

Chương VI:

**AUTOMATA ĐẨY XUỐNG**  
**(Push Down Automata)**

Giảng viên:

Phạm Xuân Hiền

**Nội dung**

- Khái niệm về Automata đẩy xuống (PDA)
- PDA đơn định và không đơn định
- PDA chấp nhận chuỗi bằng Stack rỗng và PDA chấp nhận chuỗi bằng trạng thái kết thúc
- Sự tương đương giữa PDA và CFL

2

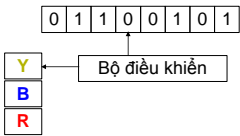
**PDA (1)**

- Ngôn ngữ chính quy:
  - Được sinh từ văn phạm chính quy
  - Được đoán nhận bởi Automata hữu hạn (đơn định hoặc không đơn định)
- Ngôn ngữ phi ngữ cảnh:
  - Được sinh từ văn phạm phi ngữ cảnh
  - Được đoán nhận bởi Automata đẩy xuống (PDA).
  - Tuy nhiên, **chỉ automata đẩy xuống không đơn định (NPDA)** mới có thể đủ mạnh để đoán nhận lớp ngôn ngữ phi ngữ cảnh (DPDA chỉ cho phép đoán nhận một tập con thực sự của lớp ngôn ngữ này)

3

**PDA (2)**

**Mô tả:** gồm các thành phần của một automata hữu hạn với sự bổ sung thêm một ngăn xếp làm việc (Stack)



4

## PDA (3)

**Ví dụ:** xét  $L = \{wcw^R \mid w \in (0 + 1)^*\}$  được sinh ra từ CFG  
 $S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid c$

Ta xây dựng PDA như sau:

- Bộ điều khiển có 2 trạng thái  $q_1$  và  $q_2$
- Stack có 3 ký hiệu: **xanh (B)**, **vàng (Y)** và **đỏ (R)**
- Quy tắc thao tác trên automata:

INPUT				
Đỉnh Stack	Trạng thái	0	1	c
<b>Xanh</b>	$q_1$	Thêm đĩa xanh, giữ nguyên $q_1$	Thêm đĩa vàng, giữ nguyên $q_1$	Chuyển sang $q_2$
	$q_2$	Xoá đỉnh Stack, giữ nguyên $q_2$		
<b>Vàng</b>	$q_1$	Thêm đĩa xanh, giữ nguyên $q_1$	Thêm đĩa vàng, giữ nguyên $q_1$	Chuyển sang $q_2$
	$q_2$		Xoá đỉnh Stack, giữ nguyên $q_2$	
<b>Đỏ</b>	$q_1$	Thêm đĩa xanh, giữ nguyên $q_1$	Thêm đĩa vàng, giữ nguyên $q_1$	Chuyển sang $q_2$
	$q_2$	Xoá đỉnh Stack không cần đọc input		

5

## PDA (4)

### Các khái niệm:

- Phân loại PDA: đơn định (DPDA) và không đơn định (NPDA)
- Phép chuyển: có 2 kiểu
  - Phụ thuộc ký hiệu nhập:** với một trạng thái, một ký hiệu tại đỉnh Stack và một ký hiệu nhập, PDA lựa chọn trạng thái kế tiếp, thay thế ký hiệu trên Stack và di chuyển đầu đọc sang phải một ký hiệu.
  - Không phụ thuộc ký hiệu nhập ( $\epsilon$  – dịch chuyển):** ký hiệu nhập không được dùng, đầu đọc không di chuyển.
- Ngôn ngữ được chấp nhận bởi PDA
  - Bởi Stack rỗng
  - Bởi trạng thái kết thúc

**Một ngôn ngữ được chấp nhận bởi PDA khi và chỉ khi nó là một ngôn ngữ phi ngữ cảnh.**

6

## PDA (5)

**Định nghĩa:** một PDA M là một hệ thống 7 thành phần

**$M(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$**

- $Q$ : tập hữu hạn các trạng thái
- $\Sigma$ : bộ chữ cái nhập
- $\Gamma$ : bộ chữ cái Stack
- $\delta$ : hàm chuyển  $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \text{tập con của } Q \times \Gamma^*$
- $q_0$ : trạng thái khởi đầu
- $Z_0$ : ký hiệu bắt đầu trên Stack
- $F \subseteq Q$ : tập các trạng thái kết thúc (nếu PDA chấp nhận chuỗi bằng Stack rỗng thì  $F = \emptyset$ )

7

## PDA (6)

INPUT				
Đỉnh Stack	Trạng thái	0	1	c
<b>Xanh</b>	$q_1$	Thêm đĩa xanh, giữ nguyên $q_1$	Thêm đĩa vàng, giữ nguyên $q_1$	Chuyển sang $q_2$
	$q_2$	Xoá đỉnh Stack, giữ nguyên $q_2$		
<b>Vàng</b>	$q_1$	Thêm đĩa xanh, giữ nguyên $q_1$	Thêm đĩa vàng, giữ nguyên $q_1$	Chuyển sang $q_2$
	$q_2$		Xoá đỉnh Stack, giữ nguyên $q_2$	
<b>Đỏ</b>	$q_1$	Thêm đĩa xanh, giữ nguyên $q_1$	Thêm đĩa vàng, giữ nguyên $q_1$	Chuyển sang $q_2$
	$q_2$	Xoá đỉnh Stack không cần đọc input		

### Hàm chuyển $\delta$ :

- Hàm chuyển phụ thuộc ký hiệu nhập  
 $\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_m, \gamma_m)\}$
- Hàm chuyển không phụ thuộc ký hiệu nhập  
 $\delta(q, \epsilon, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_m, \gamma_m)\}$

**Ví dụ:** PDA chấp nhận  $wcw^R$  bằng Stack rỗng

- $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$
- $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$
- $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$
- $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, YB)\}$
- $\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, BY)\}$
- $\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$
- $\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$
- $\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$
- $\delta(q_1, c, Y) = \{(q_2, Y)\}$
- $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$
- $\delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, \epsilon)\}$
- $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$

8

## PDA (7)

**Hình thái (Instantaneous Descriptions):** là một bộ ba  $(q, w, \gamma)$  dùng để ghi nhớ trạng thái và nội dung của Stack

với  $q$  là trạng thái,

$w$  chuỗi nhập,

$\gamma$  chuỗi các ký hiệu trên stack

Nếu  $M(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  là một PDA, thì

$(q, aw, Za) \vdash_M (p, w, \beta\alpha)$  nếu  $\delta(q, a, Z)$  chứa  $(p, \beta)$

**Ngôn ngữ chấp nhận bởi PDA:** Với PDA  $M(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

• **Ngôn ngữ được chấp nhận bởi trạng thái kết thúc**

$L(M) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \gamma) \text{ với } p \in F \text{ và } \gamma \in \Gamma^*\}$

• **Ngôn ngữ được chấp nhận bởi Stack rỗng**

$N(M) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon) \text{ với } p \in Q\}$

9

## PDA (8)

**Ví dụ với:**

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ | 7) $\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$                |
| 2) $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$ | 8) $\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$                |
| 3) $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ | 9) $\delta(q_1, c, Y) = \{(q_2, Y)\}$                |
| 4) $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, YB)\}$ | 10) $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$        |
| 5) $\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, BY)\}$ | 11) $\delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, \epsilon)\}$        |
| 6) $\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$ | 12) $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$ |

**PDA chấp nhận  $wcw^R$  bằng Stack rỗng với chuỗi nhập 001c100**

$(q_1, 001c100, R) \vdash (q_1, 01c100, BR) \vdash (q_1, 1c100, BBR) \vdash$

$(q_1, c100, YBBR) \vdash (q_2, 100, YBBR) \vdash (q_2, 00, BBR) \vdash$

$(q_2, 0, BR) \vdash (q_2, \epsilon, R) \vdash (q_2, \epsilon, \epsilon) : \text{Chấp nhận}$

**chuỗi nhập 001c100 thuộc ngôn ngữ được chấp nhận bởi Stack rỗng**

10

## PDA không đơn định (NPDA) (1)

**Ví dụ:** thiết kế PDA chấp nhận  $\{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$  bằng Stack rỗng

• Không có ký hiệu  $c$  để biết thời điểm chuyển từ trạng thái  $q_1$  sang  $q_2$

• Bắt buộc phải đoán thử (**khi thấy 2 ký hiệu liên tiếp giống nhau**)

▫ Nếu ký hiệu thuộc chuỗi xuôi: giữ nguyên trạng thái  $q_1$  và push vào Stack

▫ Nếu ký hiệu thuộc chuỗi ngược: chuyển sang trạng thái  $q_2$  và pop khỏi Stack

•  $M(\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, B, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ :

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$                  | 6) $\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY), (q_2, \epsilon)\}$ |
| 2) $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$                  | 7) $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$            |
| 3) $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB), (q_2, \epsilon)\}$ | 8) $\delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, \epsilon)\}$            |
| 4) $\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, BY)\}$                  | 9) $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$     |
| 5) $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, YB)\}$                  | 10) $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$    |

11

## PDA không đơn định (NPDA) (2)

**Ví dụ:** các phép chuyển hình thái của PDA chấp nhận chuỗi 001100 thuộc ngôn ngữ  $\{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$  bằng Stack rỗng

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$                  | 6) $\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY), (q_2, \epsilon)\}$ |
| 2) $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$                  | 7) $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$            |
| 3) $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB), (q_2, \epsilon)\}$ | 8) $\delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, \epsilon)\}$            |
| 4) $\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, BY)\}$                  | 9) $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$     |
| 5) $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, YB)\}$                  | 10) $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$    |
- ↓  
 $(q_1, 001100, R) \rightarrow (q_2, 1100, R) \rightarrow (q_2, 1100, \epsilon) : \text{Không chấp nhận}$   
 ↓  
 $(q_1, 1100, BBR)$   
 ↓  
 $(q_1, 100, YBBR) \rightarrow (q_2, 00, BBR)$   
 ↓  
 $(q_1, 00, YYBBR) \quad (q_2, 0, BR) \rightarrow (q_2, \epsilon, R) \rightarrow (q_2, \epsilon, \epsilon) : \text{Chấp nhận}$   
 ↓  
 $(q_1, 0, BYYBBR) \rightarrow (q_2, \epsilon, YYBBR) : \text{Không chấp nhận}$   
 ↓  
 $(q_1, \epsilon, BBYYBBR) : \text{Không chấp nhận}$

12

## PDA đơn định (DPDA)

**Định nghĩa:** một PDA  $M(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  được gọi là đơn định nếu:

- $\forall q \in Q$  và  $Z \in \Gamma$ : nếu  $\delta(q, \epsilon, Z) \neq \emptyset$  thì  $\delta(q, a, Z) = \emptyset$  với  $\forall a \in \Sigma$
- Không có  $q \in Q, Z \in \Gamma$  và  $a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})$  mà  $\delta(q, a, Z)$  chứa nhiều hơn một phần tử

**Chú ý:** đối với PDA thì dạng đơn định và không đơn định là *không tương đương nhau*.

**Ví dụ:**  $ww^R$  được chấp nhận bởi PDA không đơn định, nhưng không được chấp nhận bởi bất kỳ một PDA đơn định nào.

13

## Tương đương giữa PDA với Stack rỗng và PDA với trạng thái kết thúc (1)

**Định lý 6.1:** Nếu một ngôn ngữ phi ngữ cảnh  $L$  được chấp nhận bởi một PDA chấp nhận chuỗi bởi trạng thái kết thúc  $M_2$  thì  $L$  cũng được chấp nhận bởi một PDA chấp nhận chuỗi bởi Stack rỗng  $M_1$

**Cách xây dựng:**

Đặt  $M_2(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  và  $M_1(Q \cup \{q_e, q_0'\}, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0', X_0, \emptyset)$

- $\delta'(q_0', \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
- $\delta'(q, a, Z)$  chứa mọi phần tử của  $\delta(q, a, Z)$  với  $a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})$
- $\delta'(q, \epsilon, Z)$  chứa  $(q_e, \epsilon)$  với  $\forall q \in F$  và  $Z \in (\Gamma \cup \{X_0\})$
- $\delta'(q_e, \epsilon, Z)$  chứa  $(q_e, \epsilon)$  với  $\forall Z \in (\Gamma \cup \{X_0\})$

14

## Tương đương giữa PDA với Stack rỗng và PDA với trạng thái kết thúc (2)

**Định lý 6.2:** Nếu một ngôn ngữ phi ngữ cảnh  $L$  được chấp nhận bởi một PDA chấp nhận chuỗi bởi Stack rỗng  $M_1$  thì  $L$  cũng được chấp nhận bởi một PDA chấp nhận chuỗi bởi trạng thái kết thúc  $M_2$

**Cách xây dựng:**

Đặt  $M_1(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$   
và  $M_2(Q \cup \{q_0', q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta', q_0', X_0, \{q_f\})$

- $\delta'(q_0', \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
- $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$  với  $a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})$
- $\delta'(q, \epsilon, X_0)$  chứa  $(q_f, \epsilon)$  với  $\forall q \in Q$

15

## Tương đương giữa PDA và CFL (1)

**Định lý 6.3:** Nếu  $L$  là một ngôn ngữ phi ngữ cảnh thì tồn tại PDA chấp nhận chuỗi với Stack rỗng  $M$  sao cho  $L = N(M)$

**Cách xây dựng:**

Đặt  $G(V, T, P, S)$  thỏa dạng chuẩn Greibach và  $L(G)$  không chứa  $\epsilon$

Đặt  $M(\{q\}, T, V, \delta, q, S, \emptyset)$  là PDA chấp nhận  $L$  với Stack rỗng

- $\delta(q, a, A) = (q, \gamma)$  khi và chỉ khi  $A \rightarrow a\gamma$

**Ví dụ:**  $S \rightarrow aAA; A \rightarrow aS \mid bS \mid a$

**NPDA** tương đương  $M(\{q\}, \{a, b\}, \{S, A\}, \delta, q, S, \emptyset)$  với  $\delta$  như sau:

1.  $\delta(q, a, S) = \{(q, AA)\}$
2.  $\delta(q, a, A) = \{(q, S), (q, \epsilon)\}$
3.  $\delta(q, b, A) = \{(q, S)\}$

16

- 1 CFG ở dạng chuẩn Greibach nếu các luật sinh có dạng sau:

$$i. A \rightarrow aA_1A_2\dots A_n$$

$$ii. A \rightarrow a$$

$$iii. S \rightarrow \epsilon \text{ (trường hợp đặc biệt)}$$

Trong đó  $a \in \Sigma$  and  $A_i \in V - \{S\}$  với  $i = 1, 2, \dots, n$

- 1 CFG ở dạng chuẩn Chomsky nếu các luật sinh có dạng:

$$i. A \rightarrow BC$$

$$ii. A \rightarrow a$$

$$iii. S \rightarrow \epsilon \text{ (trường hợp đặc biệt)}$$

với  $B, C \in V - \{S\}$

## Tương đương giữa PDA và CFL (2)

**Định lý 6.4:** Nếu L được chấp nhận bởi một PDA chấp nhận chuỗi bởi Stack rỗng thì L là ngôn ngữ phi ngữ cảnh

**Cách xây dựng:**

Đặt PDA  $M(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$  chấp nhận L với Stack rỗng

Đặt  $G(V, T, P, S)$  là CFG, trong đó:

- $V$  là tập các đối tượng dạng  $[q, A, p]$
- $S$  là ký hiệu bắt đầu mới được thêm vào
- $P$  là tập các luật sinh dạng
  - $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$  với  $\forall q \in Q$
  - $[q, A, q_{m+1}] \rightarrow a [q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3]\dots[q_m, B_m, q_{m+1}]$  sao cho  $\delta(q, a, A)$  có chứa  $(q_1, B_1B_2\dots B_m)$   
Nếu  $m = 0$  thì luật sinh có dạng  $[q, A, q_1] \rightarrow a$

18

## Tương đương giữa PDA và CFL (3)

**Ví dụ:** xây dựng CFG tương đương sinh ra ngôn ngữ được chấp nhận bởi PDA  $M(\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$  với  $\delta$  như sau:

- $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$
- $\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$
- $\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$
- $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$
- $\delta(q_1, \epsilon, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$
- $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, \epsilon)\}$

**Xây dựng:** CFG  $G(V, \{0, 1\}, P, S)$

- Tập các biến  $V = [q, A, p] \cup S$   
 $= \{S, [q_0, X, q_0], [q_0, X, q_1], [q_1, X, q_0], [q_1, X, q_1], [q_0, Z_0, q_0], [q_0, Z_0, q_1], [q_1, Z_0, q_0], [q_1, Z_0, q_1]\}$

- Tập các luật sinh  $P$

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_0] \mid [q_0, Z_0, q_1]$$

$$\delta_i) [q_0, Z_0, q_0] \rightarrow 0 [q_0, X, q_0] [q_0, Z_0, q_0] \mid 0 [q_0, X, q_1] [q_1, Z_0, q_0]$$

$$[q_0, Z_0, q_1] \rightarrow 0 [q_0, X, q_0] [q_0, Z_0, q_1] \mid 0 [q_0, X, q_1] [q_1, Z_0, q_1]$$

19

## Tương đương giữa PDA và CFL (4)

$$\delta_2) [q_0, X, q_0] \rightarrow 0 [q_0, X, q_0] [q_0, X, q_0] \mid 0 [q_0, X, q_1] [q_1, X, q_0]$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow 0 [q_0, X, q_0] [q_0, X, q_1] \mid 0 [q_0, X, q_1] [q_1, X, q_1]$$

$$\delta_3) [q_0, X, q_1] \rightarrow 1$$

$$\delta_4) [q_1, X, q_1] \rightarrow \epsilon$$

$$\delta_4) [q_1, X, q_1] \rightarrow 1$$

$$\delta_5) [q_1, Z_0, q_1] \rightarrow \epsilon$$

Đặt:  $[q_0, X, q_0] = A, [q_0, X, q_1] = B, \dots, [q_0, Z_0, q_0] = E, \dots, [q_1, Z_0, q_1] = H$

Ta có luật sinh:

$$S \rightarrow E \mid F$$

$$E \rightarrow 0AE \mid 0BG$$

$$F \rightarrow 0AF \mid 0BH$$

$$A \rightarrow 0AA \mid 0BC$$

$$B \rightarrow 0AB \mid 0BD \mid 1$$

$$D \rightarrow \epsilon \mid 1$$

$$H \rightarrow \epsilon$$

Giản lược văn phạm:

$$S \rightarrow F$$

$$F \rightarrow 0BH$$

$$B \rightarrow 0BD \mid 1$$

$$D \rightarrow \epsilon \mid 1$$

$$H \rightarrow \epsilon$$

$$\Rightarrow S \rightarrow 0B$$

$$B \rightarrow 0B \mid 0B1 \mid 1$$

20