Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS3212 – Gestión de Operaciones
Ayudantes: René Acuña (rtacuna@uc.cl) y Esteban Brito (eabrito@uc.c)
Primer Semestre 2018

Guía de Ejercicios:
Variabilidad y Calidad

Esta guía concentra material pasado de guías y pruebas anteriores. Se recomienda, para potenciar el estudio, revisar en Siding semestres anteriores disponibles.

Variabilidad

Problema 1

Un promedio de 10 automoviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona un servicio sin que uno descienda del automovil. Suponga que el tiempo de ciclo promedio por cada cliente es de 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio son exponenciales.

a) ¿Cual es la probabilidad de que el cajero este ocioso?

b) ¿Cual es el numero promedio de autos que estan en la cola del cajero? (Considerar que un automovil que esta siendo atendido no esta en la cola esperando)

c) ¿Cual es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco (incluyendo el tiempo de servicio)?

d) ¿Cuantos clientes atendera en promedio el cajero por hora?

Solución problema 1

a) Se denominará π_0 a la probabilidad de que el cajero este atendiendo a 0 personas:

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{15} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el cajero esta vacío un tercio del tiempo.

b) El numero promedio de autos en la cola es:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(\frac{2}{3})^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \text{ clientes}$$

c) El tiempo que una persona pasa en el sistema, incluyendo el servicio, es:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \text{ clientes}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ horas}$$

d) Si el cajero siempre estuviese ocupado, atenderia un promedio de$\mu = 15$ clientes por hora. Pero de a. sabemos que solo esta ocupado dos tercios del tiempo. Por lo tanto, durante cada hora, el cajero atendera un promedio de:

$$\frac{2}{5} * 15 = 10 \text{ clientes}$$

Problema 2

Actualmente el banco posee dos cajeros y esta considerando contratar a una tercera persona. Las personas llegan al banco con un promedio de 1 cada 10 minutos, y cada persona requiere en promedio 5 minutos para ser atendido. Supongamos que las personas arriban de acuerdo a una distribucion Poisson y que el tiempo necesario para prestar el servicio distribuye exponencial.

a) Determine la razon de utilizacion del sistema.

b) ¿Cual seria el efecto sobre la linea de espera si se contrata a una tercera persona como cajero?

Solución problema 2

a) La razon de utilizacion esta dada por la ecuacion:

$$\rho = \frac{\lambda}{s * \mu} = \frac{6 clientes/hora}{2 * 12 clientes/hora}$$

El sistema estara ocioso un 75% del tiempo
b) ara calcular el efecto sobre la cola de agregar un tercer cajero, se debe calcular L_q para conocer el numero de cliente en cola:

$$w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{6}{12 * (12 - 6)} = 0.0833 \text{ horas} = 5 \text{ minutos}$$

Claramente no se justifica contratar a otro cajero dado que el sistema esta subutilizado, lo podemos ver en el tiempo de espera y el numero de clientes en un momento dado. En promedio un cliente espera 5 minutos y nunca hay mas de un cliente en la cola.

Problema 3

Una maquina que produce unidades con un tiempo medio de proceso de 2 minutos con una desviacion estandar de 1,5 minutos por unidad.

a) ¿Cual es el coeficiente de variacion del proceso?

b) Si los tiempos de proceso de las unidades son independientes, ¿cual seria la varianza de la produccion de 60 unidades? ¿Cual seria su coeficiente de variacion?

c) Si la maquina puede fallar y el tiempo entre fallas distribuye exponencialmente con media de 60 horas, y un tiempo de reparacion que tambien distribuye exponencialmente con media de 2 horas. ¿Cual es el tiempo medio y el coeficiente de variacion para la produccion de 60 unidades?

Solución problema 3

a) El coeficiente de variacion del proceso esta dado por:

$$CT = \frac{\sigma}{t} = \frac{1.5}{2} = 0.75 \text{ minutos}$$

b) La produccion se compone de proceso independientes, asi, la la varianza de la produccion de 60 unidades se puede calcular como:

$$Var = \sum_{i=1}^{60} \sigma_i^2 = 60\sigma_i^2 = 60 * 1.5^2 = 125$$

$$CT = \frac{\sqrt{135}}{2 * 60} = 0.0968 \text{ minutos}$$

c) Primero se calcula la disponibilidad de la maquina:

$$A = \frac{m_f}{m_a + m_f} = \frac{60}{2 + 60} = 96.77\%$$

Luego,el tiempo medio efectivo en que esta funcionando la maquina es:

$$t_e = \frac{t}{A} = 2 * \frac{60}{0.9677} = 124 \text{ minutos}$$

Finalmente, se calcula el coeficiente de variacion segun la relacion:

$$c_e^2 = c_o^2 + (1 + c_a^2) * A * (1 - A) * \frac{m_a}{t}$$

Donde $c_a = 1$ porque las llegadas distribuyen exponenciales, así:

$$c_e^2 = 0.0968^2 + (1 + 1^2) * 0.9677 * (1 - 0.9677) * \frac{2}{2} = 0.07188$$

$$c_e = 60 * \sqrt{0.07188} = 16,0867$$

Problema 4

Un sistema productivo consiste en dos estaciones de trabajo conectadas en serie, E1 y E2. Se muestra la disposición en la siguiente figura:

Frente a cada estación existen áreas de almacenamiento (buffers), B1 y B2. Las órdenes a procesar llegan a E1 (esperan en el buffer, si es necesario) son procesadas y pasan a E2. Si B2 se llena, entonces E1 debe parar y no puede seguir procesando e, igualmente, si B1 se llena, el sistema no puede recibir nuevas órdenes. Tanto E1 como E2 pueden procesar 30 órdenes por hora, pero son procesos variables. El coeficiente de variación de cada uno es de un 40%. Las órdenes llegan a este sistema a una tasa promedio de 25 órdenes por hora, con una variación de un 40%.

a) Suponiendo primero que los buffer tienen capacidad infinita, determine aproximadamente cuánto sería el inventario en espera en estos y el tiempo medio de flujo estimado para una orden desde que entra hasta que sale del sistema.

b) Suponga ahora que el buffer en E2 (es decir, B2) tiene un capacidad igual al valor del inventario en B2 estimado por usted en a), mientras que B1 sigue con capacidad infinita. ¿Qué pasará con el tiempo de flujo en el sistema? ¿Por qué?

c) Luego de analizar exhaustivamente el inventario se aprecia que si el segundo buffer tuviera capacidad igual al inventario promedio, entonces se llenará un 5% de las veces. Estime cuanto aumentará el tiempo de flujo de las órdenes en el sistema, si la capacidad del B1 sigue siendo infinita.

d) Usted también ha decidido definirle una capacidad al primer buffer igual a la cantidad calculada en el punto anterior, y que denotaremos por C, de modos que ambos buffers tienen la mismas capacidad. ¿Qué pasará ahora con el tiempo de flujo total?¿Qué pasará con el throught-put neto del sistema? (No se requieren cálculos numéricos)

Solución problema 4

a) Considere:

$$FT_q = \frac{(c_a^2 + c_e^2)}{2} * \frac{\rho}{1 - \rho} * \frac{1}{\mu}$$

$$c_s^2 \approx \rho^2 * c_e^2 + (1 - \rho^2) * c_a^2$$

Para E1 los coeficientes de variación es 40%. El rho es igual a velocidad de llegada/capacidad, es decir:

$$\frac{25}{30} = 0,83$$

El tiempo de espera en B1 es entonces 1,56 minutos. Aplicando Little se tiene que:

$$25 * 0,026 = 0,65 \text{ unidades como inventario promedio esperando en B1.}$$

El coeficiente de variación en E1 y en la llegada es similar, y además la tasa de llegada se mantiene para E2. El tiempo de estadía en el servidor en E1 es la inversa de la tasa de atención, es decir 1/30. Dado que E1 y E2 tienen iguales capacidades e iguales variabilidades, sus tiempos son similares. Así el tiempo estimado en sistema es:

$$\frac{2}{30} + 2 * 0,026(\text{espera B1+B2}) = 7.12 \text{ minutos}$$

b) Si B2 tiene capacidad limitada, cuando alcance su límite, E1 deberá parar. Si es así la cola en B1 seguirá creciendo. Esto tendería a aumentar el tiempo de estadía del sistema.

c) Podemos estimar que el buffer se llena un 5% del tiempo, entonces E1 se parará un 10% del tiempo, es decir su productividad disminuirá en un 5%. Esto es válido, desde luego, suponiendo que E1 esté ocupado siempre que dado que ρ es alto, esto es un supuesto razonable. De este modo, la tasa de servicio de E1 debería disminuir a un 95% de su valor original, es decir, a 28,5 unidades por hora. COn esto se tiene que:

$$\rho = \frac{25}{28,5} = 0,877$$

El nuevo tiempo de espera en B1 es 0,037 horas, aproximadamente 2,25 minutos. Se puede verificar un aumento del tiempo en sistema.

d) Si ahora se restringe además B1 el resultado será que se producirá un fuerte rechazo de órdenes a la entrada del sistema. Esto se traduce en que el through-put neto de sistema podría disminuir de forma significativa.

Problema 5

Un consultorio de salud primaria atiende pacientes que llegan a una tasa media igual a 10 pacientes por hora. La distribución de probabilidad de tiempo entre llegadas no es conocida pero se ha estimado que su desviación estandar es igual a 5 minutos. Los pacientes son atendidos por un equipo de médicos, despues de ser fichados por una enfermera. La enfemera tarda 2 minutos en fichar a los pacientes, siento ese tiempo muy exacto. Un médico tarda, en promedio, 15 minutos en atender un paciente y ese tiempo de atención tiene una variacion de un 70%. A la administración del consultorio le interesa determinar el número de médicos que debe tener de modo que el tiempo medio estimado de espera de los pacientes para ver algñun médico (después de ser fichados) no supere 30 minutos:

a) Utilice las relaciones físicas de la fábrica para escribir una expresión que permita estimar cuántos médicos se necesitan para cumplir con el requerimiento de la administración del consultorio. Sea claro y justifique sus argumentos. (Si bien, este es un sistema con ervidores paralelos, puede simplificar la situación a un sólo servidor con una tasa de atención equivalente adecuada según el número de médicos, y variabilidad también adecuada a esa situación)

b) ¿Cuántos pacientes, en promedio, están esperando?¿Es correcto usar este número para definir el número de silla a tener en la sala de espera? Explique

Solución problema 5

a) Sea λ la tasa de llegada de pacientes y μ la tasa de servicio de un médico. Notemos que sólo es relevante el tiempo después del fichaje, por la forma en que está redactada la pregunta. Podemos considerar un sistema equivalente con n médicos y que da una tasa de atención igual a $n\mu$. El coeficiente de variación para un médico es 0.7, lo que da un $\sigma = 10.5$ minutos. Si tenemos n médicos, la desviación estandar el tiempo de atención del conjunto equivalente es $\sigma/\sqrt{n}$. Luego el coeficiente de variación del tiempo de atención del conjunto n médicos es $0.7/\sqrt{n}$. Por otro lado, el sistema equivalente tiene un coeficiente de ocupación igual a:

$$\rho_e = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{2.5}{n}$$

El coeficiente de variación de la llegada es $c_a = 0.83$. COn esto podemos usar la fórmula para estimar el tiempo medio de espera en cola en función del número de médios:

$$CT \approx \frac{(c_a^2 + c_e^2)}{2} * \frac{\rho_e}{1 - \rho_e} * \frac{1}{\mu}$$

donde el subíndice e indica los parámetros para el modelo equivalente. Esta formula se reduce a:

$$CT \approx \frac{(0.83^2 + n(0.7)^2)}{2} * \frac{2.5}{n - 2.5} * \frac{15}{n}$$

Basta determinar n tal que:

$$CT(n) \leq 30$$

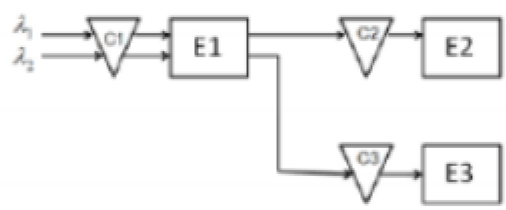
b) Se calcula la ecuación de Little, con el n determinado en a:

$$L(n) = \lambda * CT(n)$$

Usar ese número de sillas no es correcto ya que corresponde sólo al promedio y no se está tomando en cuenta la variabilidad, que puede ser mucha especialmente si hay un alto nivel de ocupación. Esto significa que una gran cantidad de personas podrían quedar de pie, no muy presentable si se trata de un consultorio de salud.

Problema 6

Considere el sistema productivo que se muestra en la figura:



En este sistema se procesan órdenes para dos productos: P1 y P2. Ambos siguen rutas diferentes en la red. P1 usa la estación E1 y después continúa a E2, y P2 usa la estación E1 y después continúa a E3. Cada estación tiene un buffer con capacidad C_i; i=1,2,3 (el triángulo invertido antes de cada estación). Cada estación tiene una capacidad de producción expresada en una tasa máxima posible de μ_i, i=1,2,3 , ordenes por hora. Al sistema llegan para proceso órdenes del producto P1 a una tasa de λ_1 ordenes por hora y para el producto 2 a una tasa λ_2 órdenes por hora. Cada uno de los tiempos entre llegada de cada tipo de orden tiene una variabilidad expresada por un coeficiente de variación s_i, i = 1,2 y el tiempo de procesamiento en cada estación también posee una variabilidad expresada por un coeficiente de variación e_i, i = 1,2,3. Un problema muy relevante en un sistema productivo es poder estimar cuanto será el lead -time para la entrega de una orden; es decir, el tiempo desde que una orden llega al sistema hasta que es terminada. Este es, básicamente, el tiempo de cumplimiento que se promete al cliente. En este problema desarrollaremos ese concepto.

a) Asumiendo que las capacidades de los buffers son suficientemente grandes como para nunca llenarse y producir bloqueos (es decir, el supuesto de "capacidad infinita"), calcule un estimador del lead-time promedio para cada uno de los tipos de productos. (Puede dejar términos intermedios expresados, pero sea claro en lo que escribe y explique los supuestos que haga).

b) En la pregunta anterior, usted calculó solo un estimador del tiempo medio de flujo, pero en la realidad uno estará interesado en un estimado para el momento en que llega una orden y según las condiciones del sistema productivo en ese momento particular. Su ponga que llega una orden para el 5 producto P2 y en este momento hay f(1) órdenes de P(1) y f(2) órdenes de P(2) en espera en la estación E1, g órdenes de P1 en espera en la estación E2 y h órdenes de P2 en espera en la estación E3. Explique cómo calcular un estimador para el tiempo de entrega de la orden recién llegada. (Use, si quiere, lo que ya ha calculado y otras cosas adicionales y supuestos que considere adecuados, pero explique todo con claridad).

Solución problema 6

a) Haremos uso de la fórmula de Kingman para estimar el tiempo medio de espera en cola en cada una de las estaciones. Esto requiere calcular el coeficiente de variabilidad a la salida de E1 y para eso usaremos la fórmula de propagación de variabilidad. Primero notemos que los coeficientes de congestión en cada estación son:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \ \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \ \rho_1 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \tag{1}$$

Lo anterior supone que las tasas son tales que $\rho_1 < 1$, i= 1,2,3. Denotemos por $L(i)$ el tiempo medio de espera en el sistema de la estación i. Primero debemos ver cuál es la variabilidad de la llegada a E1. Los dos tipos de órdenes tiene tiempos de llegada con variabilidad s_1 y s_2, la variabilidad combinada es igual a:

$$\bar{s} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s_2 \tag{2}$$

Tenemos entonces:

$$L_1 = \frac{\bar{s}^2 + {e_1}^2}{2} * \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} * \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1} \tag{3}$$

El coeficiente de variación de la salida podemos estimarlo como:

$$\bar{s}^2 = \rho_1^2 * e_2^2 + (1 - \rho_1^2) * \bar{s}^2 \tag{4}$$

Y este se preserva igual tanto hacia la estación E2 como hacia E3. Con esto tenemos que:

$$L_2 = \frac{\bar{s}^2 + {e_2}^2}{2} * \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} * \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2} \tag{5}$$

$$L_3 = \frac{\bar{s}^2 + {e_3}^2}{2} * \frac{\rho_3}{1 - \rho_3} * \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_3} \tag{6}$$

Luego, el lead-time medio para las órdenes tipo 1 es $L_1 + L_2$ y el de las órdenes tipo 2 es el $L_1 + L_3$.

b) En las condiciones dadas, podrá estimarse el tiempo medio exactamente como el indicado en la parte a). Sin embargo hay en parte un error en esto y es que esas son cantidades promedios. Si se sabe que hay ciertas cantidades en cola, esa información es útil. En particular, si hay f_1 órdenes de P1 y f_2 de P2, esas tardaran, en promedio:

$$(f_1 + f_2) * \frac{1}{\mu_1} \tag{7}$$

En ser procesadas y en total la nueva orden requerirá en promedio:

$$(f_1 + f_2 + 1) * \frac{1}{\mu_1} \tag{8}$$

En ser liberada a la siguiente etapa (suponemos que hay una orden en proceso en la estación). De este modo, dependiente del tipo de orden, tenemos que los Lead-times promedios serán: Si la orden es de P1:

$$(f_1 + f_2 + 1) * \frac{1}{\mu_1} + (g + 1) * \frac{1}{\mu_2} \tag{9}$$

Si la orden es de P2:

$$(f_1 + f_2 + 1) * \frac{1}{\mu_1} + (h + 1) * \frac{1}{\mu_3} \tag{10}$$

Problema 7

Una fábrica de pastas de Santiago tiene un tiempo medio de proceso por caja producida de 2 minutos con una desviación estándar de 0,2 minutos por caja. Le piden que los ayude con algunas dudas, por favor responda:

a) ¿Cuál es el coeficiente de variación del proceso?

b) Si los tiempos de proceso de las unidades son independientes, ¿Cuál sería la varianzade la producción de 30 cajas? ¿y su coeficiente de variación?

c) La maquina que produce las pastas, presenta fallas. El tiempo entre fallas distribuye exponencialmente con media de 60 horas y un tiempo de reparación con la misma distribución, con media de 1 hora. ¿Cuál es el tiempo medio y el CV para la producción de 200 cajas de pasta?

Solución problema 7

a)

$$C(t) = \frac{\sigma}{t} = \frac{0.2}{2} \tag{11}$$

b) La varianza es igual a la varianza acumulada de las unidades independientes:

$$30 * (0.2)^2 = 1.2 \tag{12}$$

El coeficiente de variación es:

$$C(t) = \frac{1.2^(1/2)}{2 * 30} = 0.01825 \tag{13}$$

c) El tiempo de utilización de maquina es:

$$\frac{m_f}{m_r + m_f} = \frac{60}{60+1} = 0,9836 \tag{14}$$

El tiempo efectivo de funcionamiento para fabricar las 200 cajas es el tiempo sin fallo afectado por la disponibilidad. Entonces el tiempo efectivo, te, es t/A, 2*200/0,9836 = 407 minutos aproximadamente para producir las 200 cajas.
El coeficiente de variación responde a la formula:

$$c_e^2 = c_o^2 + (1 + c_r^2) * A * (1 - A) * \frac{m_r}{t} \tag{15}$$

Con c(0) igual a 0,1 y con c(r)= 1, por su distribución exponencial, el coeficiente de variación es 0,0169.

Problema 8

Un banco considera si debe abrir una ventanilla para el sercicio a clientes. La administración estima que los clientes llegarán con una tasa de 15 por hora. El cajero que atenderá la ventanilla puede atender a los clientes con una rapidez de uno cada tres minutos.
Suponiendo llegadas Poisson y un servicio exponencial, encuentre:

a) La utilización del cajero

b) El número promedio en la fila de espera.

c) El número promedio en el sistema.

d) El tiempo promedio de espera en la fila.

e) El tiempo promedio de espera en el sistema, incluyendo el servicio.

Solución problema 8

Tenemos que:

$$\lambda = 15 \frac{clientes}{hora} \tag{16}$$

$$\mu = 20 \frac{clientes}{hora} \tag{17}$$

El sistema consiste en un sistema M/M/1, por lo tanto:

ρ	0.75	75%		
Lq	2.25	Clientes		
Ls	3.0	Clientes		
Wq	0.15	horas	9	minutos
Ws	0.20	horas	12	minutos

Problema 9

Usted es dueño de una tienda de helados tiene 1 sola caja para atender a sus clientes. Considere que los clientes llegan con una tasa de llegada de λ [clientes/min], que distribuye en forma general G y son atendidos a una tasa μ [clientes/min] que también distribuyen en forma general. Usted mide el tiempo medio de espera, siendo este de T_e minutos, el coeficiente de variabilidad del tiempo promedio de llegadas de personas siendo este C_a y también mide el coeficiente de variabilidad del tiempo efectivo de la atención siendo este C_e.
Usted se encuentra muy preocupado por el servicio al cliente de su heladería y determina que existe un costo por el tiempo que espera de los clientes en la cola de C_q [$/m] peso por minuto en la cola. Es posible aumentar la tasa de atención de clientes de la caja a un costo C_k [$/clientes/min] lo que claramente aumentaría el nivel de servicio de la heladería.

a) Grafique cómo varía el costo de espera de los clientes en la cola, el costo de operación de la caja y el costo total; versus la tasa de atención a clientes (realice un gráfico para cada caso).

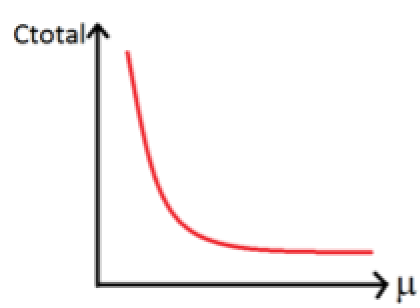
b) Escriba el modelo de programación matemática que debiera resolver el gerente de la heladería. (Hint: Determine la variable de decisión y plantee la función objetivo).

c)Resuelva el problema anterior y plantee la forma funcional que me permita obtener el óptimo. Sólo plantee la formula funcional y el mecanismo para obtener el óptimo.

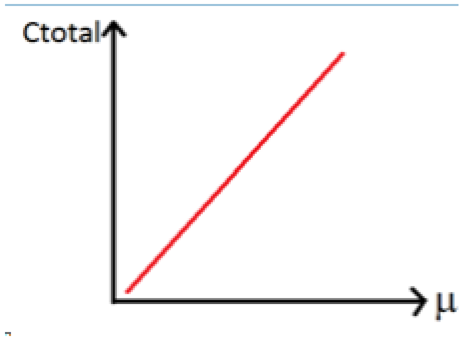
d) Suponga que desea establecer un tiempo promedio máximo de espera de sus clientes de T minutos en la fila. Plantee el problema de programación matemática que le permite resolver este problema y cómo resolvería este problema.

Solución problema 9

a) Al aumentar la tasa de atención de clientes, el costo por espera en la cola del cliente irá disminuyendo de forma cuadrática, debido a cómo se compone el tiempo de espera de la cola según la ecuación de Kingman. De esta forma, el gráfico queda como sigue:



Por otro lado, el costo por capacidad se mueve de forma lineal a la tasa de atención, por lo que el gráfico queda como sigue:



b) Se pide escribir la función objetivo, dado que no existen restricciones al problema. El gerente debiera buscar minimizar el costo total, el que se compone de la siguiente forma:

$$C_{total} = C_q * CT_q + C_k * \mu \tag{18}$$

El tiempo de espera en cola, por Kingman:

$$CT_q = (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * (\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}) * T_e \tag{19}$$

Luego, la F.O. es:

$$min : C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * (\frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}) * T_e + C_k * \mu \tag{20}$$

c) Para determinar la tasa de atención óptima, se debe derivar la expresión anterior e igualar a 0. Al hacer esto, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}[C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * (\frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}) * T_e + C_k * \mu] = 0 \tag{21}$$

$$C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * T_e * (\frac{-\lambda}{(\mu - \lambda)^2}) + C_k = 0 \tag{22}$$

$$\mu = \lambda + -\sqrt{\frac{\lambda * C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * T_e}{C_k}} \tag{23}$$

Despejando μ la expresión anterior, se obtiene la tasa de atención óptima.

d)

$$min : C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * (\frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}) * T_e + C_k * \mu \tag{24}$$

s/a:

$$T_e <= T \tag{25}$$

En este caso, la ecuación de Kingman quedaría como sigue:

$$(\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * (\frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}) * T_e \tag{26}$$

Al igual que antes, se debe encontrar la tasa de atención óptima que cumpla con esta restricción, que se obtendría como sigue:

$$min : [C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * (\frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}) * T_e + C_k * \mu] + \lambda * (T - T_e) \tag{27}$$

Como la optimalidad se encuentra igualando a T derivando con respecto a μ e igualando a 0 se obtiene:

$$C_q * (\frac{C_a^2 + C_e^2}{2}) * T * (\frac{-\lambda}{(\mu - \lambda)^2}) + C_k = 0 \tag{28}$$

De donde se podría obtener el valor de μ.

Problema 10

Suponga que tiene una maquina a la que le llegan 20 piezas en una hora para ser procesadas. El tiempo medio de procesamiento es de 2,5 minutos por pieza. Tanto las llegadas como las salidas del sistema son un proceso de Poisson. presentan en la figura 1. Los planes consisten en:

- ¿Cual es la tasa de utilizacion del sistema?
- ¿Cual es el tiempo medio de espera de una pieza para ser procesada por la maquina?
- ¿Cual es numero promedio de piezas en el sistema?
- ¿Es igual el numero promedio de piezas en el sistema que el numero promedio de piezas en cola? ¿Por que valor esta acotado?

Ahora suponga que la misma máquina posee varianza asociada al tiempomedio de procesamiento igual a 25 minutos.

- ¿Cual es la tasa de utilizacion del sistema?
- ¿Cual es el tiempo medio de espera de una pieza para ser procesada por la maquina?
- ¿Cual es numero promedio de piezas en el sistema?

Solución problema 10

a) Por enunciado tenemos que el sistema es de tipo M/M/1, donde: $\lambda = 20 \frac{piezas}{hora}$ y $\mu = 24 \frac{piezas}{hora}$. Asi:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{24} = 0,833333 = 83,3\% \tag{29}$$

b) Para este sistema el tiempo medio de espera es:

$$W = \frac{1}{\mu * (1 - \rho)} = 15min \tag{30}$$

c) El número promedio de piezas en el sistema está dado por:

$$L = \frac{\rho}{(1 - \rho)} = 4,9999piezas \tag{31}$$

d) El número de personas en cola no es igual a la cantidad de personas en el sistema. Siempre es menor o igual ya que no considera la persona que esta siendo atendida. Solo son iguales cuando el sistema esta vacio (es decir, cuando no existe cola y no hay persona en el servidor).

$$L_q = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = 4,1655 \tag{32}$$

e) Por enunciado tenemos el mismo sistema M/M/1 en el cual la tasa de ocupación no se ve afectada, por lo tanto, es el mismo 83,3%.
f) El tiempo de espera se ve afectado por la variabilidad:

$$FT_q = VUT = \frac{c_a^2 + c_e^2}{2} * \frac{\rho}{(1 - \rho)} * t_e \tag{33}$$

donde $c_e = 5/2,5 = 2$, y donde $c_a = 1$ porque las llegadas distribuyen exponenciales, así:

$$FT_q = VUT = \frac{1^2 + 2^2}{2} * \frac{0,8333}{(1 - 0,8333)} * 2,5 = 31,2425min \tag{34}$$

g) El número promedio de piezas en el sistema depende del throughput:

$$CT = FT_q + t_e = VUT = 31,2425 + 2,5 = 33,7425 min \tag{35}$$

$$L = TH * CT = 20 * \frac{33,7425}{60} = 11,2465 piezas \tag{36}$$

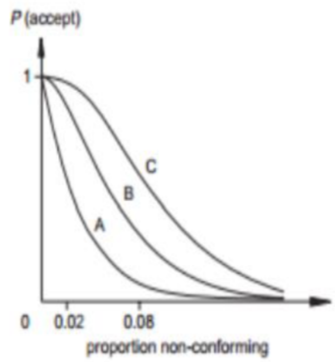
$$L_q = TH * FT_q = 20 * \frac{31,7425}{60} = 10,4142 piezas \tag{37}$$

Calidad

Problema 1

Considere una empresa que recibe grandes lotes de componentes diariamente, por lo que decide implementar un plan estadistico de aceptacion. Existen 3 planes posibles, que requieren cada uno un muestreo de 30 componentes. Estos se presentan en la figura 1. Los planes consisten en:

- **Plan A**: Aceptar el lote si no contiene ningun componente defectuoso.
- **Plan B**: Aceptar el lote si contiene a lo mas un componente defectuoso.
- **Plan C**: Aceptar el lote si contiene a lo mas dos componentes defectuosos.



Segun esta informacion, ¿Que plan escogeria para las siguientes situaciones?

a) Debe haber una alta probabilidad de aceptar un lote con un 2% de componentes defectuosos.

b) Debe haber una alta probabilidad de rechazar un lote con un 8% de componentes defectuosos.

c) Un balance entre el riesgo de aceptar lotes con un 8% de componentes defectuosos y rechazar lotes con un 2% de componentes defectuosos.

Solución problema 1

a) En forma general, para una distribucion binomial se tiene:

$$P(x = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

En un lote con un 2% de componentes defectuosos, cada componente tiene una probabilidad de 0,02 de ser defectuoso. Luego, la probabilidad de que un componente no sea defectuoso es $10.02 = 0.98$. Analizando los 30 componentes, la probabilidad de que no hayan componentes defectuosos es $0.98^{30} = 0.545$, que corresponde a la probabilidad de aceptacion del Plan A.Asi, las probabilidades de aceptacion son:

- **Plan A**: $0,98^{30} = 0.545$
- **Plan B**: $0,98^{30} + 30 * 0.02 * 0.98^{29} = 0.879$
- **Plan C**: $0,98^{30} + 30 * 0.02 * 0.98^{29} + \frac{30*29}{2} * +0.02^2 * 0.98^{28} = 0.978$

El Plan C es el mas adecuado porque tiene la mayor probabilidad de aceptar un lote con un 2% de componentes defectuosos.

b) Realizando los calculos de la misma forma que en caso anterior, se tiene que la probabilidad de aceptacion de un lote que contiene un 8% de componentes defectuosos es 0.082 para el Plan A, para el Plan B 0.296 y para el Plan C 0.565. Luego, el Plan A es el mas adecuado porque tiene la mayor probabilidad de rechazar un lote que contiene un 8% de componentes defectuosos.

c) En la figura 1, se puede apreciar que el plan B es el mas adecuado.

Problema 2

Los pesos de las cajas de hojuelas de avena incluidas dentro de un lote de produccion grande se muestrean cada hora. Los administradores quieren establecer limites de control que incluyan el 99,73% de las medias muestrales. Se sabe que la desviacion estandar es igual a 1. Establezca los limites superior e inferior, juego analice si el proceso se encuentra o no bajo control. ¿Que condiciones deberian darse para que ocurra lo opuesto?

Hora	Promedio 9 muestras
1	16.1
2	16.8
3	15.5
4	16.5
5	16.5
6	16.4
7	15.2
8	16.4
9	16.3
10	14.8
11	14.2
12	17.3

Solución problema 2

Se sabe que:

- 68.3%: N=1 desviaciones estandar.
- 95.4%: N=1 desviaciones estandar.
- 99.73%: N=1 desviaciones estanda.
- 99.9999998%: N=6 desviaciones estandar.

Calculando el promedio y la desviacion de las 9 cajas:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_9}{9} = 16$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Reemplazando los valores en las formulas de UCL y LCL:

$$UCL = \bar{x} + z * \bar{\sigma} = 16 + 3 * \frac{1}{3} = 17$$

$$LCL = \bar{x} - z * \bar{\sigma} = 16 - 3 * \frac{1}{3} = 15$$

Se puede notar que los ultimos 3 valores de la tabla estan fuera de los valores establecidos, por lo que no se puede considerar que es un proceso bajo control. Por otro lado, si la desviacion estandar fuera 2, el resultado para UCL y LCL seria distinto, asi quedarian dentro de los limites (los cuales serian 18 y 14).

Problema 3

Una compania de seguros esta implementado un plan de polizas que la empresa realiza. Se toma cada semana una muestra (en total 2.500 polizas semanales) y se anota la cantidad de polizas mal confeccionadas. El criterio de control es bajo 3-sigma. La informacion se presenta a continuacion:

a) Dibuje los graficos de control para 3-sigma.

b) Muestre que este proceso esta fuera de control. ¿Cuales podrian ser algunas razones?

c) Si se usara 2 o 1 sigma como medida de control, ¿Estaria bajo proceso?

Muestras	Errores
1	15
2	12
3	19
4	2
5	19
6	4
7	24
8	7
9	10
10	17
11	15
12	3
Total	147

Solución problema 3

a) Calculamos:

$$\bar{p} = \frac{Defectos}{Observaciones} = \frac{147}{12 * 2500} = 0.0049$$

con desviación:

$$\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/N} = \sqrt{0.0049 * (1 - 0.0049)/2500} = 0.0014$$

Los limites inferiores y superiores son:

$$LS_3 = \bar{p} + 3d = 0.00091$$

$$LI_3 = \bar{p} - 3d = 0.0007$$

Por otro lado, las proporciones de error para cada muestra son:

Muestras	Errores	Proporción error
1	15	0.0060
2	12	0.0048
3	19	0.0076
4	2	0.0008
5	19	0.0076
6	4	0.0016
7	24	0.0096
8	7	0.0028
9	10	0.0040
10	17	0.0068
11	15	0.0060
12	3	0.0012
Total	147	0.0049

El grafico queda como:

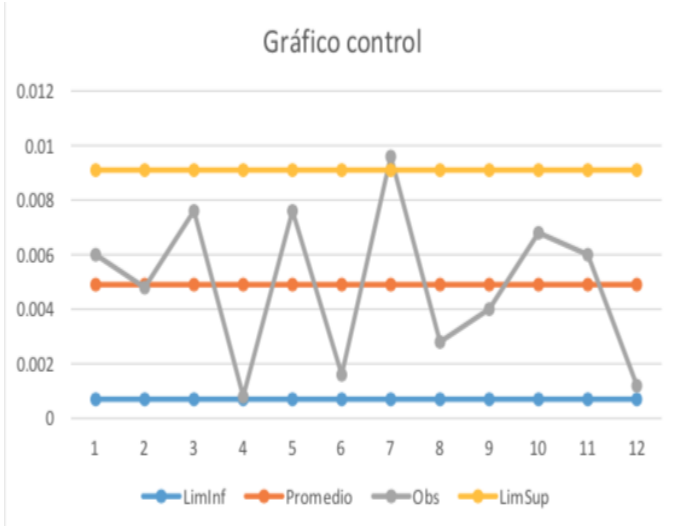
b) La proporcion de la muestra 7 supera el limite superior, por lo que el proceso esta fuera de control.

c) Los limites para 2-sigma son:

$$LS_2 = \bar{p} + 2d = 0.0077$$

$$LI_2 = \bar{p} - 2d = 0.0021$$

Como la proporcion de falla de la muestra 7 esta en este intervalo, bajo este criterio, el proceso si estaria bajo control. Obviamente, bajo 1-sigma tambien, pues es el criterio es menos exigente que 2-sigma.



Problema 4

Los capturistas de Dossier Data Systems intrducen miles de registros de seguros cada día para una variedad de clientes corporativos. La directora general, Donna Mosier, quieres establecer límites que incluyan el 99.73% de la variación aleatoria en el proceso de introducción de datos cuando se encuentra bajo control. Se recopilan muestras de trabajo de 20 capturistas (datos que se encuentran en la tabla). Se pide examinar cuidadosamente los 100 regustros capturados por cada empleado y contar el número de errores. Despues se pide calcular la fracción defectuosa en cada muestra.

N de muestra	N de errores	Fracción defetuosa
1	6	0.06
2	5	0.05
3	0	0.00
4	1	0.01
5	4	0.04
6	2	0.02
7	5	0.05
8	3	0.03
9	3	0.03
10	2	0.02
11	6	0.06
12	1	0.01
13	8	0.08
14	7	0.07
15	5	0.05
16	4	0.04
17	11	0.11
18	3	0.03
19	0	0.00
20	4	0.04

Solución problema 4

Se define un control de atributos como la decisión de aceptar o rechazar lotes viendo sólo unos pocos ítems. Luego se define:

$$p = \text{ \% de defectos}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Se calcula p sumando el total de errores y dividiéndolo por el total de ítems analizados (20 lotes * 100 ítems c/u = 2000). Reemplazando p = 4$ y $\sigma_p = 2\%$

$$UCL = p + z * \sigma_p = 4\% + 3 * 2\% = 10\%$$

$$LCL = 4\% - 3 * 2\% = -2\% = 0\% \text{ (no puede haber límite negativo)}$$

Por lo tanto se rechaza el lote 17 por presentar más defectos que lo deseado.

Problema 5

Usted quiere implementar un nuevo sistema de muestro para controlar los lotes de manzanas. Para ello define una politica con un AQL de 0,19 y un LPTD de 0,6. Usando $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.1$ indique y explique el plan de muestreo que usara.

Solución problema 5

Del enunciado se puede obtener LPTD / AQL = 3.1579 . Con este valor, revisando las tablas para α y β se obtienen valores para c y nAQL :

$$c = 6$$

$$nAQL = 3.286$$

Asi, se obtiene n = 17, 3 . Esto quiere decir que, usando esta politica, se toma una muestra de 18 unidades, de las que si 6 salen defectuosas se rechaza el lote.

Problema 6

Una compañía de música que fabrica teclados realiza diariamente un ana lisis de calidad a una muestra de 25 teclas para poder determinar el numero total de teclas defectuosas. La probabilidad de que una tecla resulte defectuosa sigue una distribucion Uniforme (0, 1).

a) Si el numero de teclas defectuosas en una muestra sigue una distribucion Uniforme (0, 25)¿Cual es la distribucion de probabilidad del numero de teclas defectuosas si se sabe que piezas son defectuosas?

b) Si la produccion se considera satisfactoria cuando el numero de teclas defectuosas es menor a 4. ¿Cual es la probabilidad de que la produccion sea considerada satisfactoria?

c) En base a la probabilidad estimada en a), elabore el grafico de control del proceso y determine si el proceso esta bajo control.

d) Si el plan de muestreo está definido con un AQL de 10% un LPTD de 40%, un $\alpha = 0,05$ y $\beta = 0,1$. ¿Es correcto el tamaño muestral que está usando la compañía?

e) ¿En que se diferencia este proceso con un proceso de control de calidad de medidas continuas?

Hint:

La función de probabilidad de una distribución uniforme es:

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}$$

La media y la varianza son:

$$\mu_x = \frac{a+b}{2}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La función de probabilidad de una distribución binomial es:

$$p_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

La media y la varianza son:

$$\mu_x = np, \qquad \sigma_x^2 = np(1-p)$$

c	LTPD ÷ AQL	n * AQL	c	LTPD ÷ AQL	n * AQL
0	44.890	0.052	5	3.549	2.613
1	10.946	0.355	6	3.206	3.286
2	6.509	0.818	7	2.957	3.981
3	4.890	1.366	8	2.768	4.695
4	4.057	1.970	9	2.618	5.426

Solución problema 6

a) Sea X_n el número de piezas defectuosas y sea μ la probabilidad de que una pieza resulte defectuosa. Como $X_n - Uniforme(0, 25)$ y $\mu - Uniforme(0, 1)$ entonces:

$$X_n|U = \mu - Binomial(25, \mu) \tag{38}$$

b) A partir de la tabla, se puede obtener una estimacion de la probabilidad de que una tecla sea defectuosa. Sea x_i la cantidad de teclas defectuosas en la jornada i. Luego:

$$p = \frac{1}{30} * \sum_{i=1}^{30} \frac{x_i}{25} = 0,17 \tag{39}$$

La probabilidad de que la producción sea satisfactoria es:

$$p(x < 4) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) \tag{40}$$

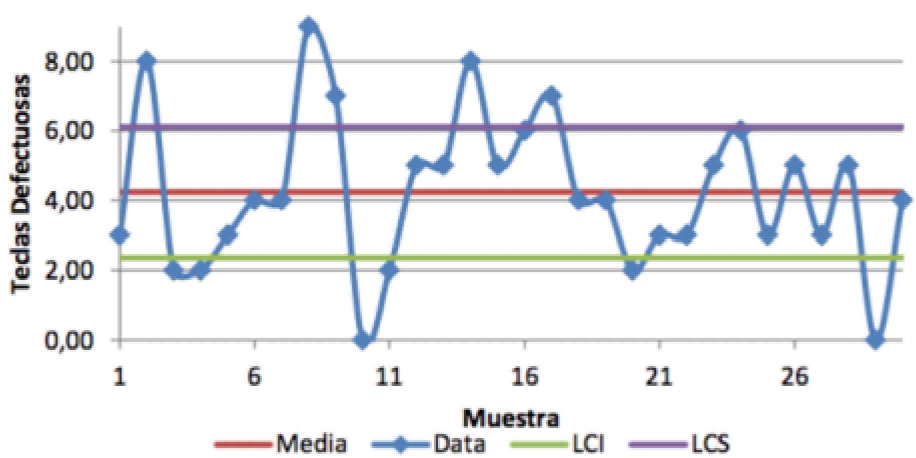
$$p(x < 4) = 0.83^{25} + 25 * 17 * 0.83^{24} + \frac{25 * 24}{2!} * 0.17^2 * 0.83^{23} + \frac{25 * 24 * 23}{3!} * 0,17^3 * 0.82^{22} = 0,368 \tag{41}$$

c) Los límites de control definen el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. Como la distribución es binomial, se tiene:

$$LCL = LCI = np - \sqrt{np * (1-p)} = 25 * 0,17 - \sqrt{25 * 0,17 * 0,83} = 2,36 \tag{42}$$

$$UCL = LCI = np + \sqrt{np * (1-p)} = 25 * 0,17 + \sqrt{25 * 0,17 * 0,83} = 6,11 \tag{43}$$

El grafico de control es muesta que el proceso esta fuera de control:



d) A partir del plan de muestreo de la tabla se tiene:

$$\frac{LPTD}{AQL} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \rightarrow c = 4 \tag{44}$$

$$AQL * n = 1,970 \rightarrow n = 19,7 \approx 20 \tag{45}$$

El tamaño de muestra no es adecuado, ya que deberían estar tomando muestras de 20 teclados.

e) En estos procesos basta con conocer solo la media del proceso (la varianza queda determinada por la media). En un caso de medidas continuas con distribuciones como la normal, la media y la varianza no están relacionadas, por lo que es necesario monitorear la media del proceso y también la variabilidad.

Problema 7

Usted está encargado del control de calidad de piezas de maquinaria que requieren medidas específicas de su diámetro. Se le proporciona la siguiente información de los diámetros medidos en 5 muestras:

Muestra	Observación			
1	5.014	5.022	5.009	5.027
2	5.021	5.041	5.024	5.02
3	5.018	5.026	5.035	5.023
4	5.008	5.034	5.024	5.015
5	5.041	5.056	5.034	5.047

a) Construya los gráficos de control (construya el gráfico en escala de centésimas)

b) ¿Está el proceso bajo control?

Solución problema 7

Los promedios y rangos son los siguientes: De este modo se tiene que: $\overline{\overline{X}} = 5,027$ y $\overline{R} = 0,021$. De los valores de tabla, se

Muestra	Observación				Promedio	Recorrido
1	5.014	5.022	5.009	5.027	5.018	0.018
2	5.021	5.041	5.024	5.02	5.0265	0.021
3	5.018	5.026	5.035	5.023	5.0255	0.017
4	5.008	5.034	5.024	5.015	5.02025	0.026
5	5.041	5.056	5.034	5.047	5.0445	0.022

obtiene que: $A2 = 0,729 D3 = 0 D4 = 2,282$.
Ahora construimos los límites superiores e inferiores de los gráficos:

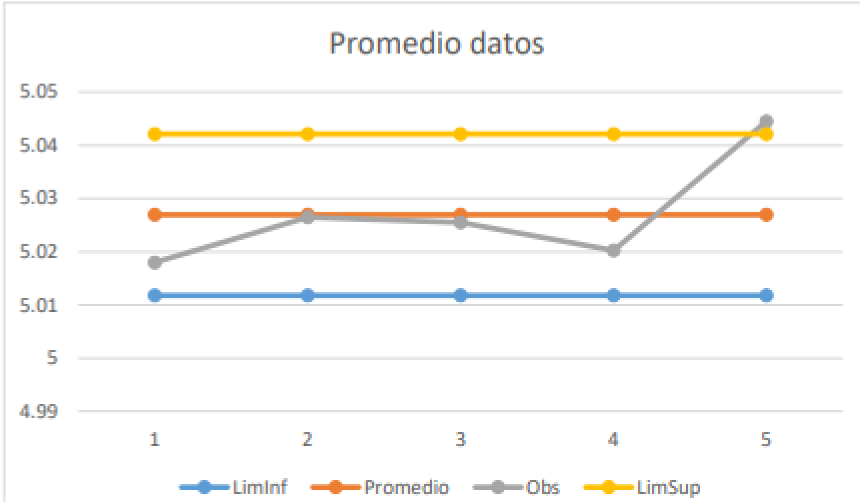
$$LCS\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 5,027 + 0,729 * 0,021 = 5,024 \tag{46}$$

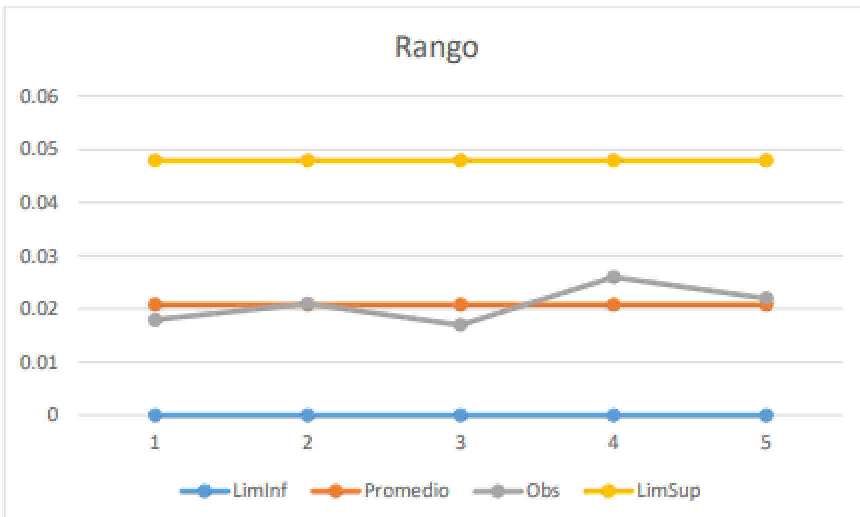
$$LCI\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 5,027 - 0,729 * 0,021 = 5,012 \tag{47}$$

$$LCSR = D_4 * \overline{R} = 2,282 * 0,021 = 0,0479 \tag{48}$$

$$LCIR = D_3 * \overline{R} = 0 \tag{49}$$

Los gráficos, para promedios y rangos, son los siguientes respectivamente:





b) La media de la muestra 5 supera el límite superior, por lo que el proceso está fuera de control.

Problema 8

Usted está a cargo de evaluar la política de calidad que su empresa exige a productores de manzanas. A continuación se muestra el peso de una muestra de los 4 bins recibidos durante los últimos 5 días:

Día	Peso (kg)			
1	380	395	403	387
2	400	393	401	392
3	397	392	384	390
4	402	407	403	405
5	391	389	393	385

a) Con la información dada elabore los gráficos de control.

b) Si el día 6 usted toma una muestra con los resultados: 407, 381, 392 y 396. ¿Qué puede decir de la muestra? ¿Acepta o rechaza el lote?

Solución problema 8

a) Se tienen los siguientes promedios y rangos:

Día	Peso (kg)				Promedio	Recorrido
1	380	395	403	387	391.25	23
2	400	393	401	392	396.5	9
3	397	392	384	390	390.75	13
4	402	407	403	405	404.25	5
5	391	389	393	385	389.5	8

El promedio de las muestras es 394,95 kg, el promedio de los recorridos 11,6 kg y la desviación estándar 6,1 kg. De las tablas de control: $A2 = 0,72$, $D4 = 2,28$, $D3 = 0$.
Los límites son, entonces:

$$LCS\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 394,45 + 0,73 * 11,6 = 402,92 \quad (50)$$

$$LCI\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 394,45 - 0,73 * 11,6 = 385,98 \quad (51)$$

$$LCSR = D_4 * \overline{R} = 2,11 * 11,6 = 26,45 \quad (52)$$

$$LCIR = D_3 * \overline{R} = 0 \quad (53)$$

Eliminando las muestras fuera de los límites:

Día	Peso (kg)				Promedio	Recorrido
1		395		387	391	8
2	400	393	401	392	396.5	9
3	397	392		390	393	7
4	402				402	0
5	391	389	393		391	4

El promedio de las muestras es 394,7 kg, el de los recorridos 5,6 kg y la desviación estándar 4,7 kg. Se definen los límites para $\sigma, 2\sigma, 3\sigma$. $3\sigma_s = 408,7$
$2\sigma_s = 404$
$\sigma_s = 399,4$
$3\sigma_i = 380,73$
$2\sigma_i = 385,4$
$\sigma_i = 390$
Por lo tanto: (ver grafico)

b) El promedio de los datos del día 6 es 392,25 kg y su rango 26 kg. Para verificar el rango se debe calcular los límites inferior y superior de este (considerando pesos iniciales):

$$LCSR = D_4 * \overline{R} = 2,11 * 11,6 = 26,45 \quad (54)$$

$$LCIR = D_3 * \overline{R} = 0 \quad (55)$$

Tanto el promedio como el rango de los datos medidos están dentro de los rangos aceptables, por lo que sí se acepta el lote.

Problema 9

Un proceso genera lotes de 8000 piezas y se sabe que tiene una proporción de defectos de 0,26%. Se desea evitar con buena probabilidad que salgan lotes al mercado con proporción mayor a 1%. Se establece un plan de muestreo con RQL=1%. Informe los elementos del plan de muestreo simple para el lote usando Dodge-Roming

Solución problema 9

Generacion de planes para el limite de tolerancia de recibo (Plan LTPD – Basado en la tolerancia de recibo del mercado). Los pasos para resolver son los siguientes:

- Fijo x% LPTD razonable (si soy muy exigente, es conveniente muestrear 100%)
- Especificar tamaño de lote (N)
- Determinar proporción de defectos en el proceso del productor, %p defectos del proceso
- De tabla LPTD (x%) leer n, c, AOQL

Por lo tanto, tenemos:

- NCL = 1%
- N = 8000
- %p = 0,26%
- De tabla %p (0,21-0,3%)
- Ver tabla LTPD

Se identifica que en un intervalo (0,21%-0,3%) como se exige con un lote de tamaño 8.000. Luego, tenemos que N=8000 piezas, p=0,26%, RQL=1%

$$\rightarrow n = 910, c = 5, AQLproductor = 0,32$$

■ **TABLE 15.9**

Dodge–Romig Single-Sampling Table for Lot Tolerance Percent Defective (LTPD) = 1.0%

	Process Average																	
	0–0.01%			0.011%–0.10%			0.11–0.20%			0.21–0.30%			0.31–0.40%			0.41–0.50%		
			AOQL			AOQL			AOQL			AOQL			AOQL			AOQL
Lot Size	*n*	*c*	%	*n*	*c*	%	*n*	*c*	%	*n*	*c*	%	*n*	*c*	%	*n*	*c*	%
1–120	All	0	0	All	0	0	All	0	0	All	0	0	All	0	0	All	0	0
121–150	120	0	0.06	120	0	0.06	120	0	0.06	120	0	0.06	120	0	0.06	120	0	0.06
151–200	140	0	0.08	140	0	0.08	140	0	0.08	140	0	0.08	140	0	0.08	140	0	0.08
201–300	165	0	0.10	165	0	0.10	165	0	0.10	165	0	0.10	165	0	0.10	165	0	0.10
301–400	175	0	0.12	175	0	0.12	175	0	0.12	175	0	0.12	175	0	0.12	175	0	0.12
401–500	180	0	0.13	180	0	0.13	180	0	0.13	180	0	0.13	180	0	0.13	180	0	0.13
501–600	190	0	0.13	190	0	0.13	190	0	0.13	190	0	0.13	190	0	0.13	305	1	0.14
601–800	200	0	0.14	200	0	0.14	200	0	0.14	330	1	0.15	330	1	0.15	330	1	0.15
801–1000	205	0	0.14	205	0	0.14	205	0	0.14	335	1	0.17	335	1	0.17	335	1	0.17
1,001–2,000	220	0	0.15	220	0	0.15	360	1	0.19	490	2	0.21	490	2	0.21	610	3	0.22
2,001–3,000	220	0	0.15	375	1	0.20	505	2	0.23	630	3	0.24	745	4	0.26	870	5	0.26
3,001–4,000	225	0	0.15	380	1	0.20	510	2	0.23	645	3	0.25	880	5	0.28	1,000	6	0.29
4,001–5,000	225	0	0.16	380	1	0.20	520	2	0.24	770	4	0.28	895	5	0.29	1,120	7	0.31
5,001–7,000	230	0	0.16	385	1	0.21	655	3	0.27	780	4	0.29	1,020	6	0.32	1,260	8	0.34
7,001–10,000	230	0	0.16	520	2	0.25	660	3	0.28	910	5	0.32	1,150	7	0.34	1,500	10	0.37
10,001–20,000	390	1	0.21	525	2	0.26	785	4	0.31	1,040	6	0.35	1,400	9	0.39	1,980	14	0.43
20,001–50,000	390	1	0.21	530	2	0.26	920	5	0.34	1,300	8	0.39	1,890	13	0.44	2,570	19	0.48
50,001–100,000	390	1	0.21	670	3	0.29	1,040	6	0.36	1,420	9	0.41	2,120	15	0.47	3,150	23	0.50

Problema 10

Sobre los siguientes datos que se obtienen de recopilación de información de un muestreo de proceso sobre el largo de cierto material que debe ser analizado en control de calidad. Se realizan muestreos durante 5 días y se resume en los siguiente:

Día	Largo (mm)				
1	70	56	49	67	61
2	65	47	70	70	68
3	70	49	42	68	54
4	50	47	52	67	50
5	48	65	51	50	65

A partir de lo anterior:

a) Calcule los límites de control, eliminando los outliers.

b) Si el día 6 usted toma una muestra con los siguientes resultados: 63, 54, 43, 69 y 65. ¿Qué puede decir de la muestra? ¿Está el proceso bajo control?

Solución problema 10

a) Primero se calculan los promedios y los rangos de cada uno de los días para luego calcular el total:

	Promedio	Rango
Día 1	60,6	21
Día 2	64	23
Día 3	56,6	28
Día 4	53,2	20
Día 5	55,8	17
Promedio	**58,04**	**21,8**

De este modo se tiene que: $\overline{\overline{X}} = 58,04$ y $\overline{R} = 21,8$. De esta tabla se obtiene que como son observaciones de subgrupos de n=5, se tiene $A2 = 0,58; D3 = 0; D4 = 2,11$.

Numero de observaciones en el subgrupo n	Factor para un diagrama X A2	Limite inferior de control D3	Limite superior de control D4
2	1,88	0	3,27
3	1,02	0	2,57
4	0,73	0	2,28
5	0,58	0	2,11
6	0,48	0	2,00
7	0,42	0,08	1,92
8	0,37	0,14	1,86
9	0,34	0,18	1,82
10	0,31	0,22	1,78
11	0,29	0,26	1,74
12	0,27	0,28	1,72
13	0,25	0,31	1,69
14	0,24	0,33	1,67
15	0,22	0,35	1,65
16	0,21	0,36	1,64
17	0,2	0,38	1,62
18	0,19	0,39	1,60
19	0,19	0,4	1,61
20	0,18	0,41	1,59

Luego:

$$LCS\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 58,04 + (0,58 * 21,8) = 70,7 \tag{56}$$

$$LCI\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 58,04 - (0,58 * 21,8) = 45,4 \tag{57}$$

$$LCSR = D_4 * \overline{R} = 2,11 * 21,8 = 46 \tag{58}$$

$$LCIR = D_3 * \overline{R} = 0 * 21,8 = 0 \tag{59}$$

Ahora teniendo los límites de control se eliminan los outliers, los outliers son los valores que se encuentran fuera de los límites de control:

Día	Largo (mm)				
1	70	56	49	67	61
2	65	47	70	70	68
3	70	49		68	54
4	50	47	52	67	50
5	48	65	51	50	65

Volvemos a calcular la tabla de promedios reciente:

	Promedio	Rango
Día 1	60,6	21
Día 2	64	23
Día 3	60,25	21
Día 4	53,2	20
Día 5	55,8	17
Promedio	**58,8**	**20,4**

De este modo se tiene que: $\overline{\overline{X}} = 58,8$ y $\overline{R} = 20,4$.
Luego:

$$LCS\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 58,8 + (0,58 * 20,4) = 70,6 \tag{60}$$

$$LCI\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 58,8 - (0,58 * 20,4) = 47 \tag{61}$$

$$LCSR = D_4 * \overline{R} = 2,11 * 20,4 = 43 \tag{62}$$

$$LCIR = D_3 * \overline{R} = 0 * 20,4 = 0 \tag{63}$$

b) Entonces ahora se tiene la muestra de un día 6, con los valores (63, 54, 43, 69 y 65) el cuál tiene un promedio de muestra de 58,8 coincidente con el promedio anterior y un rango de 26, ambos se encuentran dentro de los límites por lo tanto se debe aceptar el lote y se encuentra el proceso bajo control.