Ayudantía 3

Termodinámica

José Antonio Rojas Cancino – jrojaa@uc.cl

Problema 1

Considere una ventana compuesta de dos vidrios, de 0.5 cm de espesor y área 2×2 m^2 separadas por 1 cm de aire. La remperatura interior de la casa son 20°C y la exterior 5°C. Determine la tasa de transferencia de calor a través de la ventana, y compárela con la tasa de transferencia de calor a través de un vidrio de 1cm de espesor. La conductividad térmica del vidrio es de $k_v = 0.8$ W/m, y la del aire es de $k_a = 0.026$ W/m.

Respuesta

Para esto, vamos a modificar un poco nuestra ecuación de conducción, tal que:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \frac{|\Delta T|}{\Delta x} \quad + \quad R_T = \frac{\Delta x}{k \cdot A} \quad \Longrightarrow \quad \dot{Q} = \frac{|\Delta T|}{R_T},$$

donde R_T es definido como la **resistencia térmica**. La resistencia térmica de nuestra ventana será la **suma de las resistencias térmicas** que la componen. Por tanto, tendremos:

$$R_{Total} = 2 \cdot R_v + R_a,$$

con R_v y R_a las resistencias térmicas del vidrio y aire, respectivamente. Teniendo el área, el espesor, y la conductividad térmica de cada parte, se tiene:

$$R_v = \frac{L_v}{k_v \cdot A} = \frac{0.005}{0.8 \cdot 2 \times 2} = 0.001562 \text{ K/W}$$
$$R_a = \frac{L_a}{k_a \cdot A} = \frac{0.01}{0.026 \cdot 2 \times 2} = 0.09615 \text{ K/W}$$

$$R_{Total} = 2 \cdot 0.001562 \text{ K/W} + 0.09615 \text{ K/ W} = 0.09928\text{K/W}$$

Por lo tanto, la tasa de un centímetro de espesor es:

$$\dot{Q} = \frac{|20-5|\text{K}}{0.09615 \text{ K/W}} \Longrightarrow \boxed{\dot{Q} \approx 151.1 \text{ W}}$$

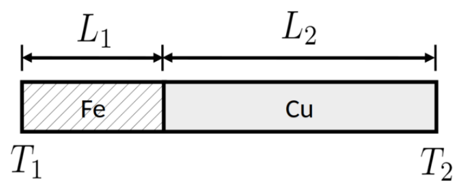
Si es que ahora cambiamos a que sólo tenemos vidrio de 1 cm, cambia a que $R_T = R_v$ tal que:

$$R_T = \frac{L_v}{k_v \cdot A} = \frac{0.01}{0.8 \cdot 2 \times 2} = 0.003125 \text{ K/W}$$

$$\dot{Q} = \frac{|20-5|\text{K}}{0.003125 \text{ K/W}} \Longrightarrow \boxed{\dot{Q} = 4800 \text{ W}}$$

Problema 2 (*P2 I1 2024-2*)

Se unen dos barras, una de cobre y otra de hierro, en la forma indicada en la figura. La longitud de la barra de cobre, $L_2 = 20\,\text{cm}$, es el doble que la longitud L_1 de la barra de hierro.
Las superficies laterales de las barras están aisladas térmicamente y la sección transversal de ambas es $10\,\text{cm}^2$. El extremo libre de la barra de hierro se mantiene a la temperatura fija $T_1 = 100\,^\circ\text{C}$, y el de la de cobre se mantiene a la temperatura fija $T_2 = 0\,^\circ\text{C}$.



(a) Determine la temperatura de la unión entre ambas barras

(b) Determine el flujo de calor a lo largo de las barras

(c) Si el extremo libre de la barra de cobre se pone en contacto térmico con una masa de hierro de 500g, que se encuentra a $0\,^\circ\text{C}$, y está aislada del medio, determine el tiempo necesario para que se funda todo el hielo

Indicación: La conductividad térmica del cobre es $k_{Cu} = 385\,\text{W/m}\cdot\text{K}$ y la del hierro es $k_{Fe} = 80\,\text{W/m}\cdot\text{K}$. El calor latente de fusión de agua es $L_f = 334 \times 10^3\,\text{J/kg}$

Respuesta

Ley de Conducción

Podemos ocupar la ley de conducción de calor:

$$\dot{Q} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta X},$$

donde, podemos plantearla para ambas barras, ya que el calor transferido debe ser igual:

$$k_{Fe}A\frac{T_1 - T_u}{L_1} = \dot{Q} = k_{Cu}A\frac{T_u - T_2}{L_2}.$$

Ocupando $L_2 = 2L_1$, y reemplazando con los valores de T_1, T_2, k_{Fe} y k_{Cu}, tenemos:

$$k_{Fe}A\frac{100 - T_u}{L_1} = k_{Cu}A\frac{T_u - 0}{2L_1}$$

$$\Longrightarrow T_u\left(1 + \frac{k_{Cu}}{2k_{Fe}}\right) = 100 \Longrightarrow T_u = \frac{100}{1 + 385/160} = 29.36\,^\circ\text{C} \tag{0.1}$$

Flujo de calor

Ocupando lo obtenido anteriormente, podemos reemplazar en cualquier ecuación de conducción para obtener el flujo de calor:

$$\dot{Q} = k_{Cu} A \frac{T_u - T_2}{L_2} = 385\,\mathrm{W/m\ K} \cdot 10 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{29.36\,^\circ\mathrm{C}}{0.2\,\mathrm{m}} = 56.5\,\mathrm{W}. \tag{0.2}$$

Tiempo para fundir

Al ya tener el flujo de calor, nos falta obtener el calor requerido para fundir todo el hielo, ya que:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta t = \frac{Q}{\dot{Q}}$$

Ocupando la fórmula de calor latente, se tiene:

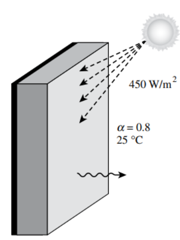
$$Q_f = m \cdot L_f = 0.5\,\mathrm{kg} \times 334 \times 10^3\ \mathrm{J/kg} = 167 \times 10^3\ \mathrm{J}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Delta t = \frac{167 \times 10^3\ \mathrm{J}}{56.5\,\mathrm{W}} = 2955\,\mathrm{s}. \tag{0.3}$$

Problema 3 (***Problema 2.103, Cengel & Boles***)

Una chapa metálica delgada está aislada en su cara trasera, y su cara delantera está expuesta a la radiación solar. La superficie expuesta de la chapa tiene 0.8 de absorbancia para radiación solar. Si esta radiación incide sobre la placa con una irradiancia de 450 $\mathrm{W/m^2}$, y la temperatura del aire que la rode es 25°C, determine la temperatura de la chapa cuando la pérdida de calor por convección es igual a la energía solar absorbida por la placa. Suponga que el coeficiente de transferencia de calor por convección es 50 $\mathrm{W/m^2}$ °C, y desprecie la pérdida de calor por radiación.



Respuesta

Al momento de que la pérdida de calor por convección es igual a la energía solar absorbida, se cumple:

$$\dot{Q}_{solar,abs} = \dot{Q}_{conv}$$
$$\alpha \cdot \dot{Q}_{solar} = h \cdot A \cdot (T_{pared} - T_{ambiente})$$

Sin embargo, no tenemos A. Notemos que nos dan el coeficiente de transferencia con unidades $\mathrm{W/m^2}$, por lo que es **por unidad de área**. Por lo tanto, podemos reescribir como:

$$\alpha \cdot A \cdot \dot{Q}_{solar/m^2} = h \cdot A \cdot (T_{pared} - T_{ambiente})$$

Con esto, podemos cancelar el área, y reemplazar por valores, teniendo:

$$0.8 \cdot 450 \text{ W/m}^2 = 50 \text{ W/m}^2 \text{ °C} \cdot (T_{pared} - 25) \text{ °C}$$

$$\implies T_{pared} = \frac{0.8 \cdot 450 \text{ W/m}^2}{50 \text{ W/m}^2 \text{ °C}} + 25 \text{ °C} \implies \boxed{T_{pared} = 32.2 \text{ °C}}$$

Problema 4

Un cilindro y pistón orientado horizontalmente contiene aire caliente. El aire se enfría desde un volumen inicial de $3 \cdot 10^{-3}$ m^3 hasta un volumen final de $2 \cdot 10^{-3}$ m^3. Durante este proceso, el resorte ejerce una fuerza que varía linealmente desde 900 N hasta 0N. La presión atmosférica es 100 kPa, y el área transversal del pistón es 0.0018 m^2. Desprecie la fricción entre el pistón y el cilindro. Determine los valores iniciales y finales de la presión y el trabajo realizado en kJ.

Respuesta

Valores de presión

Podemos primero buscar los valores de la presión inicial y final. La presión total es:

$$P_T = P_{resorte} + P_{atm},$$

Por lo que la presión inicial y final es:

$$P_i = \frac{900 \text{ N}}{0.0018 \text{ m}^2} + 100 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 500000 \text{ Pa} + 100000 \text{ Pa} = 600 \text{ kPa}$$
$$P_f = \frac{0 \text{ N}}{0.0018 \text{ m}^2} + 100 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 0 \text{ Pa} + 100000 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$$

Función Presión

Podemos de tratar de *armar* una función de presión a partir de armar una función de fuerza respecto a volumen. Nos dicen que la fuerza varía linealmente, y tenemos dos puntos:

$$V_1 = 3 \cdot 10^{-3},\ F_1 = 900 \qquad V_2 = 2 \cdot 10^{-3},\ F_2 = 0$$

Por lo tanto, podemos generar una función $F = F(V)$ que cumpla con la linealidad mencionada, es decir:

$$F_1 = F(V_1) = c_1 V_1 + c_2 \implies 900 = c_1 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + c_2$$
$$F_2 = F(V_2) = c_1 V_2 + c_2 \implies 0 = c_1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + c_2$$

De lo que podemos sacar rápidamente de la segunda ecuación que $c_2 = -2 \cdot 10^{-3} c_1$, lo cual reemplazando en la primera ecuación, nos da que $c_1 = 9 \cdot 10^5$, dejándonos con la ecuación:

$$F(V) = 9 \cdot 10^5 \cdot V - 1.8 \cdot 10^3.$$

Ahora, podemos armar una función $P(V)$, ya que tenemos una presión atmosférica y área constante:

$$F(V) = 9 \cdot 10^5 \cdot V - 1.8 \cdot 10^3 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{A}$$
$$\frac{F(V)}{A} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot V - 1.8 \cdot 10^3}{A} \qquad \Big/ + P_{atm}$$
$$P_T = \frac{F(V)}{A} + P_{atm} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot V - 1.8 \cdot 10^3}{A} + P_{atm}$$
$$P_T(V) = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot V - 1.8 \cdot 10^3}{0.0018} + 100000$$
$$\boxed{P_T(V) = 5 \cdot 10^8 V - 9 \cdot 10^5}$$

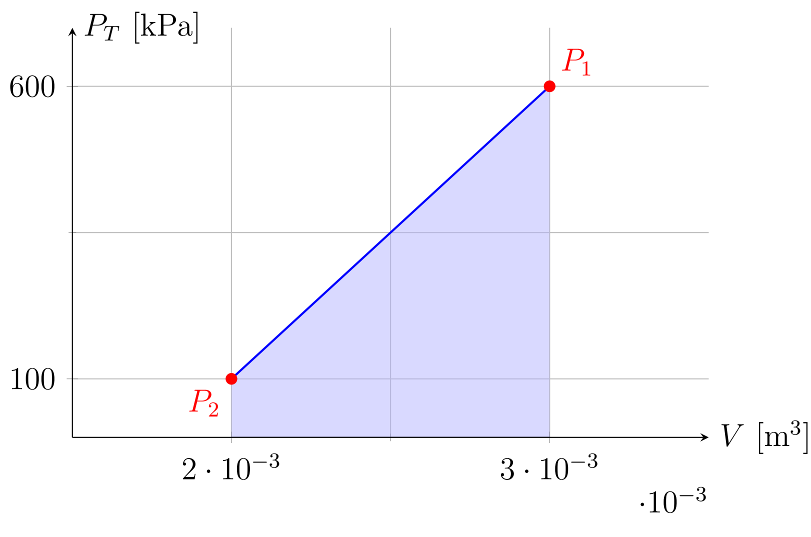
Trabajo Realizado

Finalmente, tenemos una ecuación de la presión, la cual podemos reemplazar en la integral del trabajo:

$$\begin{aligned}
W_{in} &= -\int_{V_1}^{V_2} P \; dV \\
&= \int_{3\cdot 10^{-3}}^{2\cdot 10^{-3}} 5 \cdot 10^8 V - 9 \cdot 10^5 \; dV \\
&= \left[\frac{5 \cdot 10^8}{2} V^2 - 9 \cdot 10^5 \; V\right]_{3\cdot 10^{-3}}^{2\cdot 10^{-3}} \\
&= \left(2.5 \cdot 10^8 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 - 9 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\right) \\
&\quad - \left(2.5 \cdot 10^8 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 - 9 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}\right) \\
&= (1000 - 1800) - (2250 - 2700) \\
&= (-800) - (-450) = -350\,\mathrm{J} = \boxed{-0.35\,\mathrm{kJ}}
\end{aligned}$$

Forma más fácil: Forma gráfica

Si es que nosotros hacemos el gráfico de la presión vs el volumen, nos queda más o menos así:



Notemos que lo podemos el trabajo es el área debajo de la curva, tal como se describe antes. Por tanto, podríamos calcular el área directamente dividiéndola en dos: una siendo el área de un rectángulo de base $3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$, y de altura 100kPa = 100000 Pa, y la otra siendo el área del triangulo rectángulo de catetos $3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$ y de 600 kPa-100 kPa = 600000 Pa - 100000 Pa. Calculando estas áreas, podemos calcular el trabajo.