Andrés Merino • Periodo 2025-1

1. ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN 1: Espacio Vectorial.
Dados un campo $\mathbb{R}$, un conjunto no vacío E y dos operaciones

$$\begin{aligned} \oplus\colon E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \oplus y, \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \odot\colon \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \odot x \end{aligned}$$

llamadas suma y producto, respectivamente; se dice que $(E, \oplus, \odot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial si cumplen las siguientes propiedades

I. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in E$ se tiene que
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$$

II. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in E$ se tiene que
$$x \oplus y = y \oplus x;$$

III. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de E, denotado por 0_E o simplemente 0, tal que para todo $x \in E$ se tiene que
$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x;$$

IV. **inverso de la suma:** para todo $x \in E$, existe un elemento de E, denotado por $-x$, tal que
$$x \oplus (-x) = 0;$$

V. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x + \alpha \odot y$$

VI. **distributiva del producto II:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x;$$

VII. **asociativa del producto:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x);$$

VIII. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in E$ se tiene que

$$1 \odot x = x,$$

donde $1 \in \mathbb{R}$ es el elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{R}$

Utilizamos los símbolos $\oplus$ y $\odot$ para enfatizar el hecho de que, en general, las operaciones definidas no son la suma y el producto estándar que utilizamos. Si no existe riesgo de confusión, utilizaremos la notación

$$x \oplus y = x + y \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = \alpha x$$

y diremos que el espacio vectorial es $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$, es más, en caso de que no exista ambigüedad en las operaciones utilizadas se dirá simplemente que E es un espacio vectorial.

TEOREMA 1.
Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales en el campo $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathbb{R}^{m \times n}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathcal{F}(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ es una función}\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunto de todos los polinomio de grado menor igual que n en la variable x, con $n \in \mathbb{N}$;

TEOREMA 2.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial, se tiene que para todo $u \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

I. $0u = 0$;

II. $\alpha 0 = 0$;

III. si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $u = 0$;

IV. $(-1)u = -u$.

1.1 Subespacios

DEFINICIÓN 2: Subespacio Vectorial.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $W \subset E$ un conjunto no vacío de E. Si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de E, entonces se dice que W es un subespacio de E.

Teorema 3.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de E. Entonces W es un subespacio de E si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$; y
- si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in W$, entonces $\alpha u \in W$.

Definición 3: Combinación lineal.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. Se dice que un vector $v \in E$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ si

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Definición 4.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset E$. Al conjunto conjunto de todos los vectores en E que son combinaciones lineales de los vectores de S se lo llama cápsula de S y se denota por $\operatorname{span}(S)$, es decir

$$\operatorname{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

A este conjunto también se lo conoce como *clausura lineal* y su notación viene de su nombre en inglés, *linear span*. También se utiliza la notación $\langle S \rangle$.

Teorema 4.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $S \subset E$. Se tiene que $\operatorname{span}(S)$ es un subespacio vectorial de E.