y}.$$

Definir nuevas variables y pasar a un sistema lineal equivalente $\dot{x} = Ax$, con A matrix real 3×3, y hallar todos los pares de funciones $(x(t), y(t))$ que sean soluciones del sistema dado.

(3) (a) Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$. Dado $c \geq 0$, probar que
$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\}(s) = e^{-cs}F(s).$$
(b) Resolver mediante transformada de Laplace el siguiente problema:
$$y'' + 9y = H_1(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$
Describir el comportamiento de la solución hallada para $t \to +\infty$.¿Qué ocurre en $t = 1$? es la derivada de la solución continua?