ICS3213 – Gestión de Operaciones

Sección 3

Primer Semestre 2025

Profesor: Rodrigo A. Carrasco

Avisos

- La lectura complementaria de esta parte es el Capítulo 17 del libro "*Administración de Operaciones*" por R. Chase, F. Jacobs y N. Aquilano.

- Recuerden que el lunes tenemos la I1 a las 17:30.
- Nos dieron la sala K204 para la prueba.

Revisión

- Eliminamos el supuesto que la demanda o el período de entrega era conocido.
- Estudiamos un nuevo modelo que considera valores aleatorios en la demanda o el período de entre.
- Para usar el nuevo modelo, definimos el concepto de Nivel de Servicio. ¿Qué implica un nivel de servicio del 93%?
- Mostramos como ese nivel de servicio se conecta con el inventario de seguridad y el punto de reorden.

Inventario Perecible

- En los casos anteriores, el valor de los productos que teníamos en el inventario no variaba en el tiempo.
- Esto ocurre en el caso de los llamados “productos perecibles”.
- ¿Qué son los productos perecibles?

- Por ejemplo, un chaleco:
  - Tiene un precio de venta en la tienda de $p = \$180$.
  - El fabricante cobra $c = \$110$ a la tienda.
  - La tienda lo ofrece a un precio rebajado de $v = \$90$.

- ¿Cómo encontramos el inventario óptimo en este caso?
- Modelo del Vendedor de Diarios (Newsvendor)

Costo de pedir “mucho” y “poco”

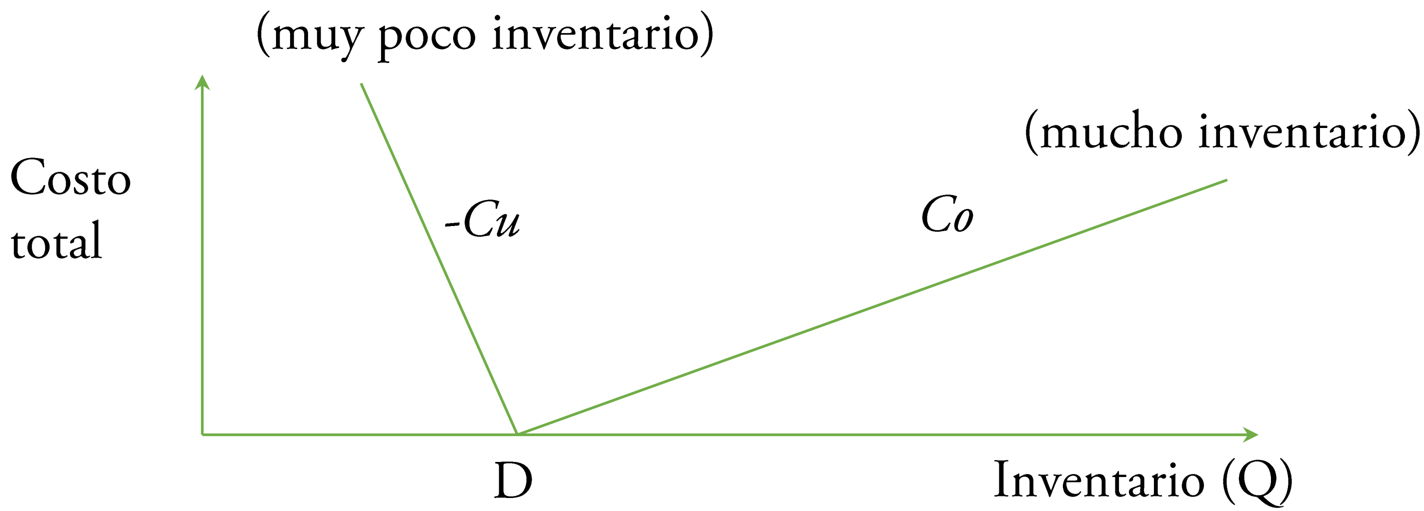
- C_o = overage cost (costo de excedente)
  - Representa el costo de pedir una unidad más que la demanda real.
  - En otras palabras, C_o es el incremento en ganancia si hubiéramos pedido una unidad menos.
  - Para el chaleco: $C_o = \mathit{Costo} - \mathit{Precio\ liquidación} = c - v = 110 - 90 = 20$

- C_u = underage cost (costo de faltantes)
  - Representa el costo de pedir una unidad menos que la demanda real.
  - En otras palabras, si hay ventas perdidas, C_u es el aumento en ganancia si hubiéramos pedido una unidad adicional.
  - Para el chaleco: $C_u = \mathit{Precio} - \mathit{Costo} = p - c = 180 - 110 = 70$

Función de costos

- Si D fuera conocida, la función de costo sería:

$$
\begin{aligned}
C(Q,\tilde{D}) &= C_o \max\{0, Q-\tilde{D}\} + C_u \max\{0, \tilde{D}-Q\} \\
&= C_o(Q-\tilde{D})^+ + C_u(\tilde{D}-Q)^-
\end{aligned}
$$



- ¿Cuál es el tamaño óptimo Q?

Source: Professors John Muckstadt, David Murray, Jim Rappold

Demanda estocástica

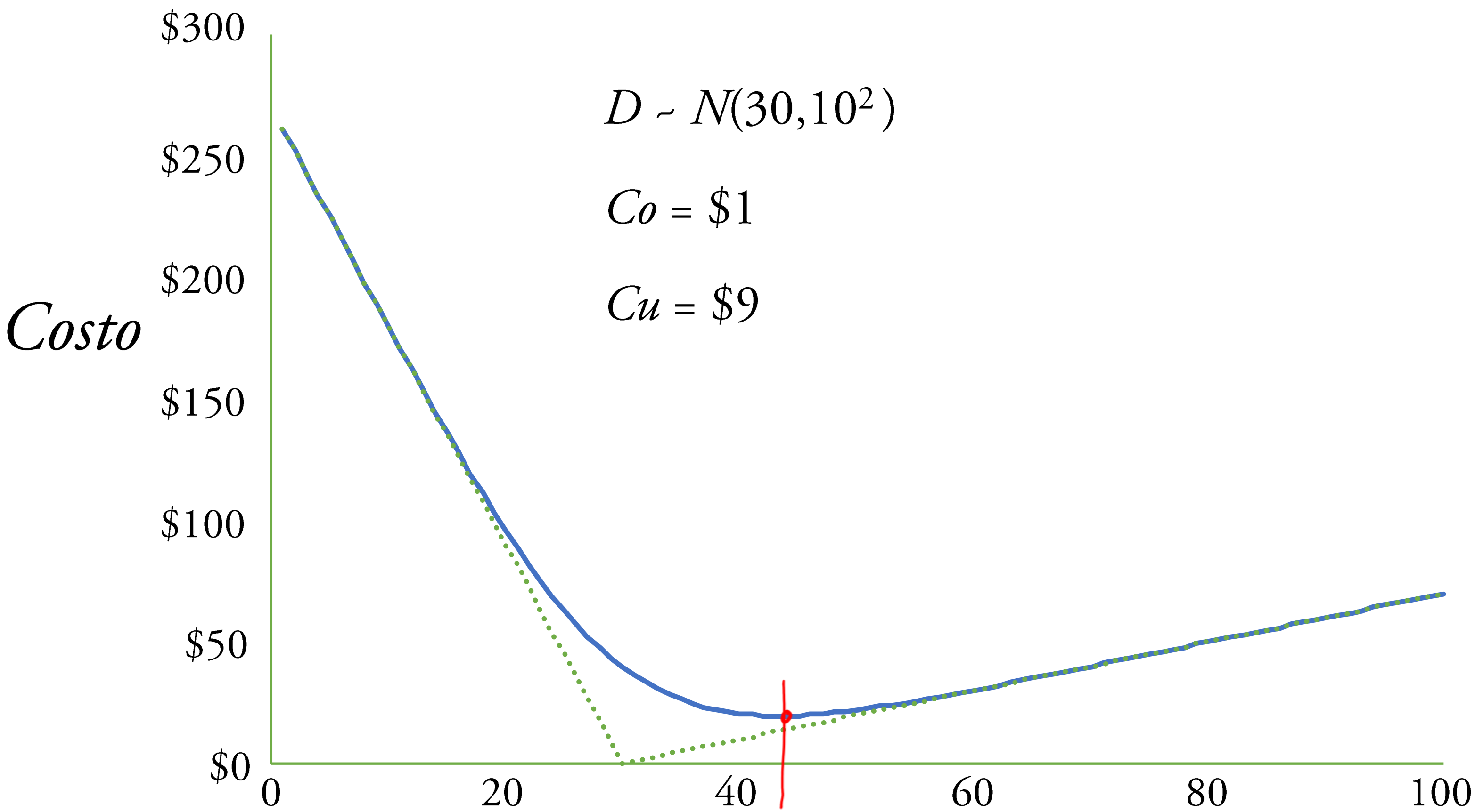
- En este caso estamos interesados en calcular:

$$C(Q) = \mathbb{E}\left[C(Q, \tilde{D}) \right]$$

$$= C_o \int_0^{\infty} (Q - x)^+ f(x)\, dx + C_u \int_0^{\infty} (x - Q)^+ f(x)\, dx$$

$$= C_o \int_0^{Q} (Q - x) f(x)\, dx + C_u \int_Q^{\infty} (x - Q) f(x)\, dx$$

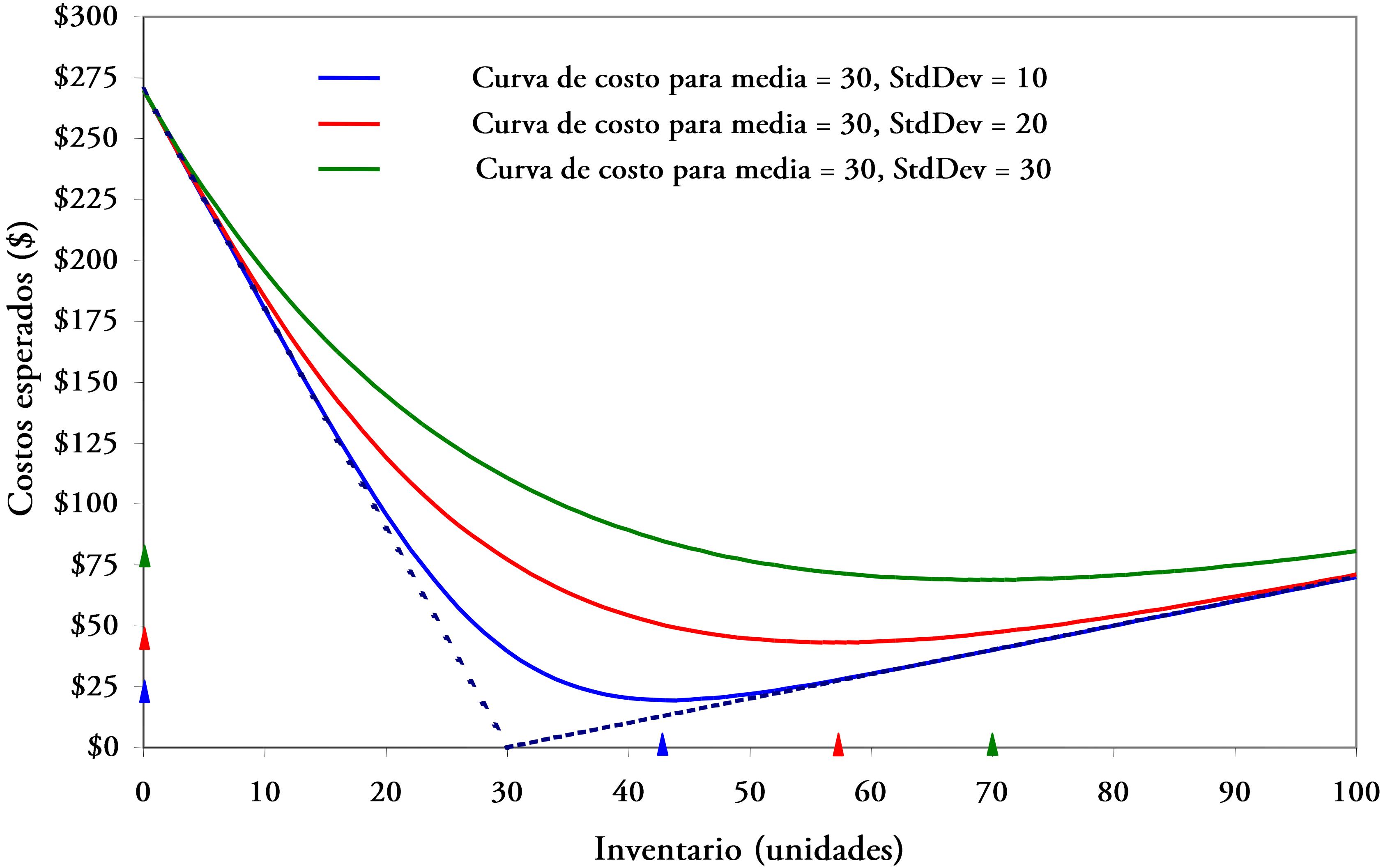
Función de costos



Q^* = 42.8 unidades

Source: Professors John Muckstadt, David Murray, Jim Rappold

Costos esperados



Source: Professors John Muckstadt, David Murray, Jim Rappold

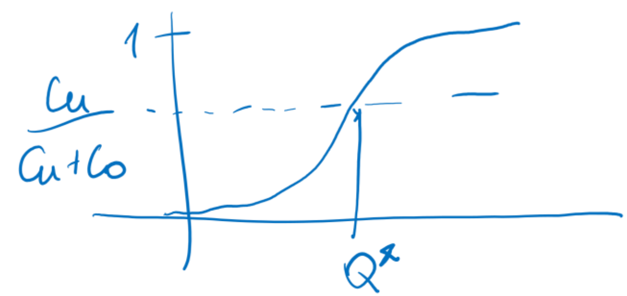
Encontrando el valor óptimo

- La función de costo es convexa, por ello nos basta resolver:

$$\frac{dC(Q)}{dQ} = C_o \int_0^Q f(x)\,dx + C_u \cdot \int_Q^{\infty} -f(x)\,dx$$

$$= C_o F(Q) - C_u\left(1 - F(Q)\right) = 0$$

$$\boxed{F(Q^*) = \frac{C_u}{C_u + C_o}}$$

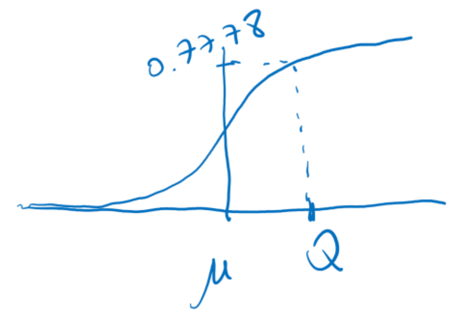


Veamos el ejemplo del chaleco

- En este caso, la razón crítica es:

$$\frac{C_u}{C_o + C_u} = \frac{70}{20 + 70} = 0.7778.$$

- Supongamos que la demanda sigue una distribución normal de parámetros N(μ,σ)
  - ¿Cuanto ordenar?



estamos buscando Q tal que

$$\mathbb{P}(D \leq Q) = 0.7778$$

$$Q^* = \mu + z_{0.7778} \cdot \sigma$$

Acerca del modelo newsvendor

- El modelo puede ser aplicado a ambientes donde…
  - Hay una oportunidad única de orden/producción.
  - Demanda es incierta.
  - Hay un desafío “muy alto-muy bajo”:
    - Si la demanda excede la cantidad ordenada, se pierde la venta.
    - Si la demanda es menor que la cantidad ordenada, sobra inventario.
- La empresa debe tener un modelo de demanda que incluya una demanda esperada y la incertidumbre de esa demanda.
  - Con la distribución normal, la incertidumbre en la demanda es capturada por la desviación estándar.
- Al tamaño de orden que maximiza el ingreso esperado, la probabilidad de que la demanda sea menor que el tamaño de la orden es igual a la razón crítica:
  - La cantidad que maximiza el beneficio esperado balancea los costos del “muy alto-muy bajo”.

Gestión con Múltiples Períodos

- En todos los casos anteriores el horizonte de planificación era ilimitado.
- Consideremos ahora un horizonte limitado de *N* períodos.
- La demanda para cada período será: $d_1, d_2, \dots, d_N$, conocida.
- No hay demanda perdida (i.e. costos de quiebre de inventario).
- Hay un costo S_t de ordenar en el período *t*.
- Hay un costo H_t por ítem de mantener inventario del período *t* al período *t+1*.
- Queremos determinar en qué períodos debemos producir/abastecernos para minimizar los costos totales.
- A diferencia del EOQ clásico, en este caso la demanda no es uniforme y queremos terminar sin inventario en el período *N*.

Ejemplo

- Consideremos el siguiente ejemplo:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
Demanda	0	10	480	440	800	400	0	0
Inventario	653	643	163	376	229	482	482	482

→ $D = 2130$

↑Q ↑Q ↑Q

- Asumamos que $S_t = \$400$ y $H_t = \$0.5$ para cada período.
- ¿Cuál sería la política usando EOQ clásico?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2130 \cdot 400}{0.5}} = 652.69.$$

Problema de optimización

- Este problema se puede modelar de la siguiente forma

$$\min_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{Q}} \sum_{k=1}^{T} S_k z_k + H_k I_k + C_k Q_k$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & I_k = I_{k-1} + Q_k - D_k, && k = \{1, \dots, T\} \\ & Q_k \leq M z_k, && k = \{1, \dots, T\} \\ & I_T = 0, && \\ & I_k, Q_k \geq 0, && k = \{1, \dots, T\} \\ & z_k \in \{0,1\}, && k = \{1, \dots, T\} \end{aligned}$$

- donde
  - C_k es el costo unitario del producto en el período k.
  - I_k es el inventario que queda al final del período k.
  - Q_k es el tamaño del lote en el período k.
  - z_k es 1 si se compra/produce en el período k.

Como podemos resolver el problema

- Podemos resolver el problema de optimización anterior.
  - Según el número de períodos esto puede ser difícil
- EOQ
  - Vimos que no funciona correctamente.
- Heurísticas de Lotes Dinámicos
  - Silver Meal (SM), Least Unit Cost (LUC), Part Period Balancing (PPB)
- Lote de Tamaño Optimo: Wagner – Whitin (WW)

Lotes Óptimos

- Las heurísticas usadas originalmente en planificación (Silver-Meal, Least Unit Cost, Part Period Balancing) son fáciles de calcular pero no necesariamente son óptimas.

- Igual que en los casos anteriores asumimos que no hay inventario inicial y que el inventario final también es cero.

- Podemos calcular los lotes óptimos usando programación dinámica.

- Wagner y Whitin notaron que se puede simplificar el uso de programación dinámica al notar la siguiente propiedad:
  - Hay una solución óptima en la que en cada período k o se tiene inventario inicial o se produce/abastece (i.e. $I_{k-1}Q_k = 0$).

- El resultado se conoce como el algoritmo de Wagner-Whitin.

Algoritmo de Wagner - Whitin

- Sea $C_{k,j}$ el costo de comprar/producir en el período *k* para satisfacer la demanda hasta el período *j-1*.

- El Algoritmos de W-W es el siguiente:
  - Comenzamos con $I_{T+1} = 0$.
  - Iterativamente calculamos $\boxed{I_k = \min_{j>k}\{C_{k,j} + I_j\}}$.
  - Cuando se llega a I_1 se termina.
  - Según la decisión óptima de cada paso se determina cada Q_k.

Ejemplo WW

- Consideremos el siguiente ejemplo

Período	1	2	3	4	5
Demanda	100	100	50	50	210

- Suponga que S = 50 y H = 0.5, con lo que podemos calcular todos los valores de $C_{k,j}$.

$\overset{S}{50} + 100 \cdot 0.5$

$\overset{S}{50} + 150 \cdot 0.5 + 50 \cdot 0.5$

k\j	1	2	3	4	5	6
1		50	100	150	225	645
2			50	75	125	440
3				50	75	285
4					50	155
5						50

$C_{3,5}$

Ejemplo WW

$$I_6 = 0$$

$$I_5 = \min\{\underline{\overset{50}{C_{56}}} + I_6\} = 50+0 = 50$$

$$I_4 = \min\{\underline{\overset{100}{C_{45}} + I_5},\ C_{46} + I_6\} = \min\{50+50,\ 155+0\} = 100$$

$$I_3 = \min\{C_{34} + I_4,\ \underline{\overset{125}{C_{35}} + I_5},\ C_{36} + I_6\} = \min\{150,\ 125,\ 285\} = 125$$

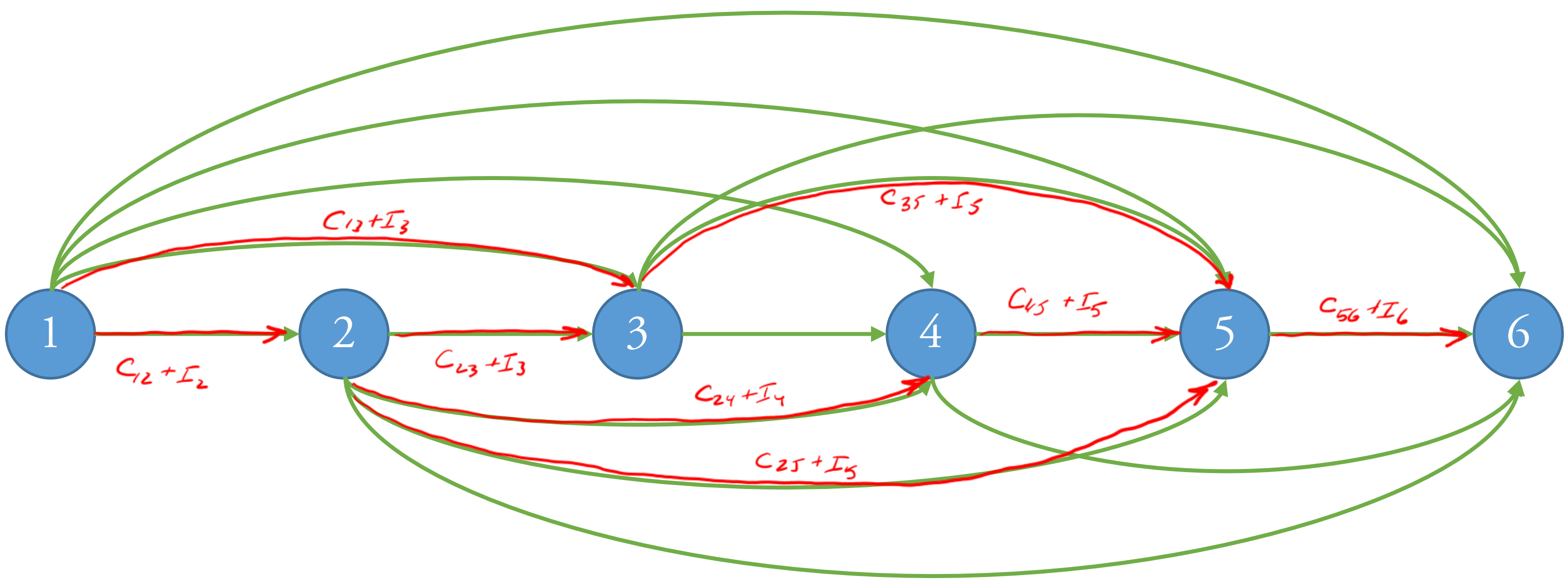
$$I_2 = \min\{\underline{\overset{175}{C_{23}}} + I_3,\ \underline{\overset{175}{C_{24}} + I_4},\ \underline{\overset{175}{C_{25}}} + I_5,\ C_{26} + I_6\} = 175$$

$$I_1 = \min\{\underline{\overset{225}{C_{12}} + I_2},\ \underline{\overset{225}{C_{13}} + I_3},\ C_{14} + I_4,\ C_{15} + I_5,\ C_{16} + I_6\} = 225$$

Valor óptimo = \$225

Ejemplo WW

- ¿Cómo determinamos Q_k?



una solución óptima: $Q = [\;200 \quad 0 \quad 100 \quad 0 \quad 210\;]$

Período	1	2	3	4	5
Demanda	100	100	50	50	210

Resumen de Gestión de Inventarios

- Clasificación ABC, modelos de revisión periódica y continua.

- Demanda conocida y homogénea:
  - Modelos EOQ
  - Clave: desarrollar el modelo de costos del inventario.

- Demanda incierta:
  - Modelo con venta perdida.
  - Modelo Newsvendor
  - Modelo con nivel de servicio – Inventario de Seguridad

- Demanda variable:
  - Modelos de optimización matemática y W-W