Программа курса «Математическая логика»

Вопросы к третьему коллоквиуму.

ИТМО, группы M3232–M3239, осень 2025 г.

1. Теория множеств. Определения равенства. Парадокс брадобрея. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Конструктивные аксиомы (пустого, пары, объединения, множества подмножеств, выделения). Частичный, линейный, полный порядок. Ординальные числа, аксиома бесконечности.

2. Конечные ординалы, предельные ординалы, существование ординала ω, операции над ординалами, факты об операциях над ординалами (сравнение $a + b$ и $b + a$, $a \cdot b$ и $b \cdot a$). Связь ординалов и упорядочений. Аксиомы фундирования и подстановки.

3. Кардинальные числа, мощность множеств, операции над кардинальными числами (сложение, умножение, возведение в степень). Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора.

4. Мощность модели. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма-Сколема, парадокс Сколема.

5. Аксиома выбора, альтернативные формулировки (лемма Цорна, теорема Цермело, существование частичной обратной), доказательство переходов (кроме доказательства леммы Цорна).

6. Применение аксиомы выбора: эквивалентность определений пределов (по Коши и по Гейне). Теорема Диаконеску. Ослабленные варианты (счётный выбор и зависимый выбор), универсум фон Неймана. Аксиома конструктивности.

7. Индукция и полная индукция. Наследственные множества. Трансфинитная индукция (аналоги полного и обычного варианта математической индукции). Применение трансфинитной индукции. Система S_∞, степень и порядок доказательства. Правило сечения, теорема об устранении сечений. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.

8. Сколемизация. Эрбранов универсум, основные термы, эрбранова интерпретация, система дизъюнктов, основные примеры, система основных примеров, теорема Гёделя о компактности, теорема Эрбрана. Правило резолюции (для исчисления высказываний и для исчисления предикатов), задачи унификации, уравнения в алгебраических термах, наибольший общий унификатор. Общая формулировка метода резолюции. SMT-решатели.