Trasformata Fourier
fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

07–29/11/2023

$$x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$X(f) \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

Proprietà[1]:

1. Duale
$$X(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} x(-f)$$

2. Scala
$$x(\alpha t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

3. Traslazione nel tempo
$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} e^{-2i\pi ft_0}X(f)$$
Dimostrazione
$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-2i\pi ft}dt \xlongequal{t'=t-t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-2i\pi f(t'+t_0)} = e^{-2i\pi ft_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-2i\pi ft'} =$$
$$= e^{-2i\pi ft_0}X(f)$$

4. Traslazione in frequenza o della modulazione
$$x(t)e^{2i\pi f_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i2\pi f_0 t}e^{-2i\pi ft} = X(f-f_0)$$

[1]tabella riassuntiva alla terzultima pagina del documento

5. Derivazione
$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X'(f) = 2i\pi f X(f)$$
Dimostrazione
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2i\pi ft} \to \frac{d}{dx}x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi f X(f)e^{2i\pi ft}df$$

6. Duale rispetto alla derivata
$$2i\pi t \cdot x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{dX(f)}{df}$$
Dimostrazione
Derivo la definizione di trasformata di Fourier
$$\frac{d}{df}X(f) = \frac{d}{df}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi t}df = \int -2i\pi f x(t)e^{^{-2i\pi ft}} \Rightarrow 2i\pi t x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{dX(f)}{df}$$

7. Teorema della convoluzione
$$x(t) * y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y(f)$$
Dimostrazione
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau \xLeftrightarrow{y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{2i\pi f\tau}df} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{2i\pi f\tau}df d\tau$$
Cambio l'ordine di integrazione
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{2i\pi f\tau}d\tau df \overset{t'=t-\tau}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{2i\pi ft}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-2i\pi ft'}dt'df =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)X(f)e^{2i\pi ft}df$$

8. Integrazione
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{2i\pi f}$$
Dimostrazione
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{.\infty}^{+\infty} u(t-\tau)x(\tau)d\tau = u(t) * x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f}\right)X(f)$$

9. Trasformata del complesso coniugato
$$x^*(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X^*(-f)$$
Dimostrazione
$$x^*(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-2i\pi ft}dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2i\pi f}dt\right)^* = (X(-f))^* = X^*(-f) \leftarrow \text{simmetria Hermitiana}$$

10. Correlazione

$$x(t) \otimes y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} Y^*(f)X(f)$$

Dimostrazione

$$x(t) \otimes y(t) = y^*(-t) * x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} Y^*(f)X(f)$$

11. Teorema di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Dimostrazione

$$z(t)x(t)*y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} Z(f) = X(f)Y(f) \Leftrightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)e^{2i\pi ft}df \Rightarrow z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df$$

facciamo lo stesso ragionamento ma con $y^*(-t)$

$$z(t) = x(t)*y^*(-t) \xrightarrow{\mathscr{F}} Z(f) = X(f)Y^*(f) \Leftrightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)e^{2i\pi ft}df \Rightarrow z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df =$$

$$=< x(t), y(t) >$$

scegliendo $y(\tau) = x(\tau)$ vediamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

12. Trasfomata di un segnale reale

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi ft}dt \xlongequal{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt = \Re(f) + i\Im(f)$$

Allora

$$\Re(f) = \Re(-f)$$
$$\Im(f) = -\Im(f)$$

E quindi

$$X(-f) = \Re(-f) + i\Im(-f) = \Re(f) - i\Im(f) = X^*(f) \leftarrow \text{simmetria Hermitiana}$$

Questo ci farà comodo se $x(t) \in \mathbb{R}$ è pari, in questo caso

$$\Im(f) = 0 \Rightarrow X(f) \in \mathbb{R} \text{ e pari}$$

Mentre se è dispari

$$\Re(f) = 0 \Rightarrow X(f) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ e dispari}$$

13. Trasformata di un segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi\frac{nt}{T}} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f) \xlongequal{\text{linearità}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

14. Legame con i coefficienti di Fourier

    i coefficienti di fourier possono essere calcolati come una trasformata di Fourier di un segnale uguale a quello originale ma diverso da 0 sono all'interno del suo periodo

$$\dot{x}(t) = x(t) rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t)e^{-2i\pi t\frac{n}{T}}dt = \frac{1}{T}\dot{X}\left(\frac{n}{T}\right)$$

Trasformate notevoli[2]

- Delta
$$\delta(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 1$$
- Delta traslata
$$\delta(t - t_0) = e^{-2i\pi f t_0} \text{ per la proprietà di traslazione nel tempo}$$
- Rect
$$rect\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}} Tsinc(Tf)$$
- Gaussiana
$$x(t) = e^{-\alpha t} \xrightarrow{\mathscr{F}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$$

  Dimostrazione

$$x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-i2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left[t^2+i\frac{2\pi f t}{\alpha}+\left(\frac{i\pi f}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{i\pi f}{\alpha}\right)^2\right]}dt = e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha^2}\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(t+i\frac{\pi f}{\alpha}\right)^2}dt$$

$$\xRightarrow{t'=\sqrt{\alpha}\left(t+i\frac{\pi f}{\alpha}\right)} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha^2}\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t'^2}\frac{dt'}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$$

  Allora **la gaussiana su Fourier si autotrasforma**

  La gaussiana in forma canonica è
$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$
  Dove σ è la deviazione standard, quindi abbiamo
$$\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$$
- Esponenziale unilatero
$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\alpha + 2\pi i f}$$

[2] tabella riassuntiva all'ultima pagina del documento

Dimostrazione

$$\Rightarrow X(f) = \int_{=}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i2\pi f t} dt = \left. \frac{e^{-(\alpha+2\pi i f)t}}{-\alpha - 2\pi i f} \right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha + 2\pi i f}$$

Possiamo vedere che il modulo quadro è una Lorentziana

$$|X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Esempi:

- Possiamo sfruttare questa trasformata per fare quella dell'esponenziale bilatero

$$x_1(t) = e^{-\alpha|t|}$$

$\Rightarrow x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t) = x(t) + x(-t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X_1(f) = X(f) + X(-f)$ per la proprietà di scala

$$\Rightarrow X_1(f) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} + \frac{1}{\alpha - 2i\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 4\pi^2 f^2}$$

Che è una Lorentziana canonica

- Invece quella del segnale

$$x_2(t) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi t} \xrightarrow{\mathscr{F}} X_2(f) = e^{\alpha f} u(-f) \text{ per la proprietà di dualità}$$

- Gradino

$$x_3(t) = u(t) = \lim_{\alpha \to 0} e^{-\alpha t} u(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X_3(f) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha + 2i\pi f} = \frac{1}{2i\pi f}$$

Che però non è del tutto corretto dato ce in 0 questo esplode a infinito quindi c'è una δ, per trovarla lo rifaccio razionalizzando

$$\frac{1}{\alpha + 2i\pi f} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + e\pi^2 f^2} - \frac{2i\pi f}{\alpha^2 + e\pi^2 f^2}$$

Ne calcolo l'ampiezza

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha\left(+\frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2}\right)} \overset{f' = \frac{2\pi f}{\alpha}}{=\!=\!=} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + f'^2} df' \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \arctan(f) \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X_3(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f}$$

- Funzione segno

$$x_4(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} = u(t) - u(-t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X_4(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2i\pi f} - \frac{1}{2}\delta(-f) + \frac{1}{2i\pi f} \overset{\delta(f) = \delta(-f)}{=\!=\!=} \frac{1}{i\pi f}$$

- Tri

$$x(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2 T}$$

Dimostrazione

$$x(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T}\right| & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \xRightarrow{\frac{d}{dx}} \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 - T \leq t \leq 0 \\ -\frac{1}{T} & 0 \leq t \leq T \qquad \leftarrow \text{due rect} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'(t) = \frac{1}{T} rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{1}{T} rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T} sinc(TF) e^{\cancel{2} i\pi f \frac{T}{\cancel{2}}} - \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T} sinc(TF) e^{-\cancel{2} i\pi f \frac{T}{\cancel{2}}} =$$

$$= sinc(TF)\sin(\pi f T) 2i = \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi f T} 2i \xRightarrow{X(f) = 2i\pi f X'(f)} X(f) = \frac{\sin^2(\pi f T)\cancel{2i}}{\pi f T} \frac{1}{\cancel{2i}\pi f} = \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2 T}$$

Prendiamo un filtro

$$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t) = x(t) * h(t)$$

Ma è difficile usare un impulso per trobare la risposta inpulsiva quindi mandiamo all'inizio un segnale sinusoidale che va come un coseno

$$x(t) = e^{i2\pi f_0 t} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{i2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau = e^{i2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-i2\pi f_0 \tau} d\tau = H(f_0) e^{i2\pi f_0 t}$$

Dove $H(f_0)$ è la **funzione di trasferimento** calcolata in $f = f_0$, a questo punto possiamo usare il teorema della convoluzione per calcolare più facilmente l'uscita del filtro.

La trasformata di Fourier (o spettro del segnale) è spesso complessa, se ne studio il modulo sto studiando lo spettro in ampiezza mentre se ne studio la fase sto studiando lo spettro di fase del segnale.

Un segnale in banda base è un segnale intorno all'asse y mentre un segnale modulato è un segnale simmetrico rispetto a questo asse con un elemento intorno a f_0 e uno intorno a $-f_0$ dove f_0 è la **frequenza portante**.

Consideriamo un sistema tempo-discreto

$$x[n] \to \boxed{h[n]} \to y[n]$$

E prendiamo

$$x[n] = \delta[n] \to \boxed{h[n]} \to y[n] = h[n]$$

Quindi

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Supponiamo

$$x[n] = e^{2i\pi f_0 nT} \Rightarrow y[n] = h[n] * e^{2i\pi f_0 nT} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k] e^{2i\pi f_0 (n-k)T} = e^{2i\pi f_0 nT} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k] e^{-2i\pi f_0 kT} =$$

$$= e^{2i\pi f_0 nT} H(f_0)$$

Allora

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-2i\pi f nT}$$

Dove $X(f)$ è periodica di periodo $\frac{1}{T}$ infatti

$$X\left(f - \frac{1}{T}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-2i\pi\left(f-\frac{1}{T}\right)nT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-2i\pi f nT} e^{2i\pi n} \overset{e^{2i\pi n}=1}{=\!=\!=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-2i\pi f nT} = X(f)$$

Spesso si usa una frequenza normalizzata per la rappresentazione

$$\phi = Tf \Rightarrow X(\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\phi}$$

E questa è periodica di periodo 1, possiamo inoltre vedere che la definizione di trasformata di un segnale tempo-discreto ci da anche la serie di Fourier della trasformata i qui coefficienti sono il segnale di partenza, da qui possiamo vedere che

$$X(f) \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} x[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(f) e^{2i\pi n f T} df$$

Proprietà[3]:

1. Valor medio
$$X(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]$$
2. duale del valor medio
$$x[0] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(f) df$$
3. Traslazione nel tempo
$$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f) e^{-2i\pi n_0 f T}$$
$$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n-n_0] e^{-2i\pi f nT} \overset{n'=n-n_0}{=\!=\!=} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} x[n'] e^{-2i\pi f n' T} e^{-2i\pi n_0 f T} = X(f) e^{-2i\pi n_0 f T}$$
4. Traslazione in frequenza
$$x[n] e^{2i\pi f_0 nT} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f - f_0)$$
$$x[n] e^{2i\pi f_0 nT} \xrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{i2\pi f_0 nT} e^{-2i\pi f nT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n] e^{-2i\pi(f-f_0)nT} = X(f - f_0)$$

[3]tabella riassuntva alla penultima pagina del documento

5. Teorema della convoluzione

$$x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)H(f)$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h[n-k] \xrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]h[n-k]e^{-i2\pi nfT} \overset{n'=n-k}{=\!=\!=\!=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k] \sum_{n'\in\mathbb{Z}} h[n']e^{-2i\pi n' fT}e^{-2i\pi kfT} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]e^{-2i\pi kfT} H(f) = X(f)H(f)$$

6. Opposta del teorema della convoluzione

$$x[n]h[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(\theta)H(f-\theta)d\theta$$

$$x[n]h[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]h[n]e^{-2i\pi nfT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]e^{-2i\pi nfT} T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(\theta)e^{2i\pi n\theta T}d\theta =$$

$$= T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(\theta)\sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]e^{-2i\pi(f-\theta)nT}d\theta = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(\theta)H(f-\theta)d\theta \leftarrow \text{convoluzione circolare}$$

Dimostriamo la convoluzioen circolare

$$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{X}\left(f - \frac{n}{T}\right) \qquad H(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{H}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\overline{X}(f) * \overline{H}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X}(\theta)\bar(H)(f-\theta)d\theta$$

$$X(f) \text{ convoluzione circolare } H(f) = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(\theta)H(f-\theta)d\theta =$$

$$T\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}\left(\theta-\frac{n}{T}\right)\overline{H}\left(f-\theta-\frac{k}{T}\right)d\theta \overset{\theta'=\theta-\frac{n}{T}}{=\!=\!=\!=} T\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\frac{1}{2T}-\frac{n}{T}}^{\frac{1}{2T}-\frac{n}{T}} \overline{X}(\theta')\overline{H}\left(f-\theta'-\frac{k+n}{T}\right)d\theta' =$$

$$= T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \overline{X}(\theta')\overline{H}\left(f-\theta'-\frac{k}{T}\right)d\theta' = T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X}(\theta')\overline{H}\left(f-\theta'-\frac{k}{T}\right)d\theta' = T\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{Y}\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

7. Trasformata delcomplessso coniugato

$$y^*[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} Y^*(-f)$$

$$y^*[n] \xrightarrow{\mathscr{F}}= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y^*[n]e^{-2i\pi nfT} = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]e^{i2\pi nfT}\right]^* = Y^*(-f) \leftarrow \text{simmetria Hermitiana}$$

8. Teorema di Parseval

$$E_x = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |X(f)|^2 df$$

Dalla proprietà 6

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]x[n]e^{-2i\pi nfT} = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Y(\theta)X(f-\theta)d\theta$$

Metto $f=0$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]x[n] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Y(\theta)X(-\theta)d\theta \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} y^*[n]x[n] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(-\theta)Y^*(-\theta)d\theta \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]|^2 =$$

$$= T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |X(f)|^2 df = E_x$$

9. Trasformata della correlazione

$$R_{xy}[n] = x[n]\otimes y[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[n-k]y^*[k] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y^*(f)$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x[n-k]y^*[k] \xrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum k\in\mathbb{Z}x[n-k]y^*[k]e^{-2i\pi nfT} \overset{n'=n+k}{=\!=\!=\!=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} y^*[k]\sum_{n'\in\mathbb{Z}} x[n']e^{-2i\pi n'fT}e^{2i\pi kfT} =$$

$$= X(f)\sum_{k\in\mathbb{Z}} y^*[k]e^{2i\pi kfT} = X(f)Y^*(f) \leftarrow \text{crosscorrelazione}$$

10. Trasformata dell'autocorrelazione

$$x[n]\otimes x[n] = |X(f)|^2$$

Esempi:

1.

$$x[n] = \delta[n]$$
$$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta[n]e^{-2i\pi fnT} = 1$$

2.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0\le n<N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \leftarrow \text{rect tempo-discreta}$$

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} 1\cdot e^{-2i\pi fnT} = 1+e^{-2i\pi ft}+e^{-4i\pi fT}+\cdots+e^{-i(N-1)2\pi fT} \overset{1+x+x^2+\cdots+x^{N-1}=\frac{1-x^N}{1-x}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \frac{1-e^{-2i\pi NfT}}{1-e^{-2i\pi fT}} =$$

$$= \frac{e^{-i\pi NfT}}{e^{-i\pi fT}}\frac{e^{i\pi fNT}-e^{-i\pi fNT}}{e^{i\pi fT}-e^{-i\pi fT}} = e^{-i\pi(N-1)fT}\frac{\sin(\pi fNT)}{\sin(\pi fT)}$$

$$|X(f)| = \frac{\sin(\pi fNT)}{\sin(\pi fT)} \leftarrow \text{dinc} \leftarrow \text{digital sinc}$$

3.

$$x[n] = \delta[n]+\delta[n-1] \leftarrow \text{caso particolare dell'esempio precedente con } N=2$$
$$X(f) = 1+e^{-2i\pi fT} = e^{-i\pi fT}(e^{i\pi fT}+e^{-i\pi fT}) = 2e^{-i\pi fT}\cos(\pi fT) \leftarrow \text{filtro passa-basso}$$
$$|X(f)| = 2|\cos(\pi fT)|$$

4.
$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$
$$X(f) = 1 - e^{-2i\pi fT} = e^{-i\pi fT}(e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}) = 2ie^{-i\pi fT}\sin(\pi fT) \leftarrow \text{filtro passa-alto}$$

5.
$$X(f) = rect\left(\frac{f}{2f_c}\right) \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} x[n] =?$$

Ma $X(f)$ non può essere la trasformata di una sequenza perché non è periodica, quindi dovrebbe essere un treno di rect, la riscrivo quindi così

$$X(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} rect\left(\frac{f+\frac{k}{T}}{2f_c}\right)$$

E procedo

$$x[n] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} rect\left(\frac{f}{2f_c}\right)e^{i2\pi nfT}df = T\int_{-f_c}^{f_c} e^{2i\pi nfT}df = \cancel{T}\frac{e^{2i\pi nfT}}{2i\pi n\cancel{T}}\Bigg|_{-f_c}^{f_c} = \frac{\sin(2\pi nf_cT)}{\pi n} = 2f_cTsinc(2\pi f_cT)$$

Richiami delle serie di Fourier

$$\text{Treno di delta o treno campionatore } \pi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i2\pi n\frac{t}{T}}$$

Dove
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\pi(t)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)dt = \frac{1}{T}$$

Ora voglio vedere il suo spettro

$$\Pi(f) = \begin{cases}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i2\pi nTf} & \text{trasformando la definizione}\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{T}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) & \text{trasformando la serie di Fourier}\end{cases}$$

Proprietà della trasformata di Fourier tempo-continua

Proprietà	Enunciato
Duale	$X(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} x(-f)$
Scala	$x(\alpha t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\|\alpha\|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
Traslazione nel tempo	$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} e^{-2i\pi f t_0} X(f)$
traslazione in frequenza o modulazione	$x(t)e^{2i\pi f_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f-f_0)$
Derivazione	$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 2i\pi f X(f)$
Duale della derivazione	$2i\pi t \cdot x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{d}{df}X(f)$
Teorema della convoluzione	$x(t) * y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y(f)$
Integrazione	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{2i\pi f}$
Complesso coniugato	$x^*(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X^*(-f)$
Correlazione	$x(t) \otimes y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y^*(f)$
Teorema di Parseval	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(f)\|^2 df$
Trasformata di un segnale Reale	$\Re(f) = \Re(-f)$ $\Im(f) = -\Im(f)$ $X(f) = X(-f)$
Trasformata di un segnale periodico	$X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
Legame con i coefficienti di Fourier	$\dot{x}(t) = x(t) rect\left(\frac{t}{T}\right)$ $c_n = \frac{1}{T}\dot{X}\left(\frac{n}{T}\right)$

Proprietà della trasformata di Fourier tempo-discreta

Proprietà	Enunciato
Valor medio	$X(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]$
Duale del valoer medio	$x[0] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(f)df$
Traslazione nel tempo	$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)e^{-2i\pi n_0 fT}$
Traslazione in frequenza	$x[n]e^{2i\pi f_0 nT} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f-f_0)$
Teorema della convoluzione	$x[n]*y[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y(f)$
Opposta del toerema della convoluzione	$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X(\theta)Y(f-\theta)d\theta$
Trasformata del complesso coniugato	$x^*[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X^*(-f)$
Teorema di Parseval	$E_x = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \lvert X(f)\rvert^2 df$
Trasformata della correlazione	$x[n]\otimes y[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)Y^*(f)$
Trasformata dell'autocorrelazione	$x[n]\otimes x[n] = \lvert X(f)\rvert^2$

Trasformate notevoli

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-2i\pi f t_0}$
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$Tsinc(Tf)$
$e^{-\alpha t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha+2i\pi f}$
$e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 4\pi^2 f^2}$
$\frac{1}{\alpha+2i\pi f}$	$e^{\alpha f}u(-f)$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2i\pi f}$
$u(t)-u(-t)$	$\frac{1}{i\pi f}$
$tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2 T}$