

نیم سال اول ۹۵-۹۴ سوالات زوج

۲- کدام گزینه مقایسه ای صحیح بین پیچیدگی زمانی الگوریتم ها را نشان می دهد؟

گزینه الف) $O(\sqrt{n}) < O(n) < O(n \log n)$

ترتیب رشد توابع به صورت زیر است:

$$O(1) < O(\log n) < o(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$$

۴- در رشد توابع زیر کدام ترتیب صحیح می باشد؟

گزینه د) $O(n \log n), O\left(\frac{n^2}{\log n}\right), O(1 + \varepsilon)^n$

هر توان n به همراه ε رشد بیشتری نسبت به $\log n$ دارد. بنابراین داریم:

$$O(n \log n), O\left(\frac{n^2}{\log n}\right), O(1 + \varepsilon)^n$$

۶- جواب رابطه ی بازگشتی زیر کدام است؟

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + O(n)$$

به کمک فرمول زیر جواب را بدست می آوریم:

$$\Rightarrow T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{n}{b}\right) + c_n \Rightarrow n \sum_{i=0}^h \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^i$$

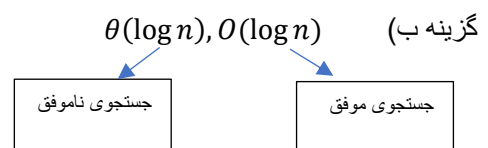
ارتفاع درخت: حداکثر مقدار بین ارتفاع سمت چپ $(\log_a n)$ و ارتفاع سمت راست $(\log_b n)$ می باشد.

اگر جمع ضریب ها برابر یک شد: $T(n) = O(n \log n)$

و اگر جمع ضریب ها کمتر از یک شد: $T(n) = \theta(n)$

$$T(n) = n \sum_{i=0}^h \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^i = n \sum_{i=0}^h (1)^i = O(n \log n) \rightarrow \text{گزینه ب درست است}$$

۸- بدترین حالت زمانی الگوریتم جستجوی دودویی (*Bin srch*) برای جستجوی موفق و ناموفقه ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱۰- در ضرب ماتریس ها به روش استراسن اگر مساله کوچک ، ضرب ماتریس ۲×۲ باشد، برای ضرب دو ماتریس ۸×۸ چند ضرب عددی صورت می گیرد؟

گزینه الف) ۳۹۲

رابطه بازگشتی مربوط به پیچیدگی زمانی الگوریتم استراسن برای تعداد ضرب ها به صورت زیر است:

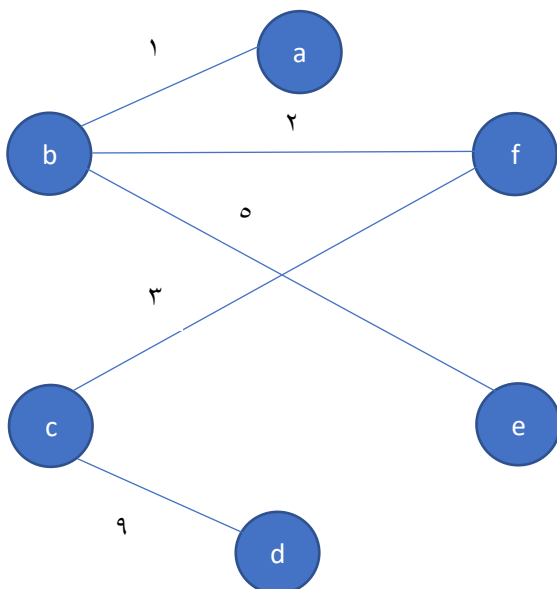
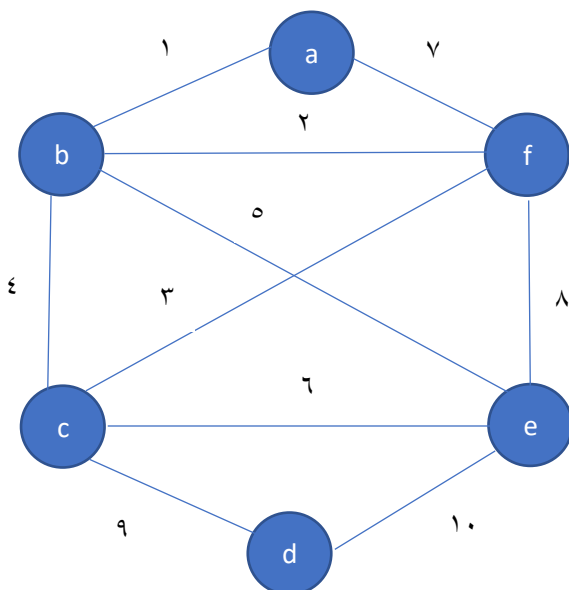
$$\begin{cases} T(n) = ۷T(\frac{n}{۲}) \\ T(۱) = ۱ \end{cases}$$

ولی چون در اینجا مساله کوچک ضرب ماتریس های ۲×۲ می باشد داریم:

$$\begin{aligned} T(n) &= ۷T(\frac{n}{۲}) & T(۸) &= ۷T(۴) = ۷ \times ۵۶ = ۳۹۲ \\ T(۲) &= ۸ & \Rightarrow & \\ & & T(۴) &= ۷T(۲) = ۷ \times ۸ = ۵۶ \end{aligned}$$

۱۲- در گراف زیر، با اجرای الگوریتم پریم و شروع از راس a ، درخت پوشای مینیمم دارای کدام هزینه خواهد بود؟

گزینه ج)



$$۱+۲+۳+۵+۹=۲۰$$

۱۴- در صورتیکه یک گراف خلوت (متراکم) باشد، الگوریتم..... سریعتر از الگوریتم..... عمل^۹ کند، در این حالت پیچیدگی زمانی الگوریتم کروسکال..... است (به ترتیب از راست به چپ)

گزینه الف) کروسکال، پریم ($\theta(n \log n)$)

اگر گراف کامل باشد بنابراین یال های آن برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود، در نتیجه بنابراین فرمول ($e \log e$)، زمان الگوریتم کروسکال برابر $\theta(n^2 \log n)$ خواهد بود که بیشتر از زمان الگوریتم پریم ($O(n^2)$) می باشد.

اما اگر گراف یک گراف خلوت باشد آنگاه زمان الگوریتم کروسکال برابر $\theta(n \log n)$ است که از زمان الگوریتم پریم ($O(n^2)$) کمتر است و سریعتر می باشد.

۱۶- فرض کنید $n=7$ کارها، مهلت و بهره های مربوط به کارها را به صورت زیر داریم، جواب بهینه با الگوریتم زمانبندی با مهلت کدام است؟

ابتدا به ترتیب بهینه از بیشترین به کمترین مرتب می کنیم.

بهره	مهلت	کار
۶۰	۳	۱
۵۰	۱	۲
۳۰	۱	۳
۲۰	۲	۴
۱۵	۳	۵
۱۰	۱	۶

انجام می شود → ✓
 انجام می شود → ✓
 انجام نمی شود → x
 انجام می شود → ✓
 انجام نمی شود → x
 انجام نمی شود → x

$$\text{حد اکثر سود} = 60 + 50 + 20 = 130$$

ابتدا کار ۲۰ سپس کار ۴ و در انتها کار ۱ انجام می شود.

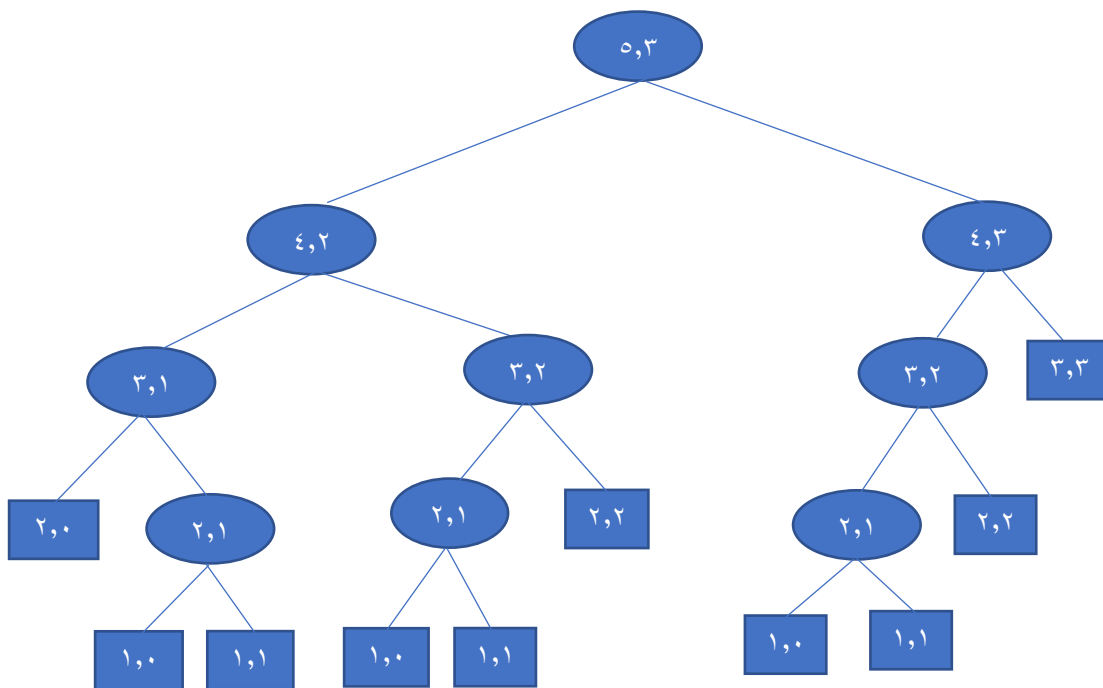
پاسخ درست: گزینه ج) جواب بهینه {۲، ۴، ۱} با سود ۱۳۰ خواهد بود.

۱۸- تعداد اعمال جمع برای الگوریتم ضرب دوجمله ای $(\frac{5}{3})$ با استفاده از برنامه نویسی پویا کدام است؟

$$B[i][j] = \begin{cases} B[i-1][j-1] + B[i-1][j] & 0 < j < i \\ 1 & j = 0 \text{ } j = i \end{cases} \quad \text{محاسبه ضرب دوجمله ای (پویا)}$$

در مجموع شامل دو جمع می باشد.

گزینه ب) ۹



۲۰- پیچیدگی محاسباتی در هر حالت برای الگوریتم حداقل ضربها می باشد.

گزینه د) $\theta(n^3)$

۲۲- تعداد فراخوانی ها برای محاسبه $P(3,3)$ در تابع *world series* زیر کدام است؟

گزینه د) ۳۸

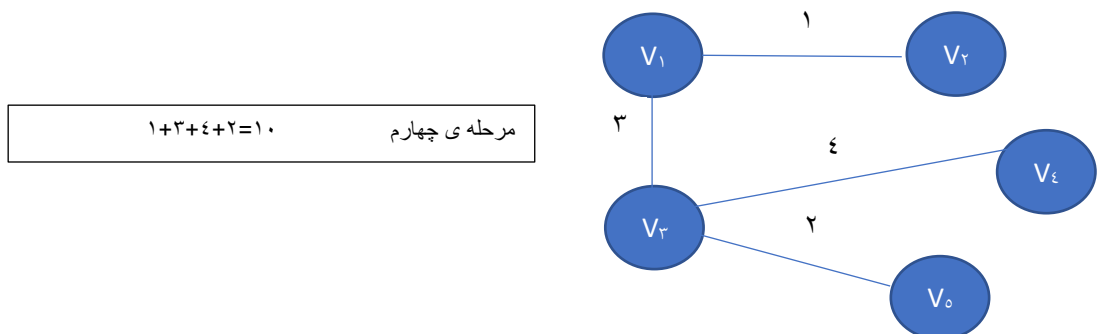
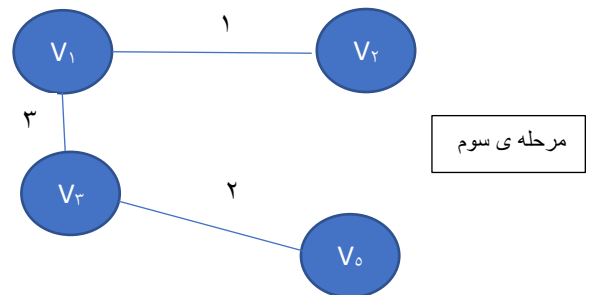
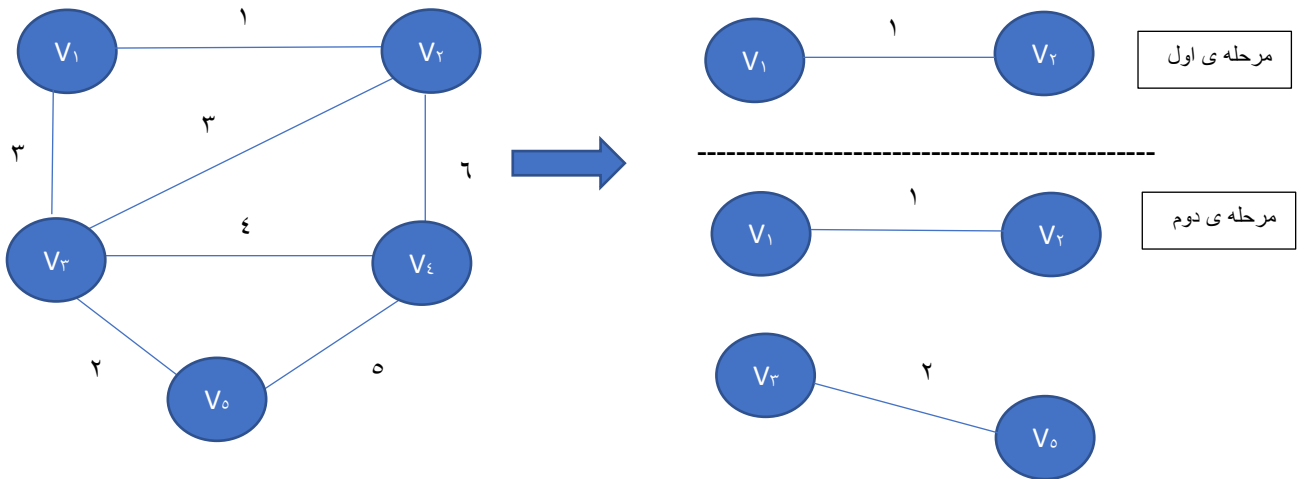
۲۴- تعداد درخت های جستجوی دودویی که با ۳ کلید متمایز می توان ساخت کدام است؟

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \Rightarrow \frac{1}{3+1} \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{1}{4} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 5$$

گزینه ج) ۵

سوالات تشریحی

۲- الگوریتم کروسکال را بر روی گراف زیر اجرا کنید، درخت پوشای مینیمم را مرحله به مرحله رسم کرده و هزینه نهایی درخت حاصل را بدست آورید؟



۴- برنامه مربوط به طولانی ترین زیر رشته مشترک دو رشته x, y را با برنامه نویسی پویا بنویسید؟

Lcs (string x , string y)

```
۱  m=Length(x)
۲  n=Length(y)
۳  for(i=1; i<=m; i++)
۴      c[i][0]=0;
۵  for(j=1; j<=n; j++)
۶      c[0][j]=0;
۷  For(i=1; i<=m; i++)
۸      For(j=1; j<=n; j++)
۹      If  $x_i == x_j$ 
۱۰          C[i][j]=c[i-1][j-1];
۱۱          B[i][j]="←";
۱۲ Elseif c[i-1][j]>=c[i][j-1]
۱۳          C[i][j]=c[i-1][j];
۱۴          B[i][j]="↑";
۱۵ Else
۱۶          C[i][j]=c[i][j-1];
۱۷          B[i][j]="←";
۱۸          Return c;
```