

# Ayudantía 6: PERT

ICS3213 – Gestión de Operaciones  
Profesores: Alejandro Mac Cawley y Rodrigo Carrasco  
Ayudantes: Felipe Muñoz y Javier Pastene

09-05-2025

## Repaso

En planificación y programación de proyectos, se estima que la duración esperada de una actividad es una variable aleatoria con distribución Beta unimodal de parámetros  $(a, m, b)$ :

$a$  = tiempo optimista,  $m$  = tiempo más probable,  $b$  = tiempo pesimista.

El valor esperado ( $t_e$  o  $\mu$ ), que no coincide con el tiempo más probable, y la desviación estándar  $\sigma$  se calculan como:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{b - a}{6}. \quad (2)$$

Una vez obtenidos  $t_e$  y  $\sigma^2$ , se determinan los tiempos de calendario:

- **ES (Earliest Start):** tiempo de inicio más temprano. En nodos iniciales,  $ES = 0$ . Si una actividad tiene varios predecesores, ES es el máximo de los EF de éstos dado que no puede comenzar la actividad hasta que todos sus predecesores hayan terminado.
- **EF (Earliest Finish):** tiempo de término más temprano, dado por

$$EF = ES + t_e.$$

La duración esperada del proyecto,  $T$ , es el mayor EF de todas las actividades que desembocan en el nodo final, pues todas las actividades deben terminar para dar el proyecto como terminado.

- **LF (Latest Finish):** tiempo de término más tardío. Para una actividad, LF es el mínimo de los LS de todas las actividades sucesoras. En el nodo final,  $LF = T$ .
- **LS (Latest Start):** tiempo de inicio más tardío, se obtiene mediante

$$LS = LF - t_e.$$

La *holgura* de una actividad corresponde a el margen de retraso que se puede permitir en una actividad sin afectar la fecha de fin del proyecto, esta puede calcularse de dos maneras equivalentes:

$$H = LF - EF \quad \text{o bien} \quad H = LS - ES.$$

Se denominan *actividades críticas* aquellas con  $H = 0$ : cualquier retraso en ellas retrasa el proyecto en la misma cantidad, por lo que es muy importante intentar evitar atrasos en ellas a toda costa.

La *ruta crítica* es un camino ininterrumpido desde el nodo inicial al final, compuesto exclusivamente de actividades críticas. Puede haber más de una ruta crítica en casos donde existan actividades paralelas que sean ambas críticas, pero siempre existe al menos una.

La duración total  $T$  del proyecto es la suma de variables aleatorias independientes (las duraciones esperadas de las actividades en la ruta crítica), lo que hace que  $T$  se aproxime a una normal según el Teorema Central del Límite. Su varianza es:

$$\sigma_T^2 = \sum_{i \in \text{ruta crítica}} \sigma_i^2.$$

Para calcular probabilidades, se usa la transformación

$$P(T \leq t_0) = P(Z \leq z_0), \quad z_0 = \frac{t_0 - T}{\sigma_T}.$$

Donde  $t_0$  es una duración dada y  $z_0$  valor de entrada en la tabla de distribución normal.

## Problema 1

### Enunciado:

Usted tiene un proyecto con las siguientes actividades y tiempos:

Tabla de actividades (tiempos optimista, más probable y pesimista)

Actividad	Antecesor	$t_o$	$t_m$	$t_p$
A	—	2	5	8
B	—	1	3	7
C	—	2	3	5
D	A, B	1	4	7
E	B, C	3	6	9
F	D	2	2	4
G	E, F	4	7	10

1. Dibuje el diagrama PERT asociado al proyecto.
2. Determine ES, LS, EF, LF y la holgura de cada actividad.
3. Determine la ruta crítica, el tiempo esperado de duración de la ruta crítica y su varianza.
4. Calcule la duración del proyecto que tiene como mínimo un 80% de probabilidad de no ser superada.

## Ejercicio 2

### Enunciado:

Usted dispone de la siguiente información sobre un proyecto: los tiempos mínimos u optimistas, esperados y la desviación estándar por actividad medidos en semanas. Además tiene el costo que supone realizar la actividad normalmente

Actividad	Antecedentes	$t_e$	$t_o$	$\sigma$	Costo Normal
A	—	5	4	0.9	5
B	—	3	2	1.2	4
C	A, B	4	3	1.0	3.5
D	C	3	2	1.5	2
E	C	5	3	1.1	6
F	D, E	4	2	0.8	5

1. **Diagrama, ES, EF, LS, LF y ruta crítica:** Desarrollar el diagrama del proyecto, determine los ES, EF, LS, LF y la ruta crítica. Además, calcule la duración esperada y la desviación estándar de la ruta crítica.
2. **Duración doble de probabilidad de excederse que de no cumplirse:** Calcule la duración del proyecto de tal manera que sea el doble de probable de que este se exceda del plazo a que este no se exceda. cumplirse.
3. **Contrato con bono y penalización:** Si le ofrecen un contrato con un bono de \$200 por terminar en o antes de 15 semanas y una penalización de \$80 por terminar en o después de 20 semanas. ¿Aceptaría o rechazaría el contrato? ¿Cuál es la cantidad de semanas máxima que debe ofrecer el bono para que quiera aceptar el contrato?
4. **Reducción de 3 semanas en la ruta crítica con costo mínimo:** Ahora tiene la posibilidad de que la duración esperada de una actividad sea su tiempo optimista en vez del esperado pagando el doble de su costo normal. Calcule el costo mínimo para que el tiempo esperado de la ruta crítica sea 3 semanas menos que el inicial.

## Ejercicio 3

### Enunciado:

Usted es el responsable de planificar un proyecto de desarrollo de un nuevo producto. Para ello dispone de la siguiente información:

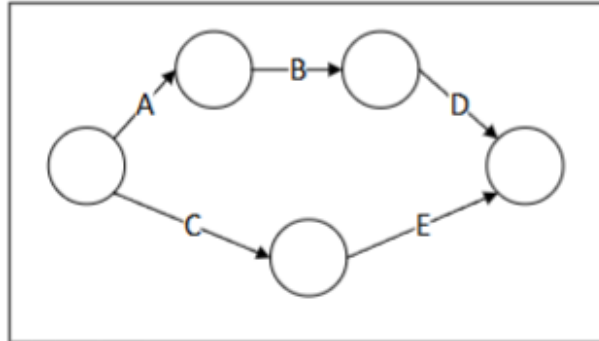
Actividad	Antecesor(es)	Tiempo optimista $t_o$	Tiempo más probable $t_m$	Tiempo pesimista $t_p$
A	—	2	4	6
B	—	1	3	5
C	A	3	5	9
D	A	2	4	8
E	B, C	4	6	10
F	D	1	2	3
G	D, E	2	5	8
H	F, G	3	4	6

1. **Diagrama PERT.** Dibuje el grafo dirigido que representa las dependencias entre actividades.
2. **Tiempos Tempranos y Tardíos.**
  - Calcule para cada actividad ES, EF, LS, LF.
  - Calcule la holgura de cada actividad.
3. **Ruta Crítica.**
  - Determine la(s) ruta(s) crítica(s).
  - Calcule la duración esperada del proyecto (suma de  $t_e$  en la ruta crítica).
  - Calcule la varianza total de la ruta crítica.
4. **Probabilidad de Cumplimiento.**
  - Usando la aproximación normal, calcule la probabilidad de terminar el proyecto en *o antes de* 20 semanas.
  - ¿Cuál es la probabilidad de terminar *después de* 22 semanas?
5. **Análisis de Percentiles (novedad).**
  - Determine el tiempo  $T_{0,75}$  tal que hay un 75 % de probabilidad de finalizar en o antes de  $T_{0,75}$  semanas.
  - Determine el tiempo  $T_{0,95}$  (percentil 95) usando la tabla de la distribución normal estándar.

## Ejercicio 4

### Enunciado:

Usted tiene el siguiente proyecto, con sus tiempos esperados y desviaciones estándar de cada actividad:



Actividad	Tiempo Esperado	Desv. Standard
A	4	1.0
B	3	0.5
C	4	1.2
D	3	0.7
E	5	1.5

Con esta información determine:

- Determine la ruta crítica y tiempo esperado de terminación.
- Si le ofrecen un bono de \$150 por terminar en o antes de una fecha dada y una penalidad de \$100 por terminar después de dicha fecha. ¿Qué fecha lo dejaría indiferente entre el bono y la penalidad?
- ¿Cuál es la probabilidad que la ruta no crítica se transforme en crítica?