

Теоремы Гёделя о неполноте арифметики

Основные свойства исчислений: Ф.А.

| | К.И.В. | И.И.В. | К.И.П. | Ф.А. + кл. модель |
|--------------------|--------|--------|----------------|---------------------------------|
| корректность | да | да | да (лекция 5) | да (сейчас) |
| непротиворечивость | да | да | да (лекция 6) | верим (т. Гёделя №2) |
| полнота | да | да | да (лекция 6) | нет (т. Гёделя №1) |
| разрешимость | да | да | нет (лекция 7) | нет (док-во т. Тарского) |

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q'_1 , $c(p, q)$ и т.п.)?

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q'_1 , $c(p, q)$ и т.п.)?

Для простоты разрешим только нелогические функциональные и предикатные символы ($=, +, \cdot, 0, '$).

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q'_1 , $c(p, q)$ и т.п.)?

Для простоты разрешим только нелогические функциональные и предикатные символы ($=, +, \cdot, 0, '$).

Определение

Классическая модель формальной арифметики: $D = \mathbb{N}_0$, оценки символов — в соответствии с аксиоматикой Пеано.

Теорема

Формальная арифметика корректна

Доказательство.

Свойства аксиом $A_1 \dots A_8$ очевидны.

Доказательство схемы аксиом индукции:

$$\psi(0) \ \& \ (\forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Математическая индукция по x .



Схема аксиом индукции чуть подробнее

Фиксируем некоторую формулу ψ , и рассмотрим схему аксиом

$$\psi(0) \ \& \ (\forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Разберём случаи:

1. $\llbracket \psi(0) \rrbracket = \text{Л}$ либо $\llbracket \forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x') \rrbracket = \text{Л}$. Тогда антецедент импликации ложен и формула истинна.
2. Антецедент импликации истинен. Тогда докажем индукцией по x , что $\llbracket \psi(x) \rrbracket = \text{И}$. База: $x = 0$.

Переход: $x := s'$. Тогда s' раз применяем переход

$$\llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=\overline{0\dots s}} = \text{И}$$

отсюда

$$\llbracket \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=s} = \llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rrbracket^{x:=s+1} = \text{И}$$

Схема аксиом индукции чуть подробнее

Фиксируем некоторую формулу ψ , и рассмотрим схему аксиом

$$\psi(0) \ \& \ (\forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Разберём случаи:

1. $\llbracket \psi(0) \rrbracket = \text{Л}$ либо $\llbracket \forall x. \psi(x) \rightarrow \psi(x') \rrbracket = \text{Л}$. Тогда антецедент импликации ложен и формула истинна.
2. Антецедент импликации истинен. Тогда докажем индукцией по x , что $\llbracket \psi(x) \rrbracket = \text{И}$. База: $x = 0$.

Переход: $x := s'$. Тогда s' раз применяем переход

$$\llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=\overline{0\dots s}} = \text{И}$$

отсюда

$$\llbracket \theta_0(x') = \theta_1(x') \rrbracket^{x:=s} = \llbracket \theta_0(x) = \theta_1(x) \rrbracket^{x:=s+1} = \text{И}$$

Можно ли верить этому доказательству (доказываем индукцию через индукцию)?

Самоприменимость

Определение

Пусть ξ — формула с единственной свободной переменной x_1 . Тогда:
 $\langle \overline{\Gamma \xi}, p \rangle \in W_1$, если $\vdash \xi(\overline{\Gamma \xi})$ и p — номер доказательства.

Определение

Отношение W_1 рекурсивно, поэтому выражено в Ф.А. формулой ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2 , причём:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \varphi}, \overline{p})$, если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ ;
2. $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \varphi}, \overline{p})$ иначе.

Определение

Определим формулу $\sigma(x_1) := \forall p. \neg \omega_1(x_1, p)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\bar{1}), \vdash \phi(\bar{2}), \dots$ выполнено
 $\nvdash \exists x. \neg\phi(x)$, то теория омега-непротиворечива.

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- ▶ Если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$.
- ▶ Если формальная арифметика ω -непротиворечива, то $\nvdash \neg\sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi \neg, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma \neg})$. Значит, p — номер доказательства.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$.
Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$.
Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$?

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{0}), \vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{1}), \dots$

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{0}), \vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{1}), \dots$ По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{0}), \vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{1}), \dots$ По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \xi^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{0}), \vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{1}), \dots$ По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \bar{p})$. То есть, $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \sigma^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{0}), \vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{1}), \dots$ По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. То есть, $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения σ : $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p. \neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\Gamma \sigma^\perp, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ .

Доказательство.

- ▶ Пусть $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. То есть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.
- ▶ Пусть $\vdash \neg \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. То есть $\vdash \exists p. \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$.
 - ▶ Но найдётся ли натуральное число p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{0}), \vdash \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{1}), \dots$ По ω -непротиворечивости $\nvdash \exists p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, p)$. Значит, найдётся натуральное p , что $\vdash \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^\perp}, \overline{p})$. То есть, $\langle \Gamma \sigma^\perp, p \rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения σ : $\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^\perp})$. Противоречие.



Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma})$.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma})$.

Рассмотрим $\sigma(\overline{\Gamma \sigma}) \equiv \forall p. \neg\omega_1(\overline{\Gamma \sigma}, p)$: нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\Gamma \sigma})$.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma})$.

Рассмотрим $\sigma(\overline{\Gamma \sigma}) \equiv \forall p. \neg\omega_1(\overline{\Gamma \sigma}, p)$: нет числа p , что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\Gamma \sigma})$. То есть, $\llbracket \forall p. \neg\omega_1(\overline{\Gamma \sigma}, p) \rrbracket = И$.

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\not\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma})$.

Рассмотрим $\sigma(\overline{\Gamma \sigma}) \equiv \forall p. \neg\omega_1(\overline{\Gamma \sigma}, p)$: нет числа p , что p — номер

доказательства $\sigma(\overline{\Gamma \sigma})$. То есть, $\llbracket \forall p. \neg\omega_1(\overline{\Gamma \sigma}, p) \rrbracket = \text{И}$. То есть, $\models \sigma(\overline{\Gamma \sigma})$. □

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv (\exists p. p + \theta_1 = \theta_2) \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv (\exists p. p + \theta_1 = \theta_2) \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \Gamma \xi \perp, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\Gamma \xi \perp})$ и p — номер доказательства. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv (\exists p. p + \theta_1 = \theta_2) \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \Gamma \xi^{\perp}, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\Gamma \xi^{\perp}})$ и p — номер доказательства. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q).$

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv (\exists p. p + \theta_1 = \theta_2) \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \Gamma \xi^\perp, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\Gamma \xi^\perp})$ и p — номер доказательства. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$. Тогда $\vdash \rho(\overline{\Gamma \rho^\perp})$ и $\vdash \neg \rho(\overline{\Gamma \rho^\perp})$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$$\theta_1 \leq \theta_2 \equiv (\exists p. p + \theta_1 = \theta_2) \quad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \leq \theta_2 \ \& \ \neg \theta_1 = \theta_2$$

Определение

Пусть $\langle \Gamma \xi^{\perp}, p \rangle \in W_2$, если $\vdash \neg \xi(\overline{\Gamma \xi^{\perp}})$ и p — номер доказательства. Пусть ω_2 выражает W_2 в формальной арифметике.

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p. \omega_1(x_1, p) \rightarrow \exists q. q \leq p \ \& \ \omega_2(x_1, q)$. Тогда $\vdash \rho(\overline{\Gamma \rho^{\perp}})$ и $\vdash \neg \rho(\overline{\Gamma \rho^{\perp}})$. $\rho(\overline{\Gamma \rho^{\perp}})$: «Меня легче опровергнуть, чем доказать»

Формальное доказательство

Неполнота варианта теории, изложенной выше, формально доказана на Coq, Russell O'Connor, 2005:

“My proof, excluding standard libraries and the library for Pocklington’s criterion, consists of 46 source files, 7 036 lines of specifications, 37 906 lines of proof, and 1 267 747 total characters. The size of the gzipped tarball (gzip -9) of all the source files is 146 008 bytes, which is an estimate of the information content of my proof.”

```
Theorem Incompleteness : forall T : System,  
  Included Formula NN T ->  
  RepresentsInSelf T ->  
  DecidableSet Formula T ->  
  exists f : Formula,  
    Sentence f /\ (SysPrf T f /\ SysPrf T (notH f) ->  
    Inconsistent LNN T).
```

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \Gamma \xi \Box, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \Gamma \xi \Box, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \Gamma \xi \neg, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0 \neg})$

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$ при любом α .

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение *Proof*: $\langle \Gamma \xi \neg, p \rangle \in \text{Proof}$, если p — гёделев номер доказательства ξ .

Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p. \psi(x, p)$

Определение

Формулой *Consis* назовём формулу $\neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0 \neg})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики:
«если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$ ».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики:
«если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики:
«если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}}, p)$.
То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики:
«если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}}, p)$.
То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$, — и это можно
доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики:
«если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$ ». То есть, $\forall p. \neg \omega_1(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}}, p)$.
То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$, — и это можно
доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$. Однако если формальная арифметика
непротиворечива, то $\not\vdash \sigma(\overline{\Gamma \sigma^{\perp}})$.



Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis':

$$\begin{aligned}\pi'(x) &:= \exists p. \psi(x, p) \ \& \ \neg\psi(\overline{\Gamma 1 = 0^\top}, p) \\ \text{Consis}' &:= \pi'(\overline{\Gamma 1 = 0^\top})\end{aligned}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $\llbracket \pi'(x) \rrbracket = \llbracket \pi(x) \rrbracket$:
 - ▶ если $x \neq \overline{\Gamma 1 = 0^\top}$ и $\llbracket \psi(x, p) \rrbracket = И$, то $\llbracket \psi(\overline{\Gamma 1 = 0^\top}, p) \rrbracket = Л$
 - ▶ если $x = \overline{\Gamma 1 = 0^\top}$, то $\psi(\overline{\Gamma 1 = 0^\top}, p) = Л$ при любом p .
2. Но $\vdash \text{Consis}'$.

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

Определение

Будем говорить, что формула ψ , выражающая отношение *Proof*, формула π и формула *Consis* соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы α :

1. $\vdash \alpha \text{ влечет} \vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha^\perp})$
2. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha^\perp}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\alpha^\perp})^\perp})$
3. $\vdash \pi(\overline{\Gamma\alpha \rightarrow \beta^\perp}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\alpha^\perp}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\beta^\perp})$

Первая теорема Гёделя о неполноте ещё раз

Лемма

Лемма об автоссылках. Для любой формулы $\phi(x_1)$ можно построить такую замкнутую формулу α (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что $\vdash \phi(\overline{\Gamma\alpha}) \leftrightarrow \alpha$.

Теорема

Существует такая замкнутая формула γ , что если Ф.А. непротиворечива, то $\not\vdash \gamma$, а если Ф.А. ω -непротиворечива, то и $\not\vdash \neg\gamma$.

Доказательство.

Рассмотрим $\phi(x_1) \equiv \neg\pi(x_1)$. Тогда по лемме об автоссылках существует γ , что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$.

- ▶ Предположим, что $\vdash \gamma$. Тогда $\vdash \gamma \rightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma})$, то есть $\not\vdash \gamma$
- ▶ Предположим, что $\vdash \neg\gamma$. Тогда $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma})$, то есть $\vdash \exists p. \psi(\overline{\Gamma\gamma}, p)$. Тогда по ω -непротиворечивости найдётся p , что $\vdash \psi(\overline{\Gamma\gamma}, \overline{p})$, то есть $\vdash \gamma$.



Доказательство второй теоремы Гёделя

1. Пусть γ таково, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp})$.
2. Покажем $\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0^\perp})$.
 - 2.1 По условию 2, $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp})^\perp})$. По теореме о дедукции $\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp})^\perp})$;
 - 2.2 Так как $\vdash \pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \rightarrow \neg\gamma$, то по условию 1 $\vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \rightarrow \neg\gamma^\perp})$;
 - 2.3 По условию 3, $\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \rightarrow \neg\gamma^\perp}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp})^\perp}) \rightarrow \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma^\perp})$;
 - 2.4 Таким образом, $\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \vdash \pi(\overline{\Gamma\neg\gamma^\perp})$;
 - 2.5 Однако $\vdash \gamma \rightarrow \neg\gamma \rightarrow 1 = 0$. Условие 3 (применить два раза) даст $\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp}) \vdash \pi(\overline{\Gamma 1 = 0^\perp})$.
3. $\vdash \neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0^\perp}) \rightarrow \neg\pi(\overline{\Gamma\gamma^\perp})$ (т. о дедукции, контрапозиция).
4. $\vdash \neg\pi(\overline{\Gamma 1 = 0^\perp}) \rightarrow \gamma$ (определение γ).

Расширение на другие теории

Определение

Теория S — расширение теории T , если из $\vdash_T \alpha$ следует $\vdash_S \alpha$

Определение

Теория S — рекурсивно-аксиоматизируемая, если найдётся теория S' с тем же языком, что:

1. $\vdash_S \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{S'} \alpha$;
2. Множество аксиом теории S' рекурсивно.

Теорема

Если S — непротиворечивое рекурсивно-аксиоматизируемое расширение формальной арифметики, то в ней можно доказать аналоги теорем Гёделя о неполноте арифметики.

Сужение: система Робинсона

Определение

Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы 0 , $(+)$ и (\cdot) , нелогический предикатный символ $(=)$ и следующие нелогические аксиомы, называется системой Робинсона.

$$a = a$$

$$a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c$$

$$a' = b' \rightarrow a = b$$

$$a = b \rightarrow a + c = b + c \ \& \ c + a = c + b$$

$$\neg a = 0 \rightarrow \exists b. a = b'$$

$$a + b' = (a + b)'$$

$$a \cdot b' = a \cdot b + a$$

$$a = b \rightarrow b = a$$

$$a = b \rightarrow a' = b'$$

$$\neg 0 = a'$$

$$a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c \ \& \ c \cdot a = c \cdot b$$

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Система Робинсона неполна: аксиомы — в точности утверждения, необходимые для доказательства теорем Гёделя. Система Робинсона не имеет схем аксиом.

Арифметика Пресбургера

Определение

Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы $0, 1, (+)$, нелогический предикатный символ $(=)$ и следующие нелогические аксиомы, называется арифметикой Пресбургера.

$$\neg(0 = x + 1)$$

$$x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$$

$$x + 0 = x$$

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

$$(\varphi(0) \ \& \ \forall x. \varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall y. \varphi(y)$$

Теорема

Арифметика Пресбургера разрешима и синтаксически и семантически полна.

Невыразимость доказуемости

Определение

$$\Delta_S = \{\Gamma\alpha^\neg \mid \vdash_S \alpha\}; I_S = \{\Gamma\alpha^\neg \mid [\![\alpha]\!]_S = I\}$$

Лемма

Пусть $D(\Gamma\alpha^\neg) = \Gamma\alpha(\overline{\Gamma\alpha^\neg})^\neg$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. S непротиворечиво и D представима в нём, то Δ_S невыразимо в S

Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет D , и пусть $\sigma(x)$ выражает множество Δ_S (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg\sigma(p)$. Верно ли, что $\Gamma\alpha^\neg \in \Delta_S$?

