Analysis of a Square Wave Signal Using Fourier Transform

Fatemeh Amirabadi Zadeh

1 Introduction

This project focuses on analyzing a square wave signal with a frequency of 100 Hz using the Fourier transform. The goal is to compute the frequency spectrum, determine the Fourier series coefficients, reconstruct the original signal, and analyze the effect of the number of coefficients on the convergence of the reconstructed signal.

2 Square Wave Signal

A square wave signal with a frequency of $f_0 = 100\,\mathrm{Hz}$ and amplitude $A = 1$ is considered. The signal is defined as:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{sign}(\sin(2\pi f_0 t))$$

where $\mathrm{sign}(\cdot)$ is the signum function.

3 Fourier Series Coefficients

The Fourier series coefficients for a square wave are given by:

$$c_n = \frac{4A}{\pi n}, \quad \text{where } n = 1, 3, 5, \ldots$$

These coefficients represent the amplitude of the odd harmonics in the frequency domain.

4 Frequency Spectrum

The frequency spectrum of the square wave is computed and plotted. The spectrum consists of discrete frequencies at odd harmonics of the fundamental frequency f_0. The amplitude of each harmonic decreases as the harmonic number n increases.

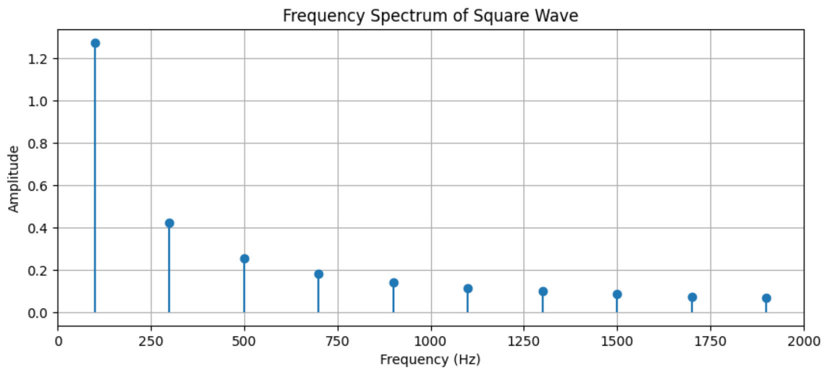


Figure 1: Frequency Spectrum of the Square Wave

5 Signal Reconstruction

The original square wave is reconstructed using the Fourier series synthesis equation:

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} c_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

The reconstructed signal is compared with the original signal in the time domain.

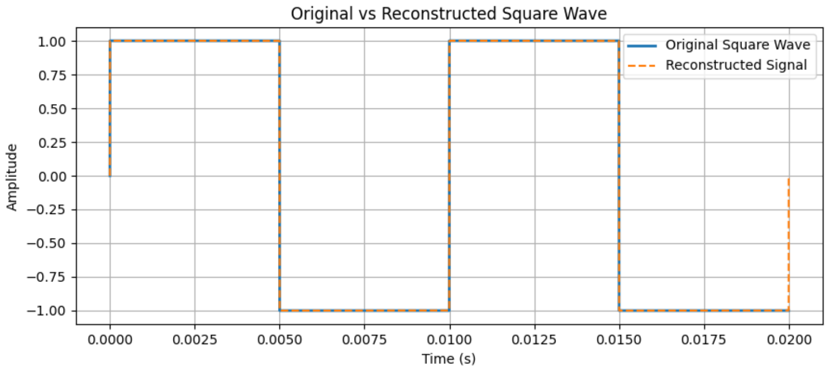


Figure 2: Original vs Reconstructed Square Wave

6 Effect of the Number of Coefficients

The number of Fourier coefficients used in the synthesis equation affects the convergence of the reconstructed signal:

- **Few Coefficients:** The reconstructed signal exhibits significant oscillations (Gibbs phenomenon) near the discontinuities.
- **Many Coefficients:** The reconstructed signal converges more closely to the original square wave, but the Gibbs phenomenon persists.
- **Theoretical Limit ($n_{\max} \to \infty$):** The reconstructed signal matches the original square wave perfectly, except at the discontinuities.

7 Conclusion

The project demonstrates the use of Fourier series to analyze and reconstruct a square wave signal. The frequency spectrum and Fourier series coefficients provide insights into the signal's frequency components. The reconstruction process highlights the trade-off between the number of coefficients and the accuracy of the reconstructed signal. The Gibbs phenomenon is observed near the discontinuities, which is a fundamental limitation of Fourier series for discontinuous signals.

Appendix: Python Code

The following Python code was used to perform the analysis:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
A = 1  # Amplitude
f0 = 100  # Fundamental frequency (Hz)
T = 1 / f0  # Period
t = np.linspace(0, 2*T, 10000)  # Time vector (high resolution)
```

```
# Generate square wave
square_wave = A * np.sign(np.sin(2 * np.pi * f0 * t))

# Fourier Series coefficients
n_max = 100000  # Number of harmonics (odd only)
frequencies = np.arange(1, n_max+1, 2)  # Odd harmonics
coefficients = (4 * A) / (np.pi * frequencies)  # Fourier coefficients

# Frequency spectrum
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.stem(frequencies * f0, coefficients, basefmt=" ")
plt.title("Frequency Spectrum of Square Wave")
plt.xlabel("Frequency (Hz)")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.xlim(0, 2000)  # Limit x-axis to show relevant harmonics
plt.grid()
plt.savefig("frequency_spectrum.png")  # Save the plot
plt.show()

# Reconstruct the square wave using Fourier Series
reconstructed_signal = np.zeros_like(t)
for n, cn in zip(frequencies, coefficients):
    reconstructed_signal += cn * np.sin(2 * np.pi * n * f0 * t)

# Plot original and reconstructed signals
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(t, square_wave, label="Original Square Wave", linewidth=2)
plt.plot(t, reconstructed_signal, label="Reconstructed Signal", linestyle="--", linewidth=1.5)
plt.title("Original vs Reconstructed Square Wave")
plt.xlabel("Time (s)")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.legend()
plt.grid()
plt.savefig("reconstructed_signal.png")  # Save the plot
plt.show()
```

8 Question 2

GIBBS PHENOMENON

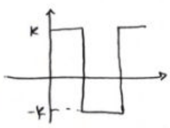
پدیده گیبس - ویلبراهام: وجود نوسان در مقدار مجموع سری فوریه ی توابع در نزدیکی مقادیر ناپیوستگی را پدیده ی گیبس می گویند.
هر سیگنال متناوب را می توان به صورت جمعی از چند سیگنال نوسانی ساده با فرکانس های متفاوت نوشت. هر چه فرکانس یک سیگنال سازنده نسبت به سایر سیگنال ها بیشتر باشد آن سیگنال جزئیات بیشتری را نشان می دهد و از کلیات چشم پوشی می شود.

پدیده ی گیبس زمانی رخ می دهد که تابع دارای نقطه ی ناپیوستگی را با استفاده از تعداد متناهی از جملات سری فوریه تقریب بزنیم. هر چقدر تعداد جملات بیشتر شوند، این انحراف کمتر می شود و نواحی نوسان به نقطه ی ناپیوستگی نزدیک تر می شوند اما هیچوقت این انحراف به صفر نمی رسد.
در نقاط جهش و ناپیوستگی، سری فوریه میانگین محدودیت های هر دو طرف تابع نسبت به نقطه را نشان می دهد (قضیه ی دیریکله)

می توان مشکلات مرتبط با پدیده ی گیبس را با استفاده از روش های معادل تر جمع فوریه مثل جمع Fejer یا جمع Riesz یا با استفاده از تقریب سیگما بهبود بخشید.

پس متوجه می شویم که سری فوریه برای توابعی که هموار، متناوب، پیوسته نیستند ممکن است دچار خطا شوند. (مثلا در تابع موج مربعی و تابع دندان اره ای) در واقع در نقاط ناپیوستگی این توابع، سری فوریه دارای یک مقدار اضافی (اصطلاحا جهش) می شود و حتی با افزایش n این جهش از بین نمی رود. این موضوع باعث می شود سری فوریه مقدار واقعی تابع را نشان ندهد و برای از بین بردن تاثیر آن از فاکتورهای ترجیحی و سری صاف استفاده می شود.

مثال ۱



$\to a_n=0$ تابع فرد

برای تابع موج مربعی $f(x)=\begin{cases}-k & -\pi<x<0\\ k & 0<x<\pi\end{cases}$ با دوره تناوب 2π:

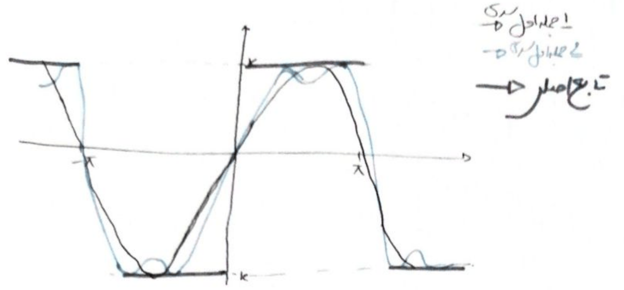
سری فوریه $=\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n x dx)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k\sin(nx)\,dx=\left[\frac{-2k\cos(nx)}{n\pi}\right]_0^{\pi}=\frac{2k\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin(nx)\to\begin{cases} n \text{ زوج} \to b_n=0\\ n \text{ فرد} \to b_n\end{cases}$$

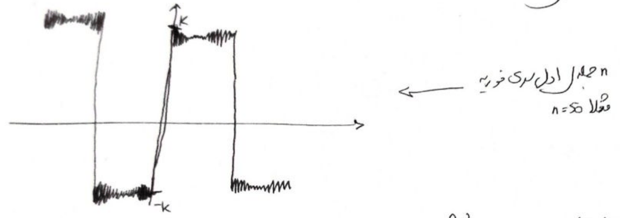
$b_n=\frac{4k}{2\pi}$

$\to$ سری فوریه $\approx f(x)\simeq\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$

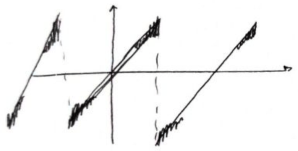
ادامه صفحه بعد

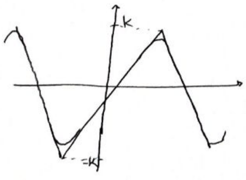


می بینیم که نزدیک نقاط ناپیوستگی شکل دارای نوسانی است که هرچقدر از این نقاط دوری شویم کمتر می شوند هرچه n بزرگتر شود این جهش ها کمتر می شوند ولی صفر نمی شوند.



که این اتفاق برای توابعی مثل تابع دندان اره‌ای و تابع موج مثلثی هم می افتد.





9 Question 3

$$\begin{cases} u_{tt} - 25u_{xx} = x - 2t & 0<x<\pi \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 & t>0 \\ u(0,t) = t,\ u(\pi,t) = 2t \end{cases}$$

شرایط مرزی ناهمگن:

$$u(x,t) = \underbrace{v(x,t)}\ + \underbrace{w(x,t)}_{ax+b}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + ax + b \to u(0,t) = t = v(0,t) + b \begin{cases} b = t \\ v(0,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(\pi,t) = 2t = v(\pi,t) + a\pi + b \begin{cases} a = \frac{t}{\pi} \\ v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$$w(x,t) = t + \frac{t}{\pi}x \to u(x,0) = v(x,0) = 0$$

$$u_t(x,t) = v_t(x,t) + 1 + \frac{x}{\pi} \to u_t(x,0) = 0 = v_t(x,0) + 1 + \frac{x}{\pi}$$

$$\to v_t(x,0) = -1 - \frac{x}{\pi}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_{tt} \\ u_{xx} &= v_{xx} \end{aligned} \to \begin{cases} v_{tt} - 25v_{xx} = x - 2t \\ v(0,t) = v(\pi,t) = v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = -1 - \frac{x}{\pi} \end{cases}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \to v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx \leftarrow$$ شرایط اولیه

$$v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin nx$$

$$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)(-n^2) \sin nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [G_n''(t) + 25G_n(t)n^2] \sin nx = x - 2t \leftarrow$$ جایگذاری در معادله

$$\to G_n''(t) + 25G_n(t)n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - 2t)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}(2t - \pi) - \frac{2t}{n}\right)$$

ادامه در صفحه بعد

$$G_n''(t) + 25 G_n(t) n^2 = \alpha$$

$$\alpha = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n(2t-\pi) - 2t\right) = \underbrace{\frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)}_{\alpha_1} t - \underbrace{\frac{2}{n}(-1)^n}_{\alpha_2}$$

$$\alpha = \alpha_1 t + \alpha_2 \to G_n''(t) + 25n^2 G_n(t) = \alpha \to \alpha = 0$$

$$\to D^2 + 25n^2 = 0 \to D = \pm 5ni$$

$$G_{gn}(t) = C_1 \sin 5nt + C_2 \cos 5nt \qquad G_{pn}(t) = A_0 + A_1(t)$$

$$G_{pn}''(t) = 0 \to G_{pn}(t) = \frac{\alpha_1 t + \alpha_2}{25n^2} = A_0 + A_1 t$$

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{\alpha_2}{25n^2} \\ A_1 = \dfrac{\alpha_1}{25n^2} \end{cases}$$

$$G_n(t) = G_{gn}(t) + G_{pn}(t) = C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t + \frac{\alpha_1 t + \alpha_2 t}{25n^2}$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t + \frac{\alpha_1 t + \alpha_2}{25n^2}\right] \sin nx$$

$$V_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[5C_1 \cos 5t - 5C_2 \sin 5t + \frac{\alpha_1}{25n^2}\right] \sin nx$$

$$V_t(x,0) = -1 - \frac{x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[5C_1 + \frac{\alpha_1}{25n^2}\right] \sin nx \to 5C_1 + \frac{\alpha_1}{25n^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\sin nx\, dx$$

$$\to 5C_1 + \frac{\alpha_1}{25n^2} = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n(1-n) - 1\right) \to \alpha_3$$

$$C_1 = \frac{\alpha_3 - \frac{\alpha_1}{25n^2}}{5}$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha_3 - \frac{\alpha_1}{25n^2}}{5}\right)\sin 5t - \frac{\alpha_2}{25n^2}\cos 5t + \frac{\alpha_1 t + \alpha_2}{25n^2}\right] \sin nx$$

$$\to U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25n^2}\left(\alpha_2(1 - \cos 5t) - \frac{\alpha_1 \sin 5t}{5}\right) + \frac{\alpha_3}{5} + \frac{\alpha_1 t}{25n^2} \sin nx\right] + t + \frac{tx}{\pi}$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right), \quad \alpha_2 = \frac{-2}{n}(-1)^n, \quad \alpha_3 = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n(1-n) - 1\right)$$