

بسمه تعالی

علی امیری

۹۶۳۷۶۹۷۶۴

" طراحی الگوریتم ها "

سوالات فرد نیمسال دوم ۹۵ - ۹۶

سوالات زوج تابستان ۹۶

سوالات فرد نیمسال دوم ۹۵ - ۹۶ :

۱. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

جواب: " گزینه د " زیرا عضوی از لگاریتمی به پایه ۱۰ است.

$$\log_2 n \in \theta(\log_{10} n)$$

۳. تابع زیر را در نظر بگیرید :

```
int f(int a[], int n, int y){  
    for (int i=0; i<n; i++)  
        if (a[i] == y) return i;  
    return -1;  
}
```

تعداد مقایسه ها در حالت متوسط چقدر است؟

جواب: " گزینه د " زیرا با بسط دادن آن به این مقدار مقایسه خواهیم رسید.

$$\frac{n+1}{2}$$

۵. تابع بازگشتی زیر بر روی درخت دودویی T چه کاری انجام می دهد؟

```
int f(Node* T){  
    if (!T) return 0;  
    if ((T->left && !T->right) || (!T->left && T->right))  
        return 1+f(T->left) + f(T->right);  
    return f(T->left) + f(T->right);  
}
```

جواب: " گزینه ب " تابع بازگشتی زیر با توجه به برای محاسبه ی تعداد گره های تک فرزندی می باشد.

۷. تابع پیچیدگی زمانی زیر مربوط به کدام الگوریتم است؟

$$T(n) = T(n-1) + n - 1$$

جواب: " گزینه الف " زیرا تابع رو به رو مربوط به الگوریتم مرتب سازی صعودی یک آرایه مرتب شده نزولی به روش مرتب سازی سریع می باشد.

۹. کدام یک از روابط بازگشتی زیر به روش قضیه اصلی قابل حل است؟
جواب: " گزینه الف " زیرا فقط این گونه روابط بازگشتی را می توان به این روش حل نمود.

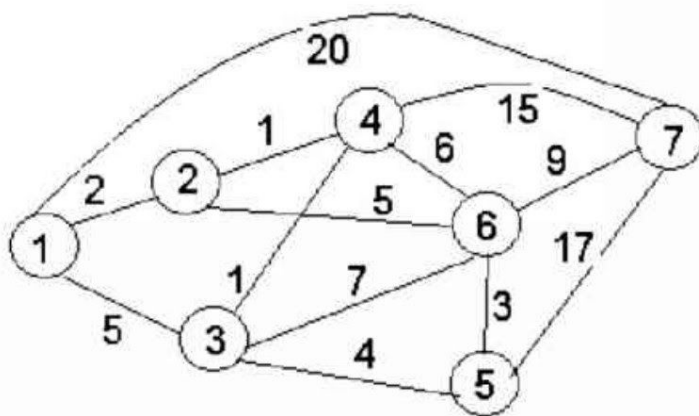
$$T(n) = 2T\left(\frac{3n}{4}\right) + \frac{9n}{4}$$

۱۱. الگوریتم مرتب سازی سریع Quicksort یک آرایه n تایی مرتب شده را با چه سرعتی مرتب می نماید؟
جواب: " گزینه ج " زیرا سرعت مرتب سازی این گونه الگوریتم ها به این میزان می باشد.

$$O(n^2)$$

۱۳. کدام یک از دنباله های زیر (به ازای n های بزرگ) بیشترین ارتفاع ممکن را برای درخت هافمن ایجاد می کند؟
(اعضای دنباله نشان دهنده تعداد تکرار کاراکترها در متن ورودی است نه خود کاراکترها)
جواب: " گزینه د " زیرا بیشترین ارتفاع ممکن مربوط به دنباله ای از n عدد فیبوناچی پشت سرهم است.

۱۵. اگر از الگوریتم دیکسترا برای یافتن همه کوتاهترین مسیرها از راس شماره ۱ استفاده شود راس شماره ۵ چندمین راسی است که کوتاهترین مسیرش از راس مبدا به دست می آید؟ (راس مبدا نیز در این ترتیب لحاظ شود.)



جواب: " گزینه د " با توجه به الگوریتم دیکسترا و با احتساب راس مبدا کوتاهترین مسیر ۶ خواهد شد.

۱۷. فرض کنید 4 کلید $key1 < key2 < key3 < key4$ موجود است. اگر احتمال مساوی بودن کلید مورد جستجو با هر یک از کلیدها به صورت زیر باشد:

$$P1 = 0.3, \quad P2 = 0.2, \quad P3 = 0.2, \quad P4 = 0.3$$

حداقل زمان جستجوی میانگین چقدر است؟

جواب: " گزینه ب " زیرا با توجه به مقدار و احتمال مساوی بودن کلیدها حداقل زمان جستجوی میانگین ۲ است.

۱۹. برای حل مساله ی فروشنده دوره گرد به روش برنامه نویسی پویا اگر تعداد شهرها برابر با د باشد میزان حافظه مورد نیاز چقدر است؟

جواب: " گزینه الف " زیرا هر شهر به اندازه ۲ به توان n حافظه نیاز دارد که برای n شهر گزینه اول صحیح می باشد.

۲۱. برای محاسبه ی جمله nام دنباله فیبوناچی به روش برنامه نویسی پویا مرتبه زمانی اجرای الگوریتم چقدر است؟
جواب: " گزینه د " زیرا مرتبه زمانی دنباله فیبوناچی همانطور که در گزینه آخر نوشته شده است $\theta(n)$ می باشد.

۲۳. در حل مساله حاصل جمع زیر مجموعه ها به روش عقبگرد اگر total نشان دهنده ی جمع کل اوزان انتخاب نشده و weight وزن گره موجود باشد شرط امیدبخش بودن یک گره در سطح iام چیست؟
جواب: " گزینه ب " با توجه به شرایط امیدبخش بودن گره به صورت زیر می باشد.

$$weight + w_{i+1} \leq w, weight + total \geq w$$

۲۵. رام نشدنی بودن کدام یک از مسایل زیر ثابت شده است؟
جواب: " گزینه ج " تعیین کلیه مدارهای هامیلتونی یک گراف زیرا حد و مرزی برای آن نمی توان تعیین نمود.

سوال ۱ تشریحی: رابطه بازگشتی زیر را حل کنید.

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) \quad n \Rightarrow 2$$

$$T(0) = 0, \quad T(1) = 1$$

جواب:

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

سوال ۳ تشریحی: ارزش بهینه تبدیل رشته ی $X = abaac$ به $Y = acab$ با فرض $D=I=1$ و $C=2$ چقدر است؟
(I = درج و D = حذف و C = اصلاح)
جواب:

$$cost = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

سوال ۵ تشریحی: برای مساله فروشنده دوره گرد با ماتریس مجاورت زیر با استفاده از روش انشعاب و تهدید یک تور بهینه و طول آن را پیدا کنید. عملیات را مرحله به مرحله نمایش دهید.

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 4 & 10 & 20 \\ 14 & 0 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 16 \\ 11 & 7 & 9 & 0 & 2 \\ 18 & 7 & 17 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

جواب: فرض کنید W یک گراف جهت دار وزن دار با n گره بوده و وزن ارتباطی i به j باشد. این مساله به روش برنامه نویسی پویا مرتبه زمانی اش مشخص شد.
مسیری روی گراف W در نظر بگیرید به صورت آن که با کم ترین هزینه (یا طول یا ...) باشد.

چون مسیر باید کامل باشد باید همه ی گره ها را در برگرد پس می توان هریک از گره ها را به عنوان شروع عملیات انتخاب کرد.

برای تعیین تابع حد برای هر گره کمترین ارزش لبه ی ورودی و کمترین ارزش لبه ی خروجی را با هم جمع می کنیم. حاصل به دست آمده ۲ برابر کمترین ارزش ممکن برای یک مسیر خواهد بود.

برای به دست آوردن کمترین ارزش ممکن برای یک مسیر حاصل جمع به دست آمده را تقسیم بر ۲ می کنیم که کمترین ارزش لبه خروجی از گره ۱ حداقل مقادیر ۱۴ ، ۴ ، ۱۰ و ۲۰ می باشد و کمترین ارزش لبه ورودی به گره حداقل مقادیر ۱۴ ، ۴ ، ۱۱ و ۱۸ یعنی ۴ می باشد.

سوالات زوج تابستان ۹۶ :

۲. اگر الگوریتمی دارای دو ساختار حلقه باشد که زمان حلقه اول $T_1(n)$ و زمان حلقه دوم $T_2(n)$ باشد و این حلقه ها به دنبال هم اجرا شوند زمان اجرای کل آن ها کدام است؟
جواب: " گزینه د " زمان اجرا به صورت دو تابع زیر می باشد.

$$\max\{T_1(n), T_2(n)\}$$

$$T_1(n) + T_2(n)$$

۴. پیچیدگی زمانی قطعه کد زیر از چه مرتبه ای است؟

```
int x=0,k=0;
for(i=1;i<n;i++)
    for(j=1;j<n;j++)
    {
        x++;
        while(k++<n)
            for(m=1;m<n;m*=2)
                x--;
```

جواب: " گزینه الف " با بسط دادن قطعه کد به پیچیدگی زمانی زیر خواهیم رسید.

$$\theta(n^3 \log n)$$

۶. برای ضرب دو چند جمله ای برحسب X و از درجه n بهترین الگوریتم با روش تقسیم و حل با چه مرتبه اجرایی آن را حل می کند؟
جواب: " گزینه ج " با مرتبه اجرایی زیر حل خواهد شد.

$$\theta(n^{\log 3})$$

۸. کدام گزینه صحیح می باشد؟
جواب: " گزینه ج " طبق فرمول های فصل این گزینه صحیح می باشد.

$$7n^2 - 6n + 2 \in \theta(n^2)$$

۱۰. مرتبه اجرایی تابع زمانی زیر که یک تابع بازگشتی می باشد چیست؟

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ T(n-2) + 3 & n > 2 \end{cases}$$

جواب: " گزینه د " مرتبه اجرایی به صورت زیر می باشد.

$$\theta(n)$$

۱۲. در صورتی که بر روی لیست زیر عمل مرتب سازی به روش سریع QuickSort و به شکل صعودی انجام شود

در مرحله اول کدام عنصر در جای صحیح خود قرار می گیرد؟

17 , 20 , 10 , 25 , 11 , 8 , 18 , 23

جواب: " گزینه د " عنصر ۱۷ در جای درست قرار خواهد گرفت.

۱۴. روال solution در روش طراحی الگوریتم حریصانه عهده دار چه مسئولیتی است؟
جواب: " گزینه د " این روال برای بررسی اینکه جوابی حاصل شده است یا خیر می باشد.

۱۶. برای یک گراف همبند که خلوت باشد (تعداد یال های آن کم باشد) زمان بدست آوردن درخت پوشای مینیموم
به روش کروسکال کدام است؟
جواب: " گزینه ب " زمان به صورت زیر خواهد بود.

$$\theta(n \log n)$$

۱۸. مرتبه زمانی مساله کوله پشتی صفر و یک به روش برنامه نویسی پویا کدام است؟
جواب: " گزینه الف " به صورت زیر می باشد.

$$\theta(2^n)$$

۲۰. تعداد گره های درخت فضای حالت برای مساله n وزیر کدام می باشد؟
جواب: " گزینه الف " تعداد گره ها به صورت زیر می باشند.

$$\frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}$$

۲۲. فرض کنید زمان ارایه خدمات برای سه کار همانند جدول زیر باشد. زمان بهینه مربوط به ارایه خدمات و انتظار برای انجام کار برای انجام کامل همه کارها به روش حریصانه کدام گزینه می باشد؟

شماره کار	زمان ارائه خدمات
۱	۱۲
۲	۷
۳	۱۰

جواب: " گزینه ب " بر اساس جدول بالا زمان بهینه ۵۳ خواهد شد.

۲۴. پیچیدگی زمانی الگوریتم فلویید در بدترین حالت چیست؟
جواب: " گزینه الف " در بدترین حالت به صورت زیر خواهد بود.

$$\theta(n^3)$$

سوال ۲ تشریحی: برای ضرب اعداد صحیح بزرگ یک الگوریتم به روش تقسیم و حل بنویسید و مرتبه زمانی آن را بدست آورید.

جواب: دو عدد صحیح U و V هریک به طول n در نظر میگیریم و هر یک از اعداد را به دو بخش با طول n تقسیم بر ۲ جدا می کنیم. بنابراین U و V را به صورت زیر میتوان نوشت:

$$U = x * 10 + y$$

$$V = w * 10 + z$$

که در آن m عبارتست از:

$$m = \lfloor n/2 \rfloor$$

از حاصل ضرب عدد U در V عبارت زیر حاصل می شود:

$$U.V = (x * 10 + y)(w * 10 + z) = xw * 10^2 + (xz + wy) * 10 + yz$$

سوال ۴ تشریحی: اگر متنی دارای حروف الفبا همانند جدول زیر باشد به روش هافمن این حروف را کدگذاری نموده و کد هر کاراکتر را مشخص نمایید.

کارکترها	a	b	c	d	e	f
تعداد تکرار	25	8	5	6	35	10

$$A = 1100$$

$$B = 001$$

$$23 * 3 + 12 * 3 + 10 * 4 + 35 * 2 + 28 * 2 + 14 * 3 + 8 * 4 = 345 \quad \text{طول کل}$$

$$C = 01$$

$$D = 10$$

$$E = 1101$$

$$F = 000$$

$$G = 111$$