

نیم سال اول ۹۸-۹۷ سوالات فرد

۱- بهترین حالت زمان اجرای الگوریتم مرتب سازی درجی (Insertion Sort) زمانی رخ می دهد که:.....

گزینه الف

الف) داده های ورودی مسئله، خود از قبل مرتب شده باشد.

۳- فرض کنید $T_1(n)$ و $T_2(n)$ زمان اجرای دو قطعه برنامه P_1 ، P_2 باشد و داریم:

$$T_1(n) \in O(f(n))$$

$$T_2(n) \in O(g(n))$$

مقدار $T_1(n) + T_2(n)$ ، زمانی که قطعه برنامه P_2 در راستای قطعه برنامه P_1 اجرا می شود، برابر است با:

گزینه ب

جواب: نماد O (بی بزرگ): $f(n) \in O(g(n))$ به این معنی است که برای n های به اندازه کافی بزرگ $f(n)$ همواره از $cg(n)$ کوچکتر است بنابراین برای سوال بالا داریم:

$$T_1(n) < cf(n) \Rightarrow T_1(n) + T_2(n) < \max\{cf(n), cg(n)\}$$

$$T_2(n) < cg(n) \Rightarrow T_1(n) + T_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$$

۵- کدام گزینه رابطه بازگشتی محاسبه زمان اجرای الگوریتم ضرب ماتریس ها را به روش استراسن نشان می دهد؟

پاسخ: گزینه ج

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 7T\left(\frac{n}{4}\right) + 18\left(\frac{n}{4}\right)^2 \end{cases}$$

۷-در جستجوی دودویی لیست زیر، در صورتی که به دنبال یافتن عدد ۷۱ در لیست باشیم، پس از چند مقایسه، به نتیجه Not found (پیدا نشد) خواهیم رسید؟

اندیس	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
مقدار	۳	۹	۱۲	۲۷	۳۲	۳۹	۴۸	۴۹	۵۴	۶۰	۸۱	۹۸	۱۲۰

پاسخ:گزینه ج

۴مقایسه

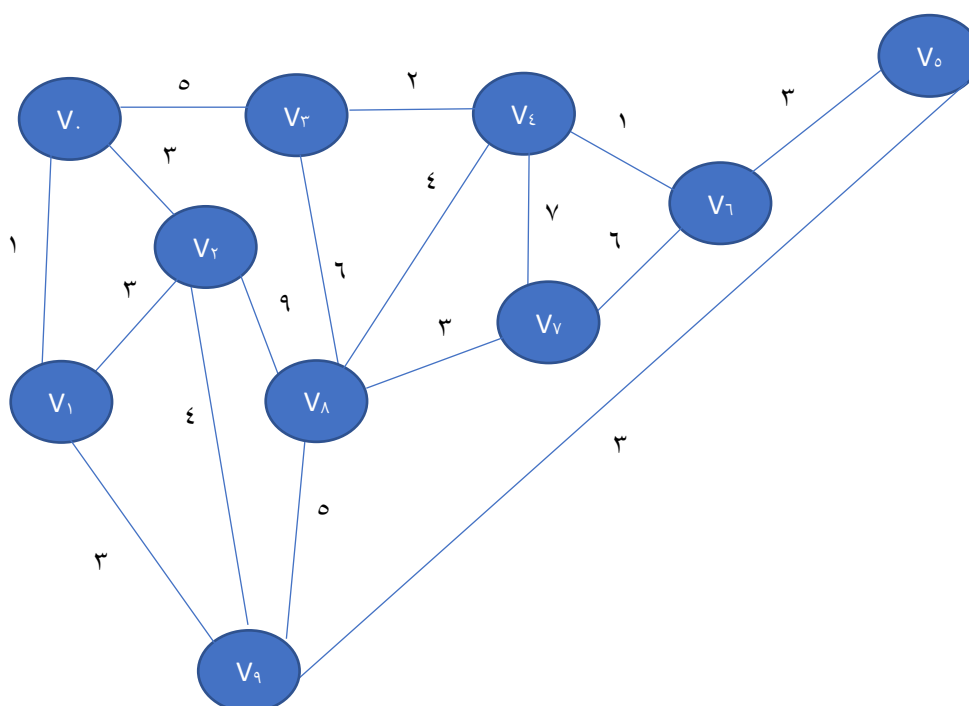
در جستجوی دودویی، روال جستجو به این صورت است که ابتدا عنصر وسط را پیدا کرده و با آن مقایسه می کنیم اگر کوچکتر بود در لیست پایین و اگر بزرگتر بود در لیست بالایی به دنبال آن می گردیم

$$\frac{۰ + ۱۲}{۲} = ۶ \rightarrow \text{عنصر وسط با اندیس ۶ که عدد ۴۸ می باشد}$$

$$\frac{۷ + ۱۲}{۲} = ۹ \rightarrow \text{چون عدد ۷۱ از ۴۸ بزرگتر است در نیمه بالایی به دنبال آن می گردیم و مجدد لیست را نصف می کنیم}$$

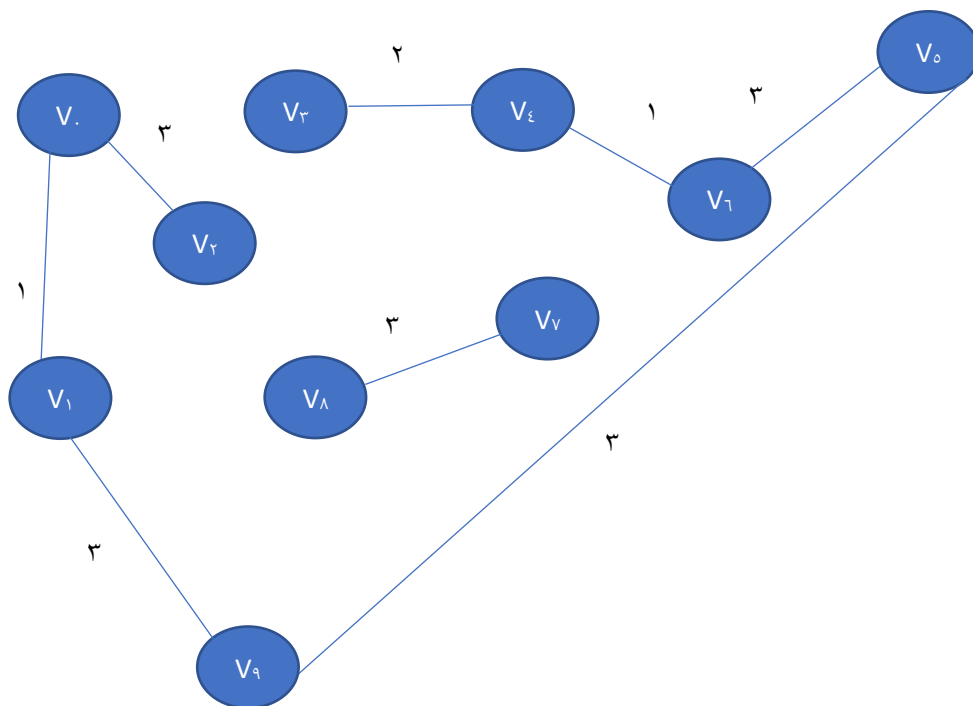
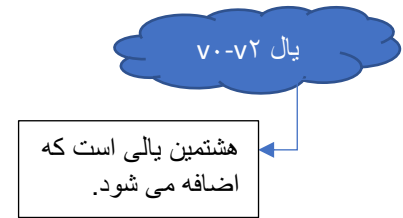
$$\frac{۱۰ + ۱۲}{۲} = ۱۱ \rightarrow \text{و در انتها با اندیس شماره ۱۰ مقایسه می کنیم}$$

۹-با در نظر گرفتن مقابل و با استفاده از الگوریتم کروسکال، هشتمین یالی که به درخت پوشای مینیمم حاصل افزوده می شود، کدام یال است؟



مراحل الگوریتم کروسکال به این صورت است که، ابتدا یال ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم سپس از کم وزن ترین یال شروع به اضافه کردن به الگوریتم می کنیم تا جایی که دور تشکیل نشود، در نهایت گراف مورد نظر باید همه ی رئوس را در بر بگیرد و در نهایت تعداد یالهای آن $(n-1)$ می شود.

پاسخ صحیح: گزینه د



۱۱- با در نظر گرفتن اشیاء زیر و همچنین کوله پشتی به ظرفیت ۴۰ کیلوگرم، حداکثر ارزش حاصل برای مسئله کوله پشتی (غیر صفر و یک-حریصانه) با استفاده از اشیاء موجود در جدول برابر خواهد بود با:

شماره کالا	۱	۲	۳	۴	۵
ارزش	۸	۵	۱۵	۱۰	۲۰
وزن	۱۶	۱۵	۲۵	۸	۱۵
$\frac{\text{ارزش}}{\text{وزن}}$	$\frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$	$\frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳} = ۰/۳۳$	$\frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$	$\frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$	$\frac{۲۰}{۱۵} = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳$

پاسخ: گزینه ج

$$\text{مجموع وزن های انتخابی} = ۱۵ + ۸ + \frac{۱۵}{۲}$$

$$\text{حداکثر مجموع سود حاصله} = ۲۰ + ۱۰ + \frac{۱۷}{۲} \times ۱۵ = ۲۰ + ۱۰ + \frac{۵}{۲} = ۲۰ + ۱۰ + \frac{۱۰}{۲} = ۴۰/۲$$

۱۳- در الگوریتم محاسبه حداقل ضرب ها در زنجیره ضرب ماتریس ها، برای محاسبه $m_{1,\epsilon}$ نیاز به داشتن کدام مقادیر در ماتریس محاسبات داریم. (به بیانی دیگر: برای محاسبه $m_{1,\epsilon}$ از کدام مقادیر ماتریس استفاده خواهیم کرد)

با استفاده از فرمول ضرب ماتریس ها داریم:

$$m_{1,\epsilon} = \begin{cases} k=1 \Rightarrow \min(M(1)(1) + M(2)(\epsilon) + d_1 d_1 d_\epsilon \\ k=2 \Rightarrow \min(M(1)(2) + M(3)(\epsilon) + d_1 d_2 d_\epsilon \\ k=3 \Rightarrow \min(M(1)(3) + M(4)(\epsilon) + d_1 d_3 d_\epsilon \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 3$$

پاسخ گزینه ب $m_{1,1}, m_{2,\epsilon}, m_{1,2}, m_{3,\epsilon}, m_{1,3}, m_{\epsilon,\epsilon}$

۱۵- مرتبه زمانی الگوریتم یافتن دور بهینه در یک گراف (مسئله فروشنده دوره گرد) برابر با کدام گزینه است؟

گزینه ب $\theta\left(\binom{n}{2}\right)$

۱۷- کدام گزینه، سود بهینه حاصل از انتخاب ناشی (قطعه) اول به شرطی که وزن کل از W بیشتر نشود، را به روش برنامه نویسی پویا (برای حل مسئله کوله پشتی) نشان می دهد.

پاسخ گزینه ب

$$P[i][w] = \begin{cases} \text{maximum}(P[i-1][w], P_i + P[i-1][w-w_i]) & \text{if } w_i \leq w \\ P[i-1][w] & \text{if } w_i > w \end{cases}$$

در صورتی که وزن قطعه آخر را برداریم

یا اینکه قطعه آخر را برداریم

در صورتی که وزن قطعه نام کمتر از w باشد

قطعه آخر را بر نمی داریم

اگر وزن قطعه آخر بیشتر از w باشد

۱۹- کدام یک از موارد زیر، صحیح است.

مورد اول: مسئله ای که به روش بازگشت به عقب حل می گردد، می تواند بیش از یک جواب داشته باشد و هیچ جوابی بر جواب دیگر، امتیاز ندارد. \leftarrow درست است

مورد دوم: در اغلب مسائلی که به روش انشعاب و تحدید حل می شود، مهم یافتن جواب بهینه است. \leftarrow درست است

مورد سوم: الگوی جستجو در درخت برای روش انشعاب و تحدید، جستجوی عمقی است. \leftarrow نادرست است

پاسخ گزینه الف (فقط مورد اول و دوم)

۲۱- برای کارهای زیر، با مورد مهلت داده شده، بیشترین سودی که می توان کسب نمود، برابر است با (مسئله زمانبندی با مهلت)

کار	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
سود	۸۹	۷۴	۶۹	۴۲	۵۹	۱۶	۱۹	۱۲
مهلت	۳	۱	۴	۲	۳	۲	۳	۴

ابتدا کارها را از سود بیشتر به سود کمتر مرتب می کنیم

کار	۱	۲	۳	۵	۴	۷	۶	۸
سود	۸۹	۷۴	۶۹	۵۹	۴۲	۱۹	۱۶	۱۲
مهلت	۳	۱	۴	۳	۲	۳	۲	۴
	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×

قابل انجام هستند

پاسخ: گزینه ج

$$۲۹۱ = ۸۹ + ۷۴ + ۶۹ + ۵۹ = \text{حداکثر سود}$$

۲۳- کدام گزینه، رابطه بازگشتی مربوط به الگوریتم حاصلضرب دو عدد بزرگ n رقمی را به دو رقمی بیان می کند؟

پاسخ: گزینه ۴

$$T(n) = \epsilon T\left(\frac{n}{\epsilon}\right) + cn$$

که بعدها نیز ضریب ۴ را در رابطه بازگشتی کاهش دادن و رابطه زیر بدست آمد

$$T(n) = \epsilon T\left(\frac{n}{\epsilon}\right) + cn \Rightarrow \theta(n^{\log_{\epsilon} \epsilon})$$

۲۵- کدام یک از موارد، در خصوص مسائل تصمیم گیری درست است؟

مورد اول: مسائل NP زیر مجموعه مسائل P هستند. **نادرست**

مورد دوم: مسائل P زیر مجموعه مسائل NP هستند. **درست**

مورد سوم: مسائل تصمیم گیری ای وجود دارند که NP هستند نه P. **درست**

مورد چهارم: همه مسائل تصمیم گیری یا از نوع P هستند یا از نوع NP. **نادرست**

پاسخ گزینه ب (فقط موارد دوم و سوم)

سوالات تشریحی نیم سال اول ۹۷-۹۸

۱- رابطه بازگشتی زیر را حل نمایید.

$$T(n) = 3T(n-1) + \epsilon T(n-2)$$

$$T(0) = 0, T(1) = 1$$

برای حل روابط بازگشتی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت، ابتدا معادله مشخصه آن را پیدا می کنیم

جواب بعد از حل این معادله با فرض داشتن:

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n : r_1, r_2 \text{ دو جواب مجزای}$$

$$T(n) - 3T(n-1) - \epsilon T(n-2) = 0$$

$$r^2 - 3r - \epsilon = 0 \Rightarrow (r+1)(r-\epsilon) = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = \epsilon$$

$$T(n) = c_1(-1)^n + c_2(\frac{1}{2})^n \quad \text{جواب کلی}$$

$$T(n) = 0 \Rightarrow c_1(-1)^0 + c_2(\frac{1}{2})^0 = 0$$

$$T(n) = 1 \Rightarrow c_1(-1)^1 + c_2(\frac{1}{2})^1 = 1$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ -c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

$$-(-c_2) + \frac{1}{2}c_2 = 1$$

$$+ \quad + \quad \frac{1}{2} = 1$$

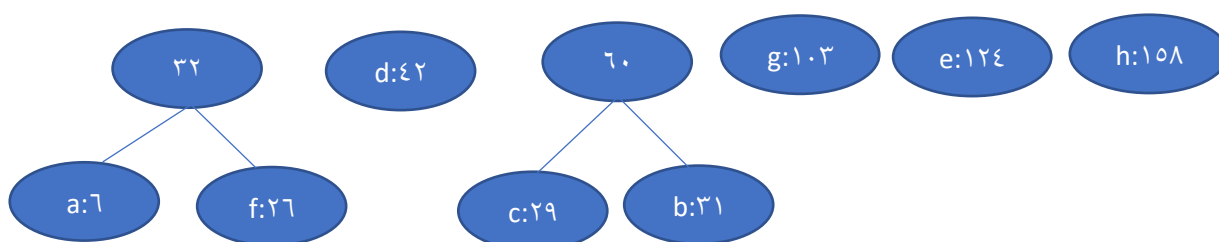
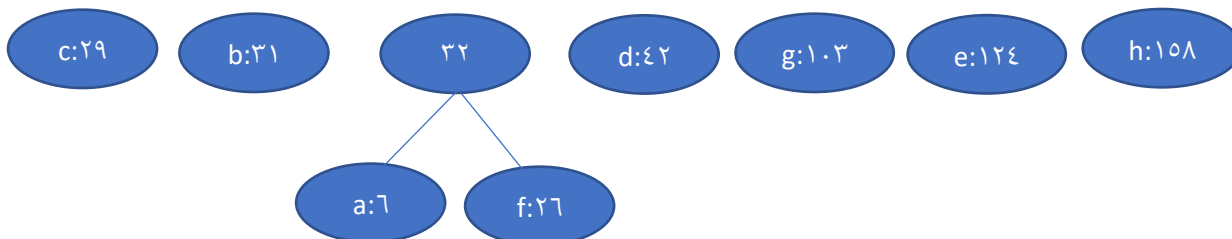
$$\circ c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$$

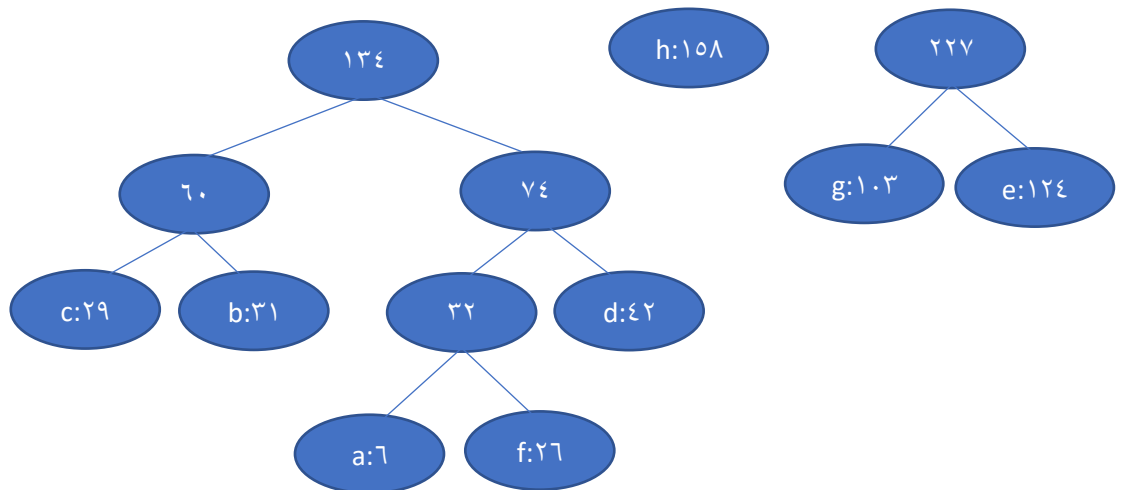
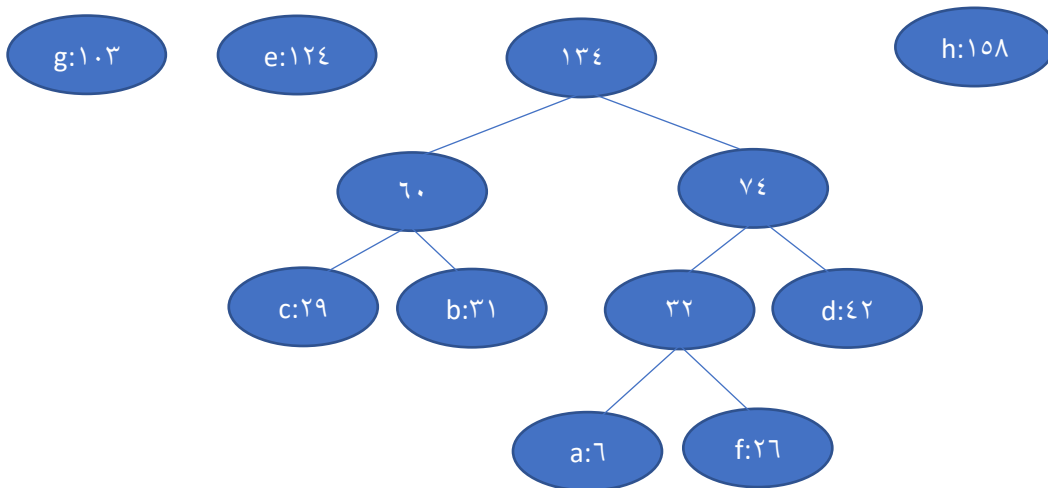
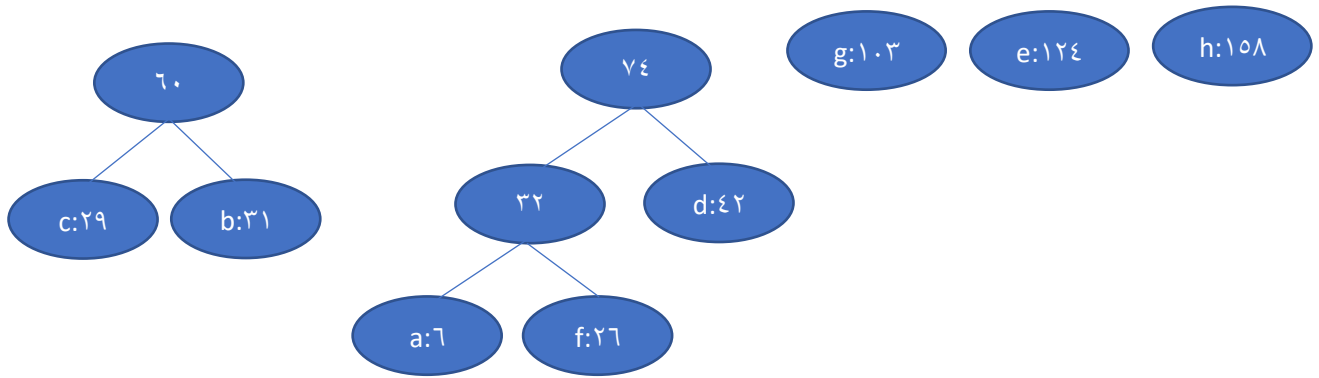
$$T(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^n + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n$$

۳-فرض کنید متنی شامل حروف a,b,c,d,e,f,g,h باشد تعداد کاراکترهای این متن برابر ۵۱۹ کاراکتر است که در آن تعداد تکرار کاراکترها به صورت زیر است.

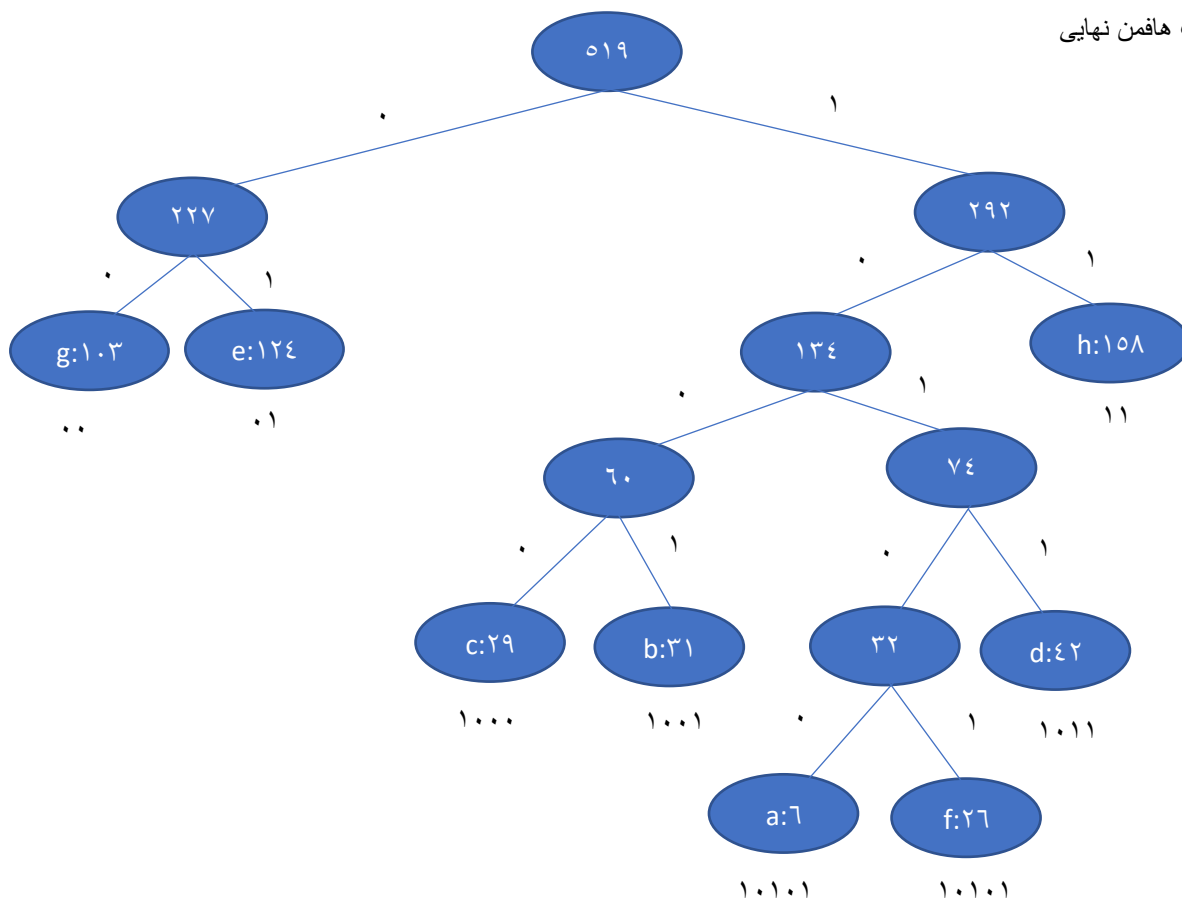
حرف	A	b	c	d	e	f	g	h
تکرار	۶	۳۱	۲۹	۴۲	۱۲۴	۲۶	۱۰۳	۱۵۸
کد	۱۰۱۰۰	۱۰۰۱	۱۰۰۰	۱۰۱۱	۰۱	۱۰۱۰۱	۰۰	۱۱

الگوریتم کدگذاری هافمن را بر روی این کاراکترها اعمال نموده و درخت کدگذاری را مرحله به مرحله رسم نموده و در نهایت کدهای مربوط به حروف را استخراج نمایید.





درخت هافمن نهایی



۵- فرض کنید کالاهای زیر را داریم

شماره کالا	۱	۲	۳	۴
ارزش	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰
وزن	۱۰	۵	۵	۲

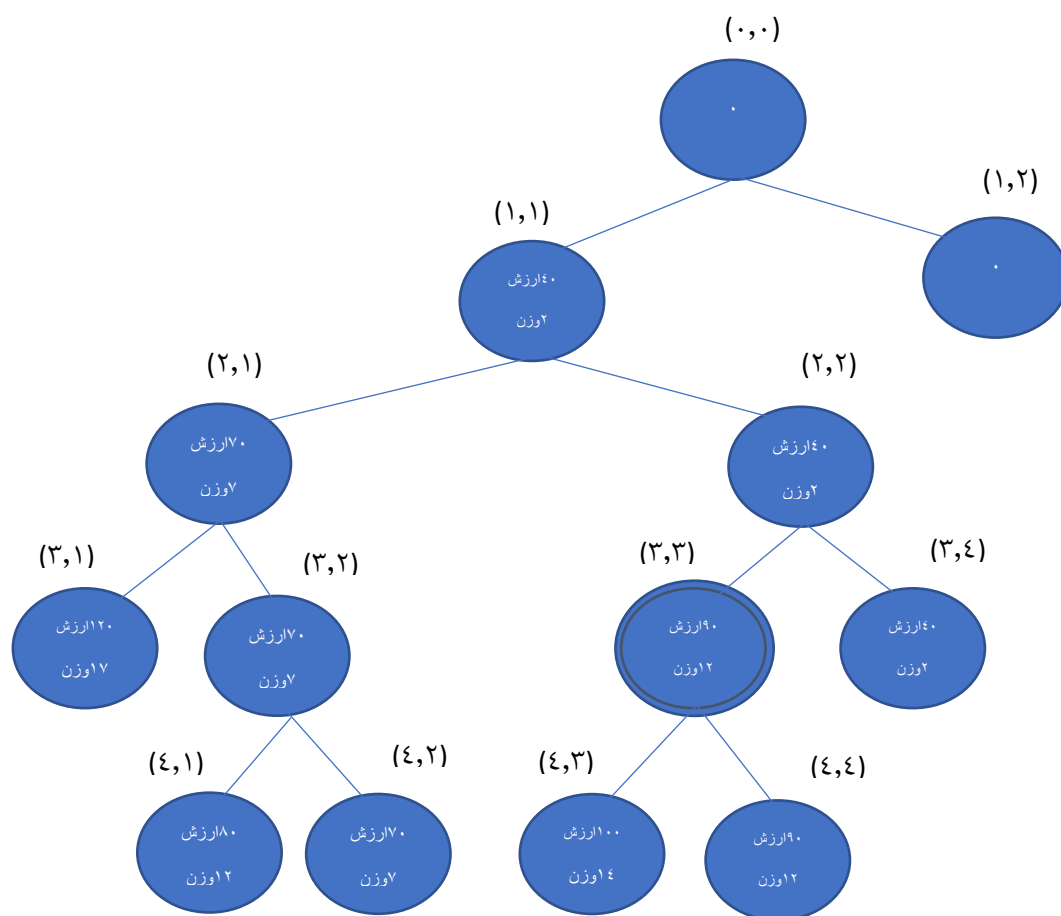
اگر ظرفیت کوله پشتی برابر ۱۶ کیلوگرم باشد، مسئله کوله پشتی صفر و یک بالا را به روش تکنیک عقبگرد حل نمایید.

درخت فضای جستجو را به طور کامل رسم نمایید و در نهایت حداکثر سود ممکن را محاسبه نمایید.

شماره کالا	ارزش	وزن	ارزش / وزن
۱	۵۰	۱۰	۵
۲	۳۰	۵	۶
۳	۱۰	۵	۲
۴	۴۰	۲	۲۰

ایتم ها را بر اساس $\frac{\text{ارزش}}{\text{وزن}}$ به صورت نزولی مرتب میکنیم

شماره کالا	ارزش	وزن	ارزش / وزن
۴	۴۰	۲	۲۰
۲	۳۰	۵	۶
۱	۵۰	۱۰	۵
۳	۱۰	۵	۲



آیتم اول ۴۰ ارزش، ۲ وزن
 آیتم دوم ۳۰ ارزش، ۵ وزن
 آیتم سوم ۵۰ ارزش، ۱۰ وزن
 آیتم چهارم ۱۰ ارزش، ۵ وزن