EJERCICIO 1. Determinar, si existe, una factorización LU de la matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Empecemos determinando una matriz triangula superior U que sea equivalente por filas a A y en la cual solo utilicemos el múltiplo de una fila más otra

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad -2F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad 1F_1 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 1F_2 + F_3 \to F_3$$

Las matrices elementales correspondientes a las operaciones por filas realizadas son

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto, tenemos que

$$U = E_3E_2E_1A,$$

así, podemos tomar

$$L = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU.$$ □

Notemos que las entradas de la matriz L son los inversos aditivos de los múltiplos que fueron utilizados para “eliminar” las entradas bajo la diagonal correspondientes.

EJERCICIO 2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

determinar su solución utilizando factorización LU.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$Ax = b.$$

Dado que A tiene factorización LU con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resolvamos el sistema

$$Ly = b,$$

cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Podemos resolver este sistema utilizando sustitución progresiva y obtenemos

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, resolvemos el sistema

$$Ux = y$$

cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Podemos resolver este sistema utilizando sustitución regresiva y obtenemos

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□