Теоремы о классическом исчислении высказываний.

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, какова бы ни была α*, имеем* $\vdash \alpha$ *влечёт* $\models \alpha$*.*

Определение (полнота теории)

Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, какова бы ни была α*,* $\models \alpha$ *влечёт* $\vdash \alpha$*.*

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

Каковы бы ни были Γ, α *и* β*:* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

Каковы бы ни были Γ*,* α *и* β*:* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем Γ, α, β.
Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

Каковы бы ни были Γ*,* α *и* β*:* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем Γ, α, β. Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

Каковы бы ни были Γ, α *и* β*:* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Фиксируем Γ, α, β. Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \to \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n$+1$, n

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \to \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n$+1$, n

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \varnothing$, $\alpha := A$

$$\delta_1 := A \to B \to A$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \varnothing$, $\alpha := A$

$$\delta_1 := A \rightarrow B \rightarrow A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$\alpha \rightarrow \delta_1 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow A)$$

Последовательности, странная нумерация

Определение (конечная последовательность)

Функция $\delta : 1 \ldots n \to \mathcal{F}$

Определение (конечная последовательность, индексированная дробными числами)

Функция $\zeta : I \to \mathcal{F}$*, где* $I \subset \mathbb{Q}$ *и* I *конечно.*

Пример (странный мотивационный пример: язык Фокал)

Программа	*Вывод*

`10.1     t n,!`
`10.15    s n = n+1`
`10.17    i (n-`
`3) 10.1,11.0,11.0`
`11.0     t "That's all"`
	`=      0.0000`
	`=      1.0000`
	`=      2.0000`
	`That's all`

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \to \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \to \delta_n$.

- База $(n = 1)$: частный случай перехода (без М.Р.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$.
  Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:
  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
  2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \delta_n$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \to \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \to \delta_n$.

- База $(n = 1)$: частный случай перехода (без М.Р.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$.
  Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:
  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
  2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
  3. δ_{n+1} — Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_{n+1}$.

  В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.

$\square$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \to \delta_n$	
	$\alpha \to \delta_{n+1}$	δ_{n+1} — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
$(n+0.3)$	$\delta_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n+0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n+1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	M.P. $n+0.6$, $n+0.3$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай $\delta_{n+1} \equiv \alpha$

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
$(n+0.2)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n+0.4)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n+0.6)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	M.P. $n+0.2$, $n+0.4$
$(n+0.8)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	Сх. акс. 1
$(n+1)$	$\alpha \to \alpha$	M.P. $n+0.8$, $n+0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай Modus Ponens

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \to \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}$	
	...	
$(n+0.3)$	$(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
$(n+0.6)$	$(\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	M.P. j, $n+0.3$
$(n+1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	M.P. k, $n+0.6$

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α *и* β*, справедливо, что* $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β, справедливо, что $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Лемма (правило исключённого третьего)

Какова бы ни была формула α, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Лемма (об исключении допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ *и* $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. *Тогда также справедливо* $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше. $\square$

Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$.

Специальное обозначение

Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $[\![\alpha]\!] = x$*.*
Тогда условным отрицанием формулы α *назовём следующую формулу* $(\!|\alpha|\!)$*:*

$$(\!|\alpha|\!) = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg\alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$(\!|\neg X|\!)^{X:=\text{Л}} = \neg X \qquad (\!|\neg X|\!)^{X:=\text{И}} = \neg\neg X$$

Также, если $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, то за $(\!|\Gamma|\!)$ обозначим $(\!|\gamma_1|\!), (\!|\gamma_2|\!), \ldots (\!|\gamma_n|\!)$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \to B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \to B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \to B$

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \rightarrow B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$(\!|A|\!), (\!|B|\!) \vdash (\!|A \rightarrow B|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:
$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$*, то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:
$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$
2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:
$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:
$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$
2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:
$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$
3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \,\&\, \psi) \\
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \vee \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \to \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi & \vdash & \neg\neg\varphi \\
\neg\varphi & \vdash & \neg\varphi
\end{array}$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ *— все переменные, которые используются в формуле* α*. И пусть задана некоторая оценка переменных.*
Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ *— все переменные, которые используются в формуле* α. *И пусть задана некоторая оценка переменных.*
Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ *— все переменные, которые используются в формуле* α. *И пусть задана некоторая оценка переменных.*
Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$
  Тогда построим вывод:

$(1) \dots (n)$	$(\!|\varphi|\!)$	индукционное предположение
$(n+1) \dots (k)$	$(\!|\psi|\!)$	индукционное предположение
$(k+1) \dots (l)$	$(\!|\varphi \star \psi|\!)$	лемма о связках: $(\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\psi|\!)$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы

$\square$

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$*, тогда* $\vdash \alpha$.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, *тогда* $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных *n*.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$*, тогда* $\vdash \alpha$*.*

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- Переход: пусть $(\!|X_1, X_2, \dots X_{n+1}|\!) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), X_{n+1} \vdash \alpha \qquad (\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), \neg X_{n+1} \vdash \alpha$$

  По лемме об исключении допущения тогда

$$(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$$

При этом, $(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных $X_1, \dots X_n$. Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению. $\square$

Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.
Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.
Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.

Интуиционистская логика

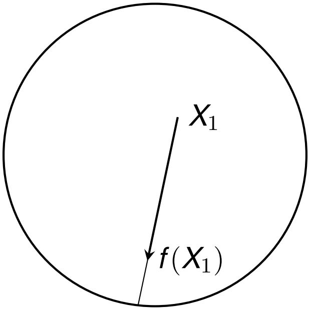
Доказательства чистого существования

Теорема (Брауэра о неподвижной точке)

Любое непрерывное отображение f шара в $\mathbb{R}^n$ на себя имеет неподвижную точку

Доказательство.

Не существует непрерывного отображения шара на границу (без доказательства), однако:



Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

- 2^5, 3^3, 7^{10}, $\sqrt{2}^2$ — рациональны;
- $2^{\sqrt{2}}$, e^{π} — иррациональны (как это доказать?);

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

Доказательство.

Рассмотрим $a = b = \sqrt{2}$ и рассмотрим a^b. Возможны два варианта:

1. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рационально;
2. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррационально; отлично, тогда возьмём $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и получим

$$a_1^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$\square$

Интуиционизм

“Over de Grondslagen der Wiskunde” (Брауэр, 1907 г.)
Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \,\&\, \beta$ построено, если построены α и β

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
- $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в BHK-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- B — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- C — во 2 семестре ровно 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- B — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- C — во 2 семестре ровно 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ — надо посмотреть в окно.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- B — 13.09.2025 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- C — во 2 семестре ровно 3 человека из группы 3239 получили «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ — надо посмотреть в окно.
- Формальная импликация $A \to B$ места не имеет (причинно-следственной связи нет).

Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$\text{(10)} \quad \neg\neg\alpha \to \alpha$$

заменена на

$$\text{(10и)} \quad \alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода: $$\dfrac{\text{посылка 1} \qquad \text{посылка 2} \qquad \dots}{\text{заключение}} \ (\text{аннотация})$$
- Аксиома: $$\dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \ (\text{акс.})$$
- Правила введения связок: $$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \dfrac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}$$
- Правила удаления связок: $$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \qquad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \qquad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$ $$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$$
- Пример доказательства: $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ (\text{акс.})}{A \,\&\, B \vdash B}\ (\text{удал}\&) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ (\text{акс.})}{A \,\&\, B \vdash A}\ (\text{удал}\&)}{A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A}\ (\text{введ}\&)$$

Связь с продемонстрированным ранее гильбертовским вариантом КИВ

- Немного другой предметный язык: гипотезы включены в формулу (соответственно, в натуральном выводе $\vdash$ есть часть предметного языка!), вместо одноместного $\neg$ нульместный $\perp$, можно рассмотреть $|\alpha|_{\text{г}}$ и $|\alpha|_{\text{н}}$.
- Для исключения разночтений, будем писать индексы снизу (метаязык): $\vdash_{\text{и}} \alpha$, $\vdash_{\text{к}} \alpha$.
- Классический нормальный вывод получится при замене “принципа взрыва” на “снятие двойного отрицания”:

$$\frac{\Gamma \vdash (A \to \perp) \to \perp}{\Gamma \vdash A}$$

- Можно показать эквивалентность при помощи индукции:
  - $\Gamma \vdash_{\text{ги}} \alpha$ влечёт выводимость $|\Gamma|_{\text{н}} \vdash_{\text{ни}} |\alpha|_{\text{н}}$
  - Выводимость $\Gamma \vdash_{\text{ни}} \alpha$ влечёт $|\Gamma|_{\text{ги}} \vdash_{\text{г}} |\alpha|_{\text{ги}}$.

Немного об общей топологии.

Топологическое пространство

Определение

Топологическим пространством называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$*, где* X *— некоторое множество, а* $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$*, причём:*

1. $\varnothing, X \in \Omega$
2. *если* $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$*, то* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \Omega$*;*
3. *если* $\{A_\alpha\}$ *— семейство множеств из* Ω*, то и* $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$*.*

Множество Ω *называется топологией. Элементы* Ω *называются открытыми множествами.*

Определение

Внутренность множества A° *— наибольшее* T*, что* $T \in \Omega$ *и* $T \subseteq A$*.*

Топологические пространства как модель ИИВ

Теорема

Если $\langle X, \Omega \rangle$ *— некоторое топологическое пространство, то следующий способ оценки высказываний даёт корректную модель ИИВ:* $V = \Omega$, *и* $= X$ *и*

$$\llbracket \alpha \,\&\, \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$$

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = (\mathbf{c}\llbracket \alpha \rrbracket)^{\circ}$$

$$\llbracket \alpha \to \beta \rrbracket = (\mathbf{c}\llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket)^{\circ}$$

Определение

$\models \alpha$ *в топологических моделях, если при всех* $\langle X, \Omega \rangle$ *имеет место* $\llbracket \alpha \rrbracket = X$*.*

Теорема

Полнота топологических моделей ИИВ: $\models \alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{и} \alpha$*.*