



Guía de Ejercicios:

PERT y Ruta Crítica

Problema 1

La construcción de una casa es una actividad bastante simple. Lo primero que se debe instalar es el piso. Una vez completado el piso se puede empezar a poner cada una de las murallas de manera independiente y solo una vez que todas las murallas están en pie se puede armar el techo. Además las ventanas y puertas se pueden instalar en cada muralla una vez que esta está lista, de manera paralela al techo.

Usted debe planificar el proyecto de construir una casa de 40 m² y 4 murallas. Dos paredes tienen sólo una ventana y otra tiene una ventana y una puerta. La siguiente tabla define el tiempo y número de personas disponibles para hacer cada parte de la casa.

| Actividad | Tiempo [HH] | Personas |
|-----------|--------------------|----------|
| Piso | 1 x m ² | 5 |
| Muralla | 6 | 2 |
| Techo | 1 x m ² | 4 |
| Ventana | 4 | 2 |
| Puerta | 8 | 2 |

Hint: Considere que cada ventana o muralla podría ser realizada por un equipo separado (en paralelo). Y los tiempos entregados en la tabla corresponden a los tiempos necesarios para realizar la actividad por una sola persona

- Haga un diagrama PERT de este proyecto.
- Indique en una tabla el ES, EF, LS, LF y la holgura de cada actividad.
- Señale la ruta crítica y la duración mínima del proyecto.

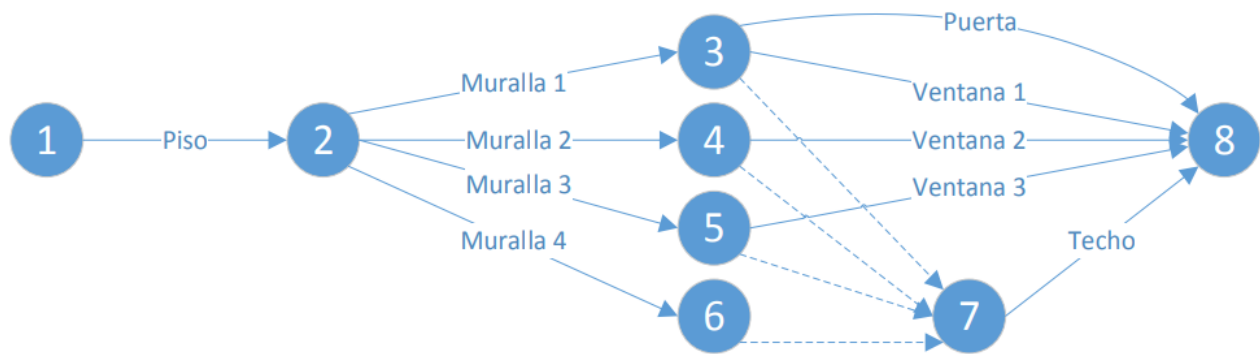
Ahora existe la posibilidad de aumentar el número de personas en cada etapa. Considere que cada persona extra asignada a una etapa tiene un costo de \$10.000 y el tiempo total de HH requeridas por cada etapa se mantiene. El beneficio por reducir el tiempo de duración del proyecto en 1 hora es de \$20.000. Si el número de personas en una actividad supera al cuádruple de lo inicial, ya no entrega beneficios asignar más personas a esa actividad.

- ¿Cuál es el tiempo mínimo al que se puede realizar la casa? ¿Cuánto cuesta llegar a ese nivel?
- ¿Cuál es el óptimo de personal a contratar?

Solución Problema 1

Parte a

El diagrama PERT de esta situación es el siguiente:



Parte b

La tabla de actividades es la siguiente:

| Actividad | Personas Disponibles | Horas |
|-----------|----------------------|--|
| Piso | 5 | $\frac{40m^2}{1 \times m^2 \times 5 \text{ personas}} = 8 \text{ horas}$ |
| Muralla 1 | 2 | $\frac{6 \text{ HH}}{2 \text{ personas}} = 3 \text{ horas}$ |
| Muralla 2 | 2 | 3 horas |
| Muralla 3 | 2 | 3 horas |
| Muralla 4 | 2 | 3 horas |
| Ventana 1 | 2 | 2 horas |
| Ventana 2 | 2 | 2 horas |
| Ventana 3 | 2 | 2 horas |
| Puerta | 2 | 4 horas |
| Techo | 4 | 10 horas |

Con estos datos es posible realizar el análisis de holgura calculando ES, EF, LS y LF:

| Actividad | Personas Disponibles | Horas | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|----------------------|----------|----|----|----|----|---------|
| Piso | 5 | 8 horas | 0 | 8 | 0 | 8 | 0 |
| Muralla 1 | 2 | 3 horas | 8 | 11 | 8 | 11 | 0 |
| Muralla 2 | 2 | 3 horas | 8 | 11 | 8 | 11 | 0 |
| Muralla 3 | 2 | 3 horas | 8 | 11 | 8 | 11 | 0 |
| Muralla 4 | 2 | 3 horas | 8 | 11 | 8 | 11 | 0 |
| Ventana 1 | 2 | 2 horas | 11 | 13 | 19 | 21 | 8 |
| Ventana 2 | 2 | 2 horas | 11 | 13 | 19 | 21 | 8 |
| Ventana 3 | 2 | 2 horas | 11 | 13 | 19 | 21 | 8 |
| Puerta | 2 | 4 horas | 11 | 15 | 17 | 21 | 6 |
| Techo | 4 | 10 horas | 11 | 21 | 11 | 21 | 0 |

Parte c

Al revisar las holguras de las actividades tenemos que la ruta crítica está compuesta por: Piso - Todas las murallas - Techo.

Y el tiempo de construcción de la casa es de 21 horas.

Parte d

Como se apreciar en el análisis anterior de holguras, las etapas que podríamos acelerar directamente son las pertenecientes a la ruta crítica y en primera instancia hasta un máximo de 6 semanas reducción de tiempo ya que en ese momento la instalación de la puerta pertenece a la ruta crítica.

A continuación tenemos que determinar si es rentable que añadir personas extra a las actividades de la ruta crítica. En primer lugar tenemos la construcción e instalación del piso:

| Número de trabajadores extra | Tiempo de demora del trabajo con el nuevo número de trabajadores | Horas reducidas | ¿Es rentable con respecto al beneficio de reducir el tiempo del proyecto? |
|------------------------------|--|-----------------|---|
| 1 | 6.67 | 1.33 | Si |
| 2 | 5.71 | 2.28 | Si |
| 3 | 5 | 3 | Si |
| 4 | 4.44 | 3.56 | Si |
| 5 | 4 | 4 | Si |
| 6 | 3.64 | 4.36 | Si |
| 7 | 3.33 | 4.67 | Si |
| 8 | 3.08 | 4.92 | Si |
| 9 | 2.86 | 5.14 | Si |
| 10 | 2.67 | 5.33 | Si |
| 11 | 2.50 | 5.50 | No |
| 12 | 2.35 | 5.65 | No |
| 13 | 2.22 | 5.78 | No |
| 14 | 2.11 | 5.89 | No |
| 15 | 2.00 | 6.00 | No |
| 6 | 3.64 | 4.36 | No |

Hacemos el mismo análisis para el caso de las murallas:

| Número de trabajadores extra | Tiempo de demora del trabajo con el nuevo número de trabajadores | Horas reducidas | ¿Es rentable con respecto al beneficio de reducir el tiempo del proyecto? |
|------------------------------|--|-----------------|---|
| 1 | 2.00 | 1.00 | Si |
| 2 | 1.50 | 1.50 | Si |
| 3 | 1.20 | 1.80 | No |
| 4 | 1.00 | 2.00 | Si |
| 5 | 0.86 | 2.14 | No |
| 6 | 0.75 | 2.25 | No |

Y el caso del Techo:

| Número de trabajadores extra | Tiempo de demora del trabajo con el nuevo número de trabajadores | Horas reducidas | ¿Es rentable con respecto al beneficio de reducir el tiempo del proyecto? |
|------------------------------|--|-----------------|---|
| 1 | 8.00 | 2.00 | Si |
| 2 | 6.67 | 3.33 | Si |
| 3 | 5.71 | 4.29 | Si |
| 4 | 5.00 | 5.00 | Si |
| 5 | 4.44 | 5.56 | Si |
| 6 | 4.00 | 6.00 | Si |
| 7 | 3.64 | 6.34 | Si |
| 8 | 3.33 | 6.67 | Si |
| 9 | 3.08 | 6.92 | Si |
| 10 | 2.86 | 7.14 | Si |
| 11 | 2.67 | 7.33 | Si |
| 12 | 2.50 | 7.50 | Si |

Con este análisis y como estamos buscando reducir al máximo el tiempo del proyecto no nos importa la rentabilidad por lo tanto es posible reducir los tiempos lo máximo que se pueda. Para el caso de los trabajadores del piso y las murallas no hay problema, pero los trabajadores del techo si agregamos más de 6 el tiempo de proceso se

reduce a un tiempo menor al de holgura de las puertas. Para ello primero desarrollamos el análisis de holgura para el caso donde se agregen 15 trabajadores en el piso, 6 en cada muralla y 6 en el techo:

| Actividad | Personas Disponibles | Horas | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|----------------------|------------|------|------|------|------|---------|
| Piso | 20 | 2 horas | 0 | 2 | 0 | 8 | 0 |
| Muralla 1 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Muralla 2 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Muralla 3 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Muralla 4 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Ventana 1 | 2 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 4.75 | 6.75 | 2 |
| Ventana 2 | 2 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 4.75 | 6.75 | 2 |
| Ventana 3 | 2 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 4.75 | 6.75 | 2 |
| Puerta | 2 | 4 horas | 2.75 | 6.75 | 2.75 | 6.75 | 0 |
| Techo | 10 | 4 horas | 2.75 | 6.75 | 2.75 | 6.75 | 0 |

En esta nueva situación tenemos que hacer el análisis de añadir trabajadores a la instalación de la puerta:

| Número de trabajadores extra | Tiempo de demora del trabajo con el nuevo número de trabajadores | Horas reducidas | ¿Es rentable con respecto al beneficio de reducir el tiempo del proyecto? |
|------------------------------|--|-----------------|---|
| 1 | 2.66 | 1.33 | Si |
| 2 | 2.00 | 2.00 | Si |
| 3 | 1.60 | 2.40 | Si |
| 4 | 1.33 | 2.67 | Si |
| 5 | 1.14 | 2.86 | No |
| 6 | 1.00 | 3.00 | Si |

Y si se hace un análisis rápido tenemos que si añadimos 2 trabajadores y 6 trabajadores más al techo se obtiene el máximo tiempo de reducción posible. Y por lo tanto, el análisis de holgura es el siguiente:

| Actividad | Personas Disponibles | Horas | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|----------------------|------------|------|------|------|------|---------|
| Piso | 20 | 2 horas | 0 | 2 | 0 | 8 | 0 |
| Muralla 1 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Muralla 2 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Muralla 3 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Muralla 4 | 8 | 0.75 horas | 2 | 2.75 | 2 | 2.75 | 0 |
| Ventana 1 | 2 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 3.25 | 5.25 | 0.5 |
| Ventana 2 | 2 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 3.25 | 5.25 | 0.5 |
| Ventana 3 | 2 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 3.25 | 5.25 | 0.5 |
| Puerta | 4 | 2 horas | 2.75 | 4.75 | 3.25 | 5.25 | 0.5 |
| Techo | 16 | 2.5 horas | 2.75 | 5.25 | 2.75 | 5.25 | 0 |

El tiempo total de este proyecto es de 5.25 horas y como se añadieron 53 trabajadores más (15 en el piso, 6 por casa muralla, 2 en la puerta y 12 en el techo) se obtiene un costo de \$530 mil.

Parte e

Haciendo uso del análisis de factibilidad económica hecho en el punto anterior, es posible obtener que el óptimo económico se encuentra en añadir 4 trabajadores más al piso y 5 al techo:

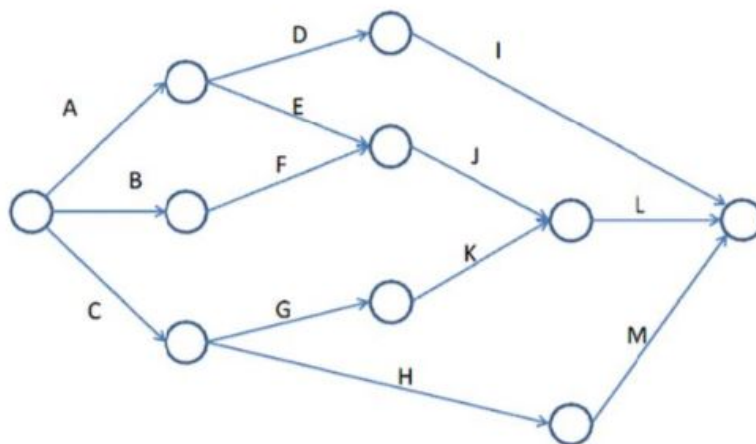
| Actividad | Personas Disponibles | Horas | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|----------------------|-----------|-----|------|-----|------|---------|
| Piso | 9 | 4.4 horas | 0 | 4.4 | 0 | 4.4 | 0 |
| Muralla 1 | 2 | 3 horas | 4.4 | 7.4 | 4.4 | 7.4 | 0 |
| Muralla 2 | 2 | 3 horas | 4.4 | 7.4 | 4.4 | 7.4 | 0 |
| Muralla 3 | 2 | 3 horas | 4.4 | 7.4 | 4.4 | 7.4 | 0 |
| Muralla 4 | 2 | 3 horas | 4.4 | 7.4 | 4.4 | 7.4 | 0 |
| Ventana 1 | 2 | 2 horas | 7.4 | 9.4 | 9.8 | 11.8 | 2.4 |
| Ventana 2 | 2 | 2 horas | 7.4 | 9.4 | 9.8 | 11.8 | 2.4 |
| Ventana 3 | 2 | 2 horas | 7.4 | 9.4 | 9.8 | 11.8 | 2.4 |
| Puerta | 2 | 4 horas | 7.4 | 11.4 | 7.8 | 11.8 | 0.4 |
| Techo | 9 | 4.4 horas | 7.4 | 11.8 | 7.4 | 11.8 | 0 |

Problema 2

Considere el siguiente proyecto, cuyos tiempos por tarea están en semanas:

| Tarea | Tiempos por tarea | | |
|-------|-------------------|--------------|-----------|
| | Optimista | Más probable | Pesimista |
| A | 3 | 4 | 5 |
| B | 5 | 7 | 9 |
| C | 4 | 12 | 14 |
| D | 1 | 3 | 11 |
| E | 3 | 6 | 9 |
| F | 1 | 4 | 7 |
| G | 3 | 6 | 9 |
| H | 2 | 5 | 8 |
| I | 5 | 10 | 21 |
| J | 1 | 3 | 11 |
| K | 1 | 2 | 3 |
| L | 3 | 8 | 19 |
| M | 1 | 5 | 15 |

A continuación, se muestra el diagrama PERT asociado a este proyecto:



- Calcule la ruta crítica del proyecto, indicando los valores de ES, EF, LS y LF para cada actividad.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto termine en 26 semanas o menos? ¿Y en 32 semanas o menos?

- (c) ¿Cómo cambia su respuesta anterior si para la tarea B los tiempos optimista, más probable y pesimista cambian a 1, 2 y 9 semanas, respectivamente?

Solución Problema 2

Parte a

La ruta crítica se compone por las actividades que no tienen holgura. Recordar que para llenar esta tabla, se debe partir con los ES y EF para cada actividad de arriba hacia abajo, y una vez terminado, se puede comenzar con los LS y LF para cada actividad de abajo hacia arriba.

| Tarea | μ | σ | Varianza |
|-------|-------|----------|----------|
| A | 4 | 0.3 | 0.1 |
| B | 7 | 0.7 | 0.4 |
| C | 11 | 1.7 | 2.8 |
| D | 4 | 1.7 | 2.8 |
| E | 6 | 1.0 | 1.0 |
| F | 4 | 1.0 | 1.0 |
| G | 6 | 1.0 | 1.0 |
| H | 5 | 1.0 | 1.0 |
| I | 11 | 2.7 | 7.1 |
| J | 4 | 1.7 | 2.8 |
| K | 2 | 0.3 | 0.1 |
| L | 9 | 2.7 | 7.1 |
| M | 6 | 2.3 | 5.4 |

| Actividad | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|----|----|----|----|---------|
| A | 0 | 4 | 5 | 9 | 5 |
| B | 0 | 7 | 4 | 11 | 4 |
| C | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 |
| D | 4 | 8 | 13 | 17 | 9 |
| E | 4 | 10 | 9 | 15 | 5 |
| F | 7 | 11 | 11 | 15 | 4 |
| G | 11 | 17 | 11 | 17 | 0 |
| H | 11 | 16 | 17 | 22 | 6 |
| I | 8 | 19 | 17 | 28 | 9 |
| J | 11 | 15 | 15 | 19 | 4 |
| K | 17 | 19 | 17 | 19 | 0 |
| L | 19 | 28 | 19 | 28 | 0 |
| M | 16 | 22 | 22 | 28 | 6 |

La ruta crítica está determinada por las actividades cuya holgura es igual a 0. Finalmente, ésta es C - G - K - L.

Parte b

La media de la duración del proyecto es de 28 semanas, que se calcula sumando las duraciones de las actividades que componen la ruta crítica. La desviación estándar es de 3.3 (sumar la varianza de las actividades de la ruta crítica y obtener la raíz cuadrada). Con estos valores, se estandariza y luego se busca en la Tabla Normal (ver Pregunta 1 de la Ayudantía 6 por si quedan dudas).

Luego, la probabilidad de terminar en menos de 26 semanas es 27.4% y la probabilidad de terminar en menos de 32 semanas es de 88.69%.

Parte c

La respuesta no cambia, ya que la actividad B no es parte de la ruta crítica. Por ende, una disminución en su duración sólo afecta a la holgura de la actividad, pero no a la duración del proyecto.

Problema 3

Para la realización de un proyecto X en una empresa de cemento consiste de los siguientes procesos:

| Actividad | Predecesor | Tiempo optimista (a) | Tiempo más probable (m) | Tiempo Pesimista (b) |
|-----------|------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| A | - | 5 | 6 | 7 |
| B | - | 1 | 3 | 5 |
| C | - | 1 | 4 | 7 |
| D | A | 1 | 2 | 3 |
| E | B | 1 | 2 | 9 |
| F | C | 1 | 5 | 9 |
| G | C | 2 | 2 | 8 |
| H | E, F | 4 | 4 | 10 |
| I | D | 2 | 5 | 8 |
| J | H, G | 2 | 2 | 8 |

Utilizando estos datos responda las siguientes preguntas:

- (a) ¿Cuál es la duración esperada y la varianza de cada actividad?
- (b) ¿Qué actividades pertenecen a la ruta crítica y el tiempo del proyecto completo?
- (c) ¿Cuál es la posibilidad de que el proyecto se complete en un tiempo menor o igual a 22 semanas?

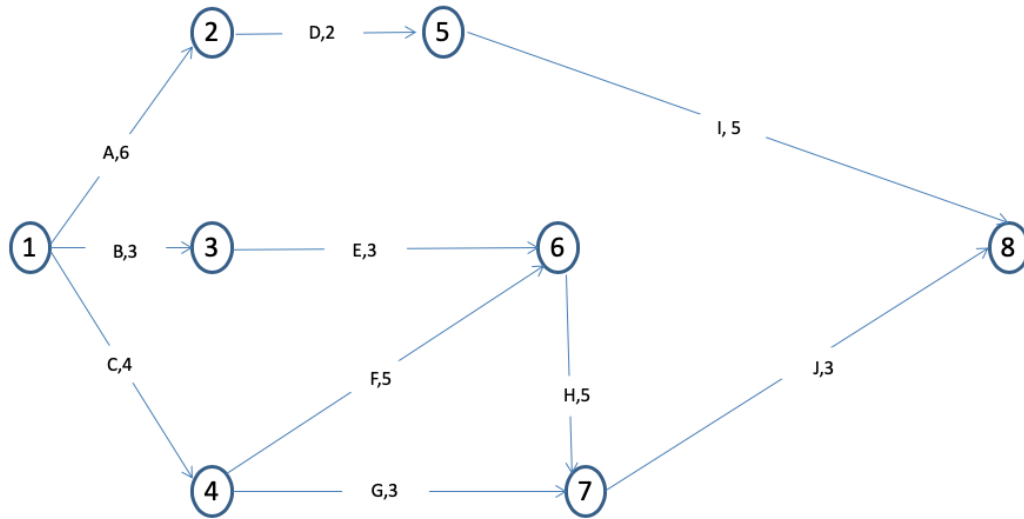
Solución Problema 3

Parte a

| Actividad | Predecesor | Tiempo optimista (a) | Tiempo más probable (m) | Tiempo Pesimista (b) | Tiempo (μ) | Varianza (σ) |
|-----------|------------|----------------------|-------------------------|----------------------|------------------|-----------------------|
| A | - | 5 | 6 | 7 | 6 | 0.11 |
| B | - | 1 | 3 | 5 | 3 | 0.44 |
| C | - | 1 | 4 | 7 | 4 | 1.00 |
| D | A | 1 | 2 | 3 | 2 | 0.11 |
| E | B | 1 | 2 | 9 | 3 | 1.78 |
| F | C | 1 | 5 | 9 | 5 | 1.00 |
| G | C | 2 | 2 | 8 | 3 | 1.00 |
| H | E, F | 4 | 4 | 10 | 5 | 1.00 |
| I | D | 2 | 5 | 8 | 5 | 1.00 |
| J | H, G | 2 | 2 | 8 | 3 | 1.00 |

Parte b

Para realizar el análisis de ruta crítica es necesario realizar el grafo de flujo de actividades:



Con este grafo y utilizando los tiempos medios (μ) se obtiene el siguiente análisis de holgura:

| Actividad | μ | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|-------|----|----|----|----|---------|
| A | 6 | 0 | 6 | 4 | 10 | 4 |
| B | 3 | 0 | 3 | 3 | 6 | 3 |
| C | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| D | 2 | 6 | 8 | 10 | 12 | 4 |
| E | 3 | 3 | 6 | 6 | 9 | 3 |
| F | 5 | 4 | 9 | 4 | 9 | 0 |
| G | 3 | 4 | 7 | 11 | 14 | 7 |
| H | 5 | 9 | 14 | 9 | 14 | 0 |
| I | 5 | 8 | 13 | 12 | 17 | 4 |
| J | 3 | 14 | 17 | 14 | 17 | 0 |

De este análisis se obtiene que la ruta crítica es: C-F-H-J. Y

Y el tiempo promedio del proyecto es igual a 17 semanas.

Parte c

Para hacer este análisis es necesario determinar la desviación estándar de la ruta crítica:

$$\sigma = \sqrt{Var_C + Var_F + Var_H + Var_J} = \sqrt{1.00 + 1.78 + 1.00 + 1.00} = 2.19$$

Con este dato es posible determinar la probabilidad de que el proyecto se complete en un tiempo igual o menor a 22 semanas:

$$P(X \leq 22) = P\left(Z \leq \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{22 - 17}{2.19}\right) = P(Z \leq 2.28)$$

Este valor de Z entrega probabilidad de 98.87 %. Por lo tanto, la probabilidad de el proyecto demore 22 semanas o menos es igual a 98.87 %

Problema 4

Se tiene un proyecto que consta de 9 actividades, con los tiempos y relaciones de precedencia mostrados en la tabla.

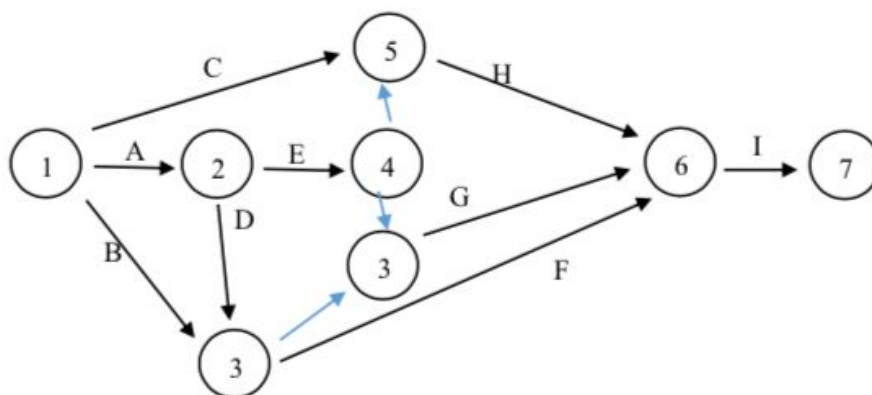
| Actividad | Predecesor | Tiempo promedio (semanas) | (semanas) |
|-----------|------------|---------------------------|-----------|
| A | - | 2 | 0,5 |
| B | - | 2 | 1 |
| C | - | 2 | 0,2 |
| D | A | 9 | 2 |
| E | A | 5 | 1,5 |
| F | B, D | 10 | 2,1 |
| G | B, D, E | 6 | 1,7 |
| H | C, E | 5 | 2 |
| I | F, G, H | 1 | 0 |

- (a) Desarrollar el diagrama CPM del proyecto.
- (b) Identificar la ruta crítica y duración mínima del proyecto, indicando los valores ES, EF, LS y LF, además de las holguras para cada actividad.
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto termine en menos de 21 semanas?

Solución Problema 4

Parte a

El grafo de este problema es el siguiente:



Parte b

El análisis de holgura es el siguiente:

| Actividad | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|----|----|----|----|---------|
| A | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| B | 0 | 3 | 8 | 11 | 8 |
| C | 0 | 2 | 14 | 16 | 14 |
| D | 2 | 11 | 2 | 11 | 0 |
| E | 2 | 7 | 10 | 15 | 8 |
| F | 11 | 21 | 11 | 21 | 0 |
| G | 11 | 17 | 15 | 21 | 4 |
| H | 7 | 12 | 16 | 21 | 9 |
| I | 21 | 22 | 21 | 22 | 0 |

Ruta crítica: A - D - F - I. La duración media del proyecto es de 22 semanas con varianza de 8.66 semanas $(0.5^2 + 2^2 + 2.1^2 + 0^2)$.

Parte c

$$z = \frac{X - T_{\text{proyecto}}}{\sigma} = \frac{21 - 22}{\sqrt{8.66}} = -0.3398$$

$$P(z < -0.3398) = 0.3669$$

Por lo tanto, hay una probabilidad de un 36.7% de que el proyecto termine en menos de 21 semanas.

Problema 5

Considerando el mismo proyecto de la pregunta anterior, pero teniendo seguridad respecto a la duración de las actividades, existe la posibilidad de terminar el proyecto antes de lo previsto.

| Actividad | Tiempo promedio (semanas) | Costo normal (\$) | Tiempo más corto (semanas) | Costo tiempo más corto (\$) |
|-----------|---------------------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------|
| A | 2 | \$50 | 1 | \$90 |
| B | 3 | \$200 | 2 | \$300 |
| C | 2 | \$30 | 1 | \$50 |
| D | 9 | \$1.000 | 4 | \$1.700 |
| E | 5 | \$500 | 2 | \$800 |
| F | 10 | \$1.300 | 5 | \$2.000 |
| G | 6 | \$700 | 3 | \$1.100 |
| H | 5 | \$600 | 2 | \$1.000 |
| I | 1 | \$20 | 1 | \$20 |

- (a) ¿Cuál es el costo normal de terminar el proyecto?
- (b) ¿Cuál es la ruta crítica y el tiempo de terminar el proyecto lo antes posible?
- (c) Si se tiene un presupuesto de \$6.600, ¿se podría terminar el proyecto en 11 semanas?

Solución Problema 5

Parte a

Considerando las duraciones normales del proyecto, se tiene un costo normal de \$4.400.

Parte b

| Actividad | Tiempo más corto (semanas) | ES | EF | LS | LF |
|-----------|----------------------------|----|----|----|----|
| A | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| B | 2 | 0 | 2 | 3 | 5 |
| C | 1 | 0 | 1 | 7 | 8 |
| D | 4 | 1 | 5 | 1 | 5 |
| E | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| F | 5 | 5 | 10 | 5 | 10 |
| G | 3 | 5 | 8 | 7 | 10 |
| H | 2 | 3 | 5 | 8 | 10 |
| I | 1 | 10 | 11 | 10 | 11 |

Parte c

A partir de las holguras anteriores, se aprecia que no habría necesidad de acortar todas las actividades, de tal forma de optimizar el costo. Es el caso de las actividades C (podría mantenerse en 3 semanas), C (2 semanas) y H (5 semanas).

| Actividad | Tiempo (semanas) | Costo (\$) | ES | EF | LS | LF | H |
|-----------|------------------|------------|----|----|----|----|---|
| A | 1 | \$90 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| B | 3 | \$200 | 0 | 3 | 2 | 5 | 2 |
| C | 2 | \$30 | 0 | 2 | 3 | 5 | 3 |
| D | 4 | \$1.700 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 |
| E | 2 | \$800 | 1 | 3 | 3 | 5 | 2 |
| F | 5 | \$2.000 | 5 | 10 | 5 | 10 | 0 |
| G | 3 | \$1.100 | 5 | 8 | 7 | 10 | 2 |
| H | 5 | \$600 | 5 | 10 | 5 | 10 | 0 |
| I | 1 | \$20 | 10 | 11 | 10 | 11 | 0 |

El mínimo costo de terminar el proyecto lo antes posible es de \$6.540. Por lo tanto, se tiene que es factible terminar el proyecto en 11 semanas con el presupuesto de \$6.600.

Problema 6

Un proyecto consta de 9 actividades cuyos tiempos de duración se encuentran en semanas. En la tabla siguiente se muestran las relaciones de precedencia de las actividades:

| Actividad | Predecesor | Tiempo Normal | Desviación Estandar |
|-----------|------------|---------------|---------------------|
| A | - | 4 | 1 |
| B | A | 3 | 0.5 |
| C | A | 2 | 0.75 |
| D | B | 5 | 0.8 |
| E | B, C | 1 | 0.1 |
| F | C | 3 | 0.6 |
| G | E, F | 4 | 1 |
| H | D, E | 4 | 1.1 |
| I | H, G | 6 | 2 |

- Dibuje el diagrama PERT del proyecto
- Calcular ES, LS, EF, LF, las holguras de las actividades y el tiempo estimado de duración del proyecto. ¿Cuál es la ruta crítica?
- ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en un tiempo menor a 20 semanas?

Suponga que las actividades ahora pueden acortarse con un costo asociado. En la tabla siguiente se muestran los costos normales y los costos de acortar las actividades:

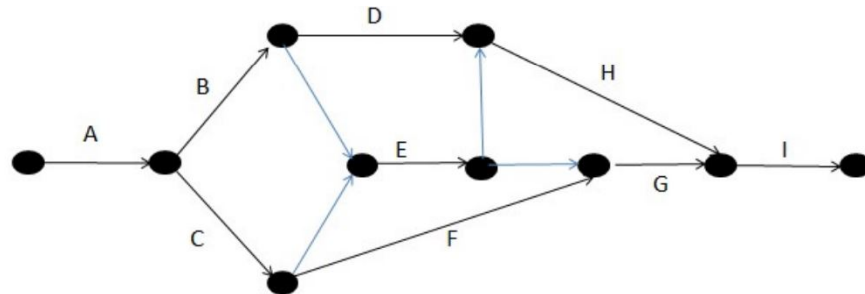
| Actividad | Predecesor | Tiempo Normal | Tiempo más corto | Costo Normal | Costo más corto |
|-----------|------------|---------------|------------------|--------------|-----------------|
| A | - | 4 | 3 | 6 | 9 |
| B | A | 3 | 2 | 8 | 15 |
| C | A | 2 | 1 | 4 | 6 |
| D | B | 5 | 3 | 5 | 8 |
| E | B, C | 1 | 1 | 12 | 12 |
| F | C | 3 | 3 | 5 | 5 |
| G | E, F | 4 | 3 | 4 | 6 |
| H | D, E | 4 | 1 | 3 | 7 |
| I | H, G | 6 | 5 | 5 | 6 |

- ¿En cuántas semanas se acortaría la duración del proyecto si todas las actividades se demorasen su tiempo más corto? ¿Se mantiene la ruta crítica? ¿En cuánto aumentarían los costos?
- Suponga que ninguna actividad se ha acortado. ¿Cuánto costaría adelantar el término del proyecto en 3 semanas?

Solución Problema 6

Parte a

La red PERT de este proyecto es:



en esta figura las líneas azules representan actividades ficticias o dummy.

Parte b

El análisis requerido para este problema es el siguiente

| Actividad | Tiempo Normal | EF | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|---------------|----|----|----|----|---------|
| A | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| B | 3 | 4 | 7 | 4 | 7 | 0 |
| C | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 3 |
| D | 5 | 7 | 12 | 7 | 12 | 0 |
| E | 1 | 7 | 8 | 11 | 12 | 4 |
| F | 3 | 6 | 9 | 9 | 12 | 3 |
| G | 4 | 9 | 13 | 12 | 16 | 3 |
| H | 4 | 12 | 16 | 12 | 16 | 0 |
| I | 6 | 16 | 22 | 16 | 22 | 0 |

La duración del proyecto es de 22 semanas. La ruta crítica corresponde a las actividades que no tienen holgura, es decir, la ruta crítica es A-B-D-H-I.

Parte c

Para esto se necesita saber la desviación estándar de la ruta crítica:

$$\sigma = \sqrt{1 + 0.5^2 + 0.8^2 + 1.1^2 + 2^2} = 2.66$$

Y la probabilidad pedida es:

$$P(X < 20) = P\left(z < \frac{20 - 22}{2.66}\right) = P(z < -0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

Luego, el proyecto puede terminarse en menos de 20 semanas con una probabilidad de un 22.6 %.

Parte d

En esta pregunta hay que hacer el mismo análisis de holgura pero con los tiempos más cortos:

| Actividad | Tiempo más cortos | EF | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|-------------------|----|----|----|----|---------|
| A | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| B | 2 | 3 | 5 | 4 | 6 | 1 |
| C | 1 | 3 | 4 | 3 | 4 | 0 |
| D | 3 | 5 | 8 | 6 | 9 | 1 |
| E | 1 | 5 | 6 | 6 | 7 | 1 |
| F | 3 | 4 | 7 | 4 | 7 | 0 |
| G | 3 | 7 | 10 | 7 | 10 | 0 |
| H | 1 | 8 | 9 | 9 | 10 | 1 |
| I | 5 | 10 | 15 | 10 | 15 | 0 |

Con esta medida la duración del proyecto cambia a 15 semanas, es decir, 7 semanas menos que el caso anterior. Cabe destacar que la ruta crítica es ahora A-C-F-G-I.

El costo de realizar el proyecto sin acortar ninguna actividad corresponde a la suma de los costos normales de todas las actividades:

$$\text{Costo Normal} = 6 + 8 + 4 + 5 + 12 + 5 + 4 + 3 + 5 = \$52$$

Por otro lado, el costo de acortar todas las actividades es de:

$$\text{Costo más rápido} = 9 + 15 + 6 + 8 + 12 + 5 + 6 + 7 + 6 = \$74$$

Luego, los costos aumentan en \$22.

Parte e

Se debe analizar el costo por unidad de tiempo de todas las actividades de la ruta crítica:

| Actividad | Predecesor | Tiempo Tiempo Normal | Tiempo más corto | Costo Normal | Costo más corto | Costo por adelantar actividad en una semana |
|-----------|------------|-------------------------|---------------------|-----------------|--------------------|--|
| A | - | 4 | 3 | 6 | 9 | 3 |
| B | A | 3 | 2 | 8 | 15 | 7 |
| C | A | 2 | 1 | 4 | 6 | 2 |
| D | B | 5 | 3 | 5 | 8 | 1.5 |
| E | B, C | 1 | 1 | 12 | 12 | - |
| F | C | 3 | 3 | 5 | 5 | - |
| G | E, F | 4 | 3 | 4 | 6 | 2 |
| H | D, E | 4 | 1 | 3 | 7 | 1.33 |
| I | H, G | 6 | 5 | 5 | 6 | - |

Como se estableció en (a), la ruta crítica corresponde a A-B-D-H-I.

Se puede observar que conviene adelantar la actividad A en una semana. De esta forma el proyecto podría terminar en 21 semanas. La siguiente actividad a adelantar debe ser H, ya que tiene el menor costo por semana. Esta actividad podría adelantarse 3 semanas desde un tiempo normal de 4 hasta un tiempo más corto de 1, pero en este caso solo se necesita adelantar dicha actividad en 2 semanas, ya que se pide adelantar el proyecto en un total de 3 semanas y ya se adelantó la actividad I en una semana.

Entonces, el costo normal aumenta en 1 por adelantar I en una semana y en 1.33 por cada semana que se adelanta H ($1.33 \times 2 = 2.66$). Es decir, adelantar el término del proyecto en 3 semanas cuesta \$52 (costo normal) + 1 + 2.66 = \$55.66.

Problema 7

Suponga que la empresa en la que usted trabaja está evaluando un próximo contrato consistente en la realización de un proyecto por etapas. Se le ha pedido a usted que haga el análisis preliminar del proyecto para definir ciertos aspectos del contrato.

La relación de dependencia entre las etapas del proyecto y los tiempos esperados (en semanas) de duración de cada una se muestran a continuación:

| Etapas | Predecesor | Tiempo optimista (a) | Tiempo más probable | Tiempo pesimista (b) |
|--------|------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| A | - | 2 | 3 | 4 |
| B | A | 2 | 4 | 6 |
| C | A | 5 | 6 | 13 |
| D | B, C | 3 | 6 | 9 |
| E | B | 2 | 5 | 8 |
| F | D, E | 2 | 4 | 6 |

En base a ésta información y usando el método PERT que usted aprendió en el curso Gestión de Operaciones se le pide:

- Encuentre los tiempos esperados y varianzas para cada actividad
- Dibuje el diagrama PERT asociado al proyecto
- Obteniendo ES, EF, LS, LF y h para cada etapa ¿Cuál es la ruta crítica? ¿Cuál es la duración mínima del proyecto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto sea completado en menos de 22 semanas? Además, realice un intervalo de confianza de 95 % para la duración del proyecto.

Suponga que usted puede reducir los tiempos de cada etapa manteniendo la varianzas de las actividades inalterada. Y una vez tomada la decisión el costo se asume antes de comenzar con el proyecto. La posible disminución en los tiempos de cada etapa, el costo normal de cada etapa y costo acelerado son los siguientes:

| Actividad | Reducción de tiempo (Semanas) | Costo Normal (\$) | Costo Acelerado (\$) |
|-----------|-------------------------------|-------------------|----------------------|
| A | 1 | 10000 | 13000 |
| B | 1 | 6000 | 9000 |
| C | 2 | 4000 | 7000 |
| D | 2 | 13000 | 18000 |
| E | 2 | 9000 | 13000 |
| F | 1 | 7000 | 8000 |

- Si su cliente le ofrece un bono de \$8000 al finalizar el proyecto si el éste es terminado en menos de 18 semanas. Si debe determinar hoy que actividades acortar ¿Qué actividades acortaría?

Solución Problema 7

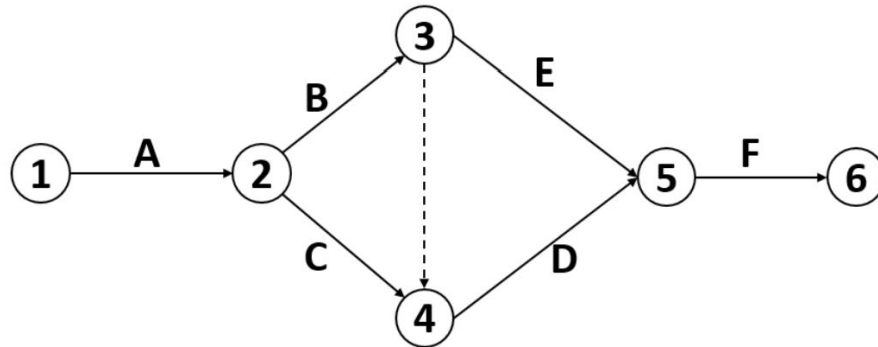
Parte a

Utilizando las formulas de μ y σ de una distribución beta, obtenemos lo siguiente:

| Actividad | Tiempo esperado (semanas) | Varianza |
|-----------|---------------------------|----------|
| A | 3 | 0.1 |
| B | 4 | 0.4 |
| C | 7 | 1.8 |
| D | 6 | 1.0 |
| E | 5 | 1.0 |
| F | 4 | 0.4 |

Parte b

Viendo la tabla con los predecesores construimos el siguiente diagrama:



Parte c

| Actividad | Tiempo esperado (semanas) | Varianza | ES | EF | LS | LF | Holgura |
|-----------|---------------------------|----------|----|----|----|----|---------|
| A | 3 | 0.1 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| B | 4 | 0.4 | 3 | 7 | 6 | 10 | 3 |
| C | 7 | 1.8 | 3 | 10 | 3 | 10 | 0 |
| D | 6 | 1.0 | 10 | 16 | 10 | 16 | 0 |
| E | 5 | 1.0 | 7 | 12 | 11 | 16 | 4 |
| F | 4 | 0.4 | 16 | 20 | 16 | 20 | 0 |

Por lo tanto la ruta crítica es: A-C-D-F y el tiempo de duración del proyecto es de 20 semanas.

Parte d

Primero calculamos que la desviación estandar de la ruta crítica es:

$$\sigma = \sqrt{0.1 + 1.8 + 1 + 0.4} = 1.82$$

Con ello, el calculo que hay que realizar es el siguiente:

$$z = \frac{22 - 20}{1.82} = 1.1$$

Buscando $z = 1.1$ en la tabla normal se obtiene que la probabilidad de que el proyecto sea completado en menos de 22 semanas es de 86.4 %.

Para un intervalo de confianza de 95 %, se tiene que buscar el z correspondiente a 0.975, ya que el intervalo de confianza requiere de la distribución de dos colas ($z = 1.96$). El intervalo de confianza está dado por:

$$\text{Intervalo de confianza } 95 \% = 20 \pm 1.96 \times 1.8 = 20 \pm 3.6 \text{ semanas}$$

Parte e

Para obtener esto es necesario ver el ahorro generado en cada actividad y el costo asociado:

| Actividad | Reducción de tiempo (Semanas) | Costo Normal (\$) | Costo Acelerado (\$) | Aumento Costo (\$) |
|-----------|-------------------------------|-------------------|----------------------|--------------------|
| A | 1 | 10000 | 13000 | 3000 |
| B | 1 | 6000 | 9000 | 3000 |
| C | 2 | 4000 | 7000 | 3000 |
| D | 2 | 13000 | 18000 | 5000 |
| E | 2 | 9000 | 13000 | 4000 |
| F | 1 | 7000 | 8000 | 1000 |

Para determinar si conviene o no acortar el proyecto y en cuánto se debería acortar hay que obtener el beneficio esperado de terminar el proyecto en menos de 18 semanas:

Si no se hace ningún cambio en el proyecto:

$$z = \frac{18 - 20}{1.82} = -1.1$$

Usando la tabla normal se obtiene que la probabilidad de que el proyecto sea completado en menos de 18 semanas es de 13.6 %.

Por lo tanto la utilidad esperada en este caso es:

$$\text{Beneficio Esperado} = 0.136 \times \$8000 = \$1086$$

$$\text{Costos} = 0$$

$$\text{Utilidad esperada sin acortar proyecto} = \$1085 - \$0 = \$1086$$

Si se acorta en una semana el proyecto Considerando las actividades de la ruta crítica, hay que decidir cuál conviene acortar para evaluar el impacto en beneficio obtenido y costos asociados:

| Alternativas | Tiempo Ahorrado (Semanas) | Costo (\$) |
|--------------|---------------------------|------------|
| A | 1 | 3000 |
| F | 1 | 1000 |

Considerando los costos, para acortar el proyecto en una semana conviene invertir en acelerar la etapa F.

$$z = \frac{18 - 19}{1.82} = -0.55$$

Buscando en la tabla normal se obtiene que la probabilidad de que el proyecto sea completado en menos de 18 semanas, dado que se acortó una semana, es de 29.12 %.

Por lo tanto la utilidad esperada en este caso es:

$$\text{Beneficio Esperado} = 0.2912 \times \$8000 = \$2329.6$$

$$\text{Costos} = 1000$$

$$\text{Utilidad esperada sin acortar proyecto} = \$2329.6 - \$1000 = \$1329.6$$

Si se acorta en dos semanas el proyecto

Considerando las actividades de la ruta crítica, hay que decidir cuál(es) conviene acortar para evaluar el impacto en beneficio obtenido y costos asociados:

| Alternativas | Tiempo Ahorrado (Semanas) | Costo (\$) |
|--------------|---------------------------|------------|
| A y F | 2 | 4000 |
| C | 2 | 3000 |
| D | 2 | 5000 |

Considerando los costos, para acortar el proyecto en dos semanas conviene invertir en acelerar la etapa C

$$z = \frac{18 - 18}{1.82} = 0$$

Buscando en la tabla normal se obtiene que la probabilidad de que el proyecto sea completado en menos de 18 semanas, dado que se acortó dos semanas, es de 50 %.

Por lo tanto la utilidad esperada en este caso es:

$$\text{Beneficio Esperado} = 0.5 \times \$8000 = \$4000$$

$$\text{Costos} = 3000$$

$$\text{Utilidad esperada sin acortar proyecto} = \$4000 - \$3000 = \$1000$$

Por lo tanto, finalmente al evaluar las distintas alternativas. Conviene acortar el proyecto en 1 semana invirtiendo en acelerar la etapa F. De esta manera se logra maximizar el beneficio esperado.

Problema 8

Elabore la función objetivo y las restricciones del modelo de optimización que permita minimizar el tiempo total de un proyecto con determinadas actividades, de las que se conoce su duración y precedentes.

Solución Problema 8

La variable considerada en este problema es T_i , que corresponde al tiempo de finalización de la actividad i.

La función objetivo de este problema es

$$\text{Min } T_n$$

, donde n es el índice que corresponde a la última actividad.

Las restricciones de este problema son de la forma

$$T_i - T_j \geq D_j$$

donde D_j es la duración de la actividad j, y esta restricción se plantea para todas las actividades j, y para todas las actividades i precedentes de j.

Problema 9

Se ha establecido que un proyecto tiene la siguiente lista de actividades y los correspondientes tiempos para terminarlas:

| Actividad | Tiempo (días) | Predecesor |
|-----------|---------------|------------|
| A | 1 | - |
| B | 4 | A |
| C | 3 | A |
| D | 7 | A |
| E | 6 | B |
| F | 2 | C,D |
| G | 7 | E,F |
| H | 9 | D |
| I | 4 | G,H |

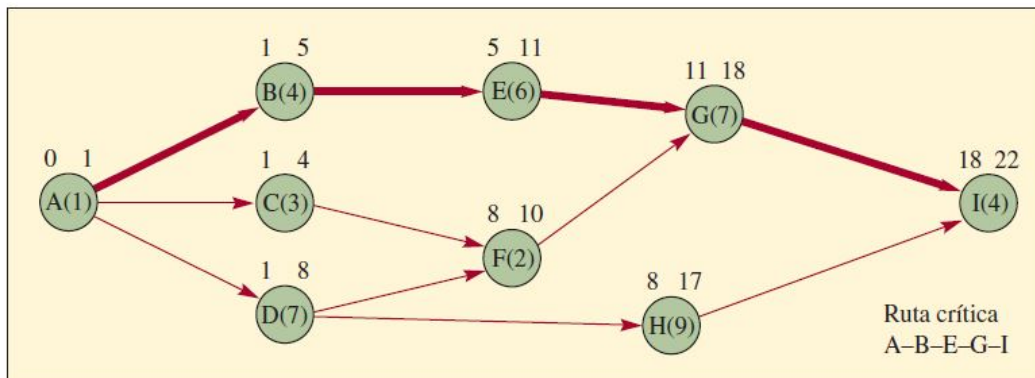
(a) Dibuje el diagrama de la ruta crítica.

- (b) Marque los tiempos de inicio y final más próximos.
- (c) Marque la ruta crítica.
- (d) ¿Qué pasaría si se modificara la actividad F de modo que tomara cuatro días en lugar de dos?

Solución Problema 9

Parte a, b y c

El siguiente diagrama muestra las respuestas a los incisos a, b y c.



En una tabla el análisis de holgura es el siguiente.

| Actividad | Tiempo (días) | ES | EF | LS | LF | H |
|-----------|---------------|----|----|----|----|---|
| A | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| B | 4 | 1 | 5 | 1 | 5 | 0 |
| C | 3 | 1 | 4 | 6 | 9 | 5 |
| D | 7 | 1 | 8 | 8 | 9 | 1 |
| E | 6 | 5 | 11 | 5 | 11 | 0 |
| F | 2 | 8 | 10 | 9 | 11 | 1 |
| G | 7 | 11 | 18 | 11 | 18 | 0 |
| H | 9 | 8 | 17 | 9 | 18 | 1 |
| I | 4 | 18 | 22 | 18 | 22 | 0 |

La ruta crítica es A-D-F-G-I. El tiempo del proyecto 22 días.

Parte d

Nueva ruta crítica: A-D-F-G-I. El tiempo para terminar es 23 días.

Problema 10

Considere un proyecto con 7 actividades, con los tiempos, costos y relaciones de precedencia mostrados en la tabla.

| Actividad | Predecesor | Tiempo normal (semanas) | Costo normal |
|-----------|------------|-------------------------|--------------|
| A | - | 2 | 50.000 |
| B | - | 3 | 200.000 |
| C | - | 2 | 30.000 |
| D | A | 9 | 1.000.000 |
| E | A, B | 5 | 500.000 |
| G | D, E, F | 6 | 700.000 |

- (a) Desarrollar el diagrama CPM del proyecto.
- (b) Identificar la ruta crítica, duración y costo del proyecto, indicando los valores de ES, EF, LS, LF y holguras para cada actividad.

Usted desea tener en funcionamiento la cafetería para las vacaciones, periodo en el cual se espera una mayor afluencia de clientes. Afortunadamente existe la posibilidad de acortar los tiempos del proyecto, no obstante esto significa un aumento en los costos de las actividades de acuerdo a dos posibles contratos.

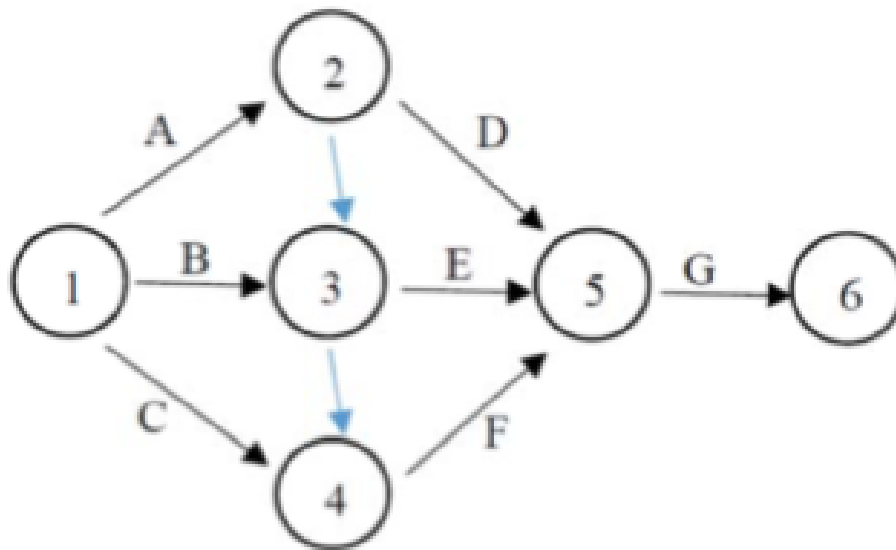
- Contrato 1: Cada semana en que se reduce una actividad involucra un costo incremental de 25.000. Las actividades pueden llegar solo un mínimo de duración de 1 semana.
- Contrato 2: Un contratista le ofrece hacerse cargo del proyecto, con un costo fijo adicional de 310.000 (independiente de las actividades) y le ofrece terminar en 9 semanas.

Bajo cualquiera de ambos contratos los costos considerados se suman al Costo normal del proyecto.

- (c) Si se desea terminar el proyecto en 9 semanas, ¿que contrato resulta mas conveniente, y que costo involucra?

Solución problema 10

Parte a



Parte b

| Actividad | ES | LF | LS | LF | H |
|-----------|----|----|----|----|---|
| A | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| B | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| C | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| D | 2 | 11 | 4 | 13 | 2 |
| E | 3 | 8 | 8 | 13 | 5 |
| F | 3 | 13 | 3 | 13 | 0 |
| G | 13 | 18 | 13 | 18 | 0 |

Ruta crítica: B - F - G.

Duración proyecto: 18 semanas.

Costo Proyecto: 3.780.000

Parte c

Se desea una duracion del proyecto de 9 semanas. Para ello se evaluan ambas alternativas de contratos.

Contrato 1

- Se intenta acortar principalmente a las actividades de la ruta critica que determinan la duracion del proyecto.
- Para que el proyecto termine en 9 semanas, G debe terminar en 9, por lo que podemos acortar la actividad G en 4 semanas, con un costo de 100.000.
- Luego, se acorta la actividad B en una semana, con un costo de 25.000. Con ello el proyecto tendria una duracion de 11 semanas.
- Finalmente, D y F deben acortarse tal que se terminen antes de las 8 semanas (comienzo de G). Implica acortar en 3 y 4 semanas a D y F respectivamente. Esto significa un costo de 175.000
- Costo total contrato 1 = 300.000

| Actividad | Tiempo (semanas) | ES | EF | LS | LF | H |
|-----------|------------------|----|----|----|----|----|
| A | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| B | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| C | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| D | 9 | 2 | 11 | 4 | 13 | 2 |
| E | 5 | 3 | 8 | 8 | 13 | 15 |
| F | 10 | 3 | 13 | 3 | 13 | 0 |
| G | 5 | 13 | 18 | 13 | 18 | 0 |

Se aprecia que ahora todas las actividades a excepcion de E son criticas (no poseen holgura).

Contrato 2

Contrato 2: tiene un costo fijo de 310.000. Por lo tanto, resulta mas conveniente utilizar el contrato 1.