Andrés Merino • Periodo 2025-1

Ejercicio 1. En cada caso, determine el núcleo y la imagen de la aplicación lineal dada:

I. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (x_1 - x_3, 2x_2 + x_3)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

II. $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(A) = Ae^1 - 3Ae^2$, para todo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

III. $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ dada por $T(p(x)) = p(0) + p'(0)$, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.

IV. $T: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $T(A) = A - A^\intercal$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

V. $T: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$, dada por

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)\, dt,$$

para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

VI. $T: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f' + \alpha f$, para todo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante. (*Sugerencia:* Recuerde que $(e^{\alpha x} f(x))' = e^{\alpha x}(f'(x) + \alpha f(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$.)

Solución.

I. Sea $x \in \mathbb{R}^3$, entonces $x \in \ker(T)$ si y sólo si $(x_1 - x_3, 2x_2 + x_3) = 0$, lo que es equivalente a

$$x_1 - x_3 = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x_2 + x_3 = 0.$$

Al resolver este sistema, podemos concluir que

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\{(2, -1, 2)\}.$$

Esto además, implica que $\dim(\ker(T)) = 1$, de donde

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{img}(T)) = 1 + \dim(\operatorname{img}(T)),$$

y así $\dim(\operatorname{img}(T)) = 2$, lo que significa que $\operatorname{img}(T) = \mathbb{R}^2$.

II. Dada $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, tenemos que $A \in \ker(T)$ si y sólo si

$$a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} = 0,$$

de donde se tiene que

$$\ker(T) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} = 0\}$$

o, equivalentemente,

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

lo que, en particular, implica que $\dim(\ker(T)) = 2$. Con esto,

$$\dim(\operatorname{img}(T)) = \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) - \dim(\ker(T)) = 4 - 2 = 2,$$

de modo que $\operatorname{img}(T) = \mathbb{R}^2$.

III. Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$, entonces $p(x) \in \ker(T)$ si y sólo si $p(0) + p'(0) = 0$, es decir, si y sólo si $a + b = 0$. Por ende

$$\ker(T) = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a + b = 0\}.$$

Ahora, notemos que $T(1) = 1$, de modo que $1 \in \operatorname{img}(T)$. Con esto,

$$\mathbb{R} = \operatorname{gen}\{1\} \subseteq \operatorname{img}(T) \subseteq \mathbb{R},$$

de donde $\operatorname{img}(T) = \mathbb{R}$.

IV. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $A \in \ker(T)$ si y sólo si $A - A^\intercal = 0$, es decir, si y sólo si A es simétrica, por ende

$$\ker(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es simétrica}\}.$$

Ahora, notemos que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que

$$T(A)^\intercal = (A - A^\intercal)^\intercal = A^\intercal - A = -T(A),$$

por ende $T(A)$ es antisimétrica. Recíprocamente, si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica, tenemos que

$$T\left(\frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}B^\intercal = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B,$$

de modo que

$$\operatorname{img}(T) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es antisimétrica}\}.$$

V. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces $p(x) \in \ker(T)$ si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = 0,$$

es decir, si y sólo si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, por ende $\ker(T) = \{0\}$.

Sea $q(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k x^k \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$, tenemos que $q(x) \in \operatorname{img}(T)$ si y sólo si existe $p(x) =$

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que

$$\sum_{k=0}^{n+1} b_k x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1},$$

de donde se tiene que $q(0) = b_0 = 0$ y $b_k = \dfrac{a_{k-1}}{k}$ si $k \in \{1, \dots, n+1\}$. De este modo,

$$\operatorname{img}(T) = \{q(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x] : q(0) = 0\}.$$

VI. Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entonces $f \in \ker(T)$ si y sólo si $f' + \alpha f = 0$, es decir, si $f'(x) + \alpha f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que

$$e^{\alpha x}(f'(x) + \alpha f(x)) = 0,$$

es decir,

$$(e^{\alpha x} f(x))' = 0.$$

Esto sucede si y solamente sí existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $e^{\alpha x} f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, $f(x) = ce^{-\alpha x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Definamos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $\varphi(x) = e^{-\alpha x}$, de modo que $f = c\varphi$. Con esto,

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\{\varphi\}.$$

Ahora, sea $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Supongamos que $g \in \operatorname{img}(T)$, entonces existe $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $g = f' + \alpha f$, de modo que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x} g(x) = (e^{\alpha x} f(x))',$$

de donde, por el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$\int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt = e^{\alpha x} f(x) - f(0).$$

Así, tenemos que si, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt,$$

entonces f es continua y, por el primer teorema fundamental del cálculo,

$$T(f)(x) = f'(x) + \alpha f(x) = -\alpha e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt + e^{-\alpha x} e^{\alpha x} g(x) + \alpha \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt = g(x),$$

de donde T es sobreyectiva, y por ende $\operatorname{img}(T) = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$\square$

EJERCICIO 2. En cada caso, determinar si las aplicaciones lineales dadas son o no isomorfismos.

I. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por
$$T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$
para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

II. $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por
$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{pmatrix}.$$

III. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x) = x \times e^2$.

IV. $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \ln(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, donde sobre $\mathbb{R}^+$ se considera la estructura de espacio vectorial dada por las operaciones
$$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha,$$
para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución.

I. Sea $x \in \mathbb{R}^4$, tenemos que $x \in \ker(T)$ si y sólo si $T(x) = 0$, es decir,
$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_1 \end{pmatrix} = 0,$$
o, lo que es equivalente,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Dado que
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
se sigue que existe $x \neq 0$ tal que $T(x) = 0$, por ende $\ker(T) \neq \{0\}$ y así T no es inyectiva. Consecuentemente, T no es un isomorfismo.

II. Sea $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, entonces $T(p(x)) = 0$ si y sólo si
$$\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{pmatrix},$$
es decir, si y sólo si
$$p(0) = p'(0) = p''(0) = p'''(0).$$

Si $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, entonces tenemos que $a = b + 2c = 6d = 0$, de donde se tiene que $\ker(T) = \{0\}$, y así, T es inyectiva. Ahora, dado que

$$\dim(\mathbb{R}^{2\times 2})4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{img}(T)) = \dim(\operatorname{img}(T)),$$

se tiene que $\operatorname{img}(T) = \mathbb{R}^{2\times 1}$, o que implica que T es sobreyectiva. Así T es biyectiva y por ende un isomorfismo.

III. Dado que $T(e^2) = e^2 \times e^2 = 0$, se tiene que T no es inyectiva, y por ende T no es un isomorfismo.

IV. Sea $x \in \mathbb{R}^+$ Tenemos que $T(x) = 0$ si y sólo si $\ln(x) = 0$, lo que sucede si y sólo si $x = 1$, pero 1 es el vector nulo del espacio $\mathbb{R}^+$, así $\ker(T) = \{1\}$ y por ende T es inyectiva. Ahora, sea $y \in \mathbb{R}$, entonces $T(e^y) = \ln(e^y) = y$, por ende $\operatorname{img}(T) = \mathbb{R}$, lo que significa que T es sobreyectiva. Como T es biyectiva, T es un isomorfismo.

$\square$

EJERCICIO 3. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x-2y, 2x+y, x+y). \end{aligned}$$

Sean S y T las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Además, sean

$$S' = \{(1,-1),(0,1)\}$$

y

$$T' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,-1,1)\}$$

bases para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

I. Determine $[f]_{T,S}$.

II. Determine $[f]_{T',S'}$ a través de la expresión $[f]_{T',S'} = P_{T'\leftarrow T}[f]_{T,S}P_{S\leftarrow S'}$.

III. Verifique que se cumple que:

$$[f(1,2)]_{T'} = [f]_{T',S'}[(1,2)]_{S'}.$$

Solución.

I. Notemos que

$$f(1,0) = (1,2,1) \qquad \text{y} \qquad f(0,1) = (-2,1,1),$$

luego,

$$[f(1,0)]_T = (1,2,1) \qquad \text{y} \qquad [f(0,1)]_T = (-2,1,1),$$

por lo cual

$$[f]_{T,S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Notemos que

$$P_{S\leftarrow S'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P_{T'\leftarrow T} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$[f]_{T',S'} = P_{T'\leftarrow T}[f]_{T,S}P_{S\leftarrow S'} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -2/3 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

III. Dado que $[(1,2)]_{S'} = (1,3)$, tenemos que

$$[f(1,2)]_{T'} = [f]_{T',S'}[(1,2)]_{S'} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -2/3 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 13/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}.$$

Además, se tiene que $f(1,2) = (-3,4,3)$, a partir lo cual:

$$[f(1,2)]_{T'} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 13/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$