Andrés Merino • Periodo 2025-1

1. Aplicaciones lineales

Definición 1: Aplicación lineal.
Sean $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{R})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{R})$ espacios vectoriales. A una función $T\colon E \to F$ se la llama una aplicación lineal (transformación lineal) si satisface que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y todo $u, v \in E$ se cumple

i. $T(u +_1 v) = T(u) +_2 T(v)$ y

ii. $T(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 T(v)$.

En adelante, consideraremos $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{R})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{R})$ espacios vectoriales. Notaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de las aplicaciones lineales de E en F.

En caso de que no exista riesgo de ambigüedad, dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se denotará

i. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y

ii. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$,

para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in E$.

Teorema 1.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para todo $u, v, v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

i. $T(0_E) = 0_F$;

ii. $T(u - v) = T(u) - T(v)$: y

iii. $T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(v_k)$.

1.1 Ejemplos de transformaciones lineales

i. Transformación nula,
$$\begin{aligned} T\colon F &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

ii. Transformación identidad,
$$\begin{aligned} T\colon F &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

iii.
$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,0). \end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y,y+z,x). \end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

VII.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ (x,y,z) &\longmapsto x+(x-y)t+zt^2. \end{aligned}$$

Teorema 2.
Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ es una base de E, entonces T está completamente determinada por

$$\{T(u_1),T(u_2),\dots,T(u_n)\}.$$

Es decir, si se conoce el valor de $\{T(u_1),T(u_2),\dots,T(u_n)\}$, entonces se conoce $T(u)$ para todo $u \in E$.

1.2 Núcleo e imagen

Definición 2: Núcleo e imagen de una aplicación lineal.
Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

I. El núcleo de T, denotado por $\ker(T)$, está definida por:

$$\ker(T) = \{v \in E : T(v) = 0\}.$$

II. La imagen de T, denotada por $\operatorname{img}(T)$, está definida por:

$$\operatorname{img}(T) = \{w \in F : w = T(v) \text{ para algún } v \in E\}.$$

Teorema 3.
Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces

I. $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de E.

II. $\operatorname{img}(T)$ es un subespacio vectorial de F.

Teorema 4.
Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Se tiene que T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{0\}$.

Definición 3: Nulidad y rango de una aplicación lineal.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

I. Se llama nulidad de T a $\dim(\ker(T))$.

II. Se llama rango de T a $\dim(\operatorname{img}(T))$.

Teorema 5.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E un espacio de dimensión finita. Se tiene que

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{img}(T)).$$

Teorema 6.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E un espacio de dimensión finita. Si $\dim(E) = \dim(F)$, entonces se tiene que la siguientes son equivalentes

- T es inyectiva,
- T es sobreyectiva.

1.3 Propiedades de aplicaciones lineales

Teorema 7.
Se tiene que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio vectorial.

Teorema 8.
Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E. Si

$$T_1(v_i) = T_2(v_i)$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces se tiene que $T_1(v) = T_2(v)$, para todo $v \in E$, es decir,

$$T_1 = T_2.$$

Teorema 9.
Sean $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in F$. Se tiene que existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 10.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supongamos que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$, se tiene que:

I. si $n > m$, entonces T no es inyectiva; y

II. si $m > n$, entonces T no es sobreyectiva.

1.4 Isomorfismos

Definición 4: Isomorfismo.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se dice que T es un isomorfismo de E en F si T es biyectiva.

Definición 5: Espacios isomorfos.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{R})$. Se dice que E y F son isomorfos si existe un isomorfismo T de E en F, se lo denota por $E \cong F$.

Teorema 11.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorfismo, se tiene que

I. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$
genera a F;

II. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes en E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$
es linealmente independientes en F;

III. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$
es base de F;

IV. si E es de dimensión finita, entonces F es de dimensión finita y
$$\dim(E) = \dim(F).$$

Teorema 12.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{R})$ espacios de dimensión finita tales que $\dim(E) = \dim(F)$, entonces $E \cong F$.

Teorema 13.
Se tiene que

I. $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;

II. $P_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5 Matriz asociada

En adelante, consideraremos E y F espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$.

Definición 6.
Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y B, D bases para E y F, respectivamente. Se tiene que existe una única matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$, denotada por $[T]_{D,B}$, tal que

$$[T(v)]_D = [T]_{D,B}[v]_B$$

para todo $v \in E$. A esta matriz se la llama matriz asociada a la aplicación lineal T.

Teorema 14.
Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \qquad \text{y} \qquad D = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

bases para E y F, respectivamente. Se tiene que las columnas de la matriz $[T]$ son los vectores de coordenadas de $T(v_j)$ en la base D, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, es decir

$$[T]_{D,B} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_D & [T(v_2)]_D & \cdots & [T(v_n)]_D \end{pmatrix}.$$

En caso de no existir riesgo de confusión en las bases que se utiliza, se nota simplemente $[T]$ a la matriz asociada a la aplicación lineal T.

Se pueden ver ejemplos del procedimiento para encontrar una matriz asociada a una aplicación lineal entre las páginas 522 y 527 del libro de Kolman.

Teorema 15.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se tiene que T es biyectiva si y solo si $[T]$ es invertible.

Teorema 16.
Sean $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, con G un espacio vectorial de dimensión finita. Se tiene que

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1].$$

Teorema 17.
Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ una aplicación lineal invertible. Se tiene que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

Teorema 18.
Se tiene que $\mathcal{L}(E, F)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{m\times n}$, es decir

$$\mathcal{L}(E, F) \cong \mathbb{R}^{m\times n}.$$