RESUMEN NO. 6: INDEPENDENCIA LINEAL Y CONJUNTO GENERADOR

Andrés Merino • *Periodo 2025-1*

1. CONJUNTO GENERADOR

DEFINICIÓN 1.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Al subespacio vectorial más pequeño que contiene a S (es decir, la intersección de todos los subespacios que contienen a S) se lo denomina espacio generado por S y se denota por $\text{gen}(S)$.

TEOREMA 1.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Se tiene que

$$\text{span}(S) = \text{gen}(S).$$

DEFINICIÓN 2.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S genera el espacio vectorial E si cada vector en E es una combinación lineal de los elementos de S, es decir, si para todo $v \in E$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

TEOREMA 2.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S genera el espacio vectorial E si y solo si

$$E = \text{gen}(S) = \text{span}(S).$$

2. INDEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN 3.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S es un conjunto linealmente dependiente si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, no todos iguales a cero, tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

en caso contrario, se dice que S es un conjunto linealmente independiente.

De esta definición, se tiene que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente si y solo si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

implica que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Se puede extender esta definición para conjuntos infinitos diciendo que S es linealmente independiente si todo subconjunto finito de S es linealmente independiente.

TEOREMA 3.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Si $0 \in S$, entonces S es linealmente dependiente.

TEOREMA 4.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si alguno de los vectores $v_j \in S$ es una combinación lineal de otros elementos de S.

3. BASES

DEFINICIÓN 4.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se dice que B es una base de E si

- B genera a E y
- B es linealmente independiente.

TEOREMA 5: Base canónica de $\mathbb{R}^n$.
En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \dots, e^n\} \subset \mathbb{R}^n$, definidos por

$$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, es una base de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 6: Base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.
En $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto $\{1, x, \dots, x^{n-1}, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. A esta base se la denomina la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.

TEOREMA 7.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Se tiene que todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B.

TEOREMA 8.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se tiene que si todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B, entonces B es una base de E.

TEOREMA 9.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto que genera a E. Se tiene que algún subconjunto de S es base de E.

TEOREMA 10.
Todo espacio vectorial tiene una base.

4. DIMENSIÓN

TEOREMA 11.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Si $S \subseteq E$ es un conjunto linealmente independiente, entonces

$$|S| \leqslant |B|.$$

TEOREMA 12.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Si $S \subseteq E$ es un conjunto que genera a E, entonces

$$|B| \leqslant |S|.$$

TEOREMA 13.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B, T \subseteq E$ bases de E. Se tiene que

$$|B| = |T|.$$

DEFINICIÓN 5: Dimensión.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Se define la dimensión de E, denotado por $\dim(E)$, por la cantidad de elementos de B.

TEOREMA 14.
Se tiene que

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, con $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = mn$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$;
- $\dim(\{0\}) = 0$.

TEOREMA 15.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto linealmente independiente. Se tiene que existe una base B de E que contiene a S.

TEOREMA 16.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial, $B \subseteq E$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dim(E) = n$ y $|B| = n$. Se tiene que

- si B es linealmente independiente, entonces B es una base de E.
- si B genera a E, entonces B es una base de E.