

## 计算机仿真题

1. 已知复随机信号 $u(n)$ 是受加性高斯白噪声污染的多音信号

$$u(n) = \sum_{k=1}^3 s_k(n) + v(n) = \sum_{k=1}^3 a_k e^{j2\pi f_k n} + v(n)$$

其中,  $a_k = |a_k|e^{j\varphi_k}$ 为复幅度,  $\varphi_k$ 是在 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机变量, 并且当 $l \neq k$ 时,  $\varphi_l$ 和 $\varphi_k$ 相互独立; 归一化频率分别为 $f_1 = 0.15, f_2 = 0.17$ 和 $f_3 = 0.26$ ;  $v(n)$ 是零均值, 方差为 $\sigma_v^2 = 1$ 的复高斯白噪声信号。信号 $s_k(n), k = 1, 2, 3$ 的信噪比分别为20dB, 25dB和30dB。

- 1) 计算随机信号 $u(n)$ 的自相关函数 $r(m)$ 。
- 2) 产生信号 $u(n)$ 的 $N = 2^{16}$ 个观测样本。请分别使用(3.1.2)、算法 3.1 和仿真软件的内置函数计算自相关函数的估计 $\hat{r}(m), |m| < M = 64$ , 并比较这三种方法得到的估计结果的估计误差

$$e(m) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{r}_l(m) - r(m)|^2$$

其中,  $r(m)$ 是 1)中得到的真实自相关函数,  $\hat{r}_l(m)$ 是第 $l$ 次独立实验的自相关函数的估计,  $L = 100$ 是独立重复实验次数。

- 3) 分别使用 Bartlett 法和 Welch 法得到随机信号 $u(n)$ 的功率谱估计, 并比较这两种算法得到的频率估计结果的估计误差

$$e_k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{f}_{k,l} - f_k|^2$$

其中,  $\hat{f}_{k,l}$ 是第 $l$ 次独立实验的归一化频率 $f_k$ 的估计值,  $k = 1, 2, 3, L = 100$ 是独立重复实验次数。Welch 算法取相邻两段信号样本重叠50%。

- 4) 请使用基于 AR 模型的功率谱估计算法实现对信号 $u(n)$ 的功率谱估计。选择 AR 模型阶数为 $p = 8$ 。
  - a) 构造 Yule-Walker 方程, 使用矩阵求逆方法计算 AR 模型的参数 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$ 和 $\hat{\sigma}_p^2$ , 并根据(3.2.11)得到信号 $u(n)$ 的功率谱估计。
  - b) 完成 $L = 100$ 次独立重复实验。计算基于 AR 模型的功率谱估计算法得到的各频率估计结果的估计误差。
- 5) 使用 MVDR 算法实现对信号 $u(n)$ 的频率估计。选择算法参数 $M = 32$ 。
  - a) 请给出在三个归一化频率 $f_1, f_2, f_3$ 处, 理论上最优权向量的值。
  - b) 完成 $L = 100$ 次独立重复实验, 每次试验产生信号 $u(n)$ 的 $N = 2^{16}$ 个观测样本, 分别计算在三个归一化频率 $f_1, f_2, f_3$ 处的权向量的值与理论最优权向量的误差。
- 6) 请使用 MUSIC 算法实现对信号 $u(n)$ 的频率估计。选择算法参数 $M = 32$ 。
  - a) 分别假设参数 $K = 2, 3, 4$ , 计算相应的由噪声子空间对应的特征向量构成的矩阵 $\mathbf{G}_2 = [\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \dots, \mathbf{u}_M], \mathbf{G}_3 = [\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5, \dots, \mathbf{u}_M], \mathbf{G}_4 = [\mathbf{u}_5, \mathbf{u}_6, \dots, \mathbf{u}_M]$ 。分别计算下式的结果

$$\mathbf{a}^H(\omega_k) \mathbf{G}_{k_1} \mathbf{G}_{k_1}^H \mathbf{a}^H(\omega_k)$$

其中,  $\omega_k = 2\pi f_k, k = 1, 2, 3$ 是归一化角频率,  $k_1 = 2, 3, 4$ 。

- b) 使用 $N = 2^{16}$ 个观测样本, 分别完成单次典型实验, 绘制 $K = 2, 3, 4$ 时的 MUSIC 谱。
- 7) 请使用 RootMUSIC 算法实现对信号 $u(n)$ 的频率估计。选择算法参数 $M = 16$ 。假设参数 $K = 3$  (即先验已知信号个数)。

- a) 使用 $N = 2^{16}$ 个观测样本, 完成三次典型实验, 分别给出这三次典型实验的频率估计结果。
  - b) 使用 $N = 2^{16}$ 个观测样本, 完成 $L = 100$ 次独立重复实验。计算基于 Root-MUSIC 算法得到的各频率估计结果的估计误差。
- 8) 请使用 ESPRIT 算法实现对信号 $u(n)$ 的频率估计。选择算法参数 $M = 16$ 。假设参数 $K = 3$  (即先验已知信号个数)。
- a) 使用 $N = 2^{16}$ 个观测样本, 完成三次典型实验, 分别给出这三次典型实验的频率估计结果。
  - b) 使用 $N = 2^{16}$ 个观测样本, 完成 $L = 100$ 次独立重复实验。计算基于 ESPRIT 算法得到的各频率估计结果的估计误差。