1. DETERMINANTES

En esta sección tomaremos $n \in \mathbb{N}$, con $n > 0$, e $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

DEFINICIÓN 1: Menor.
Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. A la matriz de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ que se obtiene eliminar la fila i y la columna j de A se la llama el menor ij de A, denotado por A_{ij}.

En la literatura se puede encontrar la notación de M_{ij} para el menor de ij de A.

DEFINICIÓN 2: Menor principal.
Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k \in I$. A la matriz de $\mathbb{R}^{k\times k}$ que se obtiene eliminar las $n-k$ últimas filas y columnas de A, se la llama el menor principal k de A, denotado por M_k.

En la literatura se puede encontrar la notación de A_k para el menor principal k de A.

DEFINICIÓN 3: Determinantes.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define el determinante de A, denotado por $\det(A)$ (o por $|A|$), de manera inductiva, como sigue:

- Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, entonces $\det(A) = a_{11}$.
- Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det(A_{1k})\\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}).\end{aligned}$$

Ejemplos:

- Sea A una matriz de orden 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A_{11} = (a_{22}) \qquad \text{y} \qquad A_{12} = (a_{21}),$$

por lo tanto

$$\det(A_{11}) = a_{11} \qquad \text{y} \qquad \det(A_{12}) = a_{12},$$

de esta forma,

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

es decir,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Sea A una matriz de orden 3×3 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz A está dado por:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

1.1 Propiedades de los determinantes

TEOREMA 1.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si una fila o columna de A contiene solo ceros, entonces $\det(A) = 0$.

TEOREMA 2.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular superior o triangular inferior, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

TEOREMA 3.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El determinante de una matriz A y de su transpuesta son iguales, es decir,

$$\det(A^{\intercal}) = \det(A).$$

TEOREMA 4.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene que:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

TEOREMA 5.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A entonces

$$\det(B) = -\det(A).$$

TEOREMA 6.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si dos filas o columnas de A son iguales, entonces

$$\det(A) = 0$$

Teorema 7.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si B se obtiene al multiplicar una fila o columna de A por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

Teorema 8.
Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene que
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Teorema 9.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $i, j \in I$, con $i \neq j$. Si B se obtiene al aplicar una operación de fila $\alpha F_i + F_j \to F_j$, entonces
$$\det(B) = \det(A).$$

1.2 Cofactores

Definición 4: Cofactores.
Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. El cofactor ij de A, denotado C_{ij}, está dado por
$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$
donde A_{ij} es el menor ij de A.

En la literatura, también se suele llamar menor al determinante de A_{ij} en lugar de a la matriz, como lo haremos en este texto. Además, al cofactor, se lo suele denotar por A_{ij}.

Teorema 10.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que para todo $i \in I$,
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$
y
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}C_{ki} = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}.$$
El lado derecho de las igualdades toma el nombre de expansión por cofactores del determinante de A.

2. Inversa de una matriz

Definición 5.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular o invertible si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

A la matriz B se la denomina inversa de A y se la denota por A^{-1}. Si no existe tal matriz, entonces se dice que A es singular o no invertible.

Teorema 11.
Si una matriz tiene inversa, la inversa es única.

Teorema 12.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

- Si A y B son matrices no singulares, entonces AB es no singular y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- Si A es una matriz no singular, entonces

$$(A^{\intercal})^{-1} = (A^{-1})^{\intercal}.$$

Teorema 13.
Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices no singulares. Se tiene que $A_1A_2\cdots A_p$ es no singular y

$$(A_1A_2\cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

Teorema 14.
Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que si $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$.

Teorema 15.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tiene que A es no singular si y solo si es equivalente por filas a I_n. Es más

$$(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1}).$$

Teorema 16.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el sistema homogéneo

$$Ax = 0$$

tiene una solución no trivial si y solo si A es singular.

TEOREMA 17.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que A es no singular si y solo si el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 18.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

I. A es no singular;

II. el sistema $Ax = 0$ solamente tiene la solución trivial;

III. A es equivalente por filas a I_n;

IV. $\text{rang}(A) = n$; y

V. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 6: Matriz de cofactores.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz de cofactores de A, que se denota por $\text{cof}(A)$, es la matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ que está formada por los cofactores de A, es decir,

$$\text{cof}(A) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 7.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz adjunta de A, que se denota por $\text{adj}(A)$, es la matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ que está formada por la transpuesta de la matriz de los cofactores de A, es decir,

$$\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T.$$

TEOREMA 19.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces

$$A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = \det(A)I_n.$$

COROLARIO 20. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A).$$

TEOREMA 21.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Una matriz A es no singular si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Teorema 22.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es no singular, entonces $\det(A) \neq 0$ y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Teorema 23.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución no trivial si y sólo si $\det(A) = 0$.

Teorema 24.
Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. El sistema $Ax = b$ tiene una solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y su solución es

$$A^{-1}b.$$

Teorema 25: Equivalencias no singulares.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

i. A es no singular;

ii. el sistema $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial;

iii. A es equivalente por filas a I_n;

iv. $\operatorname{rang}(A) = n$;

v. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{R}^n$; y

vi. $\det(A) \neq 0$.