

1. ESPACIOS VECTORIALES

EJERCICIO 1. Si en \mathbb{R}^2 se definen las operaciones

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{y} \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial? Indique cuáles son las propiedades de espacio vectorial que se verifican y cuáles no.

Solución. Notemos que la operación «suma» definida en el ejercicio es la suma usual de vectores. Por lo tanto, esta satisface todas las propiedades de la suma. De esta manera, resta verificar las propiedades del producto:

I. **distributiva del producto I:** sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x + y) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, x_2 + y_2) \\ &= (\alpha x_1, x_2) + (\alpha y_1, y_2) \\ &= \alpha x + \alpha y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se satisface la propiedad.

II. **distributiva del producto II:** si la propiedad fuera cierta, entonces sea $x \in \mathbb{R}^2$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

Así, para $x = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha = \beta = 1$, se tiene que

$$(1 + 1)(0, 1) = 2(0, 1) = (0, 1);$$

pero, por otro lado

$$1(0, 1) + 1(0, 1) = (0, 1) + (0, 1) = (0, 2).$$

De esta manera, por la propiedad distributiva del producto II, se tendría que

$$(0, 1) = (0, 2).$$

Pero esto no es cierto, por lo tanto la propiedad no se cumple.

III. **asociativa del producto:** sea $x \in \mathbb{R}^2$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \cdot x &= (\alpha\beta) \cdot (x_1, x_2) \\ &= ((\alpha\beta)x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha\beta x_1, x_2) \\
 &= \alpha(\beta x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se satisface la propiedad.

IV. **elemento neutro del producto:** sea $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 1 \cdot x &= 1 \cdot (x_1, x_2) \\
 &= (x_1, x_2) \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se satisface la propiedad.

De esta manera, como $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ no cumple la propiedad *distributiva del producto II*, entonces no es un espacio vectorial. \square

EJERCICIO 2. Si en \mathbb{R}^2 se definen las operaciones

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad \text{y} \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial? Indique cuáles son las propiedades de espacio vectorial que se verifican y cuáles no.

Solución. Para determinar, si $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas, verifiquemos cada una de las propiedades:

I. **asociativa de la suma:** sean $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 (x + y) + z &= ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) \\
 &= (x_1 + y_1, 0) + (z_1, z_2) \\
 &= (x_1 + y_1 + z_1, 0) \\
 &= ((x_1 + y_1) + z_1, 0) && \text{La suma en el campo es asociativa} \\
 &= (x_1 + y_1, 0) + (z_1, z_2) \\
 &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) + (z_1, z_2) \\
 &= x + y + z.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad.

II. **conmutativa de la suma:** sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 x + y &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\
 &= (x_1 + y_1, 0) \\
 &= (y_1 + x_1, 0) && \text{La suma en el campo es conmutativa} \\
 &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) \\
 &= y + x.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad.

- III. **elemento neutro de la suma:** supongamos que existe un elemento notado $e \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $x \in E$ se tiene que

$$x + e = e + x = x.$$

Así, para $x = (0, 1)$, se tiene que

$$x + e = (0, 1) + (e_1, e_2) = (e_1, 0) = (0, 1) = x,$$

de donde se sigue que

$$0 = 1.$$

Pero esto no es posible, por lo tanto no existe un elemento neutro para la suma.

- IV. **inverso de la suma:** Puesto que no existe un elemento neutro para la suma, por la propiedad anterior, entonces no es posible encontrar un inverso para la suma.

- V. **distributiva del producto I:** sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= \alpha(x_1 + y_1, 0) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), 0) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, 0) \\ &= (\alpha x_1, 0) + (\alpha y_1, 0) \\ &= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) \\ &= \alpha x + \alpha y.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad

- VI. **distributiva del producto II:** sea $x \in \mathbb{R}^2$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2) \\ &= ((\alpha + \beta)x_1, 0) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, 0) \\ &= (\alpha x_1, 0) + (\beta x_1, 0) \\ &= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2) \\ &= \alpha x + \beta x.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad.

- VII. **asociativa del producto:** sea $x \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha(\beta x) &= \alpha(\beta(x_1, x_2)) \\ &= \alpha(\beta x_1, 0) \\ &= (\alpha \beta x_1, 0) \\ &= ((\alpha \beta)x_1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha\beta)(x_1, x_2) \\
 &= (\alpha\beta)x.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad.

VIII. **elemento neutro del producto:** supongamos que la propiedad se cumple, así para $x = (0, 1)$ notemos que

$$(0, 1) = 1(0, 1) = (0, 0).$$

Lo cual no es posible, por lo tanto no se cumple la propiedad del *elemento neutro del producto*.

De esta manera, como $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ no satisface todas las propiedades requeridas, entonces no es un espacio vectorial. \square

EJERCICIO 3. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

I. $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 0\}$

II. $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 1\}$

Solución. Para demostrar que W es un subespacio vectorial basta probar que W es un subconjunto no vacío, para ello probamos que $0 \in W$. Y además, debemos probar que $\alpha u + v \in W$ donde $u, v \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Utilicemos esto en cada caso:

I. Para el primer literal:

I. Notemos que $0 = (0, 0)$, entonces

$$2(0) + (0) = 0.$$

Por lo tanto, $0 \in W$.

II. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. Mostremos que $\alpha u + v \in W$. En efecto, por hipótesis se tiene que

$$2u_1 + u_2 = 0, \quad 2v_1 + v_2 = 0 \tag{1}$$

luego,

$$\alpha u + v = \alpha(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (\alpha u_1 + v_1, \alpha u_2 + v_2).$$

de donde, usando (1) se sigue que

$$\begin{aligned}
 2(\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2) &= \alpha(2u_1 + u_2) + (2v_1 + v_2) \\
 &= \alpha(0) + (0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Es decir, $\alpha u + v \in W$, como se quería.

Por lo tanto, W es subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 .

II. Para el segundo literal, notemos que $0 \notin W$, puesto que como $0 = (0, 0)$, entonces

$$0 \cdot 0 = 0 \neq 1.$$

Por lo tanto, W no es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 . □

EJERCICIO 4. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

I. $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| = x_3\}$

II. $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 \geq x_3\}$

III. $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = x_2\}$

Solución. Para la solución del ejercicio, aplicamos el mismo esquema utilizado para el Ejercicio 3.

I. Tomemos $x = (1, 1, 2)$ y $\alpha = -1$, notemos que $x \in W$ pues

$$|1| + |1| = 2.$$

No obstante, se tiene que

$$\alpha x = -1(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$$

de donde

$$|-1| + |-1| = 2 \neq -2.$$

Es decir, $\alpha x \notin W$ y por lo tanto W no es un subespacio vectorial.

II. Tomemos $x = (1, 0, 0)$ y $\alpha = -1$, notemos que $x \in W$ pues

$$1 + 0 \geq 0.$$

No obstante, se tiene que

$$\alpha x = -1(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$$

de donde

$$-1 + 0 \not\geq 0.$$

Es decir, $\alpha x \notin W$ y por lo tanto W no es un subespacio vectorial.

III. Tomemos $x = (1, 1, 0)$ y $\alpha = 2$, notemos que $x \in W$ pues

$$1^2 = 1.$$

No obstante, se tiene que

$$\alpha x = 2(1, 1, 0) = (2, 2, 0),$$

de donde como

$$2^2 \neq 2,$$

entonces $\alpha x \notin W$ y, por lo tanto W no es un subespacio vectorial. \square

EJERCICIO 5. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

$$W = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : b + c = a - 2\}.$$

Solución. Para que W sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$, se necesita que $0 \in W$, donde el 0 corresponde al polinomio nulo, es decir, el polinomio cuyos coeficientes son cero. Así, se tendría que $a = b = c = 0$ y por lo tanto como

$$0 \neq -2,$$

entonces $0 \notin W$ y así W no es un subespacio vectorial. \square