Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$*.* $1 + \omega = \omega$*.*
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$*.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2.

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2*.*

$$\langle 3, 5\rangle < \langle 4, 3\rangle \qquad \omega \cdot 3 + 5 < \omega \cdot 4 + 3.$$

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2*.*

$$\langle 3, 5\rangle < \langle 4, 3\rangle \qquad \omega \cdot 3 + 5 < \omega \cdot 4 + 3.$$

Пример

Списки натуральных чисел — порядковый тип ω^ω*.*

$$\langle 3, 1, 4, 1, 5, 9\rangle \qquad \omega^5 \cdot 3 + \omega^4 \cdot 1 + \omega^3 \cdot 4 + \omega^2 \cdot 1 + \omega^1 \cdot 5 + 9$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \mathbin{\&} z \in x \mathbin{\&} \neg y = z) \to \neg\exists t.t \in y \mathbin{\&} t \in z$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \,\&\, z \in x \,\&\, \neg y = z) \rightarrow \neg\exists t.t \in y \,\&\, t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y.\forall z.(y \in x \,\&\, z \in x \,\&\, \neg y = z) \to \neg\exists t.t \in y \,\&\, t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1,2\},\{\to\},\{\alpha,\beta,\gamma\}\}$
Не дизъюнктное: $\{\{1,2\},\{\to\},\{\alpha,\beta,\gamma,1\}\}$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b, что:

- *b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе*
- *b содержит элементы только из $\cup a$.*

$$\forall b . b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y . y \in a \to \exists! x . x \in y \,\&\, x \in b)$$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b, что:

- *b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе*
- *b содержит элементы только из $\cup a$.*

$$\forall b. b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y. y \in a \rightarrow \exists! x. x \in y \,\&\, x \in b)$$

Пример

$\times\{\{\triangle, \square\}, \{1, 2, 3\}\} = \{\{\triangle, 1\}, \{\triangle, 2\}, \{\triangle, 3\}, \{\square, 1\}, \{\square, 2\}, \{\square, 3\}\}$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить,

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t.Dj(t) \to (\forall x.x \in t \to \exists p.p \in x) \to (\exists p.p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Теорема

Теорема Диаконеску: ZFC поверх интуиционистского исчисления предикатов содержит правило исключённого третьего.

Аксиома фундирования

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x.x = \varnothing \vee \exists y.y \in x \mathbin{\&} \forall z.z \in x \rightarrow z \notin y$$

Иными словами, в каждом множестве есть элемент, минимальный по отношению $(\in)$.
Идея Рассела: каждому множеству припишем *тип* (тип пустого 0, тип множеств 1, тип множеств множеств 2 и т.п.). Тогда конструкция невозможна: $\{x \mid x \in x\}$.
Аксиома фундирования позволяет определить функцию ранга:

$$rk(x) = \text{upb}\,\{rk(y) \mid y \in x\}$$

.

Схема аксиом подстановки

Определение

Схема аксиом подстановки. Пусть задана некоторая функция f, представимая в исчислении предикатов: то есть задана некоторая формула ϕ, такая, что $f(x) = y$ тогда и только тогда, когда $\phi(x, y)\ \&\ \exists! z.\phi(x, z)$. Тогда для любого множества S существует множество f(S) — образ множества S при отображении f.

$$\forall s.(\forall x.\forall y_1.\forall y_2.x \in s \& \phi(x, y_1) \& \phi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow (\exists t.\forall y.y \in t \leftrightarrow \exists x.x \in s \& \phi(x, y))$$