Andrés Merino • Periodo 2025-1

1. VALORES Y VECTORES PROPIOS

DEFINICIÓN 1.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe $v \in \mathbb{R}^n$, con $v \neq 0$, tal que

$$Av = \lambda v,$$

además, v es un vector propio de A asociado al valor propio λ.

TEOREMA 1.
Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que λ es un valor propio de A si y solo si

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donde I es la matriz identidad.

TEOREMA 2.
Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal de la matriz.

DEFINICIÓN 2.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Al polinomio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

se lo denomina polinomio característico de A.

TEOREMA 3: Teorema de Cayley–Hamilton.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $p_A(\lambda)$ su polinomio característico. Se tiene que

$$p_A(A) = 0.$$

1.1 Diagonalización de Matrices

DEFINICIÓN 3.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que A es semejante a B si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

TEOREMA 4.
Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que

i. A es semejante a A.

ii. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.

iii. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Definición 4.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que A es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal. Es decir, si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que
$$A = P^{-1}DP.$$

Teorema 5.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A y B son semejantes, entonces A y B tienen los mismos valores propios, es decir, tienen el mismo espectro.

Teorema 6.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que A es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Teorema 7.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A tiene n valores propios distintos entre sí, entonces A es diagonalizable.

Teorema 8.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es diagonalizable, entonces tomando D la matriz diagonal formada por los valores propios de A, y P la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A, se tiene que
$$A = P^{-1}DP.$$

Teorema 9.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es simétrica, entonces A todos sus valores propios son reales; además, A es diagonalizable.

Definición 5.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que A es ortogonal si $A^T = A^{-1}$.

Teorema 10.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es simétrica, y $D, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son tales que
$$A = P^{-1}DP,$$
entonces P es ortogonal.