1. Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки $A(a, b)$ на пл-ти

Зададим точку т.о. $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда чтобы получить желаемую матрицу M, мы должны перейти в новую систему координат, с началом в т. A, потом сделать поворот и вернуться в исходную систему координат. $M = T R_\varphi T^{-1}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = T R_\varphi T^{-1}$$

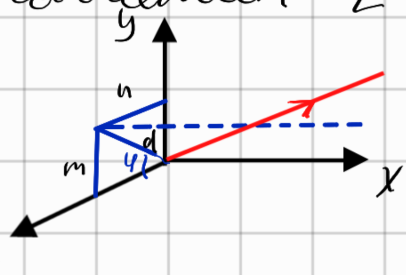
---

3. Построить матрицу поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пространстве, проходящей через точку $A = (a, b, c)$ и имеющей направляющий вектор (l, m, n) с модулем равным единице

Аналогично 1. точки $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$. Сделаем также: перейдём в новую систему координат, повернём, и вернёмся.

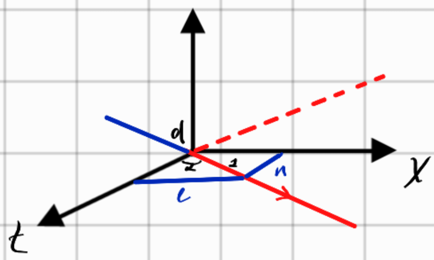
$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – перенос, чтобы L проходила через начало координат

Совместим L с осью z



$$\sin\varphi = \frac{m}{d} \qquad \cos\varphi = \frac{n}{d}$$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & -\frac{m}{d} & 0 \\ 0 & \frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\sin\alpha = \frac{l}{1}$

$\cos\alpha = \frac{d}{1}$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = T(a,b,c)\cdot R_x(-\varphi)\cdot R_y(-\theta)\cdot R_z(\varphi)\,R_y(\theta)\,T(-a,-b,-c)$$

---

8. Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$, а второй — вокруг оси y на тот же угол. Найдите результирующий поворот

$$q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + V_x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + l_1)$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + l_2)$$

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{1}{2}(1 + l_2)(1 + l_1) = \frac{1}{2}(1 + l_1 + l_2 + (-l_3)) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ результирующий угол: $\frac{\pi}{3}$

поворот вокруг оси $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$