



## การซ่อมแซมภาพที่ใช้การแปรผันรวมสำหรับภาพสี

พชรพร ขวัญเมือง, มัญชุกา จินตวงศ์

อาจารย์ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.นพดล ชุมชอบ

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

### 1. บทนำ

ภาพถ่ายหรือภาพ มีความสำคัญในชีวิตประจำวันเป็นอย่างมากนอกจากภาพจะเป็นสื่อกลางการสื่อความหมายแล้ว ในบางครั้งเราใช้ภาพเพื่อแสดงถึงความรู้สึกและอารมณ์ของตนเอง นอกจากนี้ภาพยังมีความจำเป็นต่อการประยุกต์ในด้านต่างๆ เช่น การประยุกต์ในด้านการแพทย์ การประยุกต์ในด้านความมั่นคงและความปลอดภัย และการประยุกต์ในด้านอุตุนิยมวิทยา

การเกิดขึ้นของสัญญาณรบกวนในภาพถ่ายเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ เราจึงต้องการหาวิธีเพื่อแก้ปัญหาสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในภาพเหล่านี้ออกไป เพื่อให้ได้ภาพที่มีคุณภาพ และนำไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์ เราจะเริ่มจากการพิจารณาภาพ  $u$  :  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset [0, \infty)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่  $x = (x, y) \in \Omega$  แทนพิกัดทางกายภาพ (physical position) ของภาพ  $u(x) \in V$  แทนระดับความเข้มของภาพ (image intensity) ที่  $x$  และ  $\Omega$  แทนโดเมนของภาพ ซึ่งในที่นี้เราสามารถสมมติได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญว่า  $\Omega = [1, n]^2$  และ  $V = [0, 255]$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นโดย [1] (จะเรียกว่าตัวแบบ ROF) ซึ่งเป็นวิธีกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพด้วยวิธีการแปรผันที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลายในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่มีโทนความเข้มสีเทา (grayscale image)

$$\min_u \{ \mathcal{D}(u, f) + \alpha \mathcal{R}(u) \} \quad (1)$$

โดยที่  $\mathcal{D}(u, f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 d\Omega$  และ  $\mathcal{R}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} d\Omega$

สำหรับภาพในระบบสี RGB เราพิจารณา  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow V^3$  แทนภาพในระบบสี RGB เมื่อ  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  โดยที่  $u_1, u_2, u_3 : \Omega \rightarrow V$  แทนภาพโทนสีแดง สีเขียวและสีน้ำเงินของ  $\mathbf{u}$  และให้  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow V^3$  แทนภาพในระบบสี RGB ที่มีสัญญาณรบกวน เราสามารถปรับปรุงตัวแบบ ROF ได้เป็น

$$\min_u \{ \bar{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) + \alpha \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{u}) \} \quad (2)$$

เมื่อ  $\bar{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}(u_i, f_i)$  และ  $\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{R}(u_i)$

เนื่องจากภาพทั่วไปเป็นภาพสี โครงการวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายเพื่อพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพสีโดยใช้ตัวแบบ ROF ที่ถูกปรับปรุง (2)



## 2. วิธีการเชิงตัวเลข

### 2.1 สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

โดยแคลคูลัสการแปรผัน สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับตัวแบบ ROF (1) เขียนได้เป็น

$$-\alpha \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right) + u(x) - f(x) = 0, x \in \Omega \quad (3)$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขขอบ } \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega \quad (4)$$

### 2.2 การดิสครีไทซ์เซชันแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

ในการแก้ปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) (3) โดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ เราจะเริ่มจากการดิสครีไทซ์เซชันโดเมนภาพ  $\Omega$  แบบคงรูปด้วยระยะกริด (grid spacing)  $h = 1$  และจุดต่อไปนี้เป็น  $x_i = ih, i = 1, 2, \dots, n$  และ  $y_j = jh, j = 1, 2, \dots, n$  ซึ่งจะได้โดเมนภาพแบบดิสครีไทซ์ (discrete image domain)

$$\Omega_h = \{x \in \Omega | x = u(x_i, y_j)^T = (ih, jh)^T, 1 \leq i, j \leq n\}$$

กำหนดให้  $(u)_{i,j} = u(x_i, y_j)$  แทนฟังก์ชันกริด (grid function) ที่จุด  $(x_i, y_j)$  ประมาณค่าไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งสามารถถูกกำหนดโดย

$$\partial_x^+(u)_{i,j} = (u)_{i,j+1} - (u)_{i,j}$$

$$\partial_x^-(u)_{i,j} = (u)_{i,j} - (u)_{i,j-1}$$

$$\partial_y^+(u)_{i,j} = (u)_{i+1,j} - (u)_{i,j}$$

$$\partial_y^-(u)_{i,j} = (u)_{i,j} - (u)_{i-1,j}$$

ในที่นี้เงื่อนไขค่าขอบใน (4) จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณฟังก์ชันกริด ณ บริเวณขอบของ  $\Omega_h$  ดังนี้

$$(u)_{i,0} = (u)_{i,j}, (u)_{i,n+1} = (u)_{i,n}, (u)_{0,j} = (u)_{1,j}, (u)_{n+1,j} = (u)_{n,j}$$

### 2.3 วิธีการเดินเวลา

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงวิธีการเดินเวลา เราจะเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ใน (3) ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad & N(u(x)) = g(x) \\ & N(u(x)) = -\alpha \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|} \right) + u(x) - f(x) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{และ} \quad g(x) = 0$$

วิธีการเดินเวลาหรือวิธีโทมัสมาร์ชซึ่งเป็นวิธีการที่สะดวกและง่ายในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังสมการ (3) แนวคิดของวิธีการนี้ คือ การแนะนำตัวแปรเวลาสังเคราะห์  $t \geq 0$  และ คำนวณหาคำตอบแบบสถานะคงตัว (steady state solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ขึ้นอยู่กับเวลา

$$\partial_t u(x, t) + N(u(x, t)) = g(x) \quad (6)$$

เพื่อแก้ไขความไม่เป็นเชิงเส้น  $N$  เราสามารถใช้รูปแบบที่ชัดเจนของออยเลอร์ (Euler's explicit scheme)

$$\text{ดังนี้} \quad \partial_t u(x, t_k) + g(x) - N(u(x, t_k)), k = 0, 1, 2, \dots$$

โดยที่  $u(x, t_0)$  แทนคำตอบเริ่มต้น โดยทั่วไปเรากำหนดให้  $u(x, t_0) = f(x)$



สำหรับการดิสครีไทซ์โดเมนเวลา  $[0, \infty)$  กำหนดให้  $\tau > 0$  แทนขั้นเวลา (time step) ดังนั้นการปรับปรุง ณ รอบเวลาครั้งที่  $k + 1$  สามารถถูกกำหนดได้เป็น

$$u(x, t_{k+1}) = u(x, t_k) + \tau (g(x) - N(u(x, t_k))) \quad (7)$$

เพราะฉะนั้นเมื่อทำการประยุกต์การประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในหัวข้อ 2.2 เราสามารถปรับปรุง  $u$  ที่จุดกริด  $(x_i, y_i)$  ได้เป็น

$$(u^{[k+1]})_{i,j} = (u^{[k]})_{i,j} + \tau (g(x) - N(u^{[k]})_{i,j}) \quad (8)$$

เมื่อ 
$$N(u^{[k]})_{i,j} = -\alpha \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u^{[k]}}{|\nabla u^{[k]}|} \right)_{i,j} + (u^{[k]})_{i,j} - (f^{[k]})_{i,j} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u^{[k]}}{|\nabla u^{[k]}|} \right) = \partial_x^- (\mathcal{D}(u^{[k]})_{i,j} \partial_x^+ (u^{[k]})_{i,j}) + \partial_y^- (\mathcal{D}(u^{[k]})_{i,j} \partial_y^+ (u^{[k]})_{i,j}) \quad (10)$$

$$\mathcal{D}(u^{[k]})_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_x^+ (u^{[k]})_{i,j})^2 + (\partial_y^+ (u^{[k]})_{i,j})^2 + \beta}}, \quad (0 < \beta \ll 1) \quad (11)$$

## 2.4 วิธีการสปริทเบรกแมนสำหรับตัวแบบ ROF (1)

วิธีการสปริทเบรกแมนถูกคิดค้นโดย Goldstien และ Osher [2] เริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรเวกเตอร์เสริม  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน (Bregman iterative parameter)  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$  และพารามิเตอร์ตัวโทษ (panalty parameter)  $\theta > 0$  เพื่อแปลงปัญหาเชิงการแปรผัน (1) เป็น

$$\min_{u, \mathbf{w}} \{ \mathcal{D}(u, f) + \alpha \int_{\Omega} |\mathbf{w}| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int (\mathbf{w} - \nabla u - \mathbf{b})^2 d\Omega \} \quad (12)$$

หลังจากใช้แคลคูลัสของการแปรผันกับ (12) จะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์เป็น

$$u - \theta \Delta u = f - \theta \nabla \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{b}) \quad (13)$$

$$\alpha \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} + \theta (\mathbf{w} - \nabla u - \mathbf{b}) = 0 \quad (14)$$

เมื่อ  $u = u(x), \mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$  และ  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$

เพื่อความสะดวกในการแก้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ คณะผู้วิจัยใน [2,3] ได้ใช้เทคนิคการทำซ้ำแบบสลับ เริ่มจากการแก้ปัญหาย่อยใน (13) เพื่อกำหนดค่าของ  $u$  จากนั้นนำ  $u$  ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหาย่อยใน (14) เพื่อกำหนดค่าของ  $\mathbf{w}$  โดยจะดำเนินการทำซ้ำแบบสลับจนกระทั่งลำดับของ  $u$  สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด

$$\frac{\| \mathbf{u}^{new} - \mathbf{u}^{old} \|}{\| \mathbf{u}^{new} \|} < \varepsilon$$

เมื่อ  $\mathbf{u}^{new}$  และ  $\mathbf{u}^{old}$  แทนเวกเตอร์ของ  $u$  ที่ได้จากการทำซ้ำรอบปัจจุบันและการทำซ้ำรอบก่อนหน้า  $\varepsilon > 0$  แทนค่าความแม่นยำ

ในการแก้ปัญหาย่อยใน (13) เราจะเริ่มจากการประมาณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

$$(u)_{i,j} - \theta (\partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} + \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j}) = (G)_{i,j} \quad (15)$$

เมื่อ 
$$(G)_{i,j} = (f)_{i,j} - \theta (\partial_x^- ((\mathbf{w}_1)_{i,j} - (\mathbf{b}_1)_{i,j}) + \partial_y^- ((\mathbf{w}_2)_{i,j} - (\mathbf{b}_2)_{i,j})) \quad (16)$$

จากนั้นทำการสมมติว่า (13) มีเงื่อนไขขอบแบบเป็นคาบ (periodic boundary condition) ดังนั้น



$$\begin{aligned} \partial_x^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j+1} - (u)_{i,j} & \text{เมื่อ } 1 \leq i < n, 1 \leq j < n \\ (u)_{i,1} - (u)_{i,j} & \text{เมื่อ } 1 \leq i < n, j = n \end{cases} \\ \partial_x^-(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j} - (u)_{i,j-1} & \text{เมื่อ } 1 \leq i \leq n, 1 < j \leq n \\ (u)_{i,j} - (u)_{i,n} & \text{เมื่อ } 1 \leq i \leq n, j = 1 \end{cases} \\ \partial_y^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i+1,j} - (u)_{i,j} & \text{เมื่อ } 1 \leq i < n, 1 \leq j \leq n \\ (u)_{i,j} - (u)_{i-1,j} & \text{เมื่อ } i = n, 1 \leq j \leq n \end{cases} \\ \partial_y^-(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j} - (u)_{i-1,j} & \text{เมื่อ } 1 \leq i < n, 1 \leq j \leq n \\ (u)_{i,j} - (u)_{n,j} & \text{เมื่อ } i = n, 1 \leq j \leq n \end{cases} \\ \partial_x^- \partial_x^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,n} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,j+1} & \text{เมื่อ } 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ (u)_{i,j-1} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,j+1} & \text{เมื่อ } 1 < i, j < n \\ (u)_{i,j-1} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,1} & \text{เมื่อ } 1 \leq i \leq n, j = n \end{cases} \\ \partial_y^- \partial_y^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{n,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i+1,j} & \text{เมื่อ } i = 1, 1 \leq j \leq n \\ (u)_{i-1,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i+1,j} & \text{เมื่อ } 1 < i < n, 1 \leq j \leq n \\ (u)_{i-1,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{1,j} & \text{เมื่อ } i = n, 1 \leq j \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

หลังจากใช้การแปลงฟูเรียร์แบบดิสครีต (discrete Fourier transform)  $\mathcal{F}$  กับ (15) จะได้

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}((u)_{i,j} - \theta(\partial_x^- \partial_x^+(u)_{i,j} + \partial_y^- \partial_y^+(u)_{i,j})) = \mathcal{F}((G)_{i,j}) \\ \text{หรือ} &\quad \left(1 - \left(2\theta \cos\left(\frac{2\pi s}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) - 2\right)\right) \mathcal{F}((u)_{i,j}) = \mathcal{F}((G)_{i,j}) \end{aligned} \quad (17)$$

เมื่อ  $i, j \in [1, n]$  แทนดัชนีในโดเมนเวลา และ  $r, s \in [0, n]$  เป็นดัชนีในโดเมนความถี่ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} (u)_{i,j} &= \text{Re} \left( \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}((G)_{i,j})}{\xi} \right) \right) \\ \text{เมื่อ} &\quad \xi = \left(1 - \left(2\theta \cos\left(\frac{2\pi s}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) - 2\right)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

และ  $\mathcal{F}^{-1}$  แทนการแปลงฟูเรียร์ผกผันแบบดิสครีต (discrete Fourier transform)

สำหรับ (14) มีผลเฉลยวิเคราะห์ที่ถูกกำหนดโดย [3]

$$(w_{i,j}) = \max \left( |\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}| - \frac{\alpha}{\theta}, 0 \right) \frac{\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}}{|\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}|} \quad (19)$$

## 2.5 วิธีการเชิงตัวเลขที่นำเสนอ

ในงานวิจัยนี้ เราจะนำวิธีการสปริตเบรกแมนมาประยุกต์กับปัญหาเชิงแปรผัน (2) โดยเราแนะนำ  
เวกเตอร์เสริม  $w_1, w_2, w_3$  พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน  $b_1, b_2, b_3$  และพารามิเตอร์ตัวโทษ  
 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$  เพื่อแปลงปัญหาเชิงแปรผัน (2) เป็น

$$\begin{aligned} \min_{u, w_1, w_2, w_3} &\{ \bar{\mathcal{D}}(u, f) + \alpha \int_{\Omega} |w_1| d\Omega + \frac{\theta_1}{2} \int (\mathbf{w}_1 - \nabla u_1 - \mathbf{b}_1)^2 d\Omega \\ &+ \alpha \int_{\Omega} |w_2| d\Omega + \frac{\theta_2}{2} \int (\mathbf{w}_2 - \nabla u_2 - \mathbf{b}_2)^2 d\Omega \\ &+ \alpha \int_{\Omega} |w_3| d\Omega + \frac{\theta_3}{2} \int (\mathbf{w}_3 - \nabla u_3 - \mathbf{b}_3)^2 d\Omega \} \end{aligned} \quad (20)$$

เมื่อใช้แคลคูลัสของการแปรผันกับ (20) จะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์เป็น

$$u_1 - \theta \Delta u_1 = f_1 - \theta_1 \nabla \cdot (\mathbf{w}_1 - \mathbf{b}_1) \quad (21)$$

$$u_2 - \theta \Delta u_2 = f_2 - \theta_2 \nabla \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{b}_2) \quad (22)$$

$$u_3 - \theta \Delta u_3 = f_3 - \theta_3 \nabla \cdot (\mathbf{w}_3 - \mathbf{b}_3) \quad (23)$$



$$\alpha \frac{w_1}{|w_1|} + \theta_1 \nabla \cdot (w_1 - \nabla u_1 - b_1) \quad (24)$$

$$\alpha \frac{w_2}{|w_2|} + \theta_2 \nabla \cdot (w_2 - \nabla u_2 - b_2) \quad (25)$$

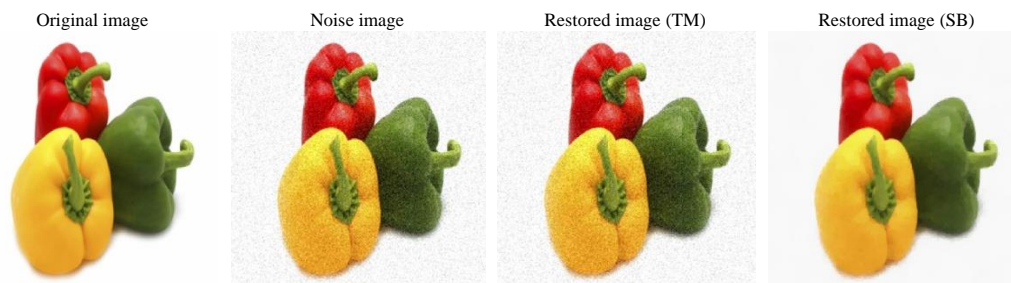
$$\alpha \frac{w_3}{|w_3|} + \theta_3 \nabla \cdot (w_3 - \nabla u_3 - b_3) \quad (26)$$

### 3.ผลการทดลองเชิงตัวเลข

ประสิทธิภาพของภาพที่ผ่านการจัดสัญญาณรบกวน จะประเมินโดยใช้ค่า PSNR ระหว่างภาพต้นฉบับ  $u^*$  และภาพผลลัพธ์  $u$  ซึ่งนิยามโดย

$$PSNR = 10 \log \left( \frac{255^2}{MSE} \right)$$

โดยที่  $MSE = \frac{1}{3n^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n ((u_i^*)_{i,j} - (u_l)_{i,j})^2$



รูปภาพที่ 1 : ผลการกำจัดสัญญาณรบกวน ซึ่งมีขนาดความคมชัด  $256 \times 256$  พิกเซล เมื่อ  $\tau = 10^{-3}, \beta = 10^{-2}, \alpha = 10, \theta = 1$

ตารางที่ 1 : ผลการคำนวณด้วยตัวแบบเชิงการแปรผันที่ได้นำเสนอ (1) สำหรับภาพสีด้วยวิธีการโทมัสมาร์ชชิง และวิธีการสปริทเบรกแมน

	PSNR	เวลา (วินาที)
ภาพที่มีสัญญาณรบกวน	26.2476	0.3215
วิธีการโทมัสมาร์ชชิง	26.2742	37.1368
วิธีการสปริทเบรกแมน	32.8058	0.3215

จากผลการศึกษาเราพบว่าวิธีการสปริทเบรกแมนที่นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาเชิงการแปรผัน (2) สามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพสีในระบบ RGB ได้และจากรูปภาพที่ 1 จะเห็นได้ว่าภาพผลลัพธ์จากวิธีการสปริทเบรกแมนให้ความคมชัดของภาพได้ดีกว่าวิธีการโทมัสมาร์ชชิงและจากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าภาพผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการสปริทเบรกแมนมีประสิทธิภาพสูงกว่าและใช้เวลาในการประมวลผลเร็วกว่าภาพผลลัพธ์จากวิธีการโทมัสมาร์ชชิง



#### 4.บทสรุป

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับภาพสีและขั้นตอนวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ ผลการทดลองเชิงตัวเลขพบว่าขั้นตอนวิธีการเชิงตัวเลขที่ผู้วิจัยได้นำเสนอสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนดังกล่าวได้อย่างแม่นยำและรวดเร็วกว่าวิธีทอมาร์ชชิงซึ่งเป็นวิธีพื้นฐาน

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D* Vol. 60 (1992), pp. 259-268.
- [2] T. Goldstein and S. Osher. The split bregman method for l1-regularized problems. *SIAM Journal on Sciences* 2009, 2(2), pp. 323-343.
- [3] W. Lu, J. Duan, Z. Qiu, Z. Pan, R. W. Lim and L. Bai. Implementation of high-order variational models made easy for image processing. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 39 (2016), pp. 4208-4233.