Esercitazione per il secondo esonero

fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

09/01/2024

Date 3 variabili aleatorie indipendenti A, B, Θ calcolare il valore medio e la densità di potenza del segnale

$$x(t) = (A + 2B)\cos(300\pi t - \Theta) + n(t)$$

$$P_A(a) = \text{rect che inizia a -1 e finisce a 1 e ha altezza } \frac{1}{2}$$

$$P_B(b) = \text{rect che inizia a -2 e finisce a 2 e ha altezza } \frac{1}{4}$$

$$P_\Theta(\theta) = \text{rect che inizia a 0 e finisce a } 4\pi \text{ e ha altezza } \frac{1}{4\pi}$$

$$R_n(\tau) = 10\delta(\tau) \qquad G_n(f) = 10 \qquad P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f)df = 10\delta(0) = R_n(0)$$

$$E[x(t)] = E[(A + 2B)\cos(300\pi t - \Theta) + n(t)] = E[(A + 2B)\cos(200\pi t - \Theta)] + E[n(t)]$$

Ricordiamo

$$E[n(t)] = \mu_n = 0 \Rightarrow \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xP_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xP_{XY}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} xP_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_Y(y)$$

Allora

$$E[x(t)] = (E[A] + 2E[B])E[\cos(300\pi t - \Theta)]$$

$$\mu_A = E[A] = \int_{-\infty}^{+\infty} aP_A(a)da = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}da = 0$$

$$\mu_B = E[B] = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}db = 0$$

$$\Rightarrow E[x] = 0$$

$$\text{funzione di autocorrelazione} \xrightarrow{\mathscr{F}} R_x(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)] =$$

$$= E[(A + 2B)\cos(300\pi(t+\tau) - \Theta) + n(t+\tau)(A + 2B)\cos(300\pi t - \Theta) + n(t)] =$$

$$= E[(A + 2B)^2\cos(300\pi(t-\tau) - \Theta)\cos(300\pi t - \Theta) + (A + 2B)\cos(300\pi r - \Theta)n(t+\tau) +$$

$$+ (A + 2B)\cos(300\pi(t-\tau) - \Theta)n(t) + n(t+\tau)n(t)]$$

Dato che le probabilità sono indipendenti

$$= E[(A + 2B)^2]E[\cos(300\pi(t-\tau) - \Theta)\cos(300\pi t - \Theta)] + E[(A + 2B)\cos(300\pi t - \Theta)n(t+\tau)] +$$

$$+E[(A+2B)\cos(300\pi(t-\tau)-\Theta)n(t)]+E[n(t+\tau)n(t)]$$

procediamo uno alla volta

$$E[(A+2B)^2]=E[A^2]+4E[B^2]+4E[A]E[B]\xlongequal{E[A]=E[B]=0}E[A^2]+E[B^2]$$

$$E[A^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}a^2P_A(a)da=\int_{-1}^{1}a^2\frac{1}{2}da=\frac{a^3}{6}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

$$E[B^2]=\int_{-2}^{2}b^2\frac{1}{4}db=\frac{b^3}{12}\Big|_{-2}^{2}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

Poi

$$E[\cos(300\pi(t-\tau)-\Theta)\cos(300\pi t-\Theta)]=\int_0^{4\pi}\frac{1}{4\pi}\cos[300\pi(t+\tau)-\Theta]\cos(300\pi-\Theta)d\Theta=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}\cos[300\pi(2t+\tau)-2\Theta]d\Theta+\frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}\cos[300\pi\tau]d\Theta\xlongequal{\text{il primo integrale è sul periodo}}\frac{1}{2}\cos(300\pi\tau)$$

Poi

$$E[(A+2B)\cos(300\pi t-\Theta)n(t+\tau)]$$

$$E[A+2B]=0\Rightarrow E[(A+2B)\cos(300\pi t-\Theta)n(t+\tau)]=0$$

Poi

$$E[(A+2B)\cos(300\pi(t-\tau)-\Theta)n(t)]$$

$$E[A+2B]=0\Rightarrow E[(A+2B)\cos(300\pi(t-\tau)-\Theta)n(t)]=0$$

Poi

$$E[n(t+\tau)n(t)]=R_n(\tau)$$

Allora

$$R_x(\tau)=\left(\frac{1}{3}+4\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2}\cos(300\pi t)+10\delta\xrightarrow{\mathscr{F}}G_x(f)=\frac{17}{12}[\delta(f-150)+\delta(f+150)]+10$$

$$y(t) = \int_{t-T}^{t+T} x(t')dt'$$

$$G_y(f) = ? \qquad\qquad G_x(f) = ?$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')rect\left(\frac{t-t'}{2T}\right) = x(t) * h(t) = x(t) * rect\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Ricordiamo

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$H(f) = 2Tsic(2Tf) \Rightarrow G_y(f) = G_x(f)4T^2 sinc^2(2Tf)$$

Calcolare la potenza del segnale nel caso in cui $G_x(f) = \frac{N_0}{2}$
Quindi possiamo fare

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} 4T^2 sinc^2(2Tf)f$$

Oppure possiamo usare

$$P_y = R_y(0)$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} 2Ttri\left(\frac{\tau}{2T}\right) \Rightarrow P_y = N_0 T$$

$$y(t) = 4x(t-3) + 4x(t+3)$$

$$\mu_x = 0 \qquad\qquad R_x(\tau) = 3e^{-|t|}$$

$$G_y(f) = ? \qquad\qquad \mu_y = ? \qquad\qquad R_y = ? \qquad\qquad P_y = ?$$

$$\mu_y = e[y(t)] = 4E[x(t-3)] + 4E[x(t+3)] \xlongequal{\mu_x=0} 0$$

$$E[y(t+\tau)y(t)] = E[(4x(t+\tau-3) + 4x(t+\tau+3))(4x(t-3) + 4x(t+3))] =$$

$$= 16E[x(t+\tau-3)x(t-3)] + 16E[x(t+\tau-3)x(t+3)] + 16E[x(t+\tau+3)x(t-3)] + 16E[x(t+\tau+3)x(t+3)] =$$

$$16R_x(\tau) + 16R_x(\tau-6) + 16R_x(\tau+6) + 16R_x(\tau) = 32R_x(\tau) + 16R_x(\tau-6) + 16R_x(\tau+6)$$

$$\Rightarrow R_y(\tau) = 96e^{-|\tau|} + 48e^{-|\tau-6|} + 48e^{-|\tau+6|}$$

Ora calcoliamo la potenza

$$P_y = R_y(0) = 96(1 + e^{-6})$$

E infine possiamo calolare $G_y(f)$ e ho due possibilità:

- $R_y(\tau) \xrightarrow{\mathscr{F}} G_y(f)$
- $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$

Dato che

$$y(t) = x(t) * [4\delta(t-3) + 4\delta(t+3)]$$

Procedo con la seconda

$$h(t) = 4\delta(t-3) + 4\delta(t+3) \xrightarrow{\mathscr{F}} H(f) = 8\cos(6\pi f)$$

$$R_x(f) = 3e^{-|t|} \xrightarrow{\mathscr{F}} G_x(f) = \frac{3}{1 + i2\pi f} + \frac{3}{1 - i2\pi f} = \frac{6}{12 + \pi^2 f^2}$$

$$\Rightarrow G_y(f) = 64\cos^2(6\pi f)\frac{6}{1 + 4\pi^2 f^2}$$