Математическая логика

КТ ИТМО, осень 2025 года

Что такое правильное рассуждение?

- Органон, Аристотель: 384-322 гг. до н.э.
- Средневековье («фигуры», терминология).
- Например, категорический силлогизм:

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

- Это не формальная логика — сделать неформальный текст на естественном языке понятным.

Пример

(Приводится по учебнику Ивлева Ю.В. «Логика», 2006 год) Определите состав, фигуру, модус силлогизма и проверьте его.

Некоторые учащиеся являются троечниками. Все студенты — учащиеся. Следовательно, некоторые студенты — троечники.

Математический анализ и его формализация

- Ньютон, Лейбниц — неформальная идея (1664+).
  (Критика: Джордж Беркли. Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику. Опыт новой теории зрения)
- Коши — последовательности вместо бесконечно-малых, пределы
- Вейерштрасс — вещественные числа
- Кантор — теория множеств (1875), формализующая вещественные числа.
- Парадокс Рассела (1901). «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор» (Давид Гильберт).

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$
то что можно сказать про
$$X \in X$$

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$
то что можно сказать про
$$X \in X$$
-
  - Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$
то что можно сказать про
$$X \in X$$
-
    - Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
    - Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$
то что можно сказать про
$$X \in X$$
-
    - Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
    - Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X
- Не совсем парадокс: откуда мы знаем, что X существует?

Парадокс брадобрея, парадокс Рассела

- На некотором острове живёт брадобрей, который бреет тех и только тех, кто не бреется сам. Бреется ли сам брадобрей?
- Если
$$X = \{x \mid x \notin x\}$$
то что можно сказать про
$$X \in X$$
-
    - Пусть $X \in X$. Тогда $X : X \notin X$
    - Пусть $X \notin X$. Тогда X должен принадлежать X
- Не совсем парадокс: откуда мы знаем, что X существует? Не совсем разрешение парадокса: а откуда мы знаем, что вещественные числа существуют?

Программа Гильберта

- Программа Гильберта: полностью формализовать математику, доказать непротиворечивость: Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung”, Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität, 1: 157–177. Series of talks given at the University of Hamburg, July 25–27, 1921
  - формализация всей математики;
  - доказательство полноты формализации (все факты могут быть доказаны в формализации);
  - непротиворечивость (невозможно вывести противоречие);
  - консервативность (любое доказательство о реальных объектах может быть сформулировано без использования идеальных объектов);
  - разрешимость (существует алгоритм, проверяющий истинность любого математического факта).
- Теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики (1930) не дали реализовать её в полном объёме.
- В данном курсе мы будем следовать этой программе в некоторой степени, формализуя некоторые разделы математики — и изучая проблемы, которые возникают в связи с этой формализацией.

Общее о логических исчислениях

- Задание логического исчисления мы будем начинать с определения предметного языка. Мы всегда должны чётко отличать предметный и метаязыки:
    - Предметный язык — формальный язык, тексты на котором мы будем анализировать.
    - Метаязык (язык исследователя) — язык, с помощью которого мы анализируем предметный язык.
    - Например, при изучении программирования, предметный язык — собственно изучаемый язык программирования (скажем, Хаскель), языки исследователя — русский, английский, язык грамматик для задания языка, язык блоксхем и т.п.
- Для задания исчисления мы, помимо предметного языка, должны задать теорию моделей и теорию доказательств.
- Начнём с очень простой теории: классическое исчисление высказываний (гильбертовского типа).

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула).
Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула). Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула). Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула). Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$
  - Конъюнкция: $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула). Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$
  - Конъюнкция: $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$
  - Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула). Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$
  - Конъюнкция: $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \land \beta)$
  - Дизъюнкция: $(\alpha \lor \beta)$
  - Импликация: $(\alpha \to \beta)$ *или* $(\alpha \supset \beta)$

Классическое исчисление высказываний: предметный язык

Основой предметного языка КИВ является высказывание (иначе: формула). Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- Атомарное высказывание (пропозициональная переменная): A, B', C_{1234}
- Составное высказывание: если α и β — высказывания, то высказываниями являются:
  - Отрицание: $(\neg\alpha)$
  - Конъюнкция: $(\alpha \,\&\, \beta)$ *или* $(\alpha \wedge \beta)$
  - Дизъюнкция: $(\alpha \vee \beta)$
  - Импликация: $(\alpha \rightarrow \beta)$ *или* $(\alpha \supset \beta)$

Пример:

$$(((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow A))$$

Соглашения о записи (метаязык)

- Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- Метапеременные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

Соглашения о записи (метаязык)

- Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- Метапеременные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание

Соглашения о записи (метаязык)

- Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- Метапеременные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

  Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание

- Метапеременные для пропозициональных переменных:

$$X, Y_n, Z'$$

Соглашения о записи (метаязык)

- Для упрощения изложения давайте договоримся о некоторых сокращениях записи и метаязыковых конструкциях.
- Метапеременные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

  Если α — высказывание, то $(\neg\alpha)$ — высказывание

- Метапеременные для пропозициональных переменных:

$$X, Y_n, Z'$$

  Пусть дана пропозициональная переменная X, тогда $(X \mathbin{\&} (\neg X))$ — высказывание

Способы упростить запись

- Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация

Способы упростить запись

- Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- Ассоциативность: левая для конъюнкции и дизъюнкции, правая для импликации

Способы упростить запись

- Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- Ассоциативность: левая для конъюнкции и дизъюнкции, правая для импликации

Пример:

$$((((A \to B) \mathbin{\&} Q) \vee (((\neg B) \to B) \to C)) \vee (C \to (C \to A)))$$

можем записать так:

$$(A \to B) \mathbin{\&} Q \vee ((\neg B \to B) \to C) \vee (C \to C \to A)$$

Теория моделей: оценка высказываний

Чтобы задать оценку высказываний:

- Зафиксируем множество истинностных значений $V = \{И, Л\}$
- Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*) $f : \mathcal{P} \to V$ ($\mathcal{P}$ — множество пропозициональных переменных).
- Для удобства определим синтаксис для указания функции оценки переменных
$$[\![\alpha]\!]^{X_1:=v_1,\ \dots,\ X_n:=v_n}$$
- Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл
$$[\![A \,\&\, B \,\&\, (C \to C)]\!]^{A:=И,\ B:=[\![\neg A]\!]}$$
- Оценку выражений мы будем вести рекурсивно, а именно ...

Оценим высказывания рекурсивно

- Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

Оценим высказывания рекурсивно

- Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

- Отрицание

$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = \text{И} \\ \text{И}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

- Отрицание

$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} \text{Л}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = \text{И} \\ \text{И}, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Конъюнкция

$$[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

- Отрицание

$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} \textit{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = \textit{И} \\ \textit{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

- Конъюнкция

$$[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = \begin{cases} \textit{И}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \textit{И} \\ \textit{Л}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

- Дизъюнкция

$$[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} \textit{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \textit{Л} \\ \textit{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Оценим высказывания рекурсивно

- Переменные

$$[\![X]\!] = f(X) \qquad [\![X]\!]^{X:=a} = a$$

- Отрицание

$$[\![\neg\alpha]\!] = \begin{cases} \textit{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = \textit{И} \\ \textit{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

- Конъюнкция

$$[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = \begin{cases} \textit{И}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \textit{И} \\ \textit{Л}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

- Дизъюнкция

$$[\![\alpha \vee \beta]\!] = \begin{cases} \textit{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] = \textit{Л} \\ \textit{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

- Импликация

$$[\![\alpha \to \beta]\!] = \begin{cases} \textit{Л}, & \textit{если } [\![\alpha]\!] = \textit{И},\ [\![\beta]\!] = \textit{Л} \\ \textit{И}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \rightarrow A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A:

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=И} = И$$
$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=Л} = И$$

Тавтологии

Если α истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение $A \rightarrow A$ — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной A:

$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=И} = И$$
$$[\![A \rightarrow A]\!]^{A:=Л} = И$$

Выражение $A \rightarrow \neg A$ тавтологией не является:

$$[\![A \rightarrow \neg A]\!]^{A:=И} = Л$$

Ещё определения

- Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:
$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$$

Ещё определения

- Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:
$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$$
- Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.

Ещё определения

- Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:
$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

- Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.

Ещё определения

- Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:
$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$$

- Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
- Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метапеременными

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метапеременными

Пример

- $(A \to \alpha) \vee (\beta \to B)$

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метапеременными

Пример

- $(A \to \alpha) \vee (\beta \to B)$
- $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Теория доказательств. Схемы высказываний: определение

Определение (схема высказывания)

Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.

По-простому: схемы высказываний — высказывания с метапеременными

Пример

- $(A \to \alpha) \vee (\beta \to B)$
- $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
- $A \vee B \,\&\, A$

Схемы высказываний: определение

Определение

Будем говорить, что высказывание σ строится (иначе: задаётся) по схеме Ш, если существует такая замена метапеременных $ч_1$, $ч_2$, ..., $ч_n$ в схеме Ш на какие-либо выражения φ_1, φ_2, ..., φ_n, что после её проведения получается высказывание σ:

$$\sigma = Ш[ч_1 := \varphi_1][ч_2 := \varphi_2]...[ч_n := \varphi_n]$$

Схемы высказываний: примеры

Схема

$$A \to \alpha \vee B \vee \alpha$$

задаёт, к примеру, следующие высказывания:

- $A \to X \vee B \vee X$, при $\alpha := X$.
- $A \to (M \to N) \vee B \vee (M \to N)$, при $\alpha := M \to N$.

Схемы высказываний: примеры

Схема

$$A \to \alpha \vee B \vee \alpha$$

задаёт, к примеру, следующие высказывания:

- $A \to X \vee B \vee X$, при $\alpha := X$.
- $A \to (M \to N) \vee B \vee (M \to N)$, при $\alpha := M \to N$.

и НЕ задаёт следующие высказывания:

- $A \to X \vee B \vee Y$ — все вхождения α должны заменяться одинаково во всём выражении.
- $(A \to (M \to N) \vee B \vee M) \to N$ — структура скобок должна сохраняться.

Аксиомы исчисления высказываний

Определение

Назовём следующие схемы высказываний схемами аксиом исчисления высказываний:

(1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

(3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$

(4) $\alpha \& \beta \to \alpha$

(5) $\alpha \& \beta \to \beta$

(6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

(7) $\beta \to \alpha \vee \beta$

(8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

(9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

(10) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Все высказывания, которые задаются схемами аксиом, назовём аксиомами исчисления высказываний.

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Переход по следствию: «сейчас сентябрь; если сейчас сентябрь, то сейчас осень; следовательно, сейчас осень».

Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Переход по следствию: «сейчас сентябрь; если сейчас сентябрь, то сейчас осень; следовательно, сейчас осень».

Если имеет место α и $\alpha \to \beta$, то имеет место β.

$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$*,*

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$*, причём каждое* δ_i *либо:*

- *является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу* δ_i*, либо*

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$*, причём каждое* δ_i *либо:*

- *является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу* δ_i*, либо*
- *получается из* $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$ *по правилу Modus Ponens — существуют такие индексы* $j < i$ *и* $k < i$*, что* $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$*.*

Доказательство

Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- *является аксиомой — существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу δ_i, либо*
- *получается из $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$ по правилу Modus Ponens — существуют такие индексы $j < i$ и $k < i$, что $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$.*

Пример:

$$A \to (A \to A),$$
$$(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A),$$
$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A),$$
$$A \to ((A \to A) \to A),$$
$$A \to A$$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

(1) $A \to (A \to A)$ Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha, \beta := A]$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

(1) $A \to (A \to A)$ Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha, \beta := A]$

(2) $(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ Сх. акс. 2

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\ [\alpha, \gamma := A; \beta := A \to A]$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

(1) $A \to (A \to A)$ Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha, \beta := A]$

(2) $(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ Сх. акс. 2

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\ [\alpha, \gamma := A; \beta := A \to A]$

(3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ M.P. 1,2

$$\frac{A \to (A \to A) \quad (A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}{(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}$$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

(1) $A \to (A \to A)$ — Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha, \beta := A]$

(2) $(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ — Сх. акс. 2

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\ [\alpha, \gamma := A; \beta := A \to A]$

(3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ — M.P. 1,2

$$\frac{A \to (A \to A) \quad (A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}{(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}$$

(4) $A \to ((A \to A) \to A)$ — Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha := A, \beta := A \to A]$

Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

(1) $A \to (A \to A)$ — Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha, \beta := A]$

(2) $(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ — Сх. акс. 2

$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\ [\alpha, \gamma := A; \beta := A \to A]$

(3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ — M.P. 1,2

$$\frac{A \to (A \to A) \quad (A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}{(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}$$

(4) $A \to ((A \to A) \to A)$ — Сх. акс. 1

$\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha := A, \beta := A \to A]$

(5) $A \to A$ — M.P. 4,3

$$\frac{A \to ((A \to A) \to A) \quad (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)}{A \to A}$$

Дополнительные определения

Определение (доказательство формулы α)

— такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.
Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство.
Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Дополнительные определения

Определение (доказательство формулы α)

— такое доказательство (вывод) $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$.
Формула α доказуема (выводима), если существует её доказательство.
Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Определение (вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$)

— такая последовательность $\delta_1, \dots, \delta_n$, причём каждое δ_i либо:

- *является аксиомой;*
- *либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих;*
- *либо является одной из гипотез: существует $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.*

Формула α выводима из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, если существует её вывод.
Обозначение:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$$

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Определение (полнота теории)

Теория полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечёт $\vdash \alpha$.

Корректность исчисления высказываний

Лемма (корректность)

Если $\vdash \alpha$, *то* $\models \alpha$

Доказательство.

Индукция по длине вывода n. Для каждого высказывания δ_n из вывода разбор случаев:

1. Аксиома — убедиться, что все аксиомы общезначимы.
2. Modus Ponens j, k — убедиться, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_j \to \delta_n$, то $\models \delta_n$.

$\square$

Общезначимость схемы аксиом №9

Общезначимость схемы аксиом — истинность каждой аксиомы, задаваемой данной схемой, при любой оценке:

$$[\![(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha]\!] = \text{И}$$

Построим таблицу истинности формулы в зависимости от оценки α и β:

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	$(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j, $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j, $\delta_k = \delta_j \to \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \to \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $[\![\delta_j]\!] = \text{И}$ и $[\![\delta_j \to \delta_n]\!] = \text{И}$.

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j, $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \rightarrow \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $[\![\delta_j]\!] =$ И и $[\![\delta_j \rightarrow \delta_n]\!] =$ И.

Построим таблицу истинности для импликации:

$[\![\delta_j]\!]$	$[\![\delta_n]\!]$	$[\![\delta_j \rightarrow \delta_n]\!]$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j, $\delta_k = \delta_j \to \delta_n$, δ_n (причём $j < n$ и $k < n$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \to \delta_n$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $[\![\delta_j]\!] =$ И и $[\![\delta_j \to \delta_n]\!] =$ И.

Построим таблицу истинности для импликации:

$[\![\delta_j]\!]$	$[\![\delta_n]\!]$	$[\![\delta_j \to \delta_n]\!]$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Из таблицы видно, что $[\![\delta_n]\!] =$ Л только если $[\![\delta_j \to \delta_n]\!] =$ Л или $[\![\delta_j]\!] =$ Л. Значит, это невозможно, и $[\![\delta_n]\!] =$ И

Теорема о дедукции

Соглашение о записи (метаязык): будем большой греческой буквой (Γ, Δ, ...) обозначать набор гипотез.

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство у данной теоремы — конструктивное, то есть, если дан некоторый вывод $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \beta$ из гипотез Γ, α, то теорема предложит метод перестроения его в вывод $\eta_1, \dots, \eta_{k-1}, \alpha \to \beta$ из гипотез Γ.
Само доказательство будет приведено на следующей лекции.