

سوالات فرد

۱. در صورتی که $f(n) \in \theta(g(n))$ و $h(n) \in O(f(n))$ باشد کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

(الف) $h(n) \in \theta(g(n))$ (ب) $h(n) \in \Omega(g(n))$ (ج) $g(n) \in \Omega(h(n))$ (د) $g(n) \in O(h(n))$

پاسخ:

گزینه ج صحیح می باشد: $g(n) \in \Omega(h(n))$

حل:

اگر $f(n) \in \theta(g(n))$ باشد آنگاه می توان گفت تقریباً $f(n), g(n)$ دو تابع هم ارز می باشند. اگر $h(n) \in O(f(n))$ باشد می توان گفت $h(n)$ یک تابع کوچکتر مساوی از $f(n), g(n)$ می باشد. در نتیجه $g(n) \in \Omega(h(n))$

۲.

۳. اگر $T(n)$ نشان دهنده مرتبه زمانی اجرای الگوریتم زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

```
for( i := 1; i <= n; i++)
{
  j = n;
  while ( j >= 1)
  {
    for( k := 1; k <= 100; k++ )
      /*some statement requiring \tetha(1) time */
    j = j / 2;
  }
}
```

(الف) $T(n) \in \theta(n)$ (ب) $T(n) \in O(\log n)$ (ج) $T(n) \in \Omega(n^2)$ (د) $T(n) \in O(n^2)$

پاسخ:

گزینه د صحیح می باشد: $T(n) \in O(n^2)$

حل:

۴.

۵. جواب رابطه بازگشتی $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$ کدام است؟

(الف) $\theta(\text{Logn})$ (ب) $\theta(n \text{Logn})$ (ج) $\theta(n)$ (د) $\theta(n^2)$

پاسخ:

گزینه الف صحیح می باشد: $\theta(\text{Logn})$

حل:

$$a = 1, b = \frac{3}{2}, k = 0 \Rightarrow 1 = (\frac{3}{2})^0 \Rightarrow T(n) \in \theta(n^0 \log_2^n) \Rightarrow T(n) \in (\text{Logn})$$

۶.

۷. فرض کنید آرایه مورد جستجو توسط جستجوی دودویی بصورت $(-6, 0, 7, 9, 20, 30, 54, 82, 101)$ باشد، متوسط تعداد مقایسه های مورد نیاز برای حالت جستجو موفق کدام است؟

(الف) $\frac{28}{9}$ (ب) $\frac{18}{9}$ (ج) $\frac{25}{9}$ (د) $\frac{31}{9}$

پاسخ:

گزینه ج صحیح می باشد: $\frac{25}{9}$

حل:

آرایه	-6	0	7	9	20	30	54	82	101
تعداد مقایسه ها	3	2	3	4	1	3	2	3	4

یک راه ساده برای به دست آوردن عدد فوق ترسیم یک درخت دودویی کامل با ۹ گره است:

$$\text{زمان متوسط} = \frac{1 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 4}{9} = \frac{25}{9}$$

۸.

۹. اگر دو ماتریس 10×10 با روش ضرب استراسن در یکدیگر ضرب شوند، برای ضرب این دو ماتریس چند ضرب عددی صورت می گیرد (مقدار آستانه برابر با ۲ است یعنی ضرب ماتریس های با اندازه 2×2 به صورت عادی انجام می شود که نیاز به ۸ ضرب عددی دارد)؟

- (الف) ۳۹۲ (ب) ۴۹۰ (ج) ۴۱۰ (د) ۳۶۴

پاسخ:

گزینه الف صحیح می باشد: ۳۹۲

حل:

می دانیم تعداد ضرب ها از رابطه زیر به دست می آید:

$$\left. \begin{array}{l} T(n) \Rightarrow T\left(\frac{n}{2}\right) \\ T(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow T(n) = n^{\log_2 7} = 7^{\log_2 n}$$

هنگامی که ماتریس ها 2×2 شوند از روش معمولی می رویم که ۸ ضرب می خواهد پس داریم:

$$7 \times 7 \times 8 = 392$$

۱۰.

۱۱. کدام گزینه در مورد الگوریتم های پریم و کراسکال برای یافتن درخت پوشای کمینه صحیح است؟

- (الف) الگوریتم پریم در گراف های متراکم بهتر از الگوریتم کراسکال عمل می کند.
 (ب) الگوریتم پریم در گراف های خلوت از مرتبه $\theta(n \log n)$ است.
 (ج) الگوریتم کراسکال در گراف های کامل بهتر از الگوریتم پریم عمل می کند.
 (د) الگوریتم پریم و کراسکال درخت های پوشانی را تولید می کنند که مجموع هزینه در آن ها یکسان است.

پاسخ:

گزینه د صحیح می باشد:

الگوریتم پریم و کراسکال درخت های پوشانی را تولید می کنند که مجموع هزینه در آن ها یکسان است.

حل:

الگوریتم پریم و کراسکال درخت های پوشانی را تولید می کنند که مجموع هزینه در آن ها یکسان است.

۱۲.

۱۳. فرض کنید متنی شامل حروف a,b,c,d,e,f باشد و تعداد کارکترها به صورت زیر است::

کارکترها	a	b	c	d	e	f
تعداد تکرار	۲۵	۸	۵	۶	۳۵	۱۰

در صورت کدگذاری متن با استفاده از روش هافمن، رشته ی ab با کدام بیت ها نمایش داده می شود؟

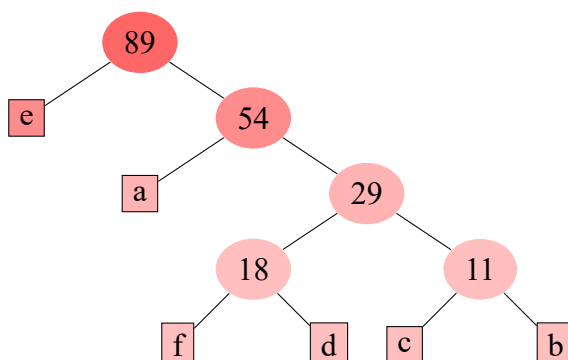
(الف) ۱۱۱۱۰۱ (ب) ۱۰۱۱۱۰ (ج) ۱۰۱۱۱۱ (د) ۱۱۱۰۱۱

پاسخ:

گزینه ج صحیح می باشد: ۱۰۱۱۱۱

حل:

ابتدا با توجه به تعداد تکرار حروف درخت هافمن را ایجاد می کنیم. بعد از ایجاد درخت می توان گفت که کوتاه ترین کد برای e می باشد و کد های f, d, c, b دارای طول کد برابر می باشند.



$\Rightarrow a = 10, b = 1111, c = 1110, d = 1101, e = 0, f = 1100$

۱۴.

۱۵. فرض کنید چهار ماتریس زیر را داریم:

$$A_{20 \times 2} \times B_{2 \times 30} \times C_{30 \times 12} \times D_{12 \times 8}$$

حداقل تعداد ضرب ها با استفاده از الگوریتم برنامه نویسی پویا کدام است؟

(د) ۲۸۸۰

(ج) ۱۳۲۳

(ب) ۱۲۳۲

(الف) ۳۱۲۰

پاسخ:

گزینه ب صحیح می باشد: ۱۲۳۲

حل:

با بررسی حالت های مختلف:

$$(AB)(CD)(A(B(CD)))=30 \times 12 \times 8 + 2 \times 30 \times 8 + 20 \times 2 \times 8 = 3680$$

$$A((BC)D)=2 \times 30 \times 12 + 2 \times 12 \times 8 + 20 \times 2 \times 8 = 1232$$

$$(AB)(CD)=20 \times 2 \times 30 + 30 \times 12 \times 8 + 20 \times 30 \times 8 = 8880$$

$$(A(BC)D)=20 \times 2 \times 30 + 20 \times 30 \times 12 + 20 \times 12 \times 8 = 10320$$

ملاحظه می شود گزینه ب برای ضرب این چهار ماتریس صحیح است.

۱۶.

۱۷. فرض کنید بخواهیم با سه کلید $key_1 < key_2 < key_3$ با احتمالهای جستجوی $p_3 = 0.4, p_2 = 0.3, p_1 = 0.3$ یک

درخت جستجوی دودوئی بهینه را ایجاد کنیم. کدام نشان دهنده زمان میانگین جستجو در درخت بهینه است؟

(د) ۱/۸

(ج) ۱/۶

(ب) ۱/۷

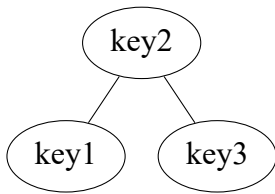
(الف) ۱/۹

پاسخ:

گزینه ج صحیح می باشد: ۱/۶

حل:

بهترین حالت ایجاد درخت دودوئی بهینه بصورت زیر می باشد:



$$\text{زمان میانگین جستجوی دودوئی} = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = 1.6$$

۱۸.

۱۹. تعداد درخت های جستجوی دودوئی که می توان با ۵ کلید متمایز ساخت کدام است؟

- (الف) ۵ (ب) ۱۴ (ج) ۴۲ (د) ۵۷

پاسخ:

گزینه ج صحیح می باشد: ۴۲

حل:

با داشتن n گره تعداد $\frac{(2n)}{n+1}$ درخت جستجوی دودوئی متفاوت می توان ساخت. حال اگر $n = 5$ باشد داریم:

$$T(5) = \frac{\binom{10}{5}}{5+1} = \frac{10!}{6 \times 5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{6 \times 5! \times 5!} = 42$$

۲۰.

۲۱. در حل مسأله یافتن مداره ای همیلتونی درگراف $G(V, E)$ با استفاده از تکنیک عقبگرد، کدام یک از موارد زیر نشان دهنده

غیر امید بخش بودن راس i ام بر مسیر است ($vindex[k]$ اندیس راس بر روی مسیر و $W[i][j]$ وزن یال از راس i به راس j است)؟

(الف) $i = n - 1 \&\& w[vindex[i]][vindex[0]]$ (ب) $i > 0 \&\& (!w[vindex[i-1]][vindex[i]])$

(ج) $i = n - 1 \&\& (!w[vindex[i-1]][vindex[0]])$ (د) $i > 0 \&\& w[vindex[i-1]][vindex[i]]$

پاسخ:

گزینه ب صحیح می باشد: $i > 0 \wedge (w[vindex[i-1]][vindex[i]])$

حل:

یک گراف که توسط یک آرایه دو بعدی W نشان داده شده است که در آن $W[i][j]$ در صورتی True است که بین رأس i و j یالی وجود داشته باشد و در غیر اینصورت False است.

۲۲.

۲۳. کدام گزینه صحیح است؟

- (الف) با روش انشعاب و تحدید زمان اجرا کاهش می یابد.
- (ب) با روش انشعاب و تحدید حافظه مصرفی کاهش می یابد.
- (ج) با روش انشعاب و تحدید مرتبه زمانی تغییر نمی کند.
- (د) روش برنامه نویسی پویا، زمان اجرا را کاهش می دهد.

پاسخ:

گزینه د صحیح می باشد:

روش برنامه نویسی پویا، زمان اجرا را کاهش می دهد.

حل:

روش برنامه نویسی پویا، زمان اجرا را کاهش می دهد.

۲۴.

۲۵. این برگه شامل ۲۴ سوال تستی می باشد.

سوالات تشریحی فرد

۱. رابطه بازگشتی زیر را حل کنید؟

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + T(n-2) & n > 2 \\ T(0) = 0 & T(1) = 1 \end{cases}$$

پاسخ:

با انتخاب $T(n) = a_n$ داریم:

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$a_n = C_1(1 + \frac{\sqrt{5}}{2})^n + C_2(1 - \frac{\sqrt{5}}{2})^n \in \theta(1 + \frac{\sqrt{5}}{2})^n$$

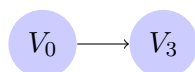
۲.

۳. ماتریس مجاورت گراف جهت دار G که شامل رئوس V_0 تا V_4 است به صورت زیر داده شده است. الگوریتم دیکسترا را بر روی این گراف برای یافتن کوتاه ترین مسیر از راس منبع V_0 به همه رئوس دیگر کار ببرید؟

$$\begin{bmatrix} \infty & 45 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & \infty & 20 & 9 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 25 \\ 5 & 10 & \infty & \infty & 7 \\ \infty & 15 & 30 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

پاسخ:

در مرحله اول کوتاه ترین مسیر از V_0 انتخاب می شود که با توجه به گراف مشخص می شود که بهترین گره انتخابی می باشد. بنابراین این مرحله از V_0 شروع و به مستقیماً به گره V_3 ختم می شود هزینه این مسیر ۱۵ خواهد بود و گراف حاصل به صورت زیر خواهد بود:



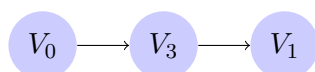
گره ها	S	Dist	P
V_0	1	0	V_0
V_1	0	25	$V_0 V_3$
V_2	0	∞	V_0
V_3	1	15	V_0
V_4	0	22	V_0

در مرحله دوم مسیری از V_0 شروع شده و به گره V_4 ختم می شود بنابراین این مسیر از گره V_3 نیز می گذرد هزینه گراف حاصل به صورت زیر می باشد:



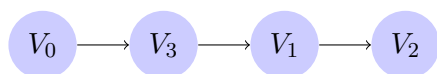
گره ها	S	Dist	P
V_0	1	0	V_0
V_1	0	25	$V_0 V_3$
V_2	0	47	$V_0 V_3 V_4$
V_3	1	15	$V_0 V_3$
V_4	1	22	$V_0 V_3 V_4$

در مرحله سوم مسیری از گره V_0 شروع شده و به گره V_1 ختم می شود بنابراین این مسیر از گره V_3 می گذرد گراف حاصل به صورت زیر می شود:



گره ها	S	Dist	P
V_0	1	0	V_0
V_1	1	25	$V_0 V_3 V_1$
V_2	0	45	$V_0 V_3 V_1$
V_3	1	15	$V_0 V_3$
V_4	1	∞	V_0

و در مرحله چهارم که مرحله آخر است در این مسیر از گره V_0 شروع شده و به گره V_2 ختم می شود بنابراین این مسیر از گره های V_0 و V_3 می گذرد هزینه این مسیر برابر ۴۵ است. گراف حاصل به صورت زیر می شود:



گره ها	S	Dist	P
V_0	1	0	V_0
V_1	1	25	$V_0 V_3 V_1$
V_2	0	45	$V_0 V_3 V_1 V_2$
V_3	1	15	$V_0 V_3$
V_4	1	22	$V_0 V_3 V_4$

بنابراین ارزش کل مسیر برابر 45 خواهد بود.

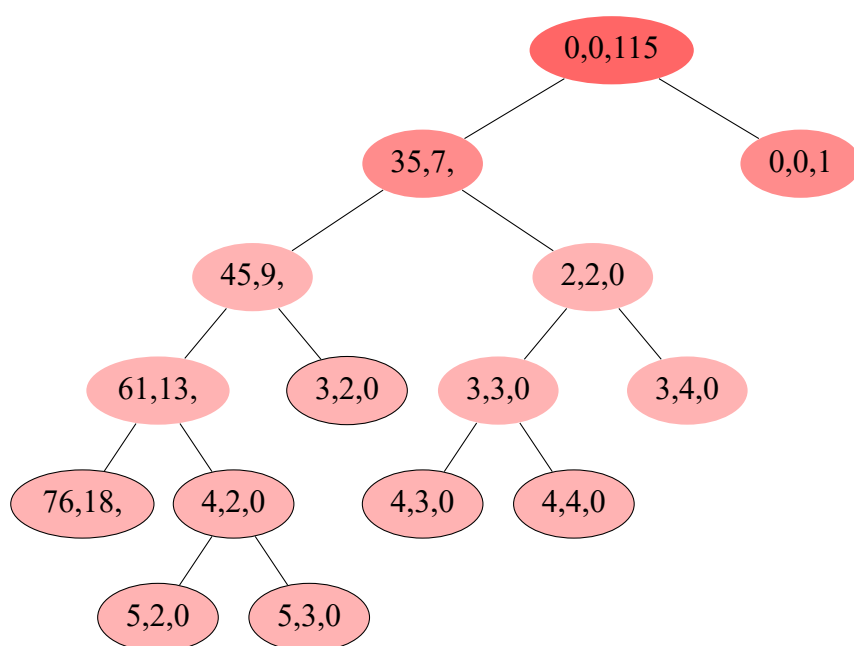
۴.

۵. مساله کوله پشتی صفر و یک را برای اجسام w_1 تا w_5 با ارزش و وزن تعریف شده به صورت زیر و کوله پشتی با وزن 15 کیلو گرم در نظر بگیرید. هدف پر کردن کوله پشتی با اجسام است به نحوی که بیشترین سود حاصل شود. درخت فضای حالت این مساله را با استفاده از روش انشعاب و تحدید رسم نموده و حداکثر سود ممکن را محاسبه نمایید (اجسام در جدول بر حسب p_i/w_i مرتب هستند)؟

وزن (w)	ارزش (p)	جسم
7	35\$	1
2	10\$	2
4	16\$	3
5	15\$	4
6	6\$	5

پاسخ:

جسم	ارزش (p)	وزن (w)	$\frac{P_i}{W_i}$
1	35s	7	5
2	10s	2	5
3	16s	4	4
4	15s	5	3
5	6s	6	1



پاسخ سوالات تستی فرد

۱. (ج) $g(n) \in \Omega(h(n))$ ۳. (د) $T(n) \in O(n^2)$ ۵. (الف) $\theta(\text{Log}n)$ ۷. (ج) $\frac{25}{9}$

۹. (الف) ۳۹۲

۱۱. (د) الگوریتم پریم و کراسکال درخت های پوشانی را تولید می کنند که مجموع هزینه در آن ها یکسان است.

۱۳. (ج) ۱۰۱۱۱۱

۱۵. (ب) ۱۲۳۲

۱۷. (ج) $1/6$

۱۹. (ج) ۴۲

۲۱. (ب) $i > \circ \&\&(!w[vindex[i - 1]][vindex[i]])$

۲۳. (د) روش برنامه نویسی پویا، زمان اجرا را کاهش می دهد .