

# Теоремы об интуиционистском исчислении высказываний

# Непротиворечивость

## Определение

*Теория противоречива, если найдётся такая формула  $\alpha$ , что  $\vdash \alpha$  и  $\vdash \neg\alpha$ .*

## Теорема

*Следующие условия эквивалентны (выполнено для КИВ и ИИВ):*

- ▶ теория непротиворечива;
- ▶  $\nvdash A \ \& \ \neg A$ ;
- ▶ Найдётся  $\alpha$ , что  $\nvdash \alpha$ .

# Разрешимость

## Определение

*Язык  $\mathcal{L} \subseteq A^*$  разрешим, если существует алгоритм, который завершает работу при любом  $a \in A^*$ , поданном на вход, причём алгоритм возвращает «истину» при  $a \in \mathcal{L}$ , и возвращает «ложь» при  $a \notin \mathcal{L}$ .*

## Определение

*Теория неразрешима, если язык всех истинных (доказуемых) формул неразрешим.*

Понятие неразрешимости совпадает для истины и доказуемости в случае полной и корректной теории. Иначе можно отдельно рассматривать разрешимость истины и разрешимость доказуемости.

## Общие результаты об исчислениях высказываний

|                    | К.И.В.        | И.И.В. + алгебры Гейтинга |
|--------------------|---------------|---------------------------|
| корректность       | да (лекция 1) | да (ДЗ 3)                 |
| непротиворечивость | да (очев.)    | да (из непр. КИВ)         |
| полнота            | да (лекция 2) | да (лекция 3)             |
| разрешимость       | да (лекция 2) | да (сегодня)              |

# Интуиционистская логика как возможные реальности

- ▶ Научное знание соответствует истине.
- ▶ Однако, мы не знаем всей истины.
- ▶ Некоторые факты *пока* неизвестны:  $P = NP$ ?
- ▶ Когда-то они будут известны (возможно), и либо как «да», либо как «нет»

# Модели Крипке

## Определение

Модель Крипке  $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ :

- ▶  $\mathcal{W}$  — множество миров,  $(\preceq)$  — нестрогий частичный порядок на  $\mathcal{W}$ ;
- ▶  $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{P}$  — отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если  $W_i \preceq W_j$  и  $W_i \Vdash X$ , то  $W_j \Vdash X$ .

Доопределим вынужденность:

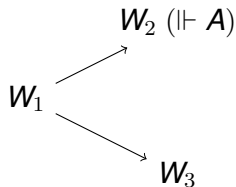
- ▶  $W \Vdash \alpha \ \& \ \beta$ , если  $W \Vdash \alpha$  и  $W \Vdash \beta$ ;
- ▶  $W \Vdash \alpha \vee \beta$ , если  $W \Vdash \alpha$  или  $W \Vdash \beta$ ;
- ▶  $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ , если всегда при  $W \preceq W_1$  и  $W_1 \Vdash \alpha$  выполнено  $W_1 \Vdash \beta$
- ▶  $W \Vdash \neg \alpha$ , если всегда при  $W \preceq W_1$  выполнено  $W_1 \not\Vdash \alpha$ .

Будем говорить, что  $\Vdash \alpha$ , если  $W \Vdash \alpha$  при всех  $W \in \mathcal{W}$ . Будем говорить, что  $\models_{\kappa} \alpha$ , если  $\Vdash \alpha$  во всех моделях Крипке.

# Исключённое третье

## Пример

Покажем, что  $\not\models_{\kappa} A \vee \neg A$ .



Тогда,  $w_3 \models \neg A$ , но  $w_1 \not\models A$  (по определению) и  $w_1 \not\models \neg A$  (так как  $w_1 \preceq w_2$  и  $w_2 \models A$ ). Значит,  $w_1 \not\models A \vee \neg A$ .

# Корректность моделей Крипке

## Лемма

Если  $W_1 \Vdash \alpha$  и  $W_1 \preceq W_2$ , то  $W_2 \Vdash \alpha$

## Теорема

*Пусть  $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$  — некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.*

## Доказательство.

Доказательство для древовидного ( $\preceq$ ), обобщение на произвольный порядок легко построить.

Заметим, что  $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$  открыто в топологии для деревьев.

Значит, положив  $V = \{S \mid S \subseteq \mathcal{W} \text{ \& } S \text{ — открыто}\}$  и  $\llbracket \alpha \rrbracket = V(\alpha)$ , получим алгебру Гейтинга.





# Табличные модели

## Определение

Пусть задано  $V$ , значение  $T \in V$  («истина»), функция  $f_P : P \rightarrow V$ , функции  $f_{\&}, f_{\vee}, f_{\rightarrow} : V \times V \rightarrow V$ , функция  $f_{\neg} : V \rightarrow V$ .

Тогда оценка  $\llbracket X \rrbracket = f_P(X)$ ,  $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$ ,  $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$  — табличная.

Если  $\vdash \alpha$  влечёт  $\llbracket \alpha \rrbracket = T$  при всех оценках пропозициональных переменных  $f_P$ , то  $\mathcal{M} := \langle V, T, f_{\&}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\neg} \rangle$  — табличная модель.

## Определение

Табличная модель конечна, если  $V$  конечно.

## Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

## Доказательство нетабличности: $\alpha_n$

Пусть существует полная конечная табличная модель  $\mathcal{M}$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . То есть, если  $\models_{\mathcal{M}} \alpha$ , то  $\vdash \alpha$ .

Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \leq p < q \leq n+1} A_p \rightarrow A_q$$

Рассмотрим оценку  $f_p : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \rightarrow \{v_1 \dots v_n\}$ . По принципу Дирихле существуют  $p \neq q$ , что  $\llbracket A_p \rrbracket = \llbracket A_q \rrbracket$ . Значит,

$$\llbracket A_p \rightarrow A_q \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket A_p \rrbracket, \llbracket A_q \rrbracket) = f_{\rightarrow}(v, v)$$

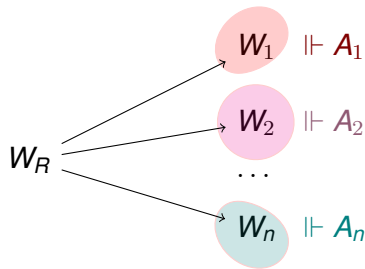
С другой стороны,  $\vdash X \rightarrow X$  — поэтому  $f_{\rightarrow}(\llbracket X \rrbracket, \llbracket X \rrbracket) = T$ , значит,

$$\llbracket A_p \rightarrow A_q \rrbracket = f_{\rightarrow}(v, v) = f_{\rightarrow}(\llbracket X \rrbracket, \llbracket X \rrbracket) = T$$

Аналогично,  $\vdash \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau$ , откуда  $\llbracket \alpha_n \rrbracket = \llbracket \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau \rrbracket = T$ .

## Доказательство нетабличности: противоречие

Однако, в такой модели  $\not\models \alpha_n$ :



Если  $q > 1$ , то  $W_1 \not\models A_q$  и  $W_1 \not\models A_1 \rightarrow A_q$

Если  $q > 2$ , то  $W_2 \not\models A_q$  и  $W_2 \not\models A_2 \rightarrow A_q$

$W_n \not\models A_{n+1}$ ;  $W_n \not\models A_n \rightarrow A_{n+1}$

Если  $p < q$ , то  $W_p \not\models A_q$  и  $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$

Если  $p < q$ , то  $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$ , то есть  $W_R \not\models A_p \rightarrow A_q$ .

Отсюда:  $W_R \not\models \bigvee_{p < q} A_p \rightarrow A_q$ ,  $W_R \not\models \alpha_n$ , потому что  $\not\models \alpha_n$  и  $\not\models \alpha_n$ .

# Дизъюнктивность ИИВ

## Определение

*Исчисление дизъюнктивно, если при любых  $\alpha$  и  $\beta$  из  $\vdash \alpha \vee \beta$  следует  $\vdash \alpha$  или  $\vdash \beta$ .*

## Определение

*Решётка гёделева, если  $a + b = 1$  влечёт  $a = 1$  или  $b = 1$ .*

## Теорема

*Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно*

## $\mathcal{L}$ — импликативная решётка с 0, согласованная с ИИВ

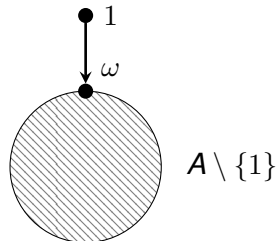
- ▶ *(импликативная ...)* Покажем  $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$ :  
в самом деле,  $[\alpha] \rightarrow [\beta] = \text{наиб } \{[\sigma] \mid [\alpha \& \sigma] \leq [\beta]\}$ . Покажем требуемое двумя включениями:
  1.  $\alpha \& (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \beta$  (карринг + транзитивность импликации)
  2. Если  $\alpha \& \sigma \vdash \beta$ , то  $\sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  (карринг + теорема о дедукции)
- ▶ *(... с нулём ...)* Покажем, что  $0 = [A \& \neg A]$ :  
в самом деле,  $A \& \neg A \vdash \sigma$  при любом  $\sigma$ .
- ▶ *(... согласованная с ИИВ)*
  1. Из доказательства видно, что  $[\alpha \& \beta] = [\alpha] \cdot [\beta]$ ,  $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] + [\beta]$ ,  
 $[\alpha \rightarrow \beta] = [\alpha] \rightarrow [\beta]$ ,  $[A \& \neg A] = 0$ .
  2.  $[A \rightarrow A] = [A] \rightarrow [A] = 1$  по свойствам алгебры Гейтинга
  3.  $[\neg \alpha] = [\alpha \rightarrow A \& \neg A] = [\alpha] \rightarrow 0 = \sim [\alpha]$

## «Гёделевизация» (операция $\Gamma(\mathcal{A})$ )

### Определение

Для алгебры Гейтинга  $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq) \rangle$  определим операцию «гёделевизации»:  
 $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$ , где отношение  $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$  — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

- ▶  $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$ , если  $a \preceq_{\mathcal{A}} b$  и  $a, b \notin \{\omega, 1\}$ ;
- ▶  $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$ , если  $a \neq 1$ ;
- ▶  $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



### Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$  — гёделева алгебра.

### Доказательство.

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если  $a \preceq \omega$  и  $b \preceq \omega$ , то  $a + b \preceq \omega$ . □

# Оценка $\Gamma(\mathcal{L})$

## Определение

Определим  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} : \mathcal{F} \rightarrow \Gamma(\mathcal{L})$ . Положим  $\llbracket X \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} := \llbracket X \rrbracket_{\mathcal{L}}$ . Связки определим естественным образом:  $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} := \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$  и т.п.

## Теорема

Оценка является алгеброй Гейтинга, согласованной с ИИВ.

## Доказательство.

$\Gamma(\mathcal{L})$  — алгебра Гейтинга. Также заметим, что:

- ▶  $\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \rightarrow \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
- ▶  $\llbracket \alpha \& \neg \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot (\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \rightarrow 0) = 0_{\Gamma(\mathcal{L})}$ .

Согласованность оценки следует из определения и указанных выше соображений.



# Гомоморфизм алгебр

## Определение

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — алгебры Гейтинга. Тогда  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  — гомоморфизм, если  $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$ ,  $g(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$  и  $g(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ .

## Определение

Будем говорить, что оценка  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$  согласована с  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$  и гомоморфизмом  $g$ , если  $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$  и  $g(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$ .



# Доказательство дизъюнктивности ИИВ

Определение ( $\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$ )

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

$\mathcal{G}$  — гомоморфизм  $\Gamma(\mathcal{L})$  и  $\mathcal{L}$ , причём оценка  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$  согласована с  $\mathcal{G}$  и  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}}$ .

Теорема

Если  $\vdash \alpha \vee \beta$ , то либо  $\vdash \alpha$ , либо  $\vdash \beta$ .

Доказательство.

Пусть  $\vdash \alpha \vee \beta$ . Тогда  $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$  (так как данная оценка согласована с ИИВ).

Тогда  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$  или  $\llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$  (так как  $\Gamma(\mathcal{L})$  гёделева).

Пусть  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ , тогда  $\mathcal{G}(\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} = 1$ , тогда  $\vdash \alpha$  (по полноте  $\mathcal{L}$ ). □

# Построение дистрибутивных подрешёток

## Определение

Решётка  $\mathcal{L}' = \langle L', \preceq \rangle$  — подрешётка решётки  $\mathcal{L} = \langle L, \preceq \rangle$ , если  $L' \subseteq L$ ,  $(\preceq') \subseteq (\preceq)$  и при  $a, b \in L'$  выполнено  $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_{\mathcal{L}} b$  и  $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_{\mathcal{L}} b$ .

## Лемма

Существует дистрибутивная подрешётка  $\mathcal{L}'$ , содержащая  $a_1, \dots, a_n$ , что  $|L'| \leq 2^{2^n}$ .

## Доказательство.

Пусть  $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \dots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$ . Заметим, что если  $p, q \in L'$ , то  $p \star_{\mathcal{L}} q \in L'$  (так как  $\varphi_p(\vec{a}) \star \varphi_q(\vec{a}) = \psi(\vec{a})$ ). Также ясно, что если  $\sup_L \{p, q\} \in L'$  (или  $\inf_L \{p, q\} \in L'$ ), то  $p \star_{\mathcal{L}} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$ . Значит,  $\mathcal{L}'$  также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{K \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in K} a_i$$

Всего не больше  $2^n$  возможных компонент и  $2^{2^n}$  возможных формул  $\varphi(\vec{a})$ . □

# Разрешимость ИИВ

## Теорема

Если  $\not\models \alpha$  в ИИВ, то существует  $\mathcal{G}$ , что  $\mathcal{G} \not\models \alpha$ , причём  $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{|\alpha|+2}}$ .

## Доказательство.

Если  $\not\models \alpha$ , то по полноте найдётся алгебра Гейтинга  $\mathcal{H}$ , что  $\mathcal{H} \not\models \alpha$ .

Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — подформулы  $\alpha$ . Пусть  $\mathcal{G}$  — дистрибутивная подрешётка  $\mathcal{H}$ , построенная по  $\llbracket \varphi_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \varphi_n \rrbracket, 0$  и  $1$ .

Очевидно, что  $\mathcal{G}$  — алгебра Гейтинга, и можно показать, что  $\mathcal{G} \not\models \alpha$  (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме,  $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{n+2}}$ . □

## Теорема

ИИВ разрешимо.

## Доказательство.

По формуле  $\alpha$  построим все возможные алгебры Гейтинга  $\mathcal{G}$  размера не больше  $2^{2^{|\alpha|+2}}$ , если  $\mathcal{G} \models \alpha$ , то  $\vdash \alpha$ . □