Simulazione secondo esonero

fondamenti di telecomunicazioni

Flavio Colacicchi

19/01/2024

1.

$$x(t) = 8sinc(4t)\cos(6\pi t)$$

Campionato con intervallo T_c pari al valore massimo tale da non avere aliasing e viene poi ricostruito con un filtro passa-basso ideale nell'intervallo di frequenze $[-3, 3]$ e ampiezza unitaria, calcolare

$$T_c \qquad x'(t) \qquad X'(f)$$

Svolgimento:

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{6}\right)$$

$$X(f) = \cancel{8}^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{4}}rect\left(\frac{f}{4}\right)\frac{1}{\cancel{2}}\left[\delta(f-3) + \delta(f+3)\right] = rect\left(\frac{f-3}{4}\right)\delta(f-3) + rect\left(\frac{f+3}{4}\right)\delta(f-3)$$

$$X[n] = \frac{1}{T_c}\sum_n X\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

$$T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{1}{10}$$

Se lavorassi nel tempo:

$$x_c(t) = x(t)\sum_n \delta(t - nT_c) = \sum_n x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

Se lavorassi nel dominio della freuenza

$$X_c(f) = 10\sum_n X\left(f - 10n\right) = 10\sum_n rect\left(\frac{f-3-10n}{4}\right) + rect\left(\frac{f+3-10n}{4}\right)$$

Il segbale campionato è quindi un treno di rect

$$X_c(f) = 10\sum_n rect\left(\frac{f-5-10n}{8}\right)$$

Ora lo faccio passare per il filtro

$$X'(f) = X_c(f)H(f) = 10\left[rect\left(\frac{f-2}{2}\right) + rect\left(\frac{f+2}{2}\right)\right]$$

E ora antitrasformo

$$x'(t) = 10 \cdot 2sinc(2t)(e^{i4\pi ft} + e^{-i4\pi ft}) = 40sinc(2t)\cos(4\pi t)$$

2. $x(t)$ viene campionato con il massimo intervallo T per non avere aliasing generando

$$x_c(t) = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \\ 0 & \forall n \neq \pm 1 \end{cases}$$

Viene poi ricostruito con un filtro passa-basso ideale nell'intervallo $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ e ha ampiezza T. Calcolare

$$x'(t) \qquad X'(f)$$

Svolgimento:

$$x_c(t) = \delta(t-T) + \delta(t+T) \xrightarrow{\mathscr{F}} X_c(f) = e^{-i2\pi fT} + e^{i2\pi fT} = 2\cos(2\pi fT)$$

$$H(f) = T \cdot rect\,(fT)$$

$$X'(f) = 2T\cos(2\pi fT) rect(fT)$$

$$x'(t) = \cancel{2}\cancel{T}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{T}}\left[\delta\left(t-T\right) + \delta\left(t+T\right)\right] * sinc\left(\frac{t}{T}\right) = sinc\left(\frac{t-T}{T}\right) + sinc\left(\frac{t+T}{T}\right)$$

Si poteva anche usare l'enunciato del teorema del campionamento che ci dice che nel caso in cui la frequenza di campionamento sia maggiore o uguale a quella di Nyquist

$$x'(t) = \sum_n x_c(t) sinc\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

E dopo ciò trasformarlo per ottenere $X'(f)$

3.

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

Dove x e y sono due processi aleatori stazionari statisticamente indipendenti bianchi nella banda $[-W, W]$ con densità di probabilità uniforme in $[-A, A]$. Calcolare

$$\mu_z \qquad P_Z \qquad R_Z(\tau) \qquad G_Z(z) \qquad p_Z(z)$$

Svolgimento:

Essendo bianchi

$$G_X(x) = \tfrac{P_X}{2W} rect\left(\tfrac{f}{2W}\right) \quad G_Y(y) = \tfrac{P_Y}{2W} rect\left(\tfrac{f}{2W}\right)$$

Essendo uniformi

$$p_X(x) = \tfrac{1}{2A} rect\left(\tfrac{x}{2A}\right) \qquad p_Y(y) = \tfrac{1}{2A} rect\left(\tfrac{y}{2A}\right)$$

$$\mu_z = E[x(t)+y(t)] = E[x(t)]+E[y(T)] = \mu_x+\mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p_Y(y)dy = 0+0 = 0$$

$$P_Y = P_X = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} x^2 dx = \frac{1}{6A}x^3\Big|_{-A}^{A} = \frac{A^2}{3}$$

$$\Rightarrow G_X(x) = G_Y(y) = \frac{A^2}{6W} rect\left(\frac{f}{2W}\right)$$

$$R_Z(\tau) = E[z(t+\tau)z(t)] = E[(x(t+\tau)+y(t+\tau))(x(t)+y(t))] = R_X(\tau)+R_Y(\tau)+2\mu_x\mu_y = R_X(\tau)+R_Y(\tau)$$

$$G_Y(y) \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} R_Y(\tau) = R_X(\tau) = \frac{A^2}{\cancel{6W}^3}\cancel{2W} sinc(2W\tau) \Rightarrow R_Z(\tau) = \frac{2A^2}{3} sinc(2W\tau)$$

$$R_Z(\tau) \xrightarrow{\mathscr{F}} G_Z(f) = \frac{2A^2}{3}\frac{1}{2W} rect\left(\frac{f}{2W}\right)$$

$$p_Z(z) = p_X(x) * p_Y(y)$$

4.

$$y(t) = x(t-T) + x(t+T) \qquad\qquad x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

sapendo f_0 costante e φ uniformemente distribuita in $[0, 2\pi]$ Calcolare

$$\mu_y = 0 \qquad\qquad P_Y = 2\cos^2(2\pi f_0 T)$$

$$R_Y(\tau) = 2\cos(2\pi f_0 \tau)\cos^2(2\pi f_0 T) \quad G_Y(f) = \cos^2(2\pi f_0 T)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$