

# Невыразимость доказуемости

## Определение

$$D_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; I_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = I\}$$

## Лемма

*Пусть  $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$  для любой формулы  $\alpha(x)$ . Тогда  $D$  представима в формальной арифметике.*

## Теорема

*Если расширение Ф.А.  $S$  непротиворечиво и  $D$  представима в нём, то  $D_S$  невыразимо в  $S$*

## Доказательство.

Пусть  $\delta(a, p)$  представляет  $D$ , и пусть  $\sigma(x)$  выражает множество  $D_S$  (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть  $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$ . Верно ли, что  $\ulcorner \alpha \urcorner \in D_S$ ?



# Неразрешимость формальной арифметики

## Теорема

*Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима*

## Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция  $f(x)$ :  $f(x) = 1$  тогда и только тогда, когда  $x \in \text{Дф.А.}$ . То есть, Дф.А. выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, Дф.А. невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. □

# Теорема Тарского

## Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы  $\varphi(x)$ , что  $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = I$  (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда  $x \in I_{\text{ФА}}$ .*

### Доказательство.

Пусть теория  $\mathcal{S}$  — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что  $D_{\mathcal{S}} = I_{\mathcal{S}} = I_{\text{ФА}}$ . То есть  $I_{\text{ФА}}$  невыразимо в  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $\varphi$  таково, что  $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = I$  при  $x \in I$ . Тогда  $\vdash \varphi(\bar{x})$ , если  $x \in I$  и  $\vdash \neg \varphi(\bar{x})$ , если  $x \notin I$ .

Тогда  $I$  выразимо в  $\mathcal{S}$ . Противоречие.



# Теорема Тарского

## Теорема (Тарского о невыразимости истины)

*Не существует формулы  $\varphi(x)$ , что  $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = I$  (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда  $x \in I_{\text{ФА}}$ .*

## Доказательство.

Пусть теория  $\mathcal{S}$  — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что  $D_{\mathcal{S}} = I_{\mathcal{S}} = I_{\text{ФА}}$ . То есть  $I_{\text{ФА}}$  невыразимо в  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $\varphi$  таково, что  $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = I$  при  $x \in I$ . Тогда  $\vdash \varphi(\bar{x})$ , если  $x \in I$  и  $\vdash \neg \varphi(\bar{x})$ , если  $x \notin I$ .

Тогда  $I$  выразимо в  $\mathcal{S}$ . Противоречие. □

Однако, если взять  $D = \mathbb{R}$ , истина становится выразима (алгоритм Тарского).

# Теория множеств

# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$

# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела:  
 $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X?$



# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела:  
 $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X?$
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?

# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела:  
 $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X?$
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.

# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела:  
 $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X?$
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

# Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции  $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела:  
 $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X?$
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

## Определение

*Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двухместным функциональным символом  $\in$ , и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.*

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

## Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

## Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A = B \equiv A \subseteq B \& B \subseteq A$$



# Аксиоматика ZF, равенство

## Определение

*Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.*

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

## Определение

*Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей*

## Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A = B \equiv A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A$$

## Определение

*Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.  $\forall x. \forall y. \forall z. x = y \ \& \ x \in z \rightarrow y \in z.$*

# Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

## Определение

*Аксиома пустого. Существует пустое множество  $\emptyset$ .*

$$\exists s. \forall t. \neg t \in s$$

# Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

## Определение

*Аксиома пустого. Существует пустое множество  $\emptyset$ .*

$$\exists s. \forall t. \neg t \in s$$

## Определение

*Аксиома пары. Существует  $\{a, b\}$ . Каковы бы ни были два множества  $a$  и  $b$ , существует множество, состоящее в точности из них.*

$$\forall a. \forall b. \exists s. a \in s \ \& \ b \in s \ \& \ \forall c. c \in s \rightarrow c = a \vee c = b$$

# Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

## Определение

*Аксиома объединения: существует  $\cup x$ . Для любого непустого множества  $x$  найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы  $x$ .*

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x$$

## Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

### Определение

*Аксиома объединения: существует  $\cup x$ . Для любого непустого множества  $x$  найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы  $x$ .*

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x$$

### Определение

*Аксиома степени: существует  $\mathcal{P}(x)$ . Каково бы ни было множество  $x$ , существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества  $x$ .*

$$\forall x. \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

# Аксиоматика ZF. Схема аксиом выделения

## Определение

*Схема аксиом выделения: существует  $\{t \in x \mid \varphi(t)\}$ . Для любого множества  $x$  и любой формулы от одного аргумента  $\varphi(y)$  ( $b$  не входит свободно в  $\varphi$ ), найдется  $b$ , в которое входят те и только те элементы из множества  $x$ , что  $\varphi(y)$  истинно.*

$$\forall x. \exists b. \forall y. y \in b \leftrightarrow (y \in x \ \& \ \varphi(y))$$

# Немного теорем

## Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

# Немного теорем

## Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

## Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$





# Немного теорем

## Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

## Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



## Теорема

*Пустое множество единственно.*

# Немного теорем

## Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

## Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



## Теорема

*Пустое множество единственно.*

## Доказательство.

Пусть  $\forall p. \neg p \in s$  и  $\forall p. \neg p \in t$ . Тогда  $s \subseteq t$  и  $t \subseteq s$ .



# Немного теорем

## Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

## Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



## Теорема

*Пустое множество единственно.*

## Доказательство.

Пусть  $\forall p. \neg p \in s$  и  $\forall p. \neg p \in t$ . Тогда  $s \subseteq t$  и  $t \subseteq s$ .



## Теорема

*Для двух множеств  $s$  и  $t$  существует множество, являющееся их пересечением.*

# Немного теорем

## Теорема

*Для любого множества  $X$  существует множество  $\{X\}$ , содержащее в точности  $X$ .*

## Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары:  $\{X, X\}$



## Теорема

*Пустое множество единственно.*

## Доказательство.

Пусть  $\forall p. \neg p \in s$  и  $\forall p. \neg p \in t$ . Тогда  $s \subseteq t$  и  $t \subseteq s$ .



## Теорема

*Для двух множеств  $s$  и  $t$  существует множество, являющееся их пересечением.*

## Доказательство.

$s \cap t = \{x \in s \mid x \in t\}$



# Упорядоченная пара

## Определение

*Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств  $a$  и  $b$  назовём  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ , или  $\langle a, b \rangle$*

## Теорема

*Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.*

## Доказательство.

Применить аксиому пары, теорему о существовании  $\{X\}$ , аксиому пары.



## Теорема

*$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$  тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .*

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:  $x' \equiv x \cup \{x\}$*

## Определение

*Аксиома бесконечности. Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$*

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset$



# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}$

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

# Аксиома бесконечности

## Определение

Инкремент:  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

Аксиома бесконечности. Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

(неформально)  $\omega = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots\}$ .

# Аксиома бесконечности

## Определение

*Инкремент:*  $x' \equiv x \cup \{x\}$

## Определение

*Аксиома бесконечности.* Существует  $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В  $N$  есть всевозможные множества вида  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

(неформально)  $\omega = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots\}$ . Тогда  $N_1 = \omega \cup \{\omega, \omega', \omega'', \dots\}$  подходит.

# Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

## Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).

# Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

## Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный*: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. *Линейный*: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .

# Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

## Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).*
2. *Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .*
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*



# Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

## Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный*: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).
2. *Линейный*: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .
3. *Полный*: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

## Пример

$\mathbb{Z}$  не вполне упорядочено: в  $\mathbb{Z}$  нет наименьшего.

# Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

## Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).*
2. *Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .*
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*

## Пример

$\mathbb{Z}$  не вполне упорядочено: в  $\mathbb{Z}$  нет наименьшего.

## Пример

Отрезок  $[0, 1]$  не вполне упорядочен:  $(0, 1)$  не имеет наименьшего.

# Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

## Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность ( $a \preceq a$ ), антисимметричность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$ ), транзитивность ( $a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$ ).*
2. *Линейный: частичный +  $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$ .*
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*

## Пример

$\mathbb{Z}$  не вполне упорядочено: в  $\mathbb{Z}$  нет наименьшего.

## Пример

Отрезок  $[0, 1]$  не вполне упорядочен:  $(0, 1)$  не имеет наименьшего.

## Пример

$\mathbb{N}$  вполне упорядочено.

# Отношения строгого и нестрогого порядка

Для отношения строгого (нестрогого) порядка легко найти парное отношение нестрогого (строгого) порядка.

Строгий порядок	Нестрогий порядок
$a < b$	$a < b \vee a = b$
$a \leq b \ \& \ a \neq b$	$a \leq b$
$A \in B$	$A \in B \vee A = B$

## Определение (полный строгий порядок)

*А вполне упорядочено отношением ( $<$ ), если:*

- 1. при всех  $a, b \in A$  выполнено либо  $a < b$ , либо  $b < a$ , либо  $a = b$ ;*
- 2. в любом  $S \subseteq A$  и  $S \neq \emptyset$  найдётся  $n \in S$ , что  $\forall x. x \in S \rightarrow n = x \vee n < x$ .*

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

*Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .*

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset$ ,

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset'$ ,



# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

## Определение

Предельный ординал: такой  $x$ , что  $x \neq \emptyset$  и нет  $y : y' = x$

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

## Определение

Предельный ординал: такой  $x$ , что  $x \neq \emptyset$  и нет  $y : y' = x$

## Определение

Ординал  $x$  конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.

# Ординалы (порядковые числа)

## Определение

Транзитивное множество  $X$ :  $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$ .

## Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением ( $\in$ ) транзитивное множество.

## Пример

Ординалы:  $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

## Определение

Предельный ординал: такой  $x$ , что  $x \neq \emptyset$  и нет  $y : y' = x$

## Определение

Ординал  $x$  конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.

## Теорема

Если  $x, y$  — ординалы, то  $x = y$ , или  $x \in y$ , или  $y \in x$ .

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — *наименьший предельный ординал.*

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — *наименьший предельный ординал.*

## Теорема

$\omega$  *существует.*

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — *наименьший предельный ординал.*

## Теорема

$\omega$  *существует.*

## Доказательство.

Пусть  $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$ . Тогда:

- ▶ меньше  $\omega$  предельных нет: если  $\theta$  таков, что  $\theta \in \omega$ , тогда  $\theta$  конечен.

# Предельные ординалы, $\omega$

## Определение

$\omega$  — наименьший предельный ординал.

## Теорема

$\omega$  существует.

## Доказательство.

Пусть  $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$ . Тогда:

- ▶ меньше  $\omega$  предельных нет: если  $\theta$  таков, что  $\theta \in \omega$ , тогда  $\theta$  конечен.
- ▶  $\omega$  предельный: Пусть  $\theta$  таков, что  $\theta' = \omega$ . Тогда  $\theta$  конечен и  $\theta'$  тоже конечен.



## Пример

$\omega'$  — тоже ординал.



# Порядковый тип

## Определение (неформальное определение)

*Порядковый тип множества — некоторое свойство, общее для всех множеств, изоморфных относительно биективных отображений, сохраняющих порядок.*

## Определение

*Порядковый тип вполне упорядоченного множества  $\langle S, (\preceq) \rangle$  — ординал  $A$ , для которого есть биективное отображение  $f : S \rightarrow A$ , сохраняющее порядок:  $a \preceq b$  тогда и только тогда, когда  $f(a) \leq f(b)$*

## Пример

*Множество  $\mathbb{Z}$  не имеет порядкового типа (в смысле определения через ординалы): оно не вполне упорядочено.*

# Операции над ординалами

## Определение

$a + b$  — порядковый тип  $a \uplus b$  (отмеченного объединения), причём  $x_a < y_b$  при любых  $x \in a$  и  $y \in b$

## Определение

$a \cdot b$  — порядковый тип  $a \times b$ , произведение упорядочено лексикографически:  $\langle x_1, y_1 \rangle < \langle x_2, y_2 \rangle$ , если  $x_1 < x_2$  или  $x_1 = x_2$  и  $y_1 < y_2$ .

## Пример

$\bar{3} + \bar{4}$ : порядковый тип множества  $\{0_a, 1_a, 2_a, 0_b, 1_b, 2_b, 3_b\}$ , то есть  $\bar{7}$

$\omega \cdot \omega$ : порядковый тип всех натуральных точек плоскости,

$\{\langle 0, 0 \rangle, \dots, \langle 0, 100 \rangle, \dots, \langle 100, 0 \rangle, \dots\}$

# Операции над ординалами — как вычислять

## Определение

*upb*  $x$  — верхняя грань множества ординалов,  $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$ .

# Операции над ординалами — как вычислять

## Определение

*upb*  $x$  — верхняя грань множества ординалов,  $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$ .

## Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \} = \end{aligned}$$

# Операции над ординалами — как вычислять

## Определение

*upb*  $x$  — верхняя грань множества ординалов,  $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$ .

## Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \emptyset''' \end{aligned}$$

# Операции над ординалами — как вычислять

## Определение

*upb*  $x$  — верхняя грань множества ординалов,  $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$ .

## Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \emptyset''' \end{aligned}$$

## Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\};$$

# Операции над ординалами — как вычислять

## Определение

*upb*  $x$  — верхняя грань множества ординалов,  $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$ .

## Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \emptyset''' \end{aligned}$$

## Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}; 1 + \omega = upb\ \{1 + \emptyset, 1 + 1, 1 + 2, \dots\}$$

# Операции над ординалами — как вычислять

## Определение

*upb*  $x$  — верхняя грань множества ординалов,  $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$ .

## Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \emptyset''' \end{aligned}$$

## Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}; \quad 1 + \omega = upb\ \{1 + \emptyset, 1 + 1, 1 + 2, \dots\} = \omega$$



# Ещё операции над ординалами

## Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

# Ещё операции над ординалами

## Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

# Ещё операции над ординалами

## Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

## Пример

$$\omega \cdot \omega = \text{upb } \{\omega \cdot 0, \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\} = \text{upb } \{0, \omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$$

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью:  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}_0$ .*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью:  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}_0$ .  $1 + \omega = \omega$ .*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью:  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}_0$ .  $1 + \omega = \omega$ .*
- ▶ *Добавить элемент после бесконечности  $(+\infty)$ .*

# Ординалы (порядковые числа) и порядок

## Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью:  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}_0$ .  $1 + \omega = \omega$ .*
- ▶ *Добавить элемент после бесконечности  $(+\infty)$ .  $\omega + 1 \neq \omega$*