Examen de Ecuaciones Diferenciales I,
28 de julio de 2023

Parte Teórica

(1) (30 pt.)
Sea w una función continua en $[t_0, t_1]$ que además es no negativa: $w(t) \geq 0$, para todo $t \in [t_0, t_1]$. Suponiendo que existe una constante $L > 0$ tal que

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^{t} w(s)ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Probar que $w \equiv 0$.

(2) (40 pt.)
Considerar el sistema lineal homogéneo $x' = Ax$, con $A \in M_n(\mathbb{R})$. Sea $\Phi(t), t \in \mathbb{R}$ la única matriz fundamental del sistema tal que $\Phi(0) = I$, la matriz identidad $n \times n$. Demostrar la siguientes afirmaciones:
(a) $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, para todo t.
(b) $\Phi(t + s) = \Phi(t).\Phi(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.
(c) $\Phi(t)^{-1} = \Phi(-t)$, para todo t.
(d) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ converge uniformemente hacia $\Phi(t)$ en cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(3) (30 pt.)
Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) El problema $x' = t\sqrt{1 - x^2}$, $x(0) = 1$ posee única solución.

(b) La transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t) = e^{t^2}, t \geq 0$, no existe para ningún $s \in \mathbb{R}$.

(c) Si $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ son L.I. entonces $W(f, g)(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Parte Práctica:

(1) (30 pt.)
(a) Hallar la solución del problema siguiente por el método de Frobenius:
$$y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

(b) Determinar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $x^3y'' + x^2y' - xy = 0$, en el intervalo $x > 0$ y luego usando variación de parámetros hallar la solución general de
$$x^3y'' + x^2y' - xy = \frac{x}{1+x}.$$

(2) (30 pt.)

Resolver los siguientes problemas por transformada de Laplace:

$$(a) \quad y'' + 4y = \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$(b) \quad y'' + y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(3) (40 pt.)
Dados Sean a, b en $\mathbb{R}$, considere el sistema lineal
$$x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} x.$$
(a) Hallar una base del espacio de soluciones del sistema y dar la solución general del mismo.
(b) Para $b \neq 0$ probar que todas las trayectorias son espirales o circulos concéntricos, indicando el sentido de giro y el comportamiento para tiempos largos positivos. Indicar en cada caso qué tipo de estabilidad posee la solución constante $(0, 0)$. Qué ocurre si $b = 0$ y $a \neq 0$?
(c) Si A es la matriz 2×2 del sistema hallar $\exp(tA)$.