esercizi prima parte del corso

fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

24–25/10/2023

classificazione di sistemi

1.

$$y(t) = |x(-t)|$$

- lineare?

$$x_1(t) \to y_1(t) = |x_1(-t)|$$

$$x_2(t) \to y_1(t) = |x_2(-t)|$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to |ax_1(-t) + bx_2(-2)| \neq y_1(t) + y_2(t)$$

$$\Downarrow$$

no

- tempo invariante?

$$x(t-\tau) \to |x(-t-\tau)|$$

$$y(t-\tau) = |x[-(t-\tau)]| = |x(t+\tau)| \neq |x(t-\tau)|$$

$$\Downarrow$$

no

- causale? no perché $y(t)$ non dipende dagli istanti precedenti a t

2.

$$y(t) = x^2(t-2)$$

- lineare?

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1^2(t-2)$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2^2(t-2)$$

$$ax_1(t) + bx_2^t \to (ax_1(t-2) + bx_2(t-2))^2 \neq y_1(t) + y_2(t)$$

$$\Downarrow$$

no

- tempo invariante?

$$x(t-\tau) \to x^2(t-\tau-2)$$
$$y(t-\tau) \to x^2(t-2-\tau)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{sì}$$

- causale?
siccome l'uscita a ogni dato t dipende dall'istante $t-2$ è causale

3.

$$y(t) = x(4-t)$$

- lineare?

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(4-t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(4-t)$$
$$ax_1(t) + bx_2(t) \to ax_1(4-t) + bx_2(4-t)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{sì}$$

- tempo invariante?

$$x(t-\tau) \to x(4-t-\tau)$$
$$y(t-\tau) = x(4-t+\tau) \neq x(4-t-\tau)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{no}$$

- causale?
no perché a ogni istante t il valore dell'uscita non dipende da valori pregressi bensì futuri

calcolo di energia e potenza

1.

$$x(t) = 1 + u(t)$$

non limitato nel tempo quindi probabilmente di potenza

$$P_x = \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{0} |x(t)|^2 dt + \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt =$$

$$\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{0} dt + \frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\frac{\Delta t}{2}} 4dt = \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta t}{2} + \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\frac{4\Delta t}{2} = \frac{5}{2}$$

2.

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{2T}\right) + tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

grafico di tri traslata in alto di 1 nei punti in cui maggiore di 0

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} 2 - \frac{|t|}{T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

limitato nel tempo quindi probabilmente di energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\int_0^T \left(2 - \frac{t}{T}\right)^2 dt = 2\int_0^T \left(4 - \frac{4t}{T} + \frac{t^2}{T^2}\right) = 2\left[4t - \frac{2t^2}{T} + \frac{t^3}{3T^2}\right]_0^T = \frac{14}{3}T$$

3.

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

grafico di una tri da -T a T troncata a -T/2 e T/2

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

limitato nel tempo quindi probabilmente di energia

$$E_x = 2\int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{2t}{T} + \frac{t^2}{T^2}\right) dt = 2\left[t - \frac{t^2}{T} + \frac{t^3}{3T^2}\right]_0^{\frac{T}{2}} = T - \frac{T}{2} + \frac{T}{12} = \frac{7}{12}T$$

4.

$$\left[\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right] rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

grafico della somma del seno e del coseno (una funzione sinusoidale passante per (-1,0),(0,1),(3,0) con apice valore massimo in 1 e minimo in 5 con periodo 8) troncata in 0 e 1

$$E_x = \int_0^1 \left[\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right]^2 dt = \int_0^1 \left(\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^1 1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = 1 - \frac{2}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{\pi} = \frac{\pi + 2}{\pi}$$

5.

$$\left[2\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)+i\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]$$

periodo 2τ

segnale non limitato nel tempo quindi di potenza ma periodico quindi posso usare la formula

$$P_x=\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau}4\cos^2\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)dt=\frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau}1+3\cos^2\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)dt=$$

$$=1+\frac{3}{2\tau}\int_0^{2\tau}\cos^2\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)dt=\frac{5}{2}$$

convoluzione

1.

$$x(t)=\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)*y(t)=rect\left(\frac{2t}{T}\right)$$

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)rect\left(\frac{2(t-\tau)}{T}\right)d\tau=\int_{t-\frac{T}{4}}^{t+\frac{T}{4}}\cos^2\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)d\tau=$$

$$=\int_{t-\frac{T}{4}}^{t+\frac{T}{4}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right)\right]d\tau=\frac{1}{2}\frac{T}{2}=\frac{T}{4}$$

2.

$$x(t)=\frac{1}{T}\left(t+\frac{T}{2}\right)rect\left(\frac{t}{T}\right)*y(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

Con il metodo grafico vedo che $x(\tau)$ è una rampa che inizia in $-\frac{T}{2}$ dove vale 0 e vale 1 in $\frac{T}{2}$ e $y(t-\tau)$ è una rect che va da $t-\frac{T}{2}$ a $t+\frac{T}{2}$, quindi il loro prodotto vale

$$\begin{cases}0 & t<-T\\ \frac{(t+T)^2}{2T} & -T<t\\ \frac{T^2-t^2}{2T} & 0<t<T\\ 0 & t>T\end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}\tau+\frac{T}{2}d\tau=\frac{1}{T}\left(\frac{\tau^2}{2}+\frac{T}{2}\tau\right)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}=\frac{1}{T}\left[\frac{\left(t+\frac{T}{2}\right)^2}{2}+\frac{T\left(t+\frac{T}{2}\right)}{2}-\frac{T^2}{8}+\frac{T^2}{4}\right]=\frac{(t+T)^2}{2T}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\tau+\frac{T}{2}d\tau=\frac{1}{T}\left(\frac{\tau^2}{2}+\frac{T}{2}\tau\right)\Big|_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{T^2-t^2}{2T}$$