

Программа курса «Математическая логика»

Вопросы ко второму коллоквиуму.

ИТМО, группы М3232–М3239, осень 2025 г.

1. Категорические силлогизмы. Термины, предикат, субъект, фигуры, модусы (сильные, слабые, неправильные), ограничения, контрпримеры на ограничения.
2. Исчисление предикатов. Язык исчисления предикатов. Метаязык, сокращения записи. Теория моделей исчисления предикатов (предметное множество, оценка). Функции (предикаты) и функциональные (предикатные) символы. Общезначимость, следование. Вхождения, свободные вхождения, подстановка, свобода для подстановки. Теория доказательств, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов. Отличия от исчисления высказываний. Лемма о перестановке подстановки и оценки. Теорема о корректности исчисления предикатов.
3. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Непротиворечивые множества формул (с кванторами и бескванторные). Полнение множества формул. Существование моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов. Поверхностные кванторы (предварённая форма). Эквивалентность формул формулам с поверхностными кванторами. Сколемизация. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Полнота исчисления предикатов. Теорема Гёделя о компактности.
4. Машина Тьюринга. Разрешимость теории, примеры. Задача об останове, её неразрешимость. Неразрешимость исчисления предикатов.
5. Представление чисел через натуральные (целые, рациональные, вещественные). Аксиоматика Пеано. Арифметические операции (сложение, умножение) в аксиоматике Пеано.
6. Порядок теории (0, 1, 2). Теории первого порядка. Формальная арифметика.
7. Арифметизация математики, формализация категорических силлогизмов, предложенная Лейбницем.
8. Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Функции вычисления простых чисел. Частичный логарифм. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Функция Аккермана.
9. Бета-функция Гёделя. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.
10. Непротиворечивость (эквивалентные определения), ω -непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Неполнота расширений формальной арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.
11. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, *Consis*. Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёба. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости истины.