Andrés Merino • Periodo 2025-1

1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

DEFINICIÓN 1: Producto interno.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial. Un producto interno sobre E es una función

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ E\times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \langle u,v\rangle \end{aligned}$$

tales que cumple:

I. $\langle v,v\rangle \geqslant 0$ para todo $v \in E$;

II. $\langle v,v\rangle = 0$ si y solo si $v = 0$;

III. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ para todo $u, v, w \in E$;

IV. $\langle \alpha v,w\rangle = \alpha\langle v,w\rangle$ para todo $v, w \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

V. $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$ para todo $v, w \in E$.

Otra notación para el producto interno es

$$\langle u,v\rangle = (u\,|\,v).$$

Si se define un producto interno sobre un espacio vectorial E, a este se lo denomina espacio con producto interno o pre-Hilbertiano.

TEOREMA 1.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, entonces:

I. Para todo $u, v, w \in E$
$$\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle.$$

II. Para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\langle u, \alpha v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle.$$

III. Para todo $u \in E$
$$\langle u, 0\rangle = \langle 0, u\rangle = 0.$$

1.1 Productos internos usuales

I. En $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$:
$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

II. En $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, para $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, si

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \qquad \text{y} \qquad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

entonces

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_kb_k.$$

III. En $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot, \mathbb{R})$, para $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T).$$

IV. En $(\mathcal{C}([a, b]), +, \cdot, \mathbb{R})$, para $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

DEFINICIÓN 2.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y suponga que $u, v \in E$. Entonces:

I. u y v son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$.

II. La norma de u, denotada por $\|u\|$, está dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

DEFINICIÓN 3.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. La distancia en el espacio se define por

$$\begin{aligned} d\colon\ E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \|u - v\|. \end{aligned}$$

TEOREMA 2: Vectores ortogonales.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para $u, v \in E$, se dice que son ortogonales si

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

TEOREMA 3: Teorema de Pitágoras.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Si u, v son vectores ortogonales de E, entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

TEOREMA 4: Desigualdad de Cauchy-Schwartz.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para todo $u, v \in E$ se cumple que

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|.$$

Teorema 5: Desigualdad triangular.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para todo $u, v \in E$ se cumple que
$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Definición 4: Conjunto ortogonal.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y
$$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E.$$
Se dice que C es un conjunto ortogonal en E si
$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$
para todo $i \neq j$.

Definición 5: Conjunto ortonormal.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y
$$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E.$$
Se dice que C es un conjunto ortonormal en E si es ortogonal y
$$\|v_k\| = 1$$
para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 6.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Si $C \subseteq E$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces es linealmente independiente.

A partir de aquí, siempre consideraremos espacios vectoriales provistos con un producto interno.

1.2 Bases ortogonales

Definición 6: Base ortogonal (ortonormal).
En un espacio vectorial, una base ortogonal (ortonormal) es una base cuyos vectores forman un conjunto ortogonal (ortonormal).

Teorema 7.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortogonal para E. Se tiene que, para $v \in E$,
$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$
donde
$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 8.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormal para E. Se tiene que, para $v \in E$,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

donde

$$c_k = \langle v, u_k \rangle$$

para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 9: Proceso de Gram-Schmidt.
Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un conjunto linealmente independiente de E. Definamos

I. $v_1 = u_1$ y

II. $v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$, para $k = 2, \dots, n$.

Se tiene que el conjunto

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

es un conjunto ortogonal. Además, si definimos

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

para $k = 1, \dots, n$, se tiene que el conjunto

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

es un conjunto ortonormal.

Teorema 10.
Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortogonal y una base ortonormal.

Ejemplo 1. Considere la base $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$u_1 = (1, 1, 0), \qquad u_2 = (0, 1, 1), \qquad u_3 = (1, 0, 1)$$

mediante el proceso de Gram-Schmidt, se obtiene la base ortonormal $T = \{w_1, w_2, w_2\}$ para $\mathbb{R}^3$ donde

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \qquad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \qquad w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

1.3 Complemento ortogonal

A partir de aquí, siempre consideraremos espacios vectoriales provistos con un producto interno.

DEFINICIÓN 7: Complemeto ortogonal.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y $H \subset E$. El complemento ortogonal de H, denotado por $H^\perp$, se define por:

$$H^\perp = \{x \in E : \langle x, h\rangle = 0, \text{ para todo } h \in H\}.$$

TEOREMA 11.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y H subespacio vectorial de H, entonces:

I. $H^\perp$ es un subespacio vectorial de E.

II. $H \cap H^\perp = \{0\}$.

III. Si $\dim(E) = n$, entonces $\dim(H^\perp) = n - \dim(H)$

TEOREMA 12.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de E, entonces

$$E = W \oplus W^\perp.$$

TEOREMA 13.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de E, entonces

$$\left(W^\perp\right)^\perp = W.$$

DEFINICIÓN 8: Proyección ortogonal.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial y H un subespacio vectorial de E, con base ortogonal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Para $v \in E$, la proyección ortogonal de v sobre H, denotado por $\operatorname{proy}_H v$, se define por:

$$\operatorname{proy}_H(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 + \cdots + \frac{\langle v, u_n\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle} u_n,$$

donde $\operatorname{proy}_H(v) \in H$.

TEOREMA 14: Teorema de la proyección.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión finita, H un subespacio vectorial de E y $v \in E$. Se tiene que

$$v = \operatorname{proy}_H(v) + \operatorname{proy}_{H^\perp}(v).$$

Teorema 15.
Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión finita, H un subespacio vectorial de E y $v \in E$. Se tiene que el vector en H más cercano a v es $\text{proy}_H(v)$, es decir,

$$\|v - w\| \quad \text{es mínima cuando} \quad w = \text{proy}_W(v).$$