1. El espacio $\mathbb{R}^n$

En esta sección, consideramos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$.

Definición 1: El conjunto $\mathbb{R}^n$.
El conjunto $\mathbb{R}^n$ es

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}},$$

es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Recordemos que, por notación, si $y \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Recordemos que podemos identificar cada elemento de $\mathbb{R}^n$ con una matriz de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ de la siguiente manera: si

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, visto como matriz es

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Teorema 1.
En $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades:

I. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

II. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x + y = y + x;$$

III. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de $\mathbb{R}^n$, denotado por 0, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

IV. **inverso de la suma:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe un elemento de $\mathbb{R}^n$, denotado por

$-x$, tal que
$$x + (-x) = 0;$$

v. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

vi. **distributiva del producto II:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

vii. **asociativa del producto:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

viii. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que
$$1x = x.$$

Definición 2: Base canónica.
En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\} \subset \mathbb{R}^n$, definidos por
$$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$
para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se lo denomina *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.
Sea $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que existen únicos
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$
tales que
$$x = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_n e^n.$$

Definición 3: Producto punto.
La función
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$
se denomina producto punto de $\mathbb{R}^n$ o producto interno de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3: Propiedades del producto punto.
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $x \cdot x \geqslant 0$;

- $x \cdot x = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $x \cdot y = y \cdot x$;
- $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$; y
- $(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$.

Definición 4: Norma.
La función

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x \cdot x} \end{aligned}$$

se la llama la norma de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|x\|$ se le llama norma, módulo o longitud de x.

Teorema 4: Propiedades de la norma.
Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $\|x\| \geqslant 0$;
- $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; y
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia entre x y y por $\|x - y\|$.

Definición 5: Vector unitario.
Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que x es un vector unitario si $\|x\| = 1$.

Definición 6: Ángulo entre vectores.
Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, ambos diferentes de 0, se define el ángulo entre estos vectores por

$$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\,\|y\|}\right).$$

Definición 7.
Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que

- son ortogonales si $x \cdot y = 0$;
- son paralelos si $|x \cdot y| = \|x\|\,\|y\|$.

1.1 Geometría de $\mathbb{R}^n$

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, asumiremos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$.

Definición 8: Puntos de $\mathbb{R}^n$.
Se llama punto de $\mathbb{R}^n$ a cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 9: Recta de $\mathbb{R}^n$.
Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$, la recta que pasa por a con dirección b es el conjunto

$$L(a; b) = \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$, tenemos la recta que pasa por $(1, -2)$ con dirección $(3, 2)$ es

$$\begin{aligned} L((1,-2);(3,2)) &= \{(1,-2) + t(3,2) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1+3t, -2+2t) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1+3t,\ y = -2+2t,\ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 4\} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que la recta está definida por

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= -2 + 2t, \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$; a esta se la llama la ecuación paramétrica de la recta. Por otro lado, también tenemos que la recta está definida por

$$2x - 3y = 4$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; a esta se la llama la ecuación cartesiana de la recta. □

DEFINICIÓN 10: Plano de $\mathbb{R}^n$.
Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, con b y c no paralelos y diferentes de 0, el plano que pasa por a con dirección b y c es el conjunto

$$P(a; b, c) = \{a + sb + tc : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$, tenemos la recta que pasa por $(1, -2, -1)$ con direcciones $(3, 2, 1)$ y $(1, 0, 2)$ es

$$\begin{aligned} &L((1,-2,-1);(3,2,1),(1,0,2)) \\ &\quad = \{(1,-2,-1) + s(3,2,1) + t(1,0,2) : s,t \in \mathbb{R}\} \\ &\quad = \{(1+3s+t, -2+2s, -1+s+2t) : s,t \in \mathbb{R}\} \\ &\quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1+3s+t,\ y = -2+2s,\ z = -1+s+2t,\ s,t \in \mathbb{R}\} \\ &\quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - 5y - 2z = 8\} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que la recta está definida por

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3s + t, \\ y &= -2 + 2s, \\ z &= -1 + s + 2t \end{aligned}$$

con $s, t \in \mathbb{R}$; a esta se la llama la ecuación paramétrica del plano. Por otro lado, también tenemos que la recta está definida por

$$4x - 5y - 2z = 8$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; a esta se la llama la ecuación cartesiana de la recta. $\square$

Podemos pasar de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana si, al verlas como un sistema de ecuaciones en sus parámetros, analizamos cuándo el sistema es consistente.
Además, podemos pasar de la ecuación cartesiana a la ecuación paramétrica si, al verla como un sistema de ecuaciones, resolvemos el sistema.

En $\mathbb{R}^2$, dados dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, la ecuación cartesiana de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^3$, dados tres puntos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$, la ecuación cartesiana del plano que pasa por estos tres puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.