

عنوان درس: طراحی الگوریتم دانشگاه: پیام نور تهران شمال

استاد: آقای علی رضوی پاسخ سوالات زوج نیم سال اول ۹۴-۱۳۹۳

نام دانشجو: فاطمه عزیزی شماره دانشجویی: ۹۵۰۲۶۸۰۶۲

۲- کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

$$\text{if } \lim \frac{T(n)}{f(n)} = 0 \implies T(n) \in \theta(f(n)) \quad (۱)$$

$$\text{if } \lim \frac{T(n)}{f(n)} = \infty \implies T(n) \in o(f(n)) \quad (۲)$$

$$\text{if } \lim \frac{T(n)}{f(n)} \in \mathbb{R}^+ \implies T(n) \in O(f(n)) \quad (۳)$$

$$\text{if } \lim \frac{T(n)}{f(n)} = 0 \implies T(n) \in \Omega(f(n)) \quad (۴)$$

گزینه (۳) صحیح است.

توضیحات:

۴- کدام گزینه صحیح است؟

$$n! + 7n^5 \in \Omega(n^n) \quad (۲) \quad 3n^2 3^n + 5n^9 2^n \in o(n^2 3^n) \quad (۱)$$

$$n^5 + 14n^2 \in \Omega(n^7) \quad (۴) \quad 8n^2 \log n + n^3 \in \theta(n^2 \log n) \quad (۳)$$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات:

۶- رابطه بازگشتی زیر از کدام مرتبه زمانی است؟

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$O(n^{\log_4 3}) \quad (۴) \quad O(n^2) \quad (۳) \quad O(n \log n) \quad (۲) \quad O(n) \quad (۱)$$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: رابطه بازگشتی معادله‌ای است که اصطلاحاً از بازگشت برای ربط دادن عبارت موجود در یک دنباله یا عناصر یک آرایه استفاده می‌کند. این رابطه راهی برای تعریف یک دنباله یا آرایه برحسب عبارات خودش است.

۸- در رابطه با مقایسه الگوریتم‌ها مرتب‌سازی ادغامی و سریع کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) پیچیدگی زمانی الگوریتم مرتب‌سازی سریع برای داده‌های از قبل مرتب شده بهتر از الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی است.
- (۲) پیچیدگی زمانی الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی در حالت متوسط بهتر از مرتب‌سازی سریع است.
- (۳) روش مرتب‌سازی سریع برخلاف روش مرتب‌سازی ادغامی به حافظه کمکی نیاز دارد.
- (۴) پیچیدگی زمانی هر دو روش در بهترین حالت برابر است.

گزینه (۴) صحیح است.

توضیحات: روش مرتب‌سازی ادغامی (*Merge Sort*) روش مرتب‌سازی مبتنی بر مقایسه عناصر با استفاده از روش تقسیم و غلبه است. الگوریتم مرتب‌سازی سریع یا *quick sort* یکی از الگوریتم‌های مرتب‌سازی است که به دلیل مصرف حافظه کم، سرعت اجرای مناسب و پیاده سازی ساده بسیار مورد قبول واقع شده است. پیچیدگی زمانی الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی تعداد عناصر آرایه را n و تعداد مقایسه‌های مورد نیاز جهت مرتب‌سازی این عناصر را $T(n)$ در نظر می‌گیریم.

۱۰- در ضرب ماتریس‌ها به روش استراسن، اگر مساله کوچک ضرب ماتریس‌های 2×2

باشد، برای ضرب دو ماتریس 4×4 چند ضرب عددی صورت می‌پذیرد؟

- | | | | |
|--------|--------|-------|--------|
| ۴۹ (۱) | ۵۶ (۲) | ۷ (۳) | ۲۸ (۴) |
|--------|--------|-------|--------|

گزینه (۲) صحیح است.

توضیحات: دو ماتریس مربعی A, B با اندازه‌های $n \times n$ داده شده است. هدف، پیدا کردن

ماتریس حاصل ضرب این دو ماتریس است.

```
void multiply (int A[ ][N], int B[ ][N], int C[ ][N])
```

```
{
    for(int i = 0; i < N; i++)
    {
        for(int j = 0; j < N; j++)
        {
            C[i][j] = 0;
            for(int k = 0; k < N; k++)
            {
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
            }
        }
    }
}
```

۱۲- بهترین الگوریتم برای ضرب دو چندجمله‌ای از درجه n دارای کدام پیچیدگی زمانی

است؟

(۱) $O(n^{\log 3})$ (۲) $O(n^2)$ (۳) $O(n)$ (۴) $O(n \log n)$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: پیچیدگی زمانی راهکار بالا برابر با $O(mn)$ است. اگر اندازه دو چند جمله‌ای برابر باشد، پیچیدگی زمانی از درجه $O(n^2)$ خواهد بود. راهکارهایی برای انجام ضرب دو چندجمله‌ای با سرعتی بیش از $O(n^2)$ وجود دارد. روشی که در ادامه آمده، راهکاری ساده است که چندجمله‌ای داده شده (از درجه n) را در دو چندجمله‌ای که یکی دارای عبارات مرتبه پایین‌تر از n^2 و دیگری شامل درجات بیشتر بزرگتر و یا مساوی n^2 است.

۱۴- یک گراف همبند و بدون جهت با n گره و $n + 2$ یال داریم، کدام یک از الگوریتم‌های

زیر برای تولید درخت پوشا با حداقل هزینه بر روی این گراف مناسب‌تر است؟

(۱) پریم (۲) کروسکال (۳) دیکسترا (۴) فلوید

گزینه (۲) صحیح است.

توضیحات: در نظریه گراف، الگوریتم کراسکال الگوریتمی برای یافتن یک زیرگراف فراگیر همبند با کمترین وزن در یک گراف وزن دار است (در یک گراف وزن دار، به هر یال وزنی نسبت داده شده است). همچنین این الگوریتم برای یافتن کوچکترین درخت فراگیر در یک گراف وزن دار استفاده می شود.

۱۶- شش کار به شرح زیر داریم. gi نشان دهنده سود حاصل از اجرای کار i است، اگر و فقط اگر بعد از زمان di انجام نشود. فرض کنید هر کار در واحد زمان انجام می شود. حداکثر سود حاصل از اجرا چقدر است؟

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
gi	۱۰	۷	۱۵	۲۰	۵	۳
di	۱	۳	۱	۳	۱	۳

۴۵ (۴)

۴۲ (۳)

۳۷ (۲)

۳۲ (۱)

گزینه (۳) صحیح است.

۱۸- تابع زیر را در نظر بگیرید. برای $n > k$ عمل $+$ چند بار انجام می شود؟

$Int\ F(int\ n, int\ k)$

{

$if(n == k || k == 0) return\ 1;$

$else$

$return\ F(n - 1, k - 1) + F(n - 1, k)$

(nk) (۴)

$n(n - k)$ (۳)

$(nk) - 1$ (۲)

nk (۱)

گزینه (۲) صحیح است.

توضیحات: اگر $n > k$ باشد، مثلاً اگر n برابر ۱۰ و k برابر با ۲ باشد. عبارت

$F(n - 1, k - 1) + F(n - 1, k)$ تعداد ۱۹ بار اجرا خواهد شد.

۲۰- فرض کنید $X = aabab$ و $Y = babb$ و ارزش اعمال درج و حذف یک واحد و ارزش

عمل تغییر دو واحد باشد. ارزش بهینه تبدیل X به Y کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

گزینه (۲) صحیح است.

توضیحات: برای تبدیل X به Y در حالت ارزش بهینه ابتدا دو a باید با شیفیت به چپ خارج و سپس یک b با شیفیت به راست ورود کند، پس در بهترین حالت با ۳ حرکت X به Y تبدیل خواهد شد.

۲۲- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) در روش انشعاب و حدید، مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه به دست می‌آید ولی در روش عقب‌گرد، معمولاً هدف یافتن بهینه‌ترین جواب است.
- (۲) تعداد گره‌ها در درخت فضای حالت تولیدشده به روش انشعاب و حدید بیشتر از روش عقب‌گرد است.
- (۳) زمان اجرای الگوریتم‌های عقب‌گرد در بدترین حالت از الگوریتم‌های انشعاب و حدید بهتر است.
- (۴) الگوی جستجو در روش عقب‌گرد، روش جستجوی عمقی است، ولی در روش انشعاب و حدید، جستجوی ردیفی است.

گزینه (۴) صحیح است.

توضیحات: روش پس‌گرد *Backtracking*: کی از شیوه‌های کلی جستجوی فضای حالت برای حل مسائل ترکیبیاتی است. این شیوه تمام ترکیب‌های ممکن را بررسی می‌کند تا یک جواب پیدا کند یا تمام جواب‌های ممکن را شمارش کند. روش انشعاب و حد، یک الگو طراحی الگوریتم برای مسائل بهینه‌سازی است. این روش یک جستجوی فضای حالات جواب‌های احتمالی مسئله را پیمایش می‌کند.

۲۴- در مسئله حاصل جمع زیرمجموعه‌ها، فرض کنید $n = 5$ ، $w = 21$ و اعداد داده شده به صورت زیر است. کدام یک از گره‌های درخت فضای حالت این مسئله، امیدبخش و قابل توسعه دادن است؟

D (۴)

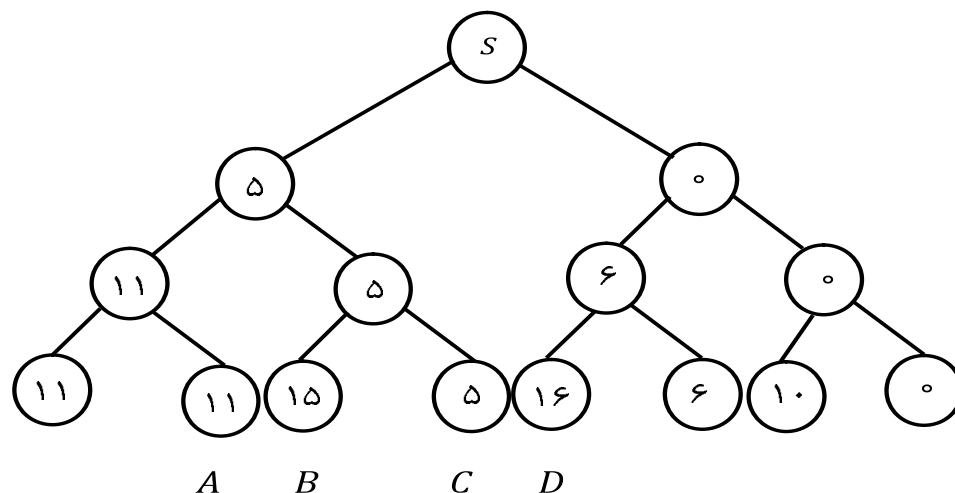
C (۳)

B (۲)

A (۱)

گزینه (۳) صحیح است.

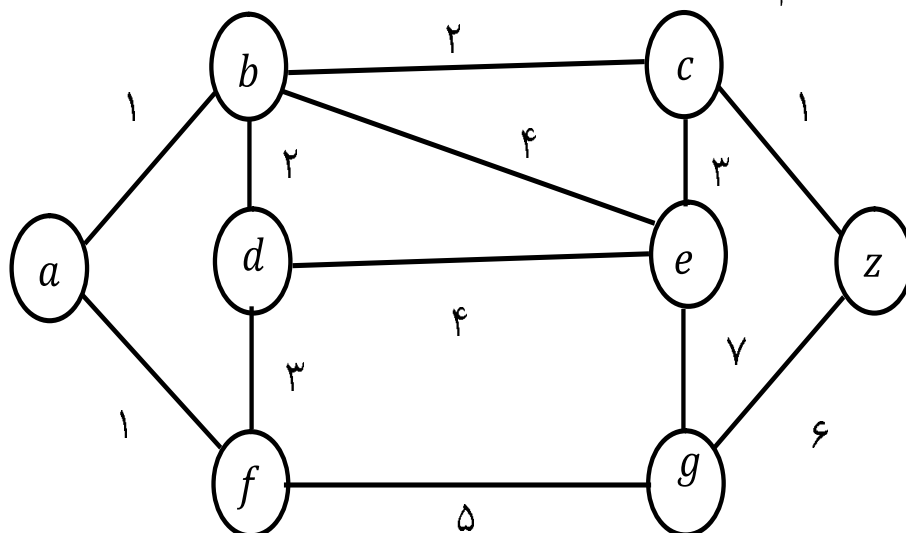
توضیحات:



سوالات تشریحی

۲- در گراف زیر، کوتاه‌ترین مسیر از رأس a به تمام رئوس را به کمک الگوریتم دیکسترا به دست

آورید. اجرای الگوریتم را مرحله به مرحله نشان دهید؟



توضیحات: الگوریتم دایجسترا (*Dijkstra's Algorithm*) یا اولین الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر دایجسترا (*Dijkstra's*) الگوریتمی است که برای پیدا کردن مسیر بین دو گره $Node$ (رأس) در گراف به کار می‌رود. برای یک گره مبدأ داده شده الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر بین آن گره و دیگر

گره‌ها را پیدا می‌کند. همچنین الگوریتم دایجسترا برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از یک گره یکتا به گره مقصد یکتای دیگری به کار می‌رود. برای انجام این کار، الگوریتم هنگامی که کوچک‌ترین مسیر از مبدأ به مقصد را پیدا کند متوقف می‌شود. اکنون باید رأسی که دارای کم‌ترین مقدار فاصله است انتخاب شود. رأس a انتخاب می‌شود و در $sptset$ قرار می‌گیرد. بنابراین $sptset$ به صورت $\{a\}$ می‌شود. پس از قراردادن a در $sptset$ ، مقدار فاصله‌ها از رآهای مجاور آن به روز رسانی می‌شوند. رآهای مجاور a رآهای b و f هستند. مقدار فاصله برای b و f برابر با ۲ و ۱ است. رأسی که حداقل فاصله را از مبدأ دارد و تاکنون انتخاب نشده است، یعنی در $sptset$ قرار ندارد، انتخاب می‌شود. رأس f انتخاب و به $sptset$ اضافه می‌شود، بنابراین اکنون $sptset$ به صورت $\{0, 1\}$ خواهد بود. مقدار فاصله رآهای مجاور به روز رسانی می‌شود. مقدار فاصله از رأس g برابر با ۶ خواهد بود. رأسی با کمترین مقدار فاصله که در حال حاضر در SPT قرار ندارد باید انتخاب شود. رأس C انتخاب می‌شود، بنابراین $sptset$ اکنون به صورت $\{0, 1, 7\}$ خواهد بود.

۴- در مسئله رنگ آمیزی گراف، هدف رنگ آمیزی گره‌های گراف $G(V, E)$ با استفاده از m رنگ است، به طوری که هیچ دو گروه مجاوری هم‌رنگ نباشد، با استفاده از روش عقب‌گرد الگوریتم کاملی را برای حل این مسئله بنویسید و مرتبه زمانی الگوریتم را در بدترین حالت تحلیل کنید (تابع امیدبخش نیز نوشته شود)؟

عنوان درس: طراحی الگوریتم	دانشگاه: پیام نور تهران شمال
استاد: آقای علی رضوی	پاسخ سوالات فرد نیم سال اول ۹۹-۱۳۹۸
نام دانشجو: فاطمه عزیزی	شماره دانشجویی: ۹۵۰۲۶۸۰۶۲

۱- مقدار $T(n)$ در قطعه کد زیر چه می باشد؟

$X = 0;$

$for(i = 0; i < n; i++)$

$for(j = 0; j < n; j++)$

$X++;$

$$T(n) = C(2n^2 + 2n + 2) \quad (2)$$

$$T(n) = C(2n^2 + 2n + 2) \quad (1)$$

$$T(n) = C(2n^4) \quad (4)$$

$$T(n) = C(2n + 2) \quad (3)$$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: چون حلقه اول از ۰ تا n بار اجرا می شود تعداد مراحل اجرای n هست. حلقه دوم

هم چون حداکثر تا n می تواند اجرا بشود این هم n اجرا می شود.

$$3- اگر $T(n) = \frac{1}{3}n^2 - 3n$ باشد، مقدار $\theta(g(n))$ چیست؟$$

$$T(n) \in \theta(nm^k) \quad (2)$$

$$T(n) \in \theta(n^k) \quad (1)$$

$$T(n) \in \theta(nm^2) \quad (4)$$

$$T(n) \in \theta(n^2) \quad (3)$$

گزینه (۱) صحیح است.

۵- تابع بازگشتی محاسبه $n!$ بصورت زیر می باشد. $T(n)$ آن به چه صورت می باشد؟


```

Int fact(int n)
{
    if(n == ۰)
        return ۱;
    else
        return(n * fact(n-۱));
}

```

$$T(n) \begin{cases} d & \text{if } n < ۰ \\ T(n+۱) + C & \text{if } n > ۰ \end{cases} \quad (۲)$$

$$T(n) \begin{cases} d & \text{if } n = ۰ \\ T(n-۱) + C & \text{if } n > ۰ \end{cases} \quad (۴)$$

$$T(n) \begin{cases} d & \text{if } n > ۰ \\ T(n-۱) + C & \text{if } n = ۰ \end{cases} \quad (۱)$$

$$T(n) \begin{cases} d & \text{if } n = ۰ \\ T(n+۱) + C & \text{if } n > ۰ \end{cases} \quad (۳)$$

گزینه (۴) صحیح است.

۷- خروجی تابع زیر به ازای $F(۳, ۶)$ چیست؟

```

Int F(int m, int n)
{
    if((m == ۱)?(n == ۰)?(m == n))
        return(۱);
    else
        return(F(m-۱, n) + F(m-۱, n-۱));
}

```

۵ (۴

۴ (۳

۳ (۲

۲ (۱

گزینه (۳) صحیح است.

توضیحات: شرط اول در نظر گرفته نمی شود چون مقادارها برابر با ۰ و ۱ نمی باشد.

۹- رابطه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید. مقدار $T(n)$ کدام است؟

$$T(n) = ۳T(n-۱) + ۴T(n-۲)$$

$$T(۰) = ۰, T(۱) = ۱$$

$$T(n) \in O(m^n) \quad (۲)$$

$$T(n) \in O(۴^n) \quad (۱)$$

$$T(n) \in O(n^n) \quad (۴)$$

$$T(n) \in O(n^m) \quad (۳)$$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: رابطه بازگشتی، دنباله‌ای است که به صورت بازگشتی تعریف می‌شود. در یک دنباله بازگشتی، یک معادله به نام رابطه بازگشتی ارائه می‌شود که با آن، جمله n ام دنباله به جملات پیشین مرتبط می‌شود. مقادیر چند جمله اول دنباله به نام‌های شرایط مرزی یا مقادیر اولیه داده می‌شوند.

۱۱- در کدام روش مرتب‌سازی از یک عنصر به عنوان عنصر محور استفاده می‌شود؟

(۱) مرتب‌سازی سریع (*quick sort*) (۲) مرتب‌سازی ادغامی

(۳) مرتب‌سازی دودویی (۴) مرتب‌سازی تقسیم و حل

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: کوپیک سورت *quick sort* یکی از الگوریتم‌های مرتب‌سازی است که به دلیل مصرف حافظه کم، سرعت اجرای مناسب و پیاده‌سازی ساده بسیار مورد قبول واقع شده است. هر پیاده‌سازی این الگوریتم به صورت کلی از دو بخش تشکیل شده است. یک بخش تقسیم بندی آرایه (*partition*) و قسمت مرتب کردن. مرتب‌سازی سریع *quick sort* یکی از الگوریتم‌های مشهور مرتب‌سازی داده‌ها است. این الگوریتم طی مراحل بازگشتی زیر یک روش تقسیم و غلبه برای مرتب کردن داده‌ها ارائه می‌نماید:

۱- انتخاب عنصر محوری: یکی از عناصر آرایه به عنوان عنصر محوری — (*pivot*) به عنوان مثال عنصر اول — انتخاب می‌شود.

۲- تقسیم آرایه: چینش عناصر آرایه به قسمی تغییر داده می‌شود که تمامی عناصر کوچکتر یا مساوی محور در سمت چپ آن و تمامی بزرگتر در سمت راست آن قرار بگیرند. این دو قسمت زیر آرایه‌های چپ و راست نامیده می‌شوند.

۳- مرتب‌سازی بازگشتی: زیر آرایه‌های چپ و راست به روش مرتب‌سازی سریع مرتب می‌شوند.

۱۳- الگوریتم پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم به چه مقدار زمان برای مقایسه نیاز دارد؟ (با

فرض اینکه عمل اصلی در این الگوریتم مقایسه باشد.)

$$(1) \quad \frac{2n}{3} - 2 \quad (2) \quad \frac{2n}{3} - 2 \quad (3) \quad \frac{2n}{2} - 2 \quad (4) \quad \frac{2n}{2} - 1$$

گزینه (۴) صحیح است.

۱۵- در الگوریتم حریصانه کدام جز تشکیل دهنده آن برای بررسی اینکه مشخص کند در

نهایت جواب حاصل شده است یا خیر به کار می‌رود؟

(۱) SELECT (۲) FEASIBLE (۳) SOLUTION (۴) یک تابع هدف

گزینه (۳) صحیح است.

توضیحات: روش حریصانه *Greedy* یکی از روش‌های مشهور و پرکاربرد طراحی الگوریتم‌هاست که با ساختاری ساده در حل بسیاری از مسائل استفاده می‌شود. این روش اغلب در حل مسائل بهینه‌سازی استفاده شده و در پاره‌ای مواقع جایگزین مناسبی برای روش‌هایی مانند برنامه‌ریزی پویا است. در حالت کلی این روش سرعت و مرتبه اجرایی بهتری نسبت به روش‌های مشابه خود دارد، اما متناسب با مسئله ممکن است به یک جواب بهینه سراسری ختم نشود. این دسته از الگوریتم‌ها در علوم رایانه کاربرد وسیعی دارند.

بررسی اتمام الگوریتم: (*Solution*) در هر مرحله پس از اتمام گام ۲ و اضافه شدن یک عنصر جدید به مجموعه جواب، باید بررسی کنیم که آیا به یک جواب مطلوب رسیده‌ایم یا خیر؟ اگر نرسیده باشیم به گام اول رفته و چرخه را در مراحل بعدی ادامه می‌دهیم.

۱۷- کدام الگوریتم برای یافتن کوتاه‌ترین مسیرها از مبدأ واحد به مقصدهای متفاوت به کار

می‌رود؟

(۱) الگوریتم دیکسترا (۲) الگوریتم کروسکال

(۳) الگوریتم پریم (۴) الگوریتم درخت پوشای مینیمم

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: الگوریتم دایجسترا (*Dijkstra's Algorithm*) یا اولین الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر

الگوریتمی است که برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره $Node$ (رأس) در گراف به کار می‌رود. این گراف، ممکن است نشان‌گر شبکه جاده‌ها یا موارد دیگری باشد. الگوریتم دایجسترا دارای انواع گوناگونی است. الگوریتم اصلی، کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره را پیدا می‌کند، اما نوع متداول‌تر این الگوریتم، یک گره یکتا را به عنوان گروه مبدأ (آغازین) در نظر می‌گیرد و کوتاه‌ترین مسیر از مبدأ به دیگر گره‌ها در گراف با ساختن درخت کوتاه‌ترین مسیر پیدا می‌کند.

۱۹- ضرب چهار ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A_{20 \times 2}, B_{2 \times 30}, C_{30 \times 12}, D_{12 \times 8}$$

مقدار $(AB)(CD)$ کدام است؟

$$(1) \quad 3680 \quad (2) \quad 8880 \quad (3) \quad 1232 \quad (4) \quad 3120$$

گزینه (۲) صحیح است.

توضیحات: ضرب زنجیره‌ای ماتریس مسئله‌ای است که می‌تواند با استفاده از برنامه‌سازی پویا حل شود. وقتی یک توالی از ماتریس‌ها را داریم ما می‌خواهیم مؤثرترین راه را برای ضرب این ماتریس‌ها را با هم پیدا کنیم. اگر چهار ماتریس A, B, C, D داشته باشیم، به این صورت خواهد بود:

$$(ABC)D = (AB)(CD) = A(BCD) = A(BC)D = \dots$$

۲۱- مرتبه زمانی مسئله کوله‌پشتی صفر و یک با استفاده از برنامه‌نویسی پویا کدام است؟

$$(1) \quad \theta(2^n) \quad (2) \quad \theta(m^n) \quad (3) \quad \theta(n^3) \quad (4) \quad \theta(mn)$$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: هدف قرار دادن این اشیا در کوله‌پشتی با ظرفیت W به صورتی است که مقدار ارزش بیشینه حاصل شود. به بیان دیگر، دو آرایه صحیح $val[0..n-1]$ و $wt[0..n-1]$ وجود دارند که به ترتیب نشانگر مقادیر و وزن‌های تخصیص داده شده به n عنصر هستند. همچنین یک عدد صحیح W نیز داده شده است که ظرفیت کوله‌پشتی را نشان می‌دهد. هدف پیدا کردن

زیرمجموعه‌ای با مقدار بیشینه val است که در آن مجموع وزن‌ها کوچک‌تر یا مساوی W باشد. امکان خرد کردن اشیاء وجود ندارد و باید یک شکل را به‌طور کامل انتخاب کرد و یا اصلاً انتخاب نکرد. این‌گونه از مسأله کوله‌پشتی را، مسأله کوله‌پشتی ۱-۰ می‌گویند.

۲۳- در الگوریتم عقب‌گرد برای مسأله مدارهای همیلتونی تعداد گره‌ها در فضای حالت چه مقدار می‌باشد؟

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \frac{(n-1)^n + 1}{n-2} & (2) \quad \frac{(n-1)^n - 1}{n-2} \\ (3) \quad \frac{(n-1)^n + 1}{n+2} & (4) \quad \frac{(n+1)^n + 1}{n+2} \end{array}$$

گزینه (۲) صحیح است.

۲۵- یک گراف همبند با چند رأس حداقل می‌تواند $n-1$ یال داشته باشد که اگر فقط $n-1$ یال داشته باشد، یک درخت نامیده می‌شود.

$$(1) \quad n \quad (2) \quad n-1 \quad (3) \quad n+1 \quad (4) \quad n-2$$

گزینه (۱) صحیح است.

توضیحات: به گراف همبند (متصل) و بدون دور، درخت گفته می‌شود. برای مثال در شکل‌های زیر انواعی از درخت‌ها نشان داده شده است. به رئوس درخت با درجه یک، برگ یا رئوس آویزان گفته می‌شود. بنابراین با این تعاریف گراف ستاره یک درخت است. به یال‌های درخت، شاخه گفته می‌شود. هر رأس درخت یک گره نام دارد. هر درخت حداقل دو رأس با درجه یک دارد.

سوالات تشریحی

۱- الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی *Merge Sort* را با ذکر مثال به‌طور کامل توضیح دهید؟
توضیحات: مرتب‌سازی ادغامی یک الگوریتم «تقسیم و حل» است که در آن ابتدا مسئله به مسائل فرعی تقسیم می‌شود. زمانی که راه حل‌ها برای مسائل فرعی آماده شد، مجدداً آن‌ها را با

هم ترکیب می‌کنیم تا راه حل نهایی برای مسئله اصلی به دست می‌آید.

این یکی از الگوریتم‌هایی است که با استفاده از بازگشت (*recursion*) به سادگی پیاده‌سازی می‌شود، چون به جای مسأله اصلی با مسائل فرعی سروکار داریم.

الگوریتم آن را می‌توان به صورت فرآیند ۲ مرحله‌ای زیر توصیف کرد:

تقسیم: در این مرحله آرایه ورودی به دو نیمه تقسیم می‌شود. محور تقسیم نقطه میانی آرایه است. این مرحله به صورت بازگشتی روی همه آرایه‌های نیمه انجام می‌یابد تا این که دیگر نیمه آرایه‌ای برای تقسیم وجود نداشته باشد.

حل: در این مرحله باید آرایه‌های تقسیم‌شده را مرتب‌سازی و ادغام کنیم و این کار از بخش زیرین به سمت بالا برای به دست آوردن آرایه مرتب انجام می‌یابد.

۳- فرض کنید A و B دو ماتریس 4×4 با درایه‌های زیر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب دو ماتریس را با روش استارسن انجام دهید.

۵- اشیاء زیر را در نظر بگیرید.

x_i	p_i	w_i
x_1	۸	۱۶
x_2	۵	۱۵
x_3	۱۵	۲۵
x_4	۱۰	۸
x_5	۲۰	۱۵

جواب بهینه‌ای را برای این کوله‌پشتی بیابید. (ظرفیت کوله‌پشتی را برای ۴۰ در نظر بگیرید.)