



زهرابشیری خاوری\_دانشگاه پیام نور مرکز ورامین  
سوالات زوج تابستان ۹۸\_شماره دانشجویی: ۹۵۰۲۴۹۵۷۶

۲) زمان اجرای  $T(n) = 3n^3 + 2n + 1$  می باشد. پیچیدگی زمان  
آن را محاسبه نمایید؟  
جواب: الف)  $O(n^3)$

$$T(n) = 3n^3 + 2n + 1$$

$$T(n) = 3n^3 + 2n + 1 \leq 3n^3 + 2n^3 + n^3$$

$$T(n) = 3n^3 + 2n + 1 \leq 6n^3$$

که در آن  $c=6$  و  $n_0=1$  انتخاب نگاه :

$$T(n) \in O(n^3)$$

۴) زمان اجرای الگوریتم مرتب سازی ادغامی، کدام گزینه است؟

جواب: ب) اگر  $T(n)$  زمان اجرای

merge sort باشد باتوجه دبه این که ارایه به دو قسمت مساوی تقسیم می شود و مرتبه ادغام نیز  $e(n)$  داریم :

$$T(n) =$$

$$\begin{cases} d & \text{if } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{if } n > d \end{cases}$$

۶) رابطه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید : پیچیدگی زمانی آن کدام است؟  
 $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + 1$

جواب: ج)  $O(n)$

$$= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

ان گاه طبق قضيه اصلی:  $a=2, b=2, k=0$

$$2 > 2^0 \rightarrow 2 > 1 \rightarrow \theta(n^{\log_b a}) \rightarrow O(n^{\log_2 2}) \\ \rightarrow O(n^1) \rightarrow O(n)$$

۸) روابط بازگشتی زیر را در نظر بگیرید: پیچیدگی زمانی آن  
 $T(n)=3T(n-1)+4T(n-2)$  کدام است ؟

$$T(0)=0, T(1)=1$$

جواب :  $O(4^n)$

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$$

$$a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -4, k = 2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = 4, x_2 = -1$$

$$\rightarrow t_n = c_1(4)^n + c_2(-1)^n \rightarrow$$

با اعمال شرایط مرزی  $(c_2, c_1)$  را بدست می آوریم .

$$\left. \begin{array}{l} t_0 = c_1(4)^0 + c_2(-1)^0 = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ t_1 = c_1(4)^1 + c_2(-1)^1 = 1 \rightarrow 4c_1 - c_2 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{1}{5}, c_2 = -\frac{1}{5}$$

$$\rightarrow T_n = \frac{1}{5}(4)^n - \frac{1}{5}(-1)^n \rightarrow T(n) \in \theta(4^n)$$

۱۰) کدام مورد در خصوص روش الگوریتم مرتب سازی سریع صحیح می باشد ؟

**جواب :** الف) لزوما لیست به دو بخش با طول مساوی تقسیم نمی شود

۱۲) اگر دو لیست یا فایل مرتب را به ترتیب با  $n, m$  کد ادغام کنیم به طوری که فایل حاصل از این ادغام نیز مرتب باشند. در چه زمان اجرا می شود؟

**جواب:**  $O(m+n)$  (ج)

همان طور که قبلا دیدید دو لیست یا فایل مرتب به ترتیب با  $m$  و  $n$  کد را می توانیم در  $O(m+n)$  زمان ادغام کنیم به طوری که فایل حاصل از این ادغام نیز مرتب باشد.

۱۴) کدام گزینه در خصوص درخت های جست و جوی دودویی صحیح می باشد؟

**جواب:** (ج) کلیدهای موجود در زیر درخت راست یک راس ، بزرگتر یا مساوی کلید آن راس هستند.

۱۶) تعداد درخت های جست و جوی دودویی متفاوت با عمق  $n-1$  برابر با کدام گزینه می باشد ؟

**جواب:**  $2^{n-1}$

در یک درخت جستجوی دودویی با عمق  $n-1$  موقعیت هر گره اطراف ریشه در هر یک از  $n$

1

سطح می تواند در سمت چپ یا راست گره پدرش باشد یعنی این که در هر یک از سطوح مذکور دو احتمال وجود دارد و این بدین معناست که تعداد درخت های جستجوی دودویی با

عمق  $n-1$  برابر است با  $2^{n-1}$  می توان با یک روش برنامه نویسی پویا الگوریتمی با زمان بهتر نوشت.

۱۸) کدام ویژگی مسایل روش بازگشت به عقب صحیح بیان شده است ؟

**جواب: الف)** اکثرا مسایلی که به روش بازگشت به عقب حل می شوند ذاتا مسایل سختی هستند.

۲۰) الگوی جست و جو برای بازگشت به عقب (عقبگرد) به کدام صورت انجام می پذیرد ؟

**جواب : الف)** جست و جو در عمق

استفاده از پیمایش عمقی در روش عقب گرد الزامی است

۲۲) زمان الگوریتم های انشعاب و تحدید ،در بدترین حالت چگونه است ؟

**جواب :** نمایی یا بدتر

توضیح: همانند الگوریتم عقب گرد زمان الگوریتم های انشعاب و تحدید نیز معمولاً در بدترین حالت زمانی نمایی یا بدتر می باشد

(۲۴) مجموعه تمام مسایل تصمیم گیری که توسط الگوریتم های زمانی چند جمله ای قابل حل هستند . کدام کلاس را نشان می دهند؟

**جواب :** کلاس P

توضیح:

P مجموعه ای از تمامی مسائل تصمیم گیری است که می توان آن ها را با الگوریتم های زمان چند جمله ای حل کرد.

سوالات تشریحی زوج تابستان ۹۸

(۲) تابع بازگشتی برای محاسبه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک به روش اقلیدسی بنویسید.

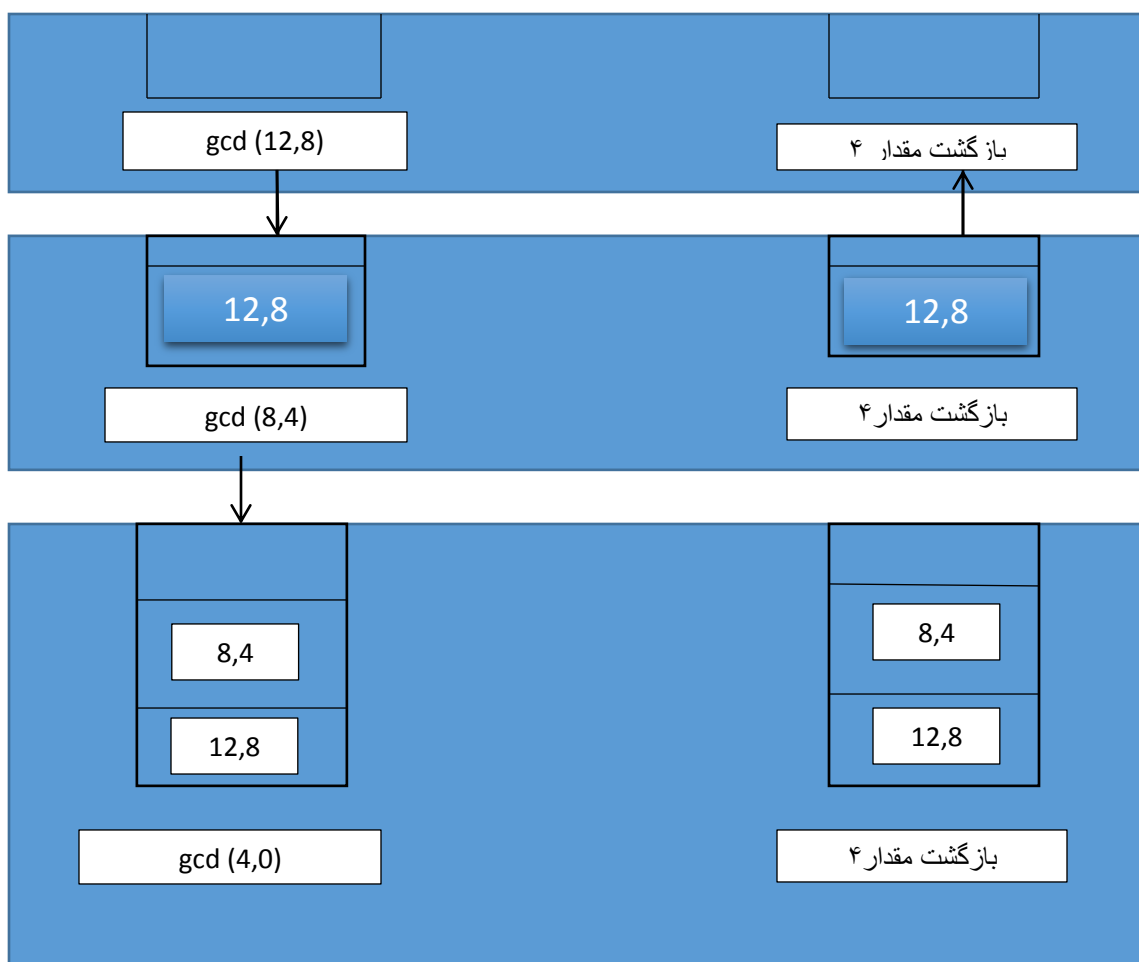
**جواب :** روش اقلیدسی محاسبه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح نامنفی یکی از الگوریتم های بسیار قدیمی است که براساس تفکر بازگشتی بنا شده است .

فرض کند  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح غیر منفی باشند و  $a \leq b$   
چنانچه  $b=0$  باشد ان گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $b$  و  
باقی مانده  $a$  بر  $b$  خواهد بود تابع این الگوریتم به صورت زیر  
میباشد:

```
int gcd(int a , int b)
{
if(b==0)
return a;
else
return(gcd(b,a%b));
}
```

حال الگوریتم بالا را به ازای  $a=12$  و  $b=8$  برای محاسبه ی  
بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد در شکل نمایش می  
دهیم.





شکل بالا مراحل اجرای الگوریتم بازگشتی برای محاسبه ی بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد  $a, b$  با مقادیر بالا را نمایش می دهد و در نهایت مقدار ۴ را به عنوان خروجی بر می گرداند.

۴) فرض کنید ارایه زیر را داریم :

11,12,18,20,21,23,27,40,75,80,85

به ازای  $x=40$  و  $x=84$  الگوریتم را اجرا کنید؟

جواب:

x	low	high	mid	a[mid]
40	0	10	5	23
	6	10	8	75
	6	7	6	27
	found	7	7	40
84	0	10	5	23
	6	10	8	75
	9	10	9	80
	10	10	10	85
Not found	10	9		

سوالات فرد نیمسال دوم ۱۳۹۳\_۹۴

۱) چند جمله ای  $an^2+bn+c$  مربوط به زمان اجرای کدام الگوریتم مرتب سازی می باشد ؟

جواب: ج) در جی

توضیح: رفتار حالت متوسط و بدترین حالت مرتب سازی یکسان و برابر  $an^2+bn+c$  است.

۳) کدامیک از روابط زیر نشان دهنده رابطه صحیح زمان محاسبه الگوریتم های مختلف است ؟

جواب: الف)  $O(\log_2 n) < o(n) < O(n \log_2 n) < O(n^2) < O(2^n)$

توضیح: ترتیب مرتبه زمانی از کوچک تر به بزرگ تر است.

$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(2^n) < O(n!)$

گزینه ای که این ترتیب را رعایت کرده گزینه درست است.

۵) در الگوریتم merge sort اگر به جای اینکه هر بار لیست به دو قسمت مساوی تقسیم شود به چهار قسمت مساوی

تقسیم گردد و در مرحله ترکیب با چهار لیست در یک دیگر ادغام شوند پیچیدگی زمانی الگوریتم چه خواهد شد ؟

جواب : ج)  $O(n^{\log n})$

$$T(n) = 4T(n/4) + cn \quad T(n) = \Theta(n \log n)$$

یاد آوری

$$\left\{ \begin{array}{l} T(n) = aT(n/b) + cn^k \\ T(1) = c \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} t(n) = \theta(n^{\log_b a}) & a > b^k \\ t(n) = \theta(n^k \log_2 n) & a = b^k \\ t(n) = \theta(n^k) & a < b^k \end{array} \right.$$

$$a = 4, b = 4, k = 0, \quad a = b^k \rightarrow t(n) = \theta(n^{\log n})$$

۷) تعداد گره ها در درخت فضای حالت برای الگوریتم عقبگرد برای مساله مدار های هامیلتونی برابر است با :

جواب : الف)

توضیح:

$$1 + (n - 1) + (n - 2)^2 + \dots + (n - 1)^{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n-2}$$

۹) مرتبه زمانی مساله فروشنده دوره گرد با استفاده از برنامه نویسی پویا برابر است با:

جواب : د)  $O(n^2 2^n)$

توضیح:

زمان در حلقه وسط در مقایسه با زمان حلقه اول و خار زمان بزرگی است. زیرا حلقه وسط شامل سطوح متعددی است بنابراین ما دستورالعمل های اجرا شده برای هر مقدار از  $v$  را به عنوان عمل اصلی در نظر می گیریم که شامل یک دستور اعلم جمع نیز باشد اندازه

ورید تعداد گره های گراف است برای هر مجموعه  
 A که شامل k راس است باید  $n-k-1$  راس را در نظر  
 بگیریم و به ازای هر یک از این راس ها عمل اصلی  
 k مرتبه اجرا می شود.

از انجام که تعداد زیر مجموعه های A از  $v - \{v_1\}$   
 که شامل k راس است برابر  $\binom{n-1}{k}$  است تعداد  
 مجموعه دفعات که عمل اصلی انجام می شود عبارت  
 از:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k)k \binom{n-1}{k}$$

داریم:

$$(n-1-k) \binom{n-1}{k} = (n-1) \binom{n-2}{k}$$

این رابطه را در رابطه قبلی جایگذاری می کنیم :

$$T(n) = (n-1) \sum_{k=1}^{n-2} k \binom{k-2}{k} \rightarrow T(n) = (n-1)(n-2)2^{n-3}, T(n) \in \theta(n^2 2^n)$$

۱۱) مجموعه تمامی مسایل تصمیم گیری که توسط الگوریتم های زمانی چند جمله ای قابل حل هستند جزو کدام کلاس می باشند؟

**جواب :** الف) کلاس P

**توضیح:**

P مجموعه ای از تمامی مسائل تصمیم گیری است که می توان آن ها را با الگوریتم های زمان چند جمله ای حل کرد.

۱۳) در کدام روش ابتدا نمونه های کوچک تر را حل میکنیم. نتایج را ذخیره می کنیم و هرگاه به آنها نیاز داشتیم به جای محاسبه دوباره کافی است آن را بازیابی کنیم ؟

**جواب :** ب) برنامه نویسی پویا

**توضیح:**

این روش از این جهت که مسئله را به زیر مسئله های کوچک تر تقسیم می کند مشابه روش تقسیم و حل است اما تفاوت آن در این است که در این روش پس از تقسیم ابتدا نمونه های کوچک تر محاسبه شده و نتیجه شان در مکانی ذخیره می شود و در واقع لزوم از مقادیر شان استفاده می شود و نیاز به محاسبه مجدد آنها نیست بلکه فقط نتیجه از مکان مورد نظر بازیابی می شود این روش تاحدزیادی باعث صرفه جویی در زمان مصرفی الگوریتم خواهد شد .

۱۵) کدام الگوریتم برای یافتن کلیه کوتاه ترین مسیرها از مبدا واحد به مقصد های متفاوت بکار می رود؟

**جواب:** ب) دیکسترا

توضیح:

فقط اندازه کلیه کوتاه ترین مسیر ها از منبع واحد به مقصد های متفاوت را محاسبه می کند ولی خود مسیر ها را مشخص نمی کند.



۱۷) کدامیک از موارد ذیل جزو سه شرط لازم برای روش تقسیم و حل نمی باشد ؟

**جواب :** ب) بررسی اینکه مسئله مرتبه ای از لگاریتم می باشد .

توضیح:

۱- اگر مسئله به اندازه کافی کوچک بود آن را حل می کنیم.

۲- اگر مسئله بزرگ باشد آن را به زیر مسئله های کوچک تر تقسیم می کنیم و این تقسیم را تا رسیدن به زیر مسئله های به اندازه کافی کوچک و قابل حل ادامه می دهیم .

۳- زیر مسئله ها را به صورت باز گشتی حل می کنیم .

۴- جواب زیر مسئله های کوچک را با هم ترکیب می کنیم تا به جواب مسئله بزرگ برسیم.

۱۹) مرتبه زمانی تابع زیر برابر است با :

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

جواب : ج  $O(n^{\log 3})$

توضیح:

$$a = 3, b = 2, k = 1 \quad 3 > 2^1 \rightarrow$$

$$T(n) \in \theta(n^{\log_2 3}) \rightarrow T(n) \in \theta(n^{\log 3})$$

۲۱) مرتبه زمانی پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم در لیستی  
با  $n$  عنصر برابر است با :

جواب :  $O(n)$

۲۳) برای ادغام دو لیست مرتب با  $n$  عنصر ، حداکثر چه میزان مقایسه نیاز می باشد ؟

جواب : ب)  $n-1$

توضیح : حداکثر تعداد مقایسه ها برای ادغام دو لیست  $n$  عنصری  $n-1$  می باشد

۲۵) مرتبه زمانی رابطه بازگشتی زیر برابر است با :  
جواب : الف)  $O(3^n)$

$$T(n)=2T(n-1)+3T(n-2)$$

$$T(0)=0, T(1)=1$$

$$t_n - 2t_{n-1} - 3t_{n-2} = 0 \quad \text{حل:}$$

$$a_0=1, a_1 = -2, a_2 = -3, k = 2$$

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$$

جواب عمومی

$$t_n = c_1(3)^n + c_2(-1)^n:$$

$$t_0 = c_1(3)^0 + c_2(-1)^0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

مقادیر مرزی :

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{4}$$

$$t_1 = c_1(3)^1 + c_2(-1)^1 \rightarrow$$

$$3c_1 - c_2 = 1$$

$$t_n = \frac{1}{4}(3)^n - \frac{1}{4}(-1)^n = T(n) \in O(3^n)$$

سوالات تشریحی فرد نیمسال دوم ۹۳-۹۴

۱) الگوریتم پریم و کروسکال را از نظر مرتبه زمانی  
را با یکدیگر مقایسه نمایید و کارائی هر کدام در چه  
زمانی بهتر می باشد؟

**جواب:** این دو الگوریتم را در حالت هایی که گراف کامل باشد یا غیر کامل می توان با هم مقایسه کرد در حالت کلی می دانیم که تعداد یال های یک گراف همبند با  $n$  راس از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$(n - 1) \leq m \leq (n - 1)/2$$

در حالتی گراف کامل باشد کران بالا ی رابطه بالا برقرار بوده و در حالتی گراف متراکم باشد حد پایینی برقرار است

همچنین مشاهده کردین که پیچیدگی زمانی دو الگوریتم به صورت زیر بوده:

الگوریتم پریم

$$T(n) \in \theta(n)^2$$

الگوریتم کروسکال

$$T(m) \in \theta(m \log m), T(n) \in \theta(n^2 \log n)$$

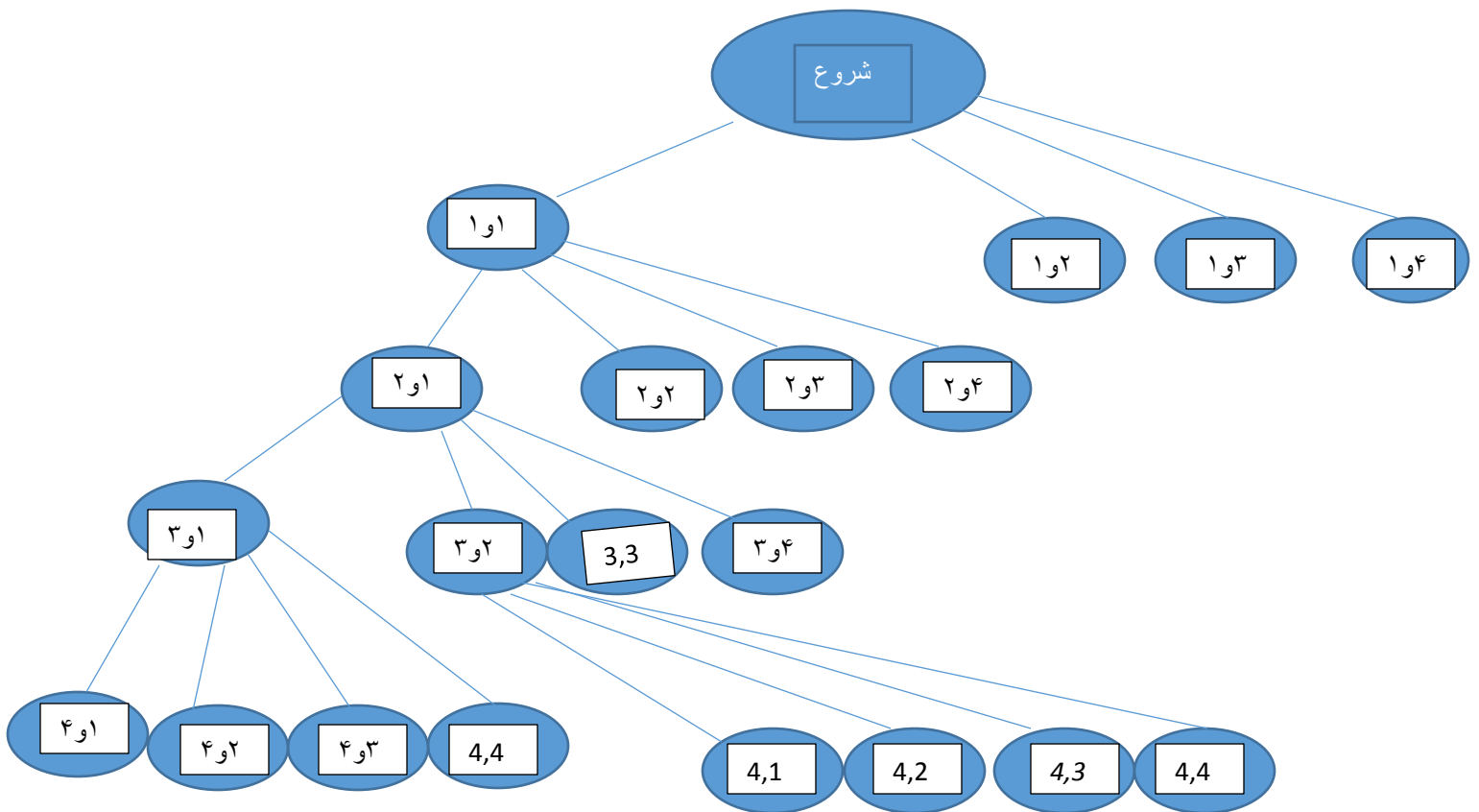
بنابراین با توجه به رابطه اول و دوم بیان می کنیم که در صورتی که گراف متراکم باشد الگوریتم کروسکال زمان  $\theta(n \log n)$  را صرف می کند یعنی سریعتر از

الگوریتم پریم عمل می کندولی در صورتی که گراف کامل باشد الگوریتم پریم سریع تر عمل می کند.

۳) الگوریتم عقب گرد برای مساله  $n$  وزیر را برای نمونه مساله ای بکار ببرید که در آن  $n=4$  است عملیات را مرحله به مرحله نشان دهید .

**جواب:** حال می خواهیم تکنیک عقب گرد را با نمونه ای از مسئله  $n$  وزیر با  $n=4$  توضیح دهیم قصد داریم ۴ وزیر را در صفحه شطرنج  $4 \times 4$  طوری قرار دهیم که هیچ دو وزیری یکدیگر را تهدید نکنند ابتدا مسئله را از این دید بررسی می کنیم که هیچ دو وزیری در یک ردیف نباید قرار بگیرند پس می توان هر یک از وزیر هار به ردیفی دیگر انتقال داد وبا بررسی این که ترکیبات چه ستونی منجر به حل مسئله می شود مسئله را حل کرد می دانیم که  $4^4 = 256$  جواب کاندید وجود دارد چون هر وزیر در هر یک از ۴ ستون می تواند جای گیرد تمام این جواب ها ی کاندید را برای ساختن یک درخت ایجاد می کنیم در این درخت ستون انتخابی برای وزیر اول در گره های سطح ۱ درخت ذخیره می شود ستون انتخابی وزیر ردیف ۲ در گره های سطح ۲ ذخیره می

شود و به همین ترتیب الی آخر هر جواب کاندید مسیری  
از ریشه به برگ است این درخت موسوم به درخت  
فضای حالات است که بخشی از آن را در شکل زیر  
مشاهده می کنید.



اگر درخت کامل را رسم کنیم میبینیم که ۲۵۶ برگ در  
این درخت وجود دارد هما طور که می بینید در هر  
گره یک زوج مرتب  $(x, y)$  ذخیره می شوند این زوج مرتب  
نشان دهنده این است که وزیری در ردیف  $y$  ستون  $x$  قرار

دارد برای تعیین جواب تعدادی از جواب های کاندید را  
باشروع از چپ ترین مسیر بررسی می کنیم .تعدادی از  
جواب ها به صورت زیر است.

$[<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,1>]$

$[<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,2>]$

$[<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,3>]$

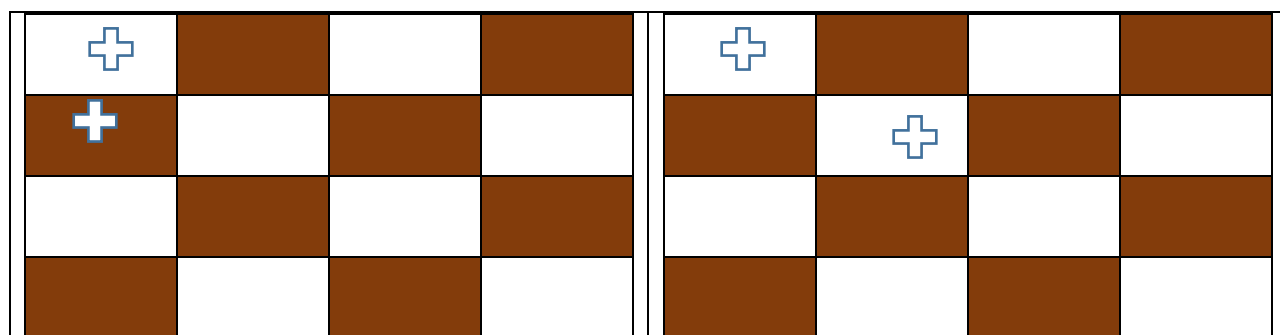
$[<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,4>]$

$[<1,1>,<2,1>,<3,2>,<4,1>]$

توجه می کنید که گره ها بر اساس یک جستجوی عمقی  
که در آن فرزندان یک گره از چپ به راست پیمایش می  
شود ملاقات شده اند یک جستجوی عمقی ساده روی  
یک درخت فضای حالات شبیه به دنبال کردن هر مسیر  
در maz تا رسیدن به بن بست است بدون استفاده از  
علائم راهنما با استفاده از این علائم راهنما می توان به



کارایی بالا ترین دست یافت مثلا همان طور که در شکل پایین نشان داده شده هیچ دو وزیری نمی توانند در یک ستون باشند پس اصلا مسیر هادر کل شاخه منشعب از گره ۱ و ۲ بررسی نخواهند شد چون قبلا وزیر ۱ در ستون ۱ قرار گرفته و وزیر ۲ نمی تواند در آن ستون قرار گیرد این علامت راهنما به ما می گوید کچه این گره یعنی ۱ و ۲ به بن بست می رسد به طور مشابه در شکل زیر مشاهده می کنید که هیچ دو وزیری در یک قطرنمی توانند قرار بگیرند بنابر این کل مسیر های منشعب از گره ۲ و ۲ نیز بررسی نخواهند شد چون به بن بست می رسد.



(a)

(b)

۵)متنی شامل حروف زیر می باشد تعداد کاراکتر های این متن ۸۹ است که تعداد تکرار هابه صورت ذیل می باشد به کمک الگوریتم کد هافمن کد گذاری متن را انجام دهید.

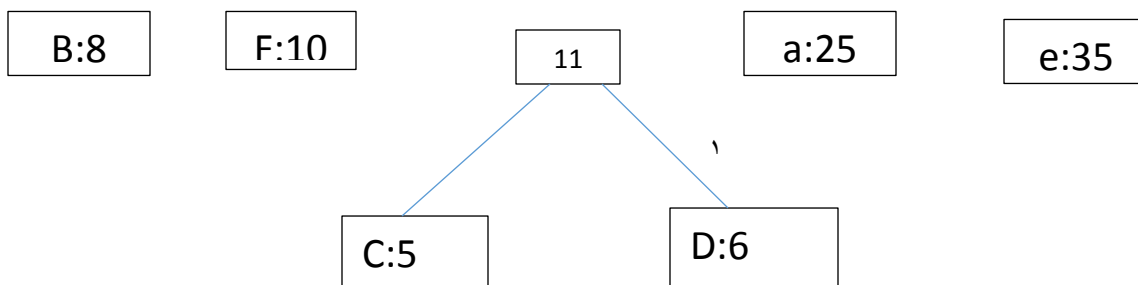
**کاراکتر ها: a b c d e f**

**تعداد کاراکتر ها: 10 3 5 6 5 8 25**

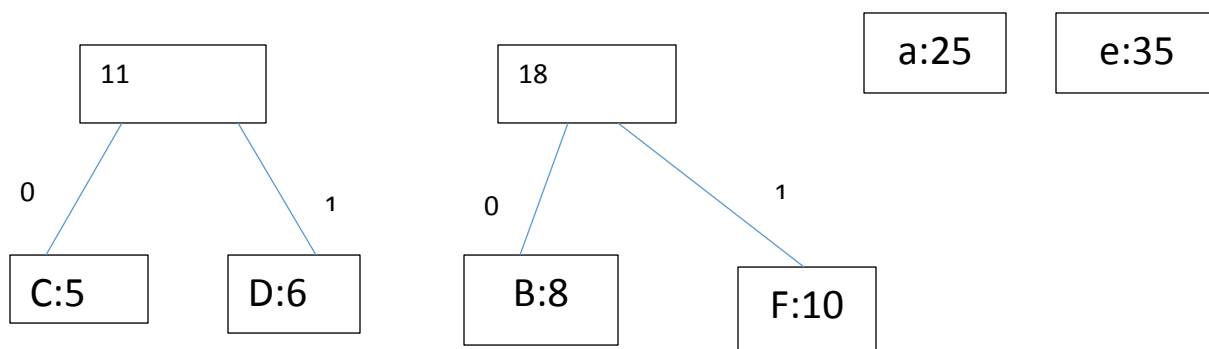
**جواب:** مرحله اول :جنگل اولیه که در ان جنگل بر اساس تعداد گره ها به صورت صعودی مرتب شده اند را ارائه می دهیم:

C:5	D:6	B:8	F:10	a:25	e:35
-----	-----	-----	------	------	------

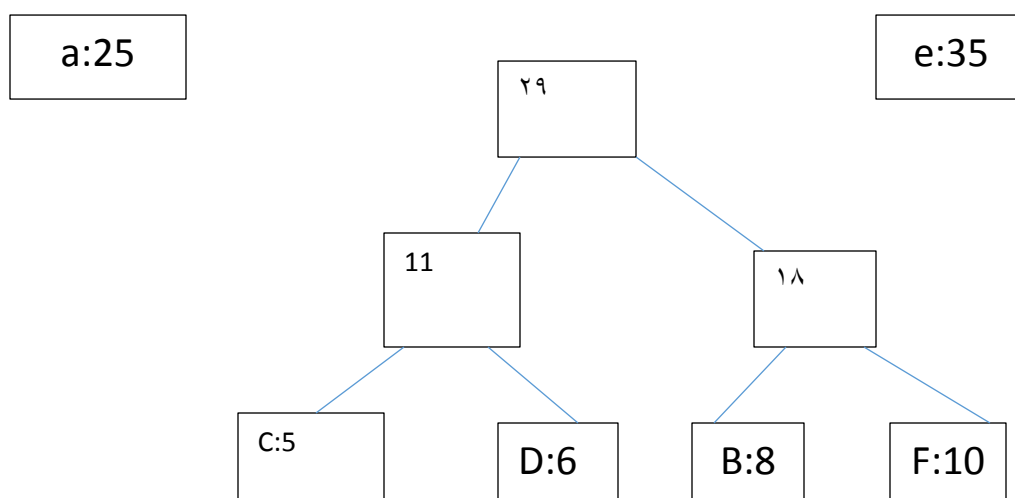
مرحله دوم:ادغام دو درخت با کمترین مقدار در ریشه مطابق الگوریتم بالا و ارائه لیست مرتب حاصل به صورت غیر نزولی :



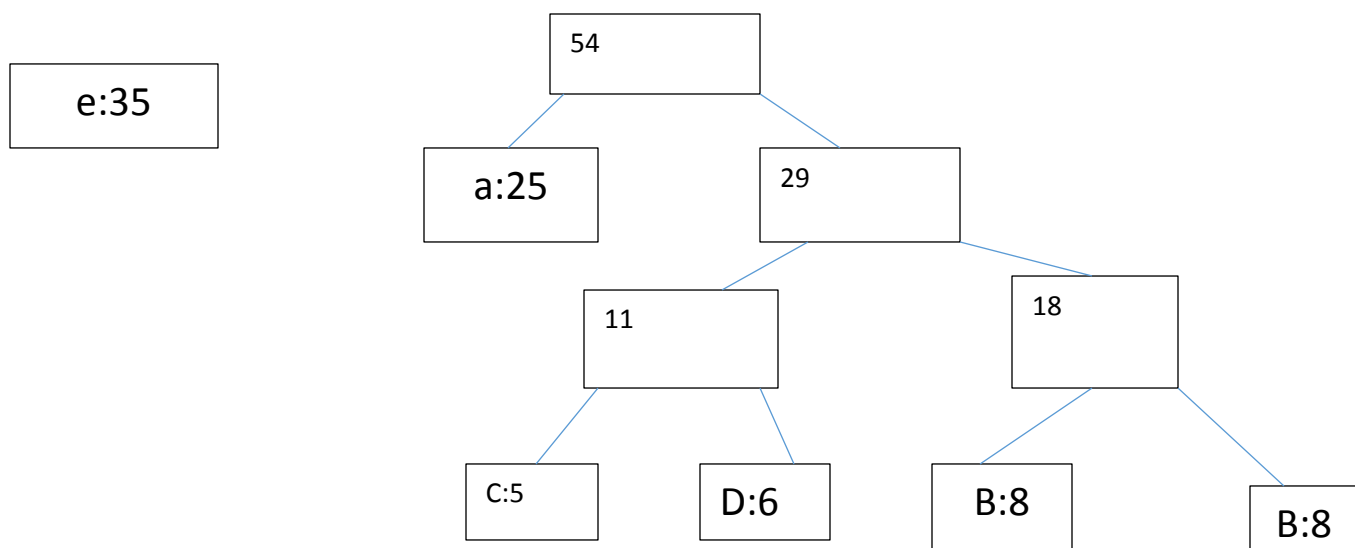
مرحله سوم : ادغام دو درخت با کمترین مقدار و ارائه لیست مرتب شده حاصل به صورت غیر نزولی:



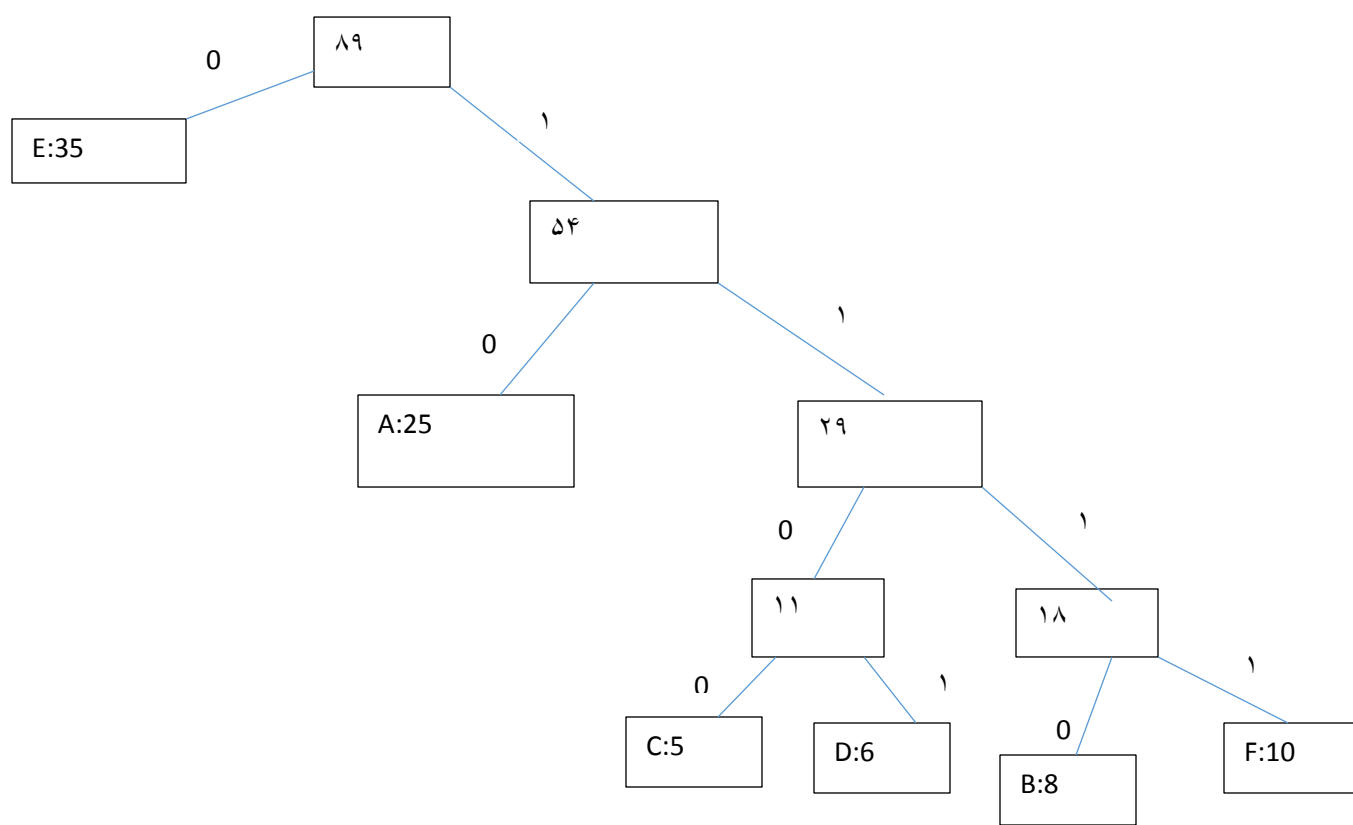
مرحله چهارم : ادغام دو درخت با کمترین مقدار و ارائه لیست مرتب شده حاصل به صورت غیر نزولی:



مرحله پنجم: ادغام دو درخت با کمترین مقدار و ارائه لیست مرتب شده حاصل به صورت غیر نزولی:



مرحله آخر: ادغام دو درخت باقیمانده از جنگل:



در جدول زیر کد حاصل برای کاراکتر های متن بالا  
برای کد گذاری متن نمایش داده شده است:

کاراکترها	کدها
A	۱۰
B	۱۱۱۰
C	۱۱۰۰
D	۱۱۰۱
E	۰
f	۱۱۱۱

تعداد بیت های لازم برای ذخیره سازی این متن به  
صورت ذیل می باشد:  
لذا خواهیم داشت:

تعداد تکرار \* تعداد بیت های لازم برای هر کاراکتر  $= \sum_{i=1}^n$  تعداد کل بیت ها

$$N(t) = 2 * 25 + 9 * 8 + 4 * 5 + 1 * 35 + 4 * 10 = 177 \text{ بیت}$$

برای ذخیره کاراکتر لازم است:

$$N(t) = 8 * 89 = 712 \text{ بیت}$$