Campionamento

fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

29−/11/2023

Richiami delle serie di Fourier

Treno di delta, treno campionatore, comb o pettine $\pi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i2\pi n\frac{t}{T}}$

Dove

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \pi(t)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)dt = \frac{1}{T}$$

Ora voglio vedere il suo spettro

$$\Pi(f) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i2\pi nTf} & \text{trasformando la definizione} \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\delta\left(f - \frac{k}{T}\right) & \text{trasformando la serie di Fourier} \end{cases}$$

$$x(t) \to \boxed{D.A.C.} \to x_c(t)$$

$$x_c(t) = x(t)\pi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)\delta(t - nT)$$

Ora vedo cosa succende nel dominio delle frequenze

$$X(f) \to \boxed{D.A.C.} \to X_c(f)$$

$$X_c(f) = \begin{cases} X(f) * \Pi(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f - \frac{n}{T}\right) & \text{dalla serie di Fourier di } \Pi(f) \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)e^{-i2\pi nTf} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-i2\pi nfT} & \text{operando prima sulle serie nel tempo} \end{cases}$$

Quindi la trasformata di Fouerier di un segnale campionato o la trasformata della serie di un segnale campionato sono uguali

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X_c(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-i2\pi fnT}$$

$$x[n] = x(nT) = x(t)_{t=nT}$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)$$

$$X_c(f) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Esempi:

1.

$$x[n] = 1$$

$$X_c(f) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i2\pi nfT} \\ \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f-\frac{n}{T}\right) \xlongequal{x(t)=1 \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)=\delta(f)} \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right) \end{cases}$$

2.

$$x[n] = \left[\frac{\sin(2\pi f_c nT)}{\pi n}\right]^2 = 4{f_c}^2\pi^2T^2 sinc^2(2f_c nT)$$

$$x(t) = 4{f_c}^2T^2 sinc^2(4f_c t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 4{f_c}^2T^2\frac{1}{2f_c}tri\left(\frac{f}{2f_c}\right) = X(f)$$

$$X_c(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f-\frac{n}{T}\right) = 2f_cT\sum_{n\in\mathbb{Z}} tri\left(\frac{f-nT}{2f_c}\right)$$

3.

$$y[n] = x[n] * h[n] = (a^n u[n]) * (b^n u[n])$$

Con la convoluzione

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{a-\frac{a}{b}} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}u[n]$$

Altrimenti posso fare

$$Y_c(f) = X_c(f)H_c(f) \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} y[n]$$

$$X_c(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-i2\pi nfT} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(ae^{-i2\pi ft}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-i2\pi fT}}$$

$$H_c(f) = \frac{1}{1-be^{-i2\pi fT}}$$

$$Y_c(f) = X_c(f)H_c(f) = \frac{1}{1-ae^{-i2\pi fT}}\cdot\frac{1}{1-be^{-i2\pi fT}} = \frac{A}{1-ae^{-i2\pi fT}} + \frac{B}{1-be^{-i2\pi fT}} =$$

$$= \frac{A+B-(Ab+Ba)e^{-i2\pi fT}}{(1-ae^{-i2\pi fT})(1-be^{-i2\pi fT})} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ Ab=-Ba \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{b}{b-a} \\ A=-\frac{a}{b-a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_c(f) = \frac{A}{1-ae^{-i2\pi fT}} + \frac{B}{1-be^{-i2\pi fT}} \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} y[n] = Aa^n u[n] + Bb^n u[n] = \frac{b}{b-a}b^n u[n] - \frac{a}{b-a}a^n u[n] =$$

$$= \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}u[n]$$

4.
$$x[n] = -\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right) \qquad\qquad T = 1$$
$$x(t)\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)}{\pi t}\cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right) = \frac{1}{3}sinc\left(\frac{t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right)$$
$$X(f) = rect(3f) * \left[\frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}rect\left[3\left(f - \frac{1}{6}\right)\right] + \frac{1}{2}rect\left[3\left(f + \frac{1}{6}\right)\right]$$
$$X_c(f) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f-n)$$

5.
$$x[n] = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}\right]^2 = \frac{1}{9}sinc^2\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$
$$X(f) = \frac{1}{3}tri(3f)$$
$$X_c(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f-n) = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} tri[3(f-n)]$$

Se prendo T troppo grande rischio che i campioni in frequenza si vanno a sovrapporre creando così **aliasing** nella ricpstruzione