Andrés Merino • Periodo 2025-1

EJERCICIO 1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, sean:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

¿Son los vectores v_1, v_2 y v_3 linealmente independientes?

Solución. Tomemos α_1, α_2 y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ y planteamos el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_V,$$

o equivalentemente

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & 0; \\ 3\alpha_1 & - & 3\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0; \end{array}$$

cuya matriz adjunta en forma escalonada por filas es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, $\alpha_1 = -2\alpha_2$ y $\alpha_3 = \dfrac{9}{2}\alpha_2$, donde $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Escogiendo $\alpha_2 = 2$, encontramos la solución no trivial $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = 9$. Por lo tanto, v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes. □

EJERCICIO 2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, sean:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Son los vectores v_1, v_2 y v_3 linealmente independientes?

Solución. Tomemos α_1, α_2 y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ y planteamos el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_V,$$

o equivalentemente

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0; \\ 2\alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0; \\ 3\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0; \end{array}$$

cuya matriz adjunta en forma escalonada reducida por filas es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, el sistema posee solución única, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por lo tanto, v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes. □

EJERCICIO 3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[t]$, sean:

$$p_1(t) = t^2 + 1, \quad p_2(t) = t - 2 \quad \text{y} \quad p_3(t) = t + 3.$$

¿Son los vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ linealmente independientes?

Solución. Tomemos α_1, α_2 y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ y planteamos la combinación lineal nula

$$\alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t) = 0t^2 + 0t + 0,$$

a partir de lo cual se tiene que

$$\alpha_1(t^2 + 1) + \alpha_2(t - 2) + \alpha_3(t + 3) = 0t^2 + 0t + 0,$$

agrupando términos, se obtiene

$$\alpha_1 t^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)t + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0t^2 + 0t + 0,$$

es decir, se obtiene el sistema lineal homogéneo

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & & & & & = & 0; \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0; \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 0; \end{array}$$

cuya matriz adjunta en forma escalonada reducida por filas es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, el sistema posee solución única, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por lo tanto, $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ son linealmente independientes. □

EJERCICIO 4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a $\mathbb{R}^3$?

I. $S = \{(1,1,0),(3,4,2)\}$

II. $S = \{(1,1,0),(0,1,0),(2,2,2)\}$

Solución.

I. Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, queremos examinar si existen α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(3,4,2) = (a, b, c).$$

La ecuación anterior conduce al sistema lineal

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & a; \\ \alpha_1 & + & 4\alpha_2 & = & b; \\ & & 2\alpha_2 & = & c; \end{array}$$

de donde, resolviendo obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & a \\ 1 & 4 & | & b \\ 0 & 2 & | & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & a \\ 0 & 1 & | & -a+b \\ 0 & 0 & | & 2a-2b+c \end{pmatrix},$$

con lo cual, notamos que, si $2a-2b+c \neq 0$, el sistema no tiene solución. Por lo tanto no existe solución para cualquier elección de a, b, c, y se concluye que S no genera a $\mathbb{R}^3$.

II. Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, queremos examinar si existen α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(2,2,2) = (a, b, c).$$

La ecuación anterior conduce al sistema lineal

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & & + & 2\alpha_3 & = & a, \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & b, \\ & & & & 2\alpha_3 & = & c, \end{array}$$

de donde, resolviendo obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & a \\ 1 & 1 & 2 & | & b \\ 0 & 0 & 2 & | & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a-c \\ 0 & 1 & 0 & | & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{c}{2} \end{pmatrix},$$

con lo cual, notamos que, existe solución para cualquier elección de a, b, c, y por lo tanto $\mathbb{R}^2 = gen(S)$. $\square$