Serie di Fourier

fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

25/10/2023

Utilizzabile solo per i segnali periodici che rispettano le condizioni di Dirichlet.

Dato $x(t)$ periodico, quindi $x(t) = x(t-T)$, allora possiamo scrivere il segnale come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Dove c_n sono i **coefficienti di Fourier** del segnale e $e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ sono le armoniche della serie di Fourier. Le armoniche costituiscono una base ortonormale sullo spazio vettoriale che ha, essendo queste numerabili ma infinite, dimensione infinita, si tratta di una base ortonormale data la definizione di prodotto scalare:

$$< x(t), y(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt =$$

$$\Downarrow$$

$$< e^{i\frac{2\pi nt}{T}}, e^{i\frac{2\pi mt}{T}} >= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i\frac{2\pi(n-m)t}{T}}dt = \frac{1}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{i2\pi(n-m)}e^{i\frac{2\pi(n-m)t}{T}}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi(n-m)}\frac{e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}}{2i} \overset{Eulero}{=\!=\!=} \frac{1}{\pi(n-m)}\sin[(n-m)\pi] = sinc(n-m) \overset{n,m\in\mathbb{Z}}{=\!=\!=} \delta[n-m]$$

Perché il prodotto tra due vettori della base viene 0 e un prodotto di un vettore con se stesso viene 1

Usando questa definizione e il fatto che il prodotto scalare tra un versore e un elemento dello spazio vettoriale mi restituisce lo scalare da abbinare al versore nella combinazione lineare possiamo dire che:

$$c_n =< x(t), e^{i\frac{2\pi nt}{T}} >= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt$$

Esempi:

1. $$x(t) = A \Rightarrow \text{segnale costante}$$

   A occhio posso vedere che l'unico coefficente non nullo sarà quello per $n = 0 \Rightarrow e^{i\frac{2\pi nt}{T}=1}$ ma se volessimo usare la definizione formale avremmo:

   $$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} Ae^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{A}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{-i2\pi n}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{\pi n}\frac{e^{-i\pi n}-e^{i\pi n}}{-2i} = \frac{A}{\pi n}\sin(\pi n) =$$

   $$= Asinc(n) \xRightarrow{n\in\mathbb{Z}} c_n = \begin{cases} A & n=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2. $$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

   $$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \overset{Eulero}{=\!=\!=} \frac{A}{2}\left(e^{i\frac{2\pi t}{T}} + e^{-i\frac{2\pi t}{T}}\right) = \frac{A}{2}e^{i\frac{2\pi t}{T}} + \frac{A}{2}e^{-i\frac{2\pi t}{T}} \Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n=\pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Formalmente

   $$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{A}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(e^{i\frac{2\pi t}{T}} + e^{-i\frac{2\pi t}{T}}\right)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{A}{2\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{-i2\pi(n-1)}e^{-i\frac{2\pi(n-1)t}{T}}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} +$$

   $$+\frac{A}{2T}\frac{T}{-i2\pi(n+1)}e^{-i\frac{2\pi(n+1)t}{T}}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{2\pi(n-1)}\sin[\pi(n-1)] + \frac{A}{2\pi(n+1)}\sin[\pi(n+1)] =$$

   $$= \frac{A}{2}sinc(n-1) + \frac{A}{2}sinc(n+1) \xRightarrow{n\in\mathbb{Z}} \frac{A}{2}\delta[n-1] + \frac{A}{2}\delta[n+1] \Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n=\pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Treno di Rect

   $$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t-nT}{\tau}\right) \qquad T > \tau \text{ per evitare sovrapppposizione}$$

   $$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} rect\left(\frac{T}{\tau}\right)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{1}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{-i2\pi n}e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\pi n}\frac{e^{-i\frac{\pi n\tau}{T}} - e^{i\frac{\pi n\tau}{T}}}{-2i} =$$

   $$= \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) \overset{\cdot\frac{\tau}{T}\frac{T}{\tau}}{=\!=\!=} \frac{\tau}{T}sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right) = c_n$$

Esercizi per casa

1. $$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

   Da Eulero:

   $$x(t) = \frac{A}{2i}\left(e^{i\frac{2\pi t}{T}} - e^{-i\frac{2\pi t}{T}}\right) \Rightarrow c_n = \begin{cases} n\frac{A}{2i} & n=\pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2.
$$x(t) = A\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Dalle formule di duplicazione:

$$x(t) = A\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)}{2} \overset{Eulero}{=\!=\!=} \frac{A}{2} + \frac{A}{4}\left(e^{i\frac{4\pi t}{T}} + e^{-i\frac{4\pi t}{T}}\right) \Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n = 0 \\ \frac{A}{4} & n = \pm 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Proprietà della serie di Fourier:

1. Linearità

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}},\ y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$
$$\Downarrow$$
$$ax(t) + by(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ac_n + bd_n)e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Formalmente

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [ax(t)+by(t)]e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{a}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt + \frac{b}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(ac_n+bd_n)e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

Esempio utile: pseudo-onda quadra

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-nT}{\tau}\right) - rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}-nT}{\tau}\right)$$

Guardando il grafico posso scrivermi l'integrale come

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{\cancel{T}}{\cancel{T}}\frac{e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}}{-i2\pi n}\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} - \frac{\cancel{T}}{\cancel{T}}\frac{e^{-i\frac{2\pi nt}{T}}}{-i2\pi n}\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-i\pi\frac{n\tau}{T}} - e^{i\pi\frac{n\tau}{T}}}{-i2\pi n} - \frac{e^{-i\pi\frac{n}{T}\left(T-\frac{\tau}{2}\right)} - e^{i\pi\frac{2}{T}\left(T-\frac{\tau}{n}\right)}}{-i2\pi n} = \frac{\sin\left(\pi n\frac{\tau}{T}\right)}{n\pi} - \frac{e^{i\frac{\pi n\tau}{T}} - e^{i\frac{\pi n\tau}{T}}}{-2i\pi n} = 2\frac{\sin\left(\pi n\frac{\tau}{T}\right)}{n\pi} =$$
$$c_n = \frac{2\tau}{T}sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$

Ma è sbagliato perché a un certo punto abbiamo diviso per n che può valere 0, e non sarebbe un problema se oltre ad azzerarsi il denominatore (come abbiamo visto nell'esempio (3) verrebbe una sinc) ma anche il numeratore rendendo quella una forma indeterminata, dobbiamo quindi analizzare il caso $n = 0$ a parte.

Oppure, sapendo dall'esempio (3) i coefficienti del treno superiore (che chiamerò $x(t)$) e posso vedere quello inferiore come
$$x(t) - 1$$

E quindi vedere il segnale così

$$2x(t) - 1$$

A questo punto per la proprietà di lineartià della serie di Fourier i coefficienti sono

$$c_n = \begin{cases} \frac{2\tau}{T} - 1 & n = 0 \\ \frac{2\tau}{T} sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right) & n \neq 0 \end{cases}$$

2. Traslazione nel tempo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t - t_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi n(t-t_0)}{T}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-i\frac{2\pi nt_0}{T}} e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$\Downarrow$$

$$d_n = c_n e^{-i\frac{2\pi nt_0}{T}}$$

Formalmente

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t - t_0)e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt \overset{t'=t-t_0}{=\!=\!=} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-t_0}^{\frac{T}{2}-t_0} x(t')e^{-i\frac{2\pi t_0 n}{T}} e^{-i\frac{2\pi nt'}{T}} dt' =$$

$$= e^{-i\frac{2\pi nt_0}{T}} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-t_0}^{\frac{T}{2}-t_0} x(t')e^{-i\frac{2\pi nt'}{T}} dt' = c_n e^{-i\frac{2\pi nt_0}{T}}$$

Esempio utile treno di rect in cui la rect inizia in 0
Dall'esempio (3) ho i coefficienti c_n del segnale non traslato (che chiamerò $x(t)$). Questo viene traslato di $\frac{\tau}{2}$ $\Rightarrow$ applico la proprietà della traslazione nel tempo della serie di Fourier

$$x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \Rightarrow d_n = c_n e^{-i\frac{\pi n\tau}{T}}$$

Formalmente

$$d_n = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} e^{i\frac{2\pi nt}{T}} dt = \frac{\tau}{T} sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right) e^{i\frac{\pi n\tau}{T}}$$

Esempio utile Onda quadra (esempio precedente ma con $T = 2\tau$)
Dall'esempio precedente ho

$$c_n = \frac{1}{2} sinc\left(\frac{n}{2}\right) e^{-i2\pi n} = \frac{1}{2}\frac{e^{i\frac{\pi n}{2}} - e^{-i\frac{\pi n}{2}}}{\left(\frac{\pi n}{2}\right)2i} e^{-i2\pi n}$$

3. Traslazione in frequenza

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$y(t) = x(t)e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \overset{n'=n+k}{=\!=\!=} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} c_{n'-k} e^{i\frac{2\pi n't}{T}} \Rightarrow d_n = c_{n-k}$$

Formalmente

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{i\frac{2\pi kt}{T}}e^{i\frac{2\pi nt}{T}}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-i\frac{2\pi(n-k)t}{T}}dt$$

Integrare appunti