1. Cálculo del rango de una matriz

Ejercicio 1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

hallar su rango.

Solución.

I. Vamos a hallar el rango de A, para ello reduciremos la matriz A por filas.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix} && F_1 \leftrightarrow F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix} && -3F_1 + F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix} && F_1 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} && -3F_1 + F_4 \to F_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} && -F_3 \leftrightarrow F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -41 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} && 5F_2 + F_3 \to F_3
\end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -41 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -3F_2 + F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -\frac{1}{41}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 7F_3 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -3F_3 + F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -2F_2 + F_1 \to F_1$$

Así la matriz escalonada reducida por filas, equivalente a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\operatorname{rang}(A) = 3$.

II. Para encontrar el rango de B hallaremos la matriz escalonada reducida por filas equivalente a B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad 3F_1 - F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad 4F_1 - F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}F_2 \to F_2$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix} \qquad 6F_2 + F_3 \to F_3
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad -\frac{5}{2}F_3 \to F_3
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \frac{2}{5}F_3 + F_2 \to F_2
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad F_1 - F_3 \to F_1
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad F_1 + F_2 \to F_1
$$

Así la matriz escalonada reducida por filas, equivalente a B es

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.
$$

Por lo tanto $\operatorname{rang}(B) = 3$.

III. Para encontrar el rango de C hallaremos la matriz escalonada reducida por filas equivalente a C.

$$
\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad 2F_1 + F_2 \to F_2
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{9}F_2 \to F_2
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad F_1 - 3F_2 \to F_1
$$

Así la matriz escalonada reducida por filas equivalente a C es

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.
$$

Por lo tanto $\operatorname{rang}(C) = 2$.

□

2. Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 2. Dado el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos aplicar la aliminación de Gauss-Jordan a la matriz ampliada:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & | & 0 \\ 0 & -7 & 5 & | & 0 \\ 0 & -14 & 10 & | & 0 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} -1F_1 + F_2 \to F_2 \\ \\ -3F_1 + F_3 \to F_3 \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & | & 0 \\ 0 & -7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} && -2F_2 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} && -\frac{1}{7}F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} && -5F_2 + F_1 \to F_1
\end{aligned}$$

Como la matriz equivalente a la matriz de los coeficientes ya es escalonada reducida por filas, comparamos los rangos $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = 2$ y es menor que el número de incógnitas (3) entonces, el sistema tiene infinitas soluciones. Como los sistemas

$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x - \frac{3}{7}z = 0 \\ y - \frac{5}{7}z = 0 \end{cases}$$

son equivalentes, por ende, tienen las mismas soluciones

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7}t \\ y = \frac{5}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\left\{ \left(\frac{3}{7}t, \frac{5}{7}t \right), t : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

EJERCICIO 3. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar si el sistema es consistente.

Solución. Tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizamos la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, así:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} && -2F_1 + F_2 \to F_2 \\
& && -1F_1 + F_3 \to F_3 \\
& && -1F_1 + F_4 \to F_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} && F_4 + F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} && F_2 \leftrightarrow F_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} && -1F_3 + F_4 \to F_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} && \frac{1}{4}F_4 \to F_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} && -1F_2 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} && 3F_3 + F_1 \to F_1
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que rang$(A) = 3 <$ rang$(A|b) = 4$, entonces el sistema es inconsistente; es decir, no tiene solución. □

EJERCICIO 4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

I. Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan, determine las condiciones sobre α tales que el sistema tenga solución.

II. Para las condiciones sobre α en que el sistema tiene solución, escriba el conjunto de soluciones del sistema.

Solución.

I. Tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada $(A|b)$ es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Realizamos la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} -3F_1 + F_2 \to F_2 \\ -2F_1 + F_3 \to F_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 3-\alpha \end{array}\right) \qquad -1F_2 + F_3 \to F_3$$

Si $\alpha \neq 3$, entonces

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-\alpha}{\alpha-3} \end{array}\right) \qquad \frac{1}{\alpha-3}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha - 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \qquad -(2-3\alpha)F_3 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \alpha + 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha - 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \qquad -\alpha F_3 + F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3\alpha + 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha - 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \qquad -1F_2 + F_1 \to F_1$$

De donde, tenemos que el $\operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(A|b)$. Entonces el sistema tiene una solución única si $\alpha \neq 3$. Ahora, analizamos el sistema lineal cuando $\alpha = 3$;es decir, regresamos a la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & | & \alpha - 6 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & | & 3 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Reemplazamos $\alpha = 3$, realizamos la eliminación de Gauss-Jordan y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & | & 5 \\ 0 & 1 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Si comparamos los rangos, tenemos que, $\operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(A|b)$, pero es menor que el número de incógnitas (3), entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

II. Si $\alpha \neq 3$, la matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3\alpha + 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha - 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

entonces el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(3\alpha + 6, -2\alpha - 4, -1) : \alpha \neq 3\}. \qquad \square$$

Si $\alpha = 3$, la matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & | & 5 \\ 0 & 1 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} x = 5 - 10r \\ y = -3 + 7r \\ z = r \end{cases}$$

es una solución del sistema lineal para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema, cuando $\alpha = 3$, es

$$\{(5 - 10r, -3 + 7r, r) : r \in \mathbb{R}\}.$$

EJERCICIO 5. Sea $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{cases} \quad\quad x \quad + \quad z = q \\ 2w \quad + y \quad\quad = 0 \\ 3w + x \quad + 2z = 0 \\ pw \quad + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Determine las condiciones sobre p y q para que el sistema tenga una única solución.

Solución. La representación matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

de donde, la matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & q \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & p & | & 3 \end{pmatrix}$$

Luego de aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz ampliada, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{2pq-17q+9}{p-13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{-6q-6}{p-13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{-pq+4q-9}{p-13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{3q+3}{p-13} \end{pmatrix}$$

De donde, tenemos que, si $p \neq 13$ y para todo $q \in \mathbb{R}$, rang$(A) = 4 =$ rang$(A|b)$; y ademas es igual al número de incógnitas (4). Entonces, el sistema es consistente y tiene una única solución si $p \neq 13$ y para todo $q \in \mathbb{R}$. Es fácil verificar que cuando $p = 13$ el sistema o bien no tiene solución o tiene infinitas soluciones, por lo que este caso queda excluido de este análisis. $\square$