Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Ambientale

Catálogo STEM • Álgebra Lineal y Geometría Analítica

Material extra no. 1: Eliminación de Gauss-Jordan

Andrés Merino • Semestre 2025-1

Ejercicio 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \quad\; -v + 3w = 1 \\ u + v + \;\; w = 1 \\ u - v - \;\; w = -1 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, procedemos a realizar la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \qquad -1F_1 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -2 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \qquad -1F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -2 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \qquad -1F_2 + F_1 \to F_1$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{array}\right) && 2F_2 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) && -\frac{1}{8}F_3 \to F_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) && -4F_3 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) && 3F_3 + F_2 \to F_2
\end{aligned}
$$

Con esto, tenemos que

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right),
$$

con esto, tenemos que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$, de donde el sistema tiene solución, además, $\operatorname{rang}(A) = 3$, por lo tanto, la solución es única. Además, los sistemas

$$
\begin{cases} \quad -v + 3w = 1 \\ u + v + \quad w = 1 \\ u - v - \quad w = -1 \end{cases}
$$

y

$$
\begin{cases} u \qquad\qquad = 0 \\ \qquad v \qquad = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad w = \frac{1}{2} \end{cases}
$$

tienen las mismas soluciones, es decir, la solución es $u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ y $w = \frac{1}{2}$. Es decir, el conjunto de soluciones del sistema es

$$
\{(0, 1/2, 1/2)\}. \qquad \square
$$

EJERCICIO 2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{cases} \quad -v + 3w = 1 \\ u + v + \quad w = 1 \end{cases}
$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, luego de realizar la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix},$$

con esto, tenemos que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$, de donde el sistema tiene solución, además, $\operatorname{rang}(A) = 2 < 3$, por lo tanto, tiene infinitas soluciones. Además, los sistemas

$$\begin{cases} \quad -v + 3w = 1 \\ u + v + \ \ w = 1 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u \qquad + 4w = 2 \\ \qquad v - 3w = -1 \end{cases}$$

tienen las mismas soluciones, así, se tiene que

$$\begin{aligned} u &= 2 - 4\alpha \\ v &= -1 + 3\alpha \\ w &= \alpha, \end{aligned}$$

es solución del sistema para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(2 - 4\alpha, -1 + 3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$ □