Лямбда-исчисление

История понятий, лёгших в основу лямбда-исчисления

- Карринг. Фреге, 1893. Все функции — одноместные. Сложение: $a + b = (+_a)(b)$, одноместная функция, возвращающая другую одноместную функцию: $(+_5)(4) = 9$, $(+_5)((+_3)7) = 15$
- Анонимные функции. Что такое, например, возведение в квадрат?
  - Возведение в квадрат *чего*? $f(x) = x^2$.
  - А зачем тут f и почему x?
  - Давайте напишем это как-то так: $\hat{x}^2$ (Principia Mathematica, 1910)
- Заметим, что от имени толк бывает: в Фортране переменные `I..N` — целые, остальные — плавающие.

Лямбда-исчисление, история возникновения

- Алонзо Чёрч, 1930+ — попытка построить исчисление для матлогики.
- Почему лямбда? Последовательное превращение записи:

  $$\hat{x}.x^2 \qquad \wedge\, x.x^2 \qquad \lambda x.x^2$$

  Точка — тоже из Principia Mathematica: $(\exists a).\varphi(a)$.
- Несколько статей — и несколько парадоксов, подход оказался не очень удачным.
- Тезис Чёрча сформулирован впервые про лямбда-исчисление
- 1936 — лямбда-исчисление в современном варианте (для программирования)
- 1940 — просто-типизированное лямбда-исчисление

Лямбда-исчисление, синтаксис

$$\Lambda ::= (\lambda x.\Lambda)|(\Lambda\ \Lambda)|x$$

Мета-язык:

- Мета-переменные:
  - $A \dots Z$ — мета-переменные для термов.
  - x, y, z — мета-переменные для переменных.
- Правила расстановки скобок аналогичны правилам для кванторов:
  - Лямбда-выражение ест всё до конца строки
  - Аппликация левоассоциативна

Пример

- $a\ b\ c\ (\lambda d.e\ f\ \lambda g.h)\ i \equiv \Big(\color{red}{\Big(}\color{black}{((a\ b)\ c)}\ \color{blue}{\Big(}\color{black}{\lambda d.((e\ f)\ (\lambda g.h))}\color{blue}{\Big)}\color{red}{\Big)}\color{black}{\ i\Big)}$
- $0 := \lambda f.\lambda x.x; \quad (+1) := \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x); \quad (+2) := \lambda x.(+1)\ ((+1)\ x)$

Альфа-эквивалентность

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\}, & A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q), & A \equiv P\ Q \\ FV(P) \setminus \{x\}, & A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

Примеры:

- $M := \lambda b.\lambda c.a\ c\ (b\ c)$; $FV(M) = \{a\}$
- $N := x\ (\lambda x.(x\ (\lambda y.x)))$; $FV(N) = \{x\}$

Определение

$A =_\alpha B$, если и только если выполнено одно из трёх:

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$, $x \equiv y$;
2. $A \equiv P_a Q_a$, $B \equiv P_b Q_b$ *и* $P_a =_\alpha P_b$, $Q_a =_\alpha Q_b$;
3. $A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda y.Q)$, $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$, *где* t *не входит в* A *и* B.

Определение

$L = \Lambda/_{=_\alpha}$

Альфа-эквивалентность, пример

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$, $x \equiv y$;
2. $A \equiv P_a Q_a$, $B \equiv P_b Q_b$ и $P_a =_\alpha P_b$, $Q_a =_\alpha Q_b$;
3. $A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda y.Q)$, $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$, где t не входит в A и B.

Лемма

$$\lambda a.\lambda b.a\ b =_\alpha \lambda b.\lambda a.b\ a$$

Доказательство.

$$\begin{array}{rcll} t & =_\alpha & t & \text{Правило 1} \\ s & =_\alpha & s & \text{Правило 1} \\ t\ s & =_\alpha & t\ s & \text{Правило 2} \\ \lambda b.(t\ b) & =_\alpha & \lambda a.(t\ a) & \text{Правило 3} \\ \lambda a.\lambda b.(a\ b) & =_\alpha & \lambda b.\lambda a.(b\ a) & \text{Правило 3} \end{array}$$

$\square$

Бета-редукция

Интуиция: вызов функции.

λ-выражение	Python
$\lambda f.\lambda x.f\ x$	`def one(f,x): return f(x)`
$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$	`(lambda x: x x) (lambda x: x x)`
	`def omega(x): return x(x); omega(omega)`

Бета-редукция

Интуиция: вызов функции.

λ-выражение	Python
$\lambda f.\lambda x.f\ x$	`def one(f,x): return f(x)`
$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$	`(lambda x: x x) (lambda x: x x)`
	`def omega(x): return x(x); omega(omega)`

Определение

Терм вида $(\lambda x.P)\ Q$ — бета-редекс.

Определение

$A \to_\beta B$, если:

1. *$A \equiv (\lambda x.P)\ Q$, $B \equiv P\ [x := Q]$, при условии свободы для подстановки;*
2. *$A \equiv (P\ Q)$, $B \equiv (P'\ Q')$, при этом $P \to_\beta P'$ и $Q = Q'$, либо $P = P'$ и $Q \to_\beta Q'$;*
3. *$A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda x.P')$, и $P \to_\beta P'$.*

Бета-редукция, пример

Пример

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda n.n) \to_\beta (\lambda n.n)\ (\lambda n.n) \to_\beta \lambda n.n$$

Пример

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x) \to_\beta (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$$

Нормальная форма

Определение

Лямбда-терм N *находится в нормальной форме, если нет* Q: $N \rightarrow_\beta Q$.

Пример

В нормальной форме:

$\lambda f.\lambda x.x\ (f\ (f\ \lambda g.x))$

Нормальная форма

Определение

Лямбда-терм N находится в нормальной форме, если нет Q: $N \to_\beta Q$.

Пример

В нормальной форме:
$\lambda f.\lambda x.x\ (f\ (f\ \lambda g.x))$

Пример

Не в нормальной форме (редексы подчёркнуты):
$\lambda f.\lambda x.\underline{(\lambda g.x)\ (f\ (f\ x))}$
$(\underline{(\lambda x.x)\ (\lambda x.x)})\ (\underline{(\lambda x.x)\ (\lambda x.x)})$

Определение

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ — *транзитивное и рефлексивное замыкание* $(\to_\beta)$.

Булевские значения

$T := \lambda x.\lambda y.x$ $F := \lambda x.\lambda y.y$

Тогда: $Or := \lambda a.\lambda b.a\ T\ b$:

$Or\ F\ T = \underline{((\lambda a.\lambda b.a\ T\ b)\ F)}\ T \to_\beta (\lambda b.F\ T\ b)\ T \to_\beta F\ T\ T =$

$= (\lambda x.\lambda y.y)\ T\ T \to_\beta (\lambda y.y)\ T \to_\beta T$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^{(n)}(x)$

Пример

$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(f(x)))$

Инкремент: $Inc = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$

$$(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ \overline{0} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'.\lambda x'.x') \to_\beta$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^{(n)}(x)$

Пример

$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(f(x)))$

Инкремент: $Inc = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$

$$(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ \overline{0} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'.\lambda x'.x') \to_\beta$$
$$\ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda f'.\lambda x'.x')\ f\ (f\ x) \to_\beta$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^{(n)}(x)$

Пример

$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(f(x)))$

Инкремент: $Inc = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$

$$\begin{aligned} &(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ \overline{0} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'.\lambda x'.x') \to_\beta \\ &\ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda f'.\lambda x'.x')\ f\ (f\ x) \to_\beta \\ &\ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda x'.x')\ (f\ x) \to_\beta \end{aligned}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^{(n)}(x)$

Пример

$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(f(x)))$

Инкремент: $Inc = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$

$$\begin{aligned} &(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ \overline{0} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'.\lambda x'.x') \to_\beta \\ &\ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda f'.\lambda x'.x')\ f\ (f\ x) \to_\beta \\ &\ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda x'.x')\ (f\ x) \to_\beta \\ &\ldots \lambda f.\lambda x.f\ x = \overline{1} \end{aligned}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^{(n)}(x)$

Пример

$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(f(x)))$

Инкремент: $Inc = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$

$$\begin{array}{l} (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ \overline{0} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'.\lambda x'.x') \to_\beta \\ \ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda f'.\lambda x'.x')\ f\ (f\ x) \to_\beta \\ \ldots \lambda f.\lambda x.(\lambda x'.x')\ (f\ x) \to_\beta \\ \ldots \lambda f.\lambda x.f\ x = \overline{1} \end{array}$$

Декремент: $Dec = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ (\lambda g.\lambda h.h\ (g\ f))\ (\lambda u.x)\ (\lambda u.u)$

Упорядоченная пара и алгебраический тип

Определение

$Pair(a, b) := \lambda s.s\ a\ b$
$Fst := \lambda p.p\ T$
$Snd := \lambda p.p\ F$

Пример

$Fst(Pair(a, b)) = (\lambda p.p\ T)\ \lambda s.s\ a\ b \twoheadrightarrow_\beta (\lambda s.s\ a\ b)\ T \twoheadrightarrow_\beta a$

Определение

$InL\ L := \lambda p.\lambda q.p\ L$
$InR\ R := \lambda p.\lambda q.q\ R$
$Case\ t\ f\ g := t\ f\ g$

Теорема Чёрча-Россера

Теорема (Чёрча-Россера)

Для любых термов N, P, Q, если $N \twoheadrightarrow_\beta P$, $N \twoheadrightarrow_\beta Q$, и $P \neq Q$, то найдётся T: $P \twoheadrightarrow_\beta T$ и $Q \twoheadrightarrow_\beta T$.

Теорема

Если у терма N существует нормальная форма, то она единственна

Доказательство.

Пусть не так и $N \twoheadrightarrow_\beta P$ вместе с $N \twoheadrightarrow_\beta Q$, $P \neq Q$. Тогда по теореме Чёрча-Россера существует T: $P \twoheadrightarrow_\beta T$ и $Q \twoheadrightarrow_\beta T$, причём $T \neq P$ или $T \neq Q$ в силу транзитивности $(\twoheadrightarrow_\beta)$ $\square$

Бета-эквивалентность, неподвижная точка

Пример

$\Omega = (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$ *не имеет нормальной формы:* $\Omega \to_\beta \Omega$

Определение

$(=_\beta)$ — *транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание* $(\to_\beta)$.

Теорема

Для любого терма N найдётся такой терм R, что $R =_\beta N\ R$.

Доказательство.

Пусть $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$. Тогда $R := Y\ N$:

$$Y\ N =_\beta (\lambda x.N\ (x\ x))\ (\lambda x.N\ (x\ x)) =_\beta N\ ((\lambda x.N\ (x\ x))\ (\lambda x.N\ (x\ x)))$$

$\square$

Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода:

$$\frac{\text{посылка 1} \qquad \text{посылка 2} \qquad \dots}{\text{заключение}}\ \text{(аннотация)}$$

- Аксиома:

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}\ \text{(акс.)}$$

- Правила введения связок:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}$$

- Правила удаления связок:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \to \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}$$

- Пример доказательства:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ \text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash B}\ \text{(удал\&)} \qquad \cfrac{\cfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ \text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash A}\ \text{(удал\&)}}{A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A}\ \text{(введ\&)}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Импликационный фрагмент интуиционистской логики:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash_{\to} \varphi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash_{\to} \psi}{\Gamma \vdash_{\to} \varphi \to \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\to} \varphi \qquad \Gamma \vdash_{\to} \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash_{\to} \psi}$$

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$*, то* $\Gamma \vdash_{\to} \alpha$*.*

Доказательство.

Определим модель Крипке:

- миры — замкнутые множества формул: $\alpha \in \Gamma$ т.и.т.т. $\Gamma \vdash_{\to} \alpha$,
- порядок — $(\subseteq)$,
- $\Gamma \Vdash X$ т.и.т.т. $X \in \Gamma$.

Из корректности моделей Крипке следует, что что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \Vdash \alpha$.
Требуемое следует из того, что $\Gamma \Vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash_{\to} \alpha$. $\square$

$\Gamma \Vdash \alpha$ т.и.т.т. $\Gamma \vdash_{\to} \alpha$

Индукция по структуре α.

- $\alpha \equiv X$. Утверждение следует из определения;
- $\alpha \equiv \varphi \to \psi$.
  - Пусть $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$. То есть, $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Delta \Vdash \varphi$ влечёт $\Delta \Vdash \psi$. Возьмём Δ как замыкание $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Значит, $\Delta \vdash_{\to} \varphi$ и, по индукционному предположению, $\Delta \Vdash \varphi$. Тогда $\Delta \Vdash \psi$. По индукционному предположению, $\Delta \vdash_{\to} \psi$. То есть, $\Gamma, \varphi \vdash_{\to} \psi$, откуда

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

  - Пусть $\Gamma \vdash_{\to} \varphi \to \psi$. Проверим $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$. Пусть $\Gamma \subseteq \Delta$ и пусть $\Delta \Vdash \varphi$. По индукционному предположению, $\varphi \in \Delta$. То есть, $\Delta \vdash_{\to} \varphi$ и $\Delta \vdash_{\to} \varphi \to \psi$. Тогда

$$\frac{\Delta \vdash_{\to} \varphi \quad \Delta \vdash_{\to} \varphi \to \psi}{\Delta \vdash_{\to} \psi}$$

    По индукционному предположению, $\Delta \Vdash \psi$, отчего $\Gamma \Vdash \varphi \to \psi$.

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление (по Карри).

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление (по Карри). Типы: $\tau ::= \alpha | (\tau \to \tau)$.

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление (по Карри). Типы: $\tau ::= \alpha | (\tau \to \tau)$.
Язык: $\Gamma \vdash A : \varphi$

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример: тип чёрчевских нумералов

Пусть $\Gamma = f : \alpha \to \alpha, x : \alpha$

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{}{\Gamma \vdash x : \alpha}\,Ax
      \qquad
      \cfrac{}{\Gamma \vdash f : \alpha \to \alpha}\,Ax
    }{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\,App
    \qquad
    \cfrac{}{\Gamma \vdash f : \alpha \to \alpha}\,Ax
  }{\{f : \alpha \to \alpha, x : \alpha\} \vdash f\ (f\ x) : \alpha}\,App
}{
  \cfrac{f : \alpha \to \alpha \vdash \lambda x. f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha)}{\vdash \lambda f. \lambda x. f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)}\,\lambda
}\,\lambda
$$

Изоморфизм Карри-Ховарда

λ-исчисление	исчисление высказываний
Выражение	доказательство
Тип выражения	высказывание
Тип функции	импликация
Упорядоченная пара	конъюнкция
Алгебраический тип	дизъюнкция
Обитаемость	доказуемость
Необитаемый тип	ложь

Изоморфизм Карри-Ховарда: отрицание

Определение

Ложь ($\perp$) *— необитаемый тип;* `failwith/raise/throw` $: \alpha \rightarrow \perp$; $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$

Например, контрапозиция: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Phi \vdash a : \alpha}\,Ax \quad \dfrac{}{\Phi \vdash f : \alpha \rightarrow \beta}\,Ax}{\Phi \vdash f\ a : \beta}\,App \quad \dfrac{}{\Phi \vdash n : \beta \rightarrow \perp}\,Ax}{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp, a : \alpha \vdash n\ (f\ a) : \perp}\,App}{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp \vdash \lambda a^{\alpha}.n\ (f\ a) : \neg\alpha}\,\lambda}{f : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}.\lambda a^{\alpha}.n\ (f\ a) : \neg\beta \rightarrow \neg\alpha}\,\lambda}{\lambda f^{\alpha \rightarrow \beta}.\lambda n^{\beta \rightarrow \perp}.\lambda a^{\alpha}.n\ (f\ a) : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)}\,\lambda$$

Почему рассматриваем интуиционистскую логику

- $M : \alpha \vee \neg\alpha$ предполагает наличие атомарной конструкции (поскольку $\alpha \vee \neg\alpha$ недоказуемо в ИИВ).
- Какая у M могла бы быть семантика? $\alpha \vee \neg\alpha$ — это алгебраический тип вида

$$\tau = \texttt{Left}\ \ \alpha \,\big|\, \texttt{Right}\ \ \alpha \to \perp$$

- Доказать $E : \tau$ можно только, предложив либо $L : \alpha$, либо $R : \alpha \to \perp$ (и мы должны знать, что именно — вспомним BHK-интерпретацию).
- Если прочесть это буквально — требуется «универсальный конструктор», создающий значение данного типа, если тип вообще обитаем. Как это можно сделать для сложных типов?
- Однако, конструкции подобного сорта возможны. Например «вычисление с текущим продолжением»:

$$\texttt{callcc} : \forall\alpha.\forall\beta.((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$$

Исчисление по Чёрчу и по Карри

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Исчисление по Чёрчу и по Карри

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри	*По Чёрчу*
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$

Исчисление по Чёрчу и по Карри

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\; x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\; x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\; x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \to \psi}\; x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри	*По Чёрчу*
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	$\lambda f^{\alpha \to \alpha}.\lambda x^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta)$	$\lambda f^{\beta \to \beta}.\lambda x^{\beta}.f\ (f\ x) : (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta)$

Комбинаторы S,K

Определение

Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных

Определение (исходная идея Моисея Шейнфинкеля, 1924)

$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$, $K := \lambda x.\lambda y.x$, $I := \lambda x.x$
(verSchmelzung, Konstanz — исходно «C» у Шейнфинкеля, Identität)

Теорема

Пусть N — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение M, состоящее из комбинаторов S,K, что $N =_\beta M$

Комбинаторы S,K

Определение

Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных

Определение (исходная идея Моисея Шейнфинкеля, 1924)

$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$, $K := \lambda x.\lambda y.x$, $I := \lambda x.x$
(verSchmelzung, Konstanz — исходно «C» у Шейнфинкеля, Identität)

Теорема

Пусть N — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение M, состоящее из комбинаторов S,K, что $N =_\beta M$

Пример

$$I =_\beta S\ K\ K$$

$K := \lambda x^\alpha.\lambda y^\beta.x$	$\alpha \to \beta \to \alpha$
$S := \lambda x^{\alpha\to\beta\to\gamma}.\lambda y^{\alpha\to\beta}.\lambda z^\alpha.x\ z\ (y\ z)$	$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$

Изоморфизм Карри-Ховарда: вывод в гильбертовом стиле — комбинаторное представление.