Guía de calidad

María Elena Concha (meconcha1@uc.cl), Max Garafulic (mgarafulic1@uc.cl)

Pregunta 1 (Ayudantía 2014-2):

Considere una empresa que recibe grandes lotes de componentes diariamente, por lo que decide implementar un plan estadístico de aceptación. Existen 3 planes posibles, que requieren cada uno un muestreo de 30 componentes. Estos se presentan en la figura 1. Los planes consisten en:

- **Plan A**: Aceptar el lote si no contiene ningún componente defectuoso.
- **Plan B**: Aceptar el lote si contiene a lo más un componente defectuoso.
- **Plan C:** Aceptar el lote si contiene a lo más dos componentes defectuosos.

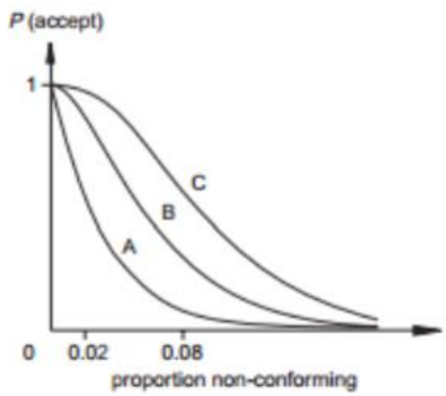


Figura 1: Planes de control

Según esta información, ¿Qué plan escogería para las siguientes situaciones?

a. Debe haber una alta probabilidad de aceptar un lote con un 2% de componentes defectuosos.
b. Debe haber una alta probabilidad de rechazar un lote con un 8% de componentes defectuosos.
c. Un balance entre el riesgo de aceptar lotes con un 8% de componentes defectuosos y rechazar lotes con un 2 % de componentes defectuosos.

Solución:

a. En forma general, para una distribución binomial se tiene:

$$P(x=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

En un lote con un 2 % de componentes defectuosos, cada componente tiene una probabilidad de 0,02 de ser defectuoso. Luego, la probabilidad de que un componente no sea defectuoso es $1-0{,}02=0{,}98$. Analizando los 30 componentes, la

probabilidad de que no hayan componentes defectuosos es $0{,}98^{30} = 0{,}545$, que corresponde a la probabilidad de aceptación del Plan A.
Así, las probabilidades de aceptación son:

- Plan A: $0{,}98^{30} = 0{,}545$
- Plan B: $0{,}98^{30} + 30 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{29} = 0{,}879$.
- Plan C: $0{,}98^{30} + 30 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{29} + \frac{30 \cdot 29}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{28} = 0{,}978$.

El Plan C es el más adecuado porque tiene la mayor probabilidad de aceptar un lote con un 2 % de componentes defectuosos.

b. Realizando los cálculos de la misma forma que en caso anterior, se tiene que la probabilidad de aceptación de un lote que contiene un 8 % de componentes defectuosos es 0,082 para el Plan A, para el Plan B 0,296 y para el Plan C 0,565. Luego, el Plan A es el más adecuado porque tiene la mayor probabilidad de rechazar un lote que contiene un 8 % de componentes defectuosos.
c. En la figura 1, se puede apreciar que el plan B es el más adecuado.

<u>Pregunta 2 (Guía I3):</u>
Los pesos de las cajas de hojuelas de avena incluidas dentro de un lote de producción grande se muestrean cada hora. Los administradores quieren establecer límites de control que incluyan el 99,73% de las medias muestrales. Se sabe que la desviación estándar es igual a 1. Establezca los límites superior e inferior, juego analice si el proceso se encuentra o no bajo control. ¿Qué condiciones deberían darse para que ocurra lo opuesto?

Hora	Promedio 9 muestras
1	16,1
2	16,8
3	15,5
4	16,5
5	16,5
6	16,4
7	15,2
8	16,4
9	16,3
10	14,8
11	14,2
12	17,3

Solución:
Se sabe que:

- 68,3%: N=1 desviaciones estándar.
- 95,4%: N=2 desviaciones estándar.
- 99,73%: N=3 desviaciones estándar.

- 99,9999998%: N=6 desviaciones estándar.

Calculando el promedio y la desviación de las 9 cajas:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_9}{9} = 16, \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Reemplazando los valores en las fórmulas de UCL y LCL:

$$UCL = \bar{x} + z \cdot \bar{\sigma} = 16 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 17$$

$$LCL = \bar{x} - z \cdot \bar{\sigma} = 16 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 15$$

Se puede notar que los últimos 3 valores de la tabla están fuera de los valores establecidos, por lo que no se puede considerar que es un proceso bajo control.
Por otro lado, si la desviación estándar fuera 2, el resultado para UCL y LCL sería distinto, así quedarían dentro de los límites (los cuales serían 18 y 14).

<u>Pregunta 3 (Ex 2014-1):</u>

Una compañía de música que fabrica teclados realiza diariamente un análisis de calidad a una muestra de 25 teclas para poder determinar el número total de teclas defectuosas. La probabilidad de que una tecla resulte defectuosa sigue una distribución Uniforme (0, 1).

a. Si el número de teclas defectuosas en una muestra sigue una distribución Uniforme (0, 25), ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de teclas defectuosas si se sabe qué piezas son defectuosas? En la siguiente tabla se muestran la cantidad de teclas defectuosas en 30 jornadas:
b. Si la producción se considera satisfactoria cuando el número de teclas defectuosas es menor a 4. ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea considerada satisfactoria?
c. En base a la probabilidad estimada en a), elabore el gráfico de control del proceso y determine si el proceso está bajo control.
d. Si el plan de muestreo está definido con un AQL de 10%, un LPTD de 40%, un $\alpha = 0{,}05$ y un $\beta = 0{,}1$ ¿Es correcto el tamaño muestral que está usando la compañía?
e. ¿En qué se diferencia este proceso con un proceso de control de calidad de medidas continuas?

Hint:
La función de probabilidad de una distribución uniforme es:

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}$$

La media y la varianza son:

$$\mu_x = \frac{a+b}{2}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La función de probabilidad de una distribución binomial es:

$$p_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

La media y la varianza son:

$$\mu_x = np, \qquad \sigma_x^2 = np(1-p)$$

c	*LTPD ÷ AQL*	*n • AQL*	*c*	*LTPD ÷ AQL*	*n • AQL*
0	44.890	0.052	5	3.549	2.613
1	10.946	0.355	6	3.206	3.286
2	6.509	0.818	7	2.957	3.981
3	4.890	1.366	8	2.768	4.695
4	4.057	1.970	9	2.618	5.426

Solución:

a. Sea X_n el número de piezas defectuosas y sea μ la probabilidad de que una pieza resulte defectuosa. Como $X_n \sim Uniforme(0{,}25)$ y $\mu \sim Uniforme(0{,}1)$, entonces:

$$X_n | U = \mu \sim Binomial(25, \mu)$$

b. A partir de la tabla, se puede obtener una estimación de la probabilidad de que una tecla sea defectuosa. Sea x_i la cantidad de teclas defectuosas en la jornada i. Luego:

$$p = \frac{1}{30} \cdot \sum_{i=1}^{30} \frac{x_i}{25} = 0{,}17$$

La probabilidad de que la producción sea satisfactoria es:

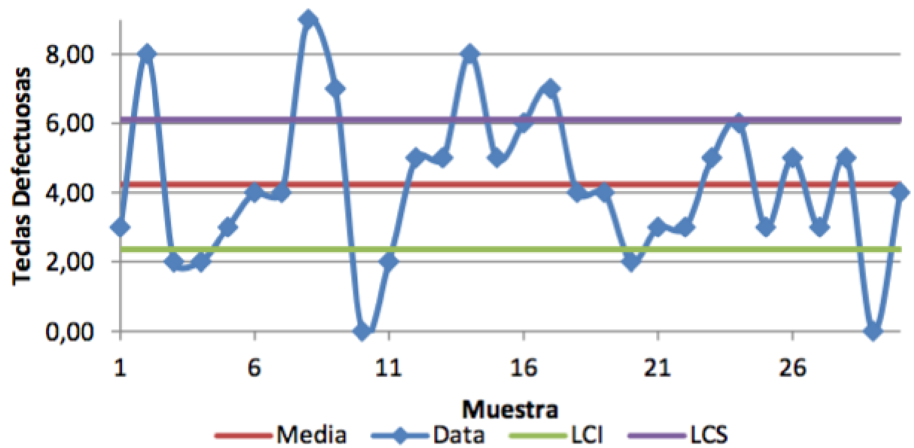
$$p(x < 4) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3)$$

$$p(x < 4) = 0{,}83^{25} + 25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83^{24} + \frac{25 \cdot 24}{2!} \cdot 0{,}17^2 \cdot 0{,}83^{23} + \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} \cdot 0{,}17^3 \cdot 0{,}83^{22} = 0{,}368$$

c. Los límites de control definen el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. Como la distribución es binomial, se tiene:

$$LCL = LCI = np - \sqrt{np \cdot (1 - p)} = 25 \cdot 0{,}17 - \sqrt{25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83} = 2{,}36$$
$$UCL = LCS = np + \sqrt{np \cdot (1 - p)} = 25 \cdot 0{,}17 + \sqrt{25 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83} = 6{,}11$$

El gráfico de control es:



Claramente el proceso está fuera de control.

d. A partir del plan de muestreo de la tabla se tiene:

$$\frac{LPTD}{AQL} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \rightarrow c = 4$$
$$AQL \cdot n = 1,970 \rightarrow n = 19,7 \approx 20$$

El tamaño de muestra no es adecuado, ya que deberían estar tomando muestras de 20 teclados.

e. En estos procesos basta con conocer solo la media del proceso (la varianza queda determinada por la media). En un caso de medidas continuas con distribuciones como la normal, la media y la varianza no están relacionadas, por lo que es necesario monitorear la media del proceso y también la variabilidad.

Pregunta 4:

Una compañía de seguros está implementado un plan de pólizas que la empresa realiza. Se toma cada semana una muestra (en total 2.500 pólizas semanales) y se anota la cantidad de pólizas mal confeccionadas. El criterio de control es bajo 3-sigma. La información se presenta a continuación:

Muestra	Errores
1	15
2	12
3	19
4	2
5	19
6	4
7	24
8	7
9	10
10	17
11	15
12	3
Total	147

a) Dibuje los gráficos de control para 3-sigma.

b) Muestre que este proceso está fuera de control. ¿Cuáles podrían ser algunas razones?

c) Si se usara 2 o 1 sigma como medida de control, ¿Estaría bajo proceso?

Solución:

a) Calculamos $\overline{p} = \frac{Defectos}{Observaciones} = \frac{147}{12 \cdot 2500} = 0,0049$, con desviación

$$\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/N} = \sqrt{0,0049\cdot(1-0,0049)/2500} = 0,0014.$$

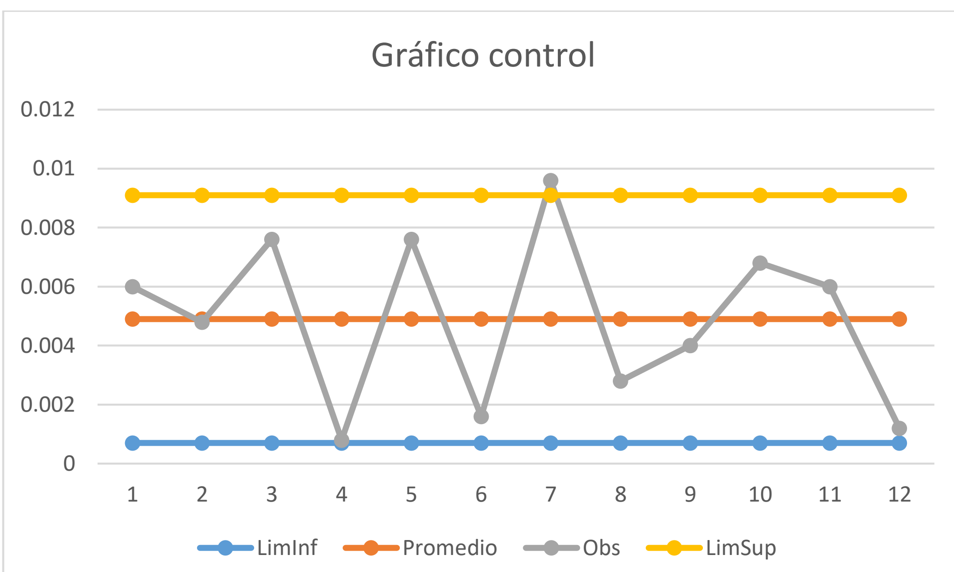
Los límites inferiores y superiores son:

$$LS_3 = \overline{p} + 3d = 0,0091$$
$$LI_3 = \overline{p} - 3d = 0,0007$$

Por otro lado, las proporciones de error para cada muestra son:

Muestra	Errores	Proporción error
1	15	0.0060
2	12	0.0048
3	19	0.0076
4	2	0.0008
5	19	0.0076
6	4	0.0016
7	24	0.0096
8	7	0.0028
9	10	0.0040
10	17	0.0068
11	15	0.0060
12	3	0.0012
Total	147	0.0049

El gráfico queda como:



b) La proporción de la muestra 7 supera el límite superior, por lo que el proceso está fuera de control.

c) Los límites para 2-sigma son:

$$LS_2 = \overline{p} + 2d = 0,0077$$
$$LI_2 = \overline{p} - 2d = 0,0021$$

Como la proporción de falla de la muestra 7 está en este intervalo, bajo este criterio, el proceso sí estaría bajo control. Obviamente, bajo 1-sigma también, pues es el criterio es menos exigente que 2-sigma.

Problema 5 (Ayudantía 2015-2):

Usted quiere implementar un nuevo sistema de muestro para controlar los lotes de manzanas. Para ello define una política con un AQL de 0,19 y un LPTD de 0,6. Usando $\alpha = 0,05$ y $\beta = 0,1$ indique y explique el plan de muestreo que usará.

Solución: Del enunciado se puede obtener $LPTD / AQL = 3,1579$. Con este valor, revisando las tablas para α y β se obtienen valores para c y $nAQL$:

$$c = 6$$
$$nAQL = 3,286$$

Así, se obtiene $n = 17,3$. Esto quiere decir que, usando esta política, se toma una muestra de 18 unidades, de las que si 6 salen defectuosas se rechaza el lote.

Pregunta 6 (Ayudantía 2015-2):

Usted está a cargo de evaluar la política de calidad que su empresa exige a productores de manzanas. A continuación se muestra el peso de una muestra de los 4 bins recibidos durante los últimos 5 días:

Día	**Peso (kg)**			
1	380	395	403	387
2	400	393	401	392
3	397	392	384	390
4	402	407	403	405
5	391	389	393	385

a) Con la información dada elabore los gráficos de control.

b) Si el día 6 usted toma una muestra con los resultados: 407, 381, 392 y 396. ¿Qué puede decir de la muestra? ¿Acepta o rechaza el lote?

Solución:
a) Se tienen los siguientes promedios y rangos:

Día	Peso (kg)				Promedio	Recorrido
1	380	395	403	387	391.25	23
2	400	393	401	392	396.5	9
3	397	392	384	390	390.75	13
4	402	407	403	405	404.25	5
5	391	389	393	385	389.5	8

El promedio de las muestras es 394,95 kg, el promedio de los recorridos 11,6 kg y la desviación estándar 6,1 kg. De las tablas de control:
A2 = 0,73.
D4 = 2,28.
D3 = 0.

Los límites son, entonces:

$$LCS\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 394,45 + 0,73 \cdot 11,6 = 402,92$$

$$LCI\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 394,45 - 0,73 \cdot 11,6 = 385,98$$

$$LCSR = D_4\overline{R} = 2,11 \cdot 11,6 = 26,45$$

$$LCIR = D_3\overline{R} = 0 \cdot 11,6 = 0$$

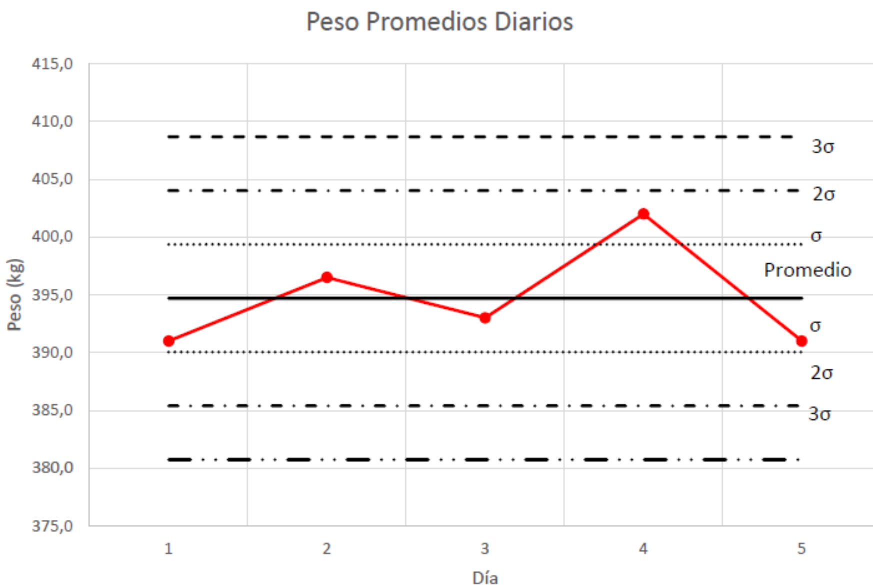
Eliminando las muestras fuera de los límites:

Día	Peso (kg)				Promedio	Recorrido
1		395		387	391	8
2	400	393	401	392	396.5	9
3	397	392		390	393	7
4	402				402	0
5	391	389	393		391	4

El promedio de las muestras es 394,7 kg, el de los recorridos 5,6 kg y la desviación estándar 4,7 kg. Se definen los límites para $\sigma, 2\sigma, 3\sigma$:

$$3\sigma_S = 408,7$$
$$2\sigma_S = 404$$
$$\sigma_S = 399,4$$
$$3\sigma_I = 380,73$$
$$2\sigma_I = 385,4$$
$$\sigma_I = 390$$

Así:



b) El promedio de los datos del día 6 es 392,25 kg y su rango 26 kg. Para verificar el rango se debe calcular los límites inferior y superior de este (considerando pesos iniciales):

$$LCSR = D_4\bar{R} = 2,11 \cdot 11,6 = 26,45$$
$$LCIR = D_3\bar{R} = 0 \cdot 11,6 = 0$$

Tanto el promedio como el rango de los datos medidos están dentro de los rangos aceptables, por lo que sí se acepta el lote.

Pregunta 7: Usted está encargado del control de calidad de piezas de maquinaria que requieren medidas específicas de su diámetro. Se le proporciona la siguiente información de los diámetros medidos en 5 muestras:

Muestra	Observación			
1	5.014	5.022	5.009	5.027
2	5.021	5.041	5.024	5.02
3	5.018	5.026	5.035	5.023
4	5.008	5.034	5.024	5.015
5	5.041	5.056	5.034	5.047

a) Construya los gráficos de control (construya el gráfico en escala de centésimas).
b) ¿Está el proceso bajo control?

Solución: Los promedios y rangos son los siguientes:

Muestra	Observación				Promedio	Recorrido
1	5.014	5.022	5.009	5.027	5.018	0.018
2	5.021	5.041	5.024	5.02	5.0265	0.021
3	5.018	5.026	5.035	5.023	5.0255	0.017
4	5.008	5.034	5.024	5.015	5.02025	0.026
5	5.041	5.056	5.034	5.047	5.0445	0.022

De este modo, se tiene $\overline{\overline{X}} = 5,027$ y $\overline{R} = 0,021$. De los valores de tabla, se obtienen:
A2 = 0,729
D3 = 0
D4 = 2,282

Ahora construimos los límites superiores e inferiores de los gráficos:

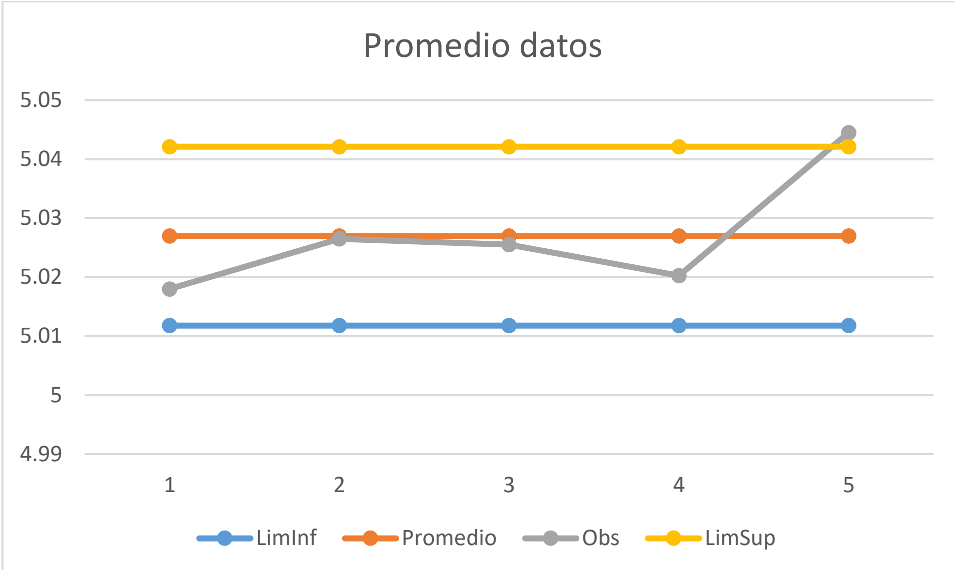
$$LCS\overline{X} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 5,027 + 0,729 \cdot 0,021 = 5,042$$

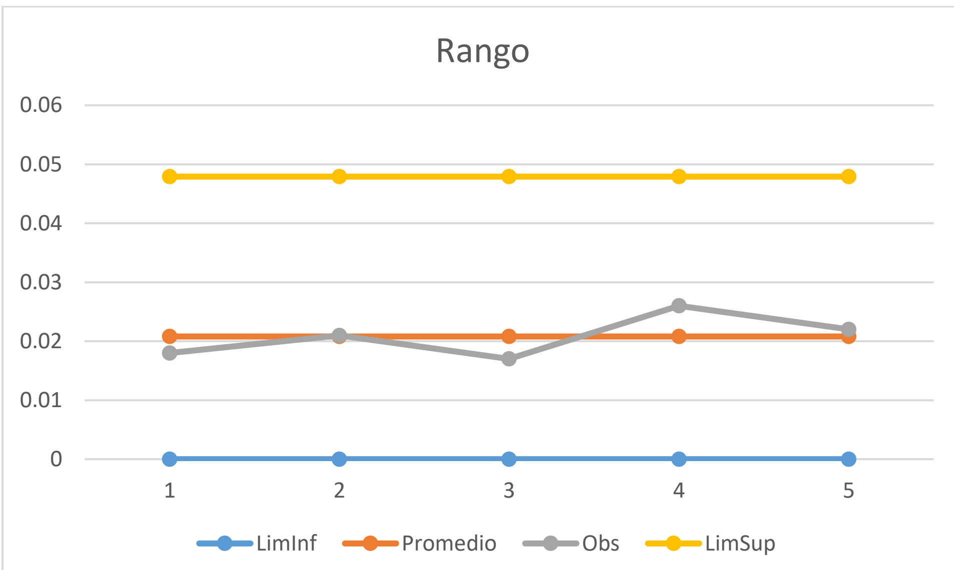
$$LCI\overline{X} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 5,027 - 0,729 \cdot 0,021 = 5,012$$

$$LCSR = D_4\overline{R} = 2,282 \cdot 0,021 = 0,0479$$

$$LCIR = D_3\overline{R} = 0 \cdot 11,6 = 0$$

Los gráficos, para promedios y rangos, son los siguientes respectivamente:





b) La media de la muestra 5 supera el límite superior, por lo que el proceso está fuera de control.