Невыразимость доказуемости

Определение

$Д_\mathcal{S} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid \vdash_\mathcal{S} \alpha\}$; $И_\mathcal{S} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid [\![\alpha]\!]_\mathcal{S} = И\}$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. $\mathcal{S}$ непротиворечиво и D представима в нём, то $Д_\mathcal{S}$ невыразимо в $\mathcal{S}$

Доказательство.

Пусть $\delta(a,p)$ представляет D, и пусть $\sigma(x)$ выражает множество $Д_\mathcal{S}$ (рассматриваемое как одноместное отношение).
Пусть $\alpha(x) := \forall p.\delta(x,p) \to \neg\sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner\alpha\urcorner \in Д_\mathcal{S}$? $\square$

Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in Д_{Ф.А.}$. То есть, $Д_{Ф.А.}$ выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, $Д_{Ф.А.}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. $\square$

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(\overline{x})]\!] =$ И (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in$ И$_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что Д$_{\mathcal{S}}$ = И$_{\mathcal{S}}$ = И$_{ФА}$. То есть И$_{ФА}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.

Пусть φ таково, что $[\![\varphi(\overline{x})]\!] =$ И при $x \in$ И. Тогда $\vdash \varphi(\overline{x})$, если $x \in$ И и $\vdash \neg\varphi(\overline{x})$, если $x \notin$ И.

Тогда И выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. $\square$

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(\overline{x})]\!] =$ И (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in$ И$_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что Д$_{\mathcal{S}} =$ И$_{\mathcal{S}} =$ И$_{ФА}$. То есть И$_{ФА}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.
Пусть φ таково, что $[\![\varphi(\overline{x})]\!] =$ И при $x \in$ И. Тогда $\vdash \varphi(\overline{x})$, если $x \in$ И и $\vdash \neg\varphi(\overline{x})$, если $x \notin$ И.
Тогда И выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. $\square$

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).

Теория множеств

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}; X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

Определение

Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двухместным функциональным символом $\in$, и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x . x \in A \rightarrow x \in B$
$A = B \equiv A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$A \subseteq B \equiv \forall x.x \in A \to x \in B$
$A = B \equiv A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A$

Определение

Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах. $\forall x.\forall y.\forall z.x = y \,\&\, x \in z \to y \in z.$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество $\varnothing$.

$$\exists s.\forall t.\neg t \in s$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество $\varnothing$.

$$\exists s.\forall t.\neg t \in s$$

Определение

Аксиома пары. Существует $\{a, b\}$. Каковы бы ни были два множества a и b, существует множество, состоящее в точности из них.

$$\forall a.\forall b.\exists s.a \in s \,\&\, b \in s \,\&\, \forall c.c \in s \to c = a \vee c = b$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. *Для любого непустого множества* x *найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы* x.

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. *Для любого непустого множества* x *найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы* x.

$$\forall x.(\exists y.y \in x) \to \exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow \exists s.y \in s \,\&\, s \in x$$

Определение

Аксиома степени: существует $\mathcal{P}(x)$. *Каково бы ни было множество* x, *существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества* x.

$$\forall x.\exists p.\forall y.y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

Аксиоматика ZF. Схема аксиом выделения

Определение

Схема аксиом выделения: существует $\{t \in x \mid \varphi(t)\}$*. Для любого множества* x *и любой формулы от одного аргумента* $\varphi(y)$ *(*b *не входит свободно в* φ*), найдется* b*, в которое входят те и только те элементы из множества* x*, что* $\varphi(y)$ *истинно.*

$$\forall x.\exists b.\forall y.y \in b \leftrightarrow (y \in x \,\&\, \varphi(y))$$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X *существует множество* $\{X\}$, *содержащее в точности* X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p.\neg p \in s$ и $\forall p.\neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p.\neg p \in s$ и $\forall p.\neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$ $\square$

Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p.\neg p \in s$ и $\forall p.\neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$. $\square$

Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Доказательство.

$s \cap t = \{x \in s \mid x \in t\}$ $\square$

Упорядоченная пара

Определение

Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств a и b назовём $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, или $\langle a, b\rangle$

Теорема

Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.

Доказательство.

Применить аксиому пары, теорему о существовании $\{X\}$, аксиому пары. $\square$

Теорема

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \mathbin{\&} \forall x.x \in N \to x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

(неформально) $\omega = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots\}$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \varnothing \in N \,\&\, \forall x.x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ...

(неформально) $\omega = \{\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots\}$. Тогда $N_1 = \omega \cup \{\omega, \omega', \omega'', \dots\}$ подходит.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность* ($a \preceq a$), *антисимметричность* ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), *транзитивность* ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность* $(a \preceq a)$, *антисимметричность* $(a \preceq b \to b \preceq a \to a = b)$, *транзитивность* $(a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c)$.
2. *Линейный: частичный +* $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность* ($a \preceq a$)*, антисимметричность* ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$)*, транзитивность* ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$)*.*
2. *Линейный: частичный +* $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$*.*
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность* ($a \preceq a$), *антисимметричность* ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), *транзитивность* ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. *Линейный: частичный* + $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*

Пример

$\mathbb{Z}$ *не вполне упорядочено: в* $\mathbb{Z}$ *нет наименьшего.*

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), транзитивность ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).*
2. *Линейный: частичный + $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.*
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*

Пример

$\mathbb{Z}$ *не вполне упорядочено: в* $\mathbb{Z}$ *нет наименьшего.*

Пример

Отрезок $[0, 1]$ *не вполне упорядочен:* $(0, 1)$ *не имеет наименьшего.*

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. *Частичный: рефлексивность* ($a \preceq a$), *антисимметричность* ($a \preceq b \to b \preceq a \to a = b$), *транзитивность* ($a \preceq b \to b \preceq c \to a \preceq c$).
2. *Линейный: частичный +* $\forall a.\forall b.a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. *Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.*

Пример

$\mathbb{Z}$ *не вполне упорядочено: в* $\mathbb{Z}$ *нет наименьшего.*

Пример

Отрезок $[0, 1]$ *не вполне упорядочен:* $(0, 1)$ *не имеет наименьшего.*

Пример

$\mathbb{N}$ *вполне упорядочено.*

Отношения строгого и нестрогого порядка

Для отношения строгого (нестрогого) порядка легко найти парное отношение нестрогого (строгого) порядка.

Строгий порядок	Нестрогий порядок
$a \prec b$	$a \prec b \vee a = b$
$a \preceq b \mathbin{\&} a \neq b$	$a \preceq b$
$A \in B$	$A \in B \vee A = B$

Определение (полный строгий порядок)

A вполне упорядочено отношением $(\prec)$, если:

1. *при всех $a, b \in A$ выполнено либо $a \prec b$, либо $b \prec a$, либо $a = b$;*
2. *в любом $S \subseteq A$ и $S \neq \varnothing$ найдётся $n \in S$, что $\forall x.x \in S \rightarrow n = x \vee n \prec x$.*

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество $X : \forall x.\forall y.x \in y \mathbin{\&} y \in X \to x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество $X : \forall x.\forall y.x \in y \mathbin{\&} y \in X \rightarrow x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$,

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество $X : \forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \to x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$,

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество $X : \forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \to x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$, ...

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество $X: \forall x.\forall y.x \in y \;\&\; y \in X \to x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \mathbin{\&} y \in X \rightarrow x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Определение

Ординал x *конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.*

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X: $\forall x.\forall y.x \in y \,\&\, y \in X \rightarrow x \in X$.
Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением $(\in)$ *транзитивное множество.*

Пример

Ординалы: $\varnothing, \varnothing', \varnothing'', \ldots$

Определение

Предельный ординал: такой x, *что* $x \neq \varnothing$ *и нет* $y : y' = x$

Определение

Ординал x *конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.*

Теорема

Если x, y *— ординалы, то* $x = y$, *или* $x \in y$, *или* $y \in x$.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — *наименьший предельный ординал.*

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — *наименьший предельный ординал.*

Теорема

ω *существует.*

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — *наименьший предельный ординал.*

Теорема

ω *существует.*

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Тогда:

- меньше ω предельных нет: если θ таков, что $\theta \in \omega$, тогда θ конечен.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Тогда:

- меньше ω предельных нет: если θ таков, что $\theta \in \omega$, тогда θ конечен.
- ω предельный: Пусть θ таков, что $\theta' = \omega$. Тогда θ конечен и θ' тоже конечен.

$\square$

Пример

ω' — тоже ординал.

Порядковый тип

Определение (неформальное определение)

Порядковый тип множества — некоторое свойство, общее для всех множеств, изоморфных относительно биективных отображений, сохраняющих порядок.

Определение

Порядковый тип вполне упорядоченного множества $\langle S, (\preceq) \rangle$ *— ординал* A*, для которого есть биективное отображение* $f : S \to A$*, сохраняющее порядок:* $a \preceq b$ *тогда и только тогда, когда* $f(a) \leq f(b)$

Пример

Множество $\mathbb{Z}$ *не имеет порядкового типа (в смысле определения через ординалы): оно не вполне упорядочено.*

Операции над ординалами

Определение

$a + b$ — порядковый тип $a \uplus b$ (отмеченного объединения), причём $x_a < y_b$ при любых $x \in a$ и $y \in b$

Определение

$a \cdot b$ — порядковый тип $a \times b$, произведение упорядочено лексикографически: $\langle x_1, y_1 \rangle < \langle x_2, y_2 \rangle$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$.

Пример

$\overline{3} + \overline{4}$: *порядковый тип множества* $\{0_a, 1_a, 2_a, 0_b, 1_b, 2_b, 3_b\}$, *то есть* $\overline{7}$
$\omega \cdot \omega$: *порядковый тип всех натуральных точек плоскости,*
$\{\langle 0, 0\rangle, \dots, \langle 0, 100\rangle, \dots, \langle 100, 0\rangle, \dots\}$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $\mathrm{upb}\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — *верхняя грань множества ординалов,* *upb* $x = \bigcup_{a \in x} a$*.*

Пример

upb $\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} =$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\,\{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$;

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$; $1 + \omega = upb\ \{1 + \varnothing, 1 + 1, 1 + 2, \dots\}$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

$upb\ x$ — *верхняя грань множества ординалов*, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$upb\ \{\varnothing', \varnothing'', \varnothing''''\} = \varnothing' \cup \varnothing'' \cup \varnothing'''' =$
$\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \varnothing''''$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \varnothing \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$; $1 + \omega = upb\ \{1 + \varnothing, 1 + 1, 1 + 2, \dots\} = \omega$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \mathit{upb}\,\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ upb\,\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \varnothing \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ upb\,\{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \varnothing \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \mathit{upb}\,\{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \varnothing \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \mathit{upb}\,\{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$\omega \cdot \omega = \mathit{upb}\,\{\omega \cdot 0, \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\} = \mathit{upb}\,\{0, \omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$*.* $1 + \omega = \omega$*.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- *Добавить элемент перед бесконечностью:* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{N}_0$. $1 + \omega = \omega$.
- *Добавить элемент после бесконечности* $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$