Orale

fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

10/01/2024

$$sorgente \rightarrow \boxed{canale} \rightarrow destinazione$$

più nel dettaglio da parte della sorgente

$$s(t) \rightarrow \boxed{ADC} \rightarrow s[n] \rightarrow \boxed{quantizzatore}$$

La quantizzazione converte il segnale campionato in una sequenza di bit, assegnando ad esempio ai campioni che si trovano nello stesso intervallo di quantizzazione il valor medio tra i due anche se i due campioni differiscono, ad esempio se l'intervallo di quantizzazione per il bit 00 è [0,1] sia 0,3 che 0,7 saranno quantizzati in 00. Questo introduce un errore di quantizzazione che è una variabile aleatoria

$$\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \ni e_q[n] = x[n] - x_q[n]$$

Prendendo M intervalli di campionamento per quantizzare il segnale in elementi da $K = \log_2 M$bit il segnale che ha ampiezza $[-V, V]$ possiamo trovare l'ampiezza di un intervallo di quantizzazione

$$\Delta = \frac{2V}{M}$$

e da qui possiamo vedere che la sua densità di probabilità

$$p_E(e) = \frac{1}{\Delta} rect\left(\frac{e}{\Delta}\right)$$

Ovviamente all'aumentare di M si riduce $e_q[n]$ (ad edempio per la radio e la tv si usa $M = 16$). Si vede facilmente che e_q è uniformemente distribuita, quindi posso calcolarne la potenza

$$P_e = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de = \frac{e^3}{3\Delta}\Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

E da questo ottengo

$$\sigma_E^2 = p_E(e) \qquad\qquad \mu_E = 0$$

Riscrivo la potenza in funzione di V e M

$$P_e = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4V^2}{12M^2} = \frac{V^2}{3M^2}$$

Se scrivo la potenza in scala logaritmica ottengo

$$(P_e)_{dB} = 10\log_{10}\frac{V^3}{3} - 10\log_{10} M^2 = 10\log_{10}\frac{V^3}{3} - 10\log_{10} 2^{2K} \xlongequal{10\log_{10}2=3} 10\log_{10}\frac{V^3}{3} - 6K$$

Se considero il segnale x uniformemente distribuito si $[-V, V]$ ottengo la densità di probabilità

$$p_X(x) = \frac{1}{2V} rect\left(\frac{x}{2V}\right)$$

Da qui ottengo la potenza

$$P_x = \frac{1}{2V}\int_{-V}^{V} x^2 dx = \frac{1}{2V}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-V}^{V} = \frac{V^2}{3}$$

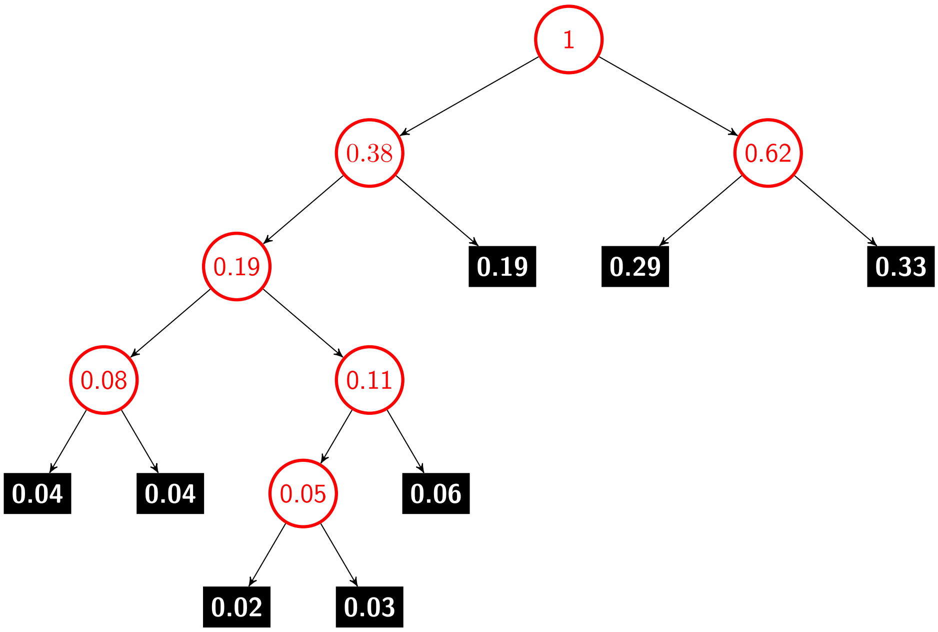
Quindi

$$(P_e)_{dB} = (P_x)_{dB} - 6K$$

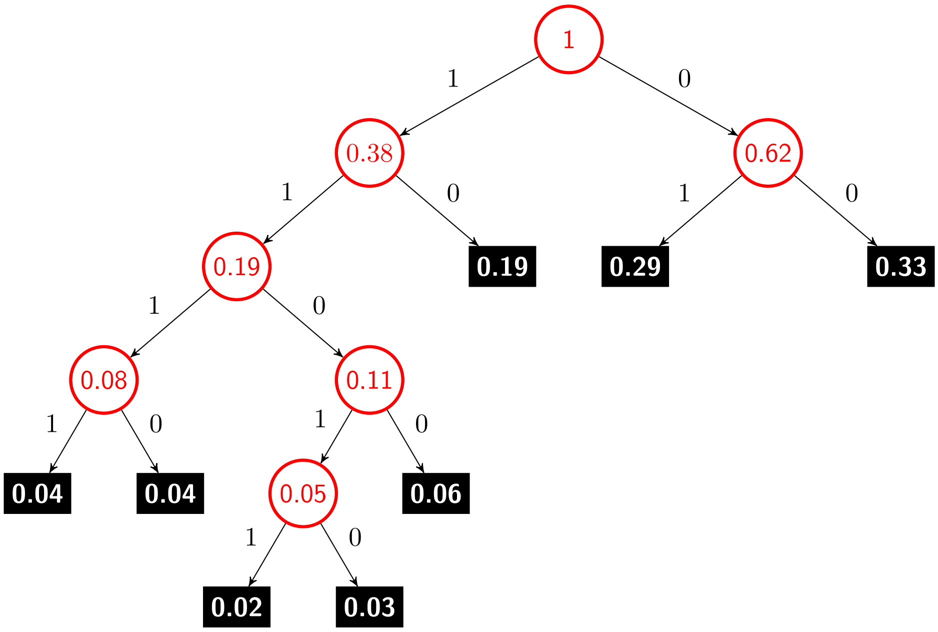
Se prendiamo la frequenza di campionamento $f_c = 8\text{kHz} \Rightarrow T_c = 125\mu\text{s}$ e $K = 8 \Rightarrow 64\text{kb/s}$ abbiamo la pulse code modulation, che è la base della trasmissione dei segnali. Dato che la banda è una risorsa preziosa si fa una codifica di sorgente.
Un esempio è la codifica naturale dove si associa alsibolo con valore più basso la parola con tutti 0 e a quello più alto quella con tutti 1 ma non è la più efficiente dato che alcune parole di codice potrebbero non essere usate mai, quindi spesso si usa una codifica fatta appositamente per il tipo di segnale in cui si associano ai simboli più comuni parole con meno bit e a quelli più rari quelle con più bit, risparmiando così banda usando simboli con numero di bit variabile che riduce il numero medio di bit usati.
Esempio Prese le probabilità dei simboli

$$[0.02, 0.29, 0.03, 0.04, 0.33, 0.04, 0.06, 0.19]$$

costruiamo un albero (di Huffman) mettendo prima nelle foglie i due valori minori, in questo caso 002 e 003 e mettendo come loro genitore la loro somma, 005 che è molto simile ai valori 004 ripetuto due volte e 006, le metto come foglie mettendo in ordine cresscente da destra verso sinistra e ripetendo la procedura precedente, sommando quindi i due 004 e lo 005 con 006, ottenendo rispettivamente 008 e 011 che non sono confrontabili con gli altri bit, quindi li sommo tra di loro ottenendo 019 che è confrontabile con 019, 029 e 033, così ho preso tutti i bit, ora ripeto la procedura fino a ottenere la radice che dovrebbe venire 1.



Con questo albero possiamo distribuire i bit di codifica aggiungendo a ogni figlio sinitro 1 alla codifica e a ogni fliglio destro 0. Così facendo ottengo la seguente codifica



0.19	10
0.29	01
0.33	00
0.04	1111
0.04	1110
0.06	1100
0.02	11011
0.03	11010

La ripetizione degli 0.04 è dovuto al fatto che due simboli hanno la setssa probabilità. Il numero medio di bit usati è quindi

$$\#bit = \sum_{i=1}^{M} p_i K_i = 0.33{\cdot}2{+}0.23{\cdot}2{+}\cdots = 2.43\text{kb/s} < 3 \text{ che sarebbero quelli usati dalla codifica naturale}$$

E questo sistema garantisce la leggibilità de segnale dato che nessuna parole è inizio di un'altra.

È possibile usare un quantozzatore a intervalli non costanti, ad esempio

$$V_1 \to \Delta_1 = 8 \qquad V_2 \to \Delta_2 = 4 \qquad V_3 \to \Delta_3 = 2 \qquad V_4 \to \Delta_4 = 2$$

quindi

$$p_1 = 0.5 \qquad p_2 = 0.25 \qquad p_3 = p_4 = 0.125$$

Per calcolare la potenza dell'errore di quantizzazione considero tutti gli intervalli coma variabili aleatorie indipendenti e ottengo

$$P_e = \frac{{\Delta_1}^2}{12}p_1 + \frac{{\Delta_2}^2}{12}p_2 + \frac{{\Delta_3}^2}{12}p_3 + \frac{{\Delta_4}^2}{12}p_4 = \frac{37}{12}$$

In codifica naturale mi servirebbero 2 bit per simbolo ma noi vogliamo ottimizzare quindi creiamo ora l'albero di Huffman e ottengo la codifica

V_1	0
V_2	10
V_3	110
V_3	111

Quindi

$$\#bit = 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.125 \cdot 3 + 0.125 \cdot 3 = 1.75 = \frac{7}{4} < 2$$

Ma qual'è il numero minimo di bit che posso usare per trasmettere un segnale senza perdere l'informazione? questo numero è l'entropia della sorgente

$$H = \sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 \frac{1}{p_1} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

Che in alcuni casi è ottenibile ma non esiste un modo univoco per ottenerlo, dipende dai casi. Si chiama informazione

$$I = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

La quantità di informazione contenuta in un simbolo. Quindi l'entropia della sorgente è

$$H = \sum_{i=1}^{M} p_i I_i$$

Quindi se un simbolo ha $p_i = 1 \Rightarrow H = 0$ mentre se tutti i simboli sono equiprobabili $p_i = \frac{1}{M} \Rightarrow H = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} \log_2 M = \log_2 M$. Se $M = 2 \Rightarrow H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$

Codifica di linea

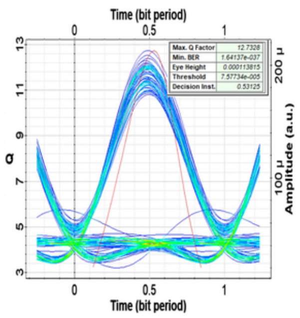
$$S \rightarrow \boxed{\text{sorgente}} \rightarrow \boxed{\text{canale}} \rightarrow \text{modulatore} \rightarrow \boxed{\text{trasmettitore}} \rightarrow \boxed{\textit{canale}} \xleftarrow{+} n(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\text{ricevitore}} \rightarrow \boxed{\text{filtro}} \rightarrow \text{demodulazione} \rightarrow \boxed{\text{canale}} \rightarrow \boxed{\text{sorgente}} \rightarrow D$$

La codifica di linea aggiunge bit per correggere l'errore dovuto al rumore, l'esempio supra riportato è una codifica di linea di modulazione. Tutti i canali attenuano le frequenze alte quindi i canali possono essere visti come dei filtri passsa basso con banda pari alla frequenza massima che lasciano passare, inoltr eviene introdotto del rumore (che vediamo ocme un rumore bianco gaussiano). Nella modulazione moltipico il segnale per una frequenza portante. Dopo che il segnale viene ricevuto dal ricevitore si passa per un filtro, solitamente basato sualla frequenza portante (I segnali wireless sono modellati con delle rect cejtrate in $\pm f_0$ e di ampiezza B che è la banda) per ridurre la potenza del rumore prima della demodulazione che contiene

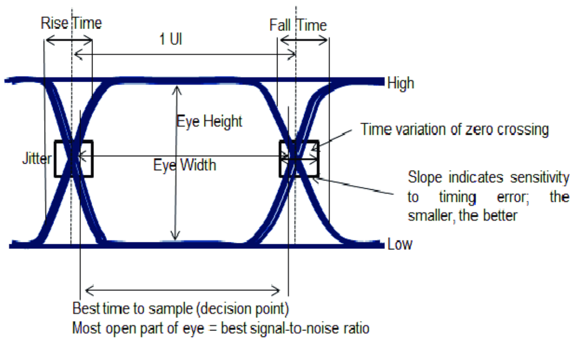
$$\rightarrow \boxed{\text{D.A.C}} \rightarrow \boxed{\text{decisore a soglia}} \rightarrow$$

Dove il decisore a soglia è un sistema di confronto che confronta il segnale ricevuto con una soglia per vedere se il valore ricevuto è uno 0 o un 1. Una cosa fondamentale nella trasmissione del segnale è il **diagramma ad occhio** che stabilisce una zona in cui il segnale non deve entrare altrimenti diventa non legggibile da decisore a soglia. Le codifiche possono essere del tipo "return to 0", dove il segbale torna a 0 prima di trasmettere il bit successivo, in questo caso il diagramma ad occhio è così



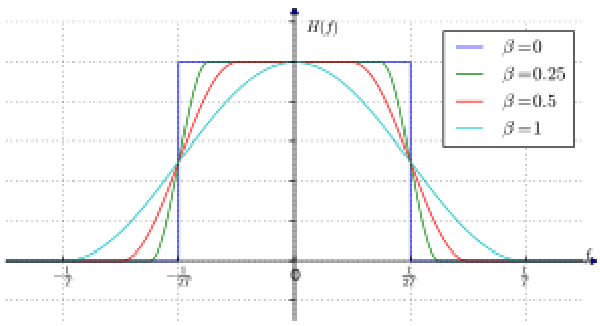
(b)

Mentre se si usa una modulazione che non torna a 0 prima di trasmettere il diagramma ad occhio simile a questa



Per velocizzare le trasmissioni si tende a non usare una trasmissione binaria ma una trasmissione M-aria, ovvero con M simboli, ad esempio per il wifi si usano 256 simboli

Un esempio: sia il nostro alfabeto
$$c_m \in \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$$
e il tempo di trasmissione di un simbolo
$$T_s$$
e quindi il baudrate è
$$R_s = \frac{1}{T_s}$$
quindi il bitrate di trasmissione, che è il tempo per ogni simbolo moltiplicato per il bit di ogni simbolo, si calcola
$$R_b = R_s \log_2 M$$
Ora prendiamo
$$M = 4 \qquad\qquad c_m = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$$
E vogliamo trasmettere la sequenza
$$s[n] = [1, 0.5, -0.5, 1]$$
Ora lo moduliamo e otteniamo un'onda da trasmettere
$$x(t) = \sum_{n=1}^{length(s[n])} s[n]g(t - nT_s)$$
Dove $g(t)$ è l'impulso base che deve essere
$$g(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = kT_s, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$
E si cerca di rimanere nel caso in cui la sua trasformata resta limitata in banda per evitare di usarne troppa in quanto è una risorsa preziosa. Quindi un segnale tipicamente usato è
$$g(t) = sinc\left(\frac{t}{T_s}\right)$$
Dato che la sua trasformata
$$G(f) = rect(T_s f)$$
È quindi limitata in banda. Un altro impulso molto usato è quello di Nyquist a coseno rialzato (β nel grafico è il rolloff)



Facciamo un altro esempio di trasmissione con un segnale binario

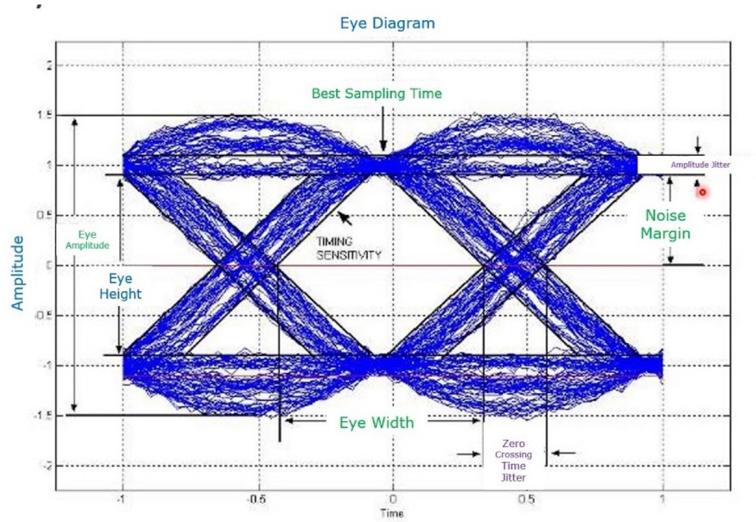
$$s[n] \in \{c_1, c_2\}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]g(t - nT_s)$$

Ora dobbiamo aggiungere il rumore e il passaggio per il canale

$$y(t) = x(t) * h(t) + n(t) = x(t) + n(t)$$

quindi il nostro segnale non verrà fuori pulito ma a causa del rumore diventa "frastagliato"



Considerando che il rumore ha una densità di probabilità gaussiana possiamo vedere $y(t)$ come una variabile aleatoria

$$Y = y(0) = x + n = \begin{cases} c_1 + n \\ c_2 + n \end{cases}$$

$$P_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2{}_n}} \qquad\qquad \sigma^2{}_n = BN_0$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{-(y-c_i)^2}{2\sigma^2{}_n}}$$

$$p_r\{y < \overline{c}|c_2\} = \int_{-\infty}^{\overline{c}} R_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\overline{c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{-(y-c_2)^2}{2\sigma^2{}_n}} dy \xlongequal{t=\frac{c_2-y}{\sqrt{2}\sigma_n}} \int_{+\infty}^{\frac{c_2-\overline{c}}{\sqrt{2}\sigma_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-t^2}(-dt\sqrt{2}\sigma_n) =$$

$$= \int_{\frac{c_2-\overline{c}}{\sqrt{2}\sigma_n}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{c_2 - \overline{c}}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{c_2 - \overline{c}}{\sigma_n}\right)$$

$$p_r\{y > \overline{c}|c_1\} = \int_{\overline{c}}^{+\infty} e^{-\frac{(y-c_1)^2}{2\sigma^2{}_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} dy = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\overline{c} - c_1}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\overline{c} - c_1}{\sigma_n}\right)$$

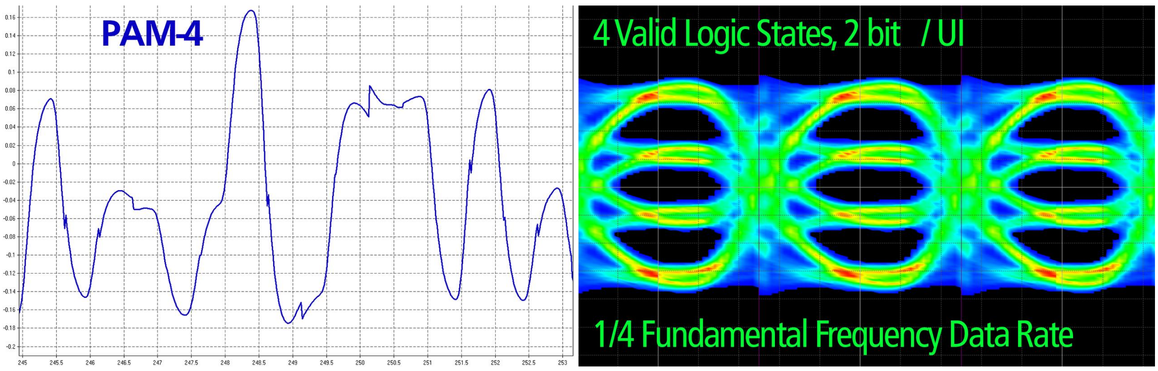
Se oglio calcolare il bit error rate (BER) devo fare la sommatoria delle probabilità di ciascun simbolo per la rispettiva Q, quindi in questo caso

$$BER = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\bar{c}-c_1}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{c_2-\bar{c}}{\sigma_n}\right)$$

che in questo caso è

$$BER = Q\left(\frac{c_2-c_1}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{d}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{N_0 B}}\right)$$

Un modo per trasmettere molteplici simboli è la codifica PAM (pulse amplitude modulation) in cui a valori diversi del segnale trasmesso corrisponde un diverso simbolo, ecco un'immagine del grafico della trasmissione e del rispettivo diagramma ad occhio generato



Bisogna ricordarsi che quando si trasmette un segnale attraverso un canale possiamo modellarlo così

$$x(t) \rightarrow \boxed{H(f)+n(t)} \rightarrow y(t)$$

Dove $n(t)$ è un AWGN (additive white gaussian noise).
Quindi

$$y(t) = \sum_m c_m g(t-mT_s) + n(t) \Rightarrow y(0) = Y = c_m + n$$

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{n^2}{2{\sigma^2}_n}}$$

$${\sigma^2}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} df = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} df = BN_0$$

$$\Rightarrow p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(y-c_1)^2}{2{\sigma^2}_n}}$$

Se le due trasmissioni si vanno a sovrapporre e possibile che si crei un errore dovuto alla trasmissione di un simbolo sbagliato dato checon il pezzettino della trasmissione precedente ciene superata la soglia per un altro simbolo, quindi si aggiunge la funsione di errore complementare

$$\frac{1}{2}erfc\left(\frac{\bar{c}-c_1}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

Dove

$$erfc(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2} dt \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Da cui si può calcolare il BER sommando la funzione di errore complementare per ogni simbolo moltiplicata per la probabilità di trasmissione del simbolo stesso. Ovviamente è minimo quando i due simboli sono uguali.

per pigrizia è stata creata la funzione

$$Q(x) \doteq \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Il ber è considerato *error free* quando

$$BER = 10^{-9} \Rightarrow Q(6) \xRightarrow{BER=Q\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0 B}}\right)} d \gg 0$$

Ovviamente una volta ricevuta la trasmissione questa viene filtrata per rimuovare almeno il rumore fuori banda

$$x(t) \rightarrow \boxed{canale} \rightarrow \boxed{H_0(f)} \rightarrow y(t)$$

Ma anziché usare una *rect* si può usare un filtro adattato per migliorare le prestazioni

$$y(t) = (x(t) + n(t)) * h_0(t) = \left[\sum_{m} c_m g(t - mT_s) + n(t)\right] * h_0(t)$$

Per vedere la statistica evito di portarmi dietro la sommatoria e analizzonil caso di trasmissione di un singolo campioname

$$c_m g(t) * h_0(t) + n(t * h_0(t))$$

Ora controllo il segnale utile

$$c_m g(t) * h_0(t) = c_m \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) H_0(f) e^{i2\pi f t} df$$

E lo calcolo in $t = 0$

$$c_m \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) H_0(f) df$$

A questo punto posso calcolare il numeratore del *Signal to Noise Ratio* calcolando la potenza del segnale utile

$$SNR = \frac{{c_m}^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) H_0(f) df \right|^2}{\ldots}$$

Ora guardiamo la densità spettrale del rumore una volta uscito dal filtro

$$\frac{N_0}{2} |H_0(f)|^2$$

Ora calcoliamone la potenza

$$\sigma^2 \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H_0(f)|^2 df$$

E abbiamo anche il denominatore dell'SNR

$$SNR = \frac{{c_m}^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H_0(f)df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \left| H_0(f) \right|^2 df}$$

A questo punto ricordiamo la disuguaglianza di Schwartz che dice che il quadrato del modulo dell'integrake è minore o uguale del prodotto degli integrali dei moduli quadri

$$SNR = \frac{{c_m}^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)H_0(f)df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \left| H_0(f) \right|^2 df} \leq \frac{{c_m}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| G(f) \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_0 \right|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_0(f) \right|^2 df}$$

DDato che vogliamo che valga l'uguaglianza per avere il massimo SNR usiamo la condizione della disuguaglianza di Schwartz che ci dice che l'uguaglianza vale quando una funzione è la complessa coniugata dell'altra

$$H_0(f) = G^*(f) \Rightarrow h_0(t) = g^*(-t) \xlongequal{g(t)\in\mathbb{R}\forall t\in\mathbb{R}} g(-t)$$

$$\Rightarrow SNR = \frac{{c_m}^2 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df}{N_0}$$

Inoltre so che

$$E_G = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| G(f) \right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g(t) \right|^2 dt \Rightarrow SNR = \frac{2{c_m}^2 E_G}{N_0}$$

E questo è il masismo valore possibile dell'SNR e si ottiene con un filtro adattato.
A questo punto calcoliamo il Ber nel caso di un filtro adattato

$$BER = Q\left(\frac{\sqrt{SNR_2} - \sqrt{SNR_1}}{2} \right) = Q\left(\frac{c_2 - c_1}{2} \sqrt{\frac{2E_G}{N_0}} \right) = Q\left((c_2 - c_1)\sqrt{\frac{E_G}{2N_0}} \right)$$

Ora vediamo i casi particolari

- UNIPOLARE ($c_1 = 0, c_2 \neq 0$)

$$BER = Q\left(c_2 \sqrt{\frac{E_g}{2N_0}} \right)$$

- BIPOLARE ($c_1 = -c_2$)

$$BER = Q\left(2c_2 \sqrt{\frac{E_g}{2N_0}} \right)$$

Ma in questo casi sto considerando l'energia del simbolo pensando che siano uguali nella bipolare e nella unipolare, sarebbe meglio usare l'energia del bit

- UNIPOLARE

$$E_b = \frac{{c_2}^2 E_g + 0}{2} \Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

- BIPOLARE

$$E_b = \frac{{c_1}^2 E_g + {c_2}^2 E_g}{2} \Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

E questi dati sono quelli che di solito si usano per generare un grafico che mostra le prestazioni di un sistema mettendo sull'asse x $\frac{E_b}{N_0}$ e su y BER