



# Ayudantía 7

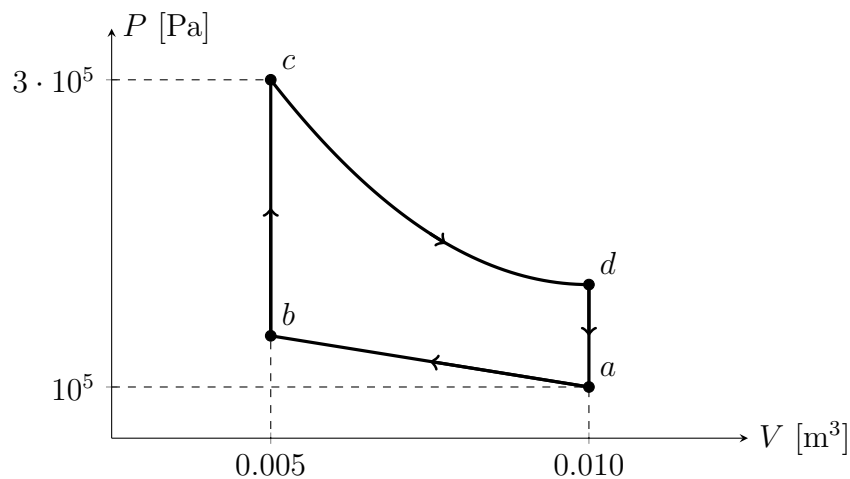
## Termodinámica

José Antonio Rojas Cancino – jrojaa@uc.cl

### Problema 1 (*P1 I2 2024-2*)

Considere el ciclo termodinámico cerrado que realizan 0.1 moles de aire, como muestra el gráfico  $P - V$  en la figura. En el ciclo, el tramo  $a \rightarrow b$  es isotérmico, el tramo  $c \rightarrow d$  es adiabático, y los tramos  $b \rightarrow c$  y  $d \rightarrow a$  son isocóricos. Usando los valores numéricos que muestra el gráfico y considerando el aire como un gas ideal diatómico:

- (a) Determine la presión en los puntos  $b$  y  $d$ .
- (b) Determine la temperatura en los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .
- (c) Encuentre el trabajo realizado por el aire en el ciclo.
- (d) Encuentre el flujo de calor en cada tramo del ciclo.



## Solución

### Ecuación de Estado y $P_b$

Para encontrar la presión en el punto  $b$ , podemos ocupar la ecuación de estado en ese punto, tal que:

$$P_b V_b = n R T_b \implies P_b = \frac{n R T_b}{V_b}.$$

Teniendo  $n = 0.1$  moles,  $R = 8.314 \text{ J/mol K}$ ,  $V_b = 0.005 \text{ m}^3$  y  $T_b = T_a$ . Sin embargo, no tenemos  $T_a$ , pero podemos obtenerla también con la ecuación de estado:

$$P_a V_a = n R T_a \implies T_a = \frac{P_a V_a}{n R}$$

donde tenemos toda la info. Por tanto:

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{10^5 \text{ Pa} \times 0.01 \text{ m}^3}{0.1 \text{ moles} \times 8.314 \text{ J/mol K}} = 1203 \text{ K} = T_b \\ P_b &= \frac{0.1 \text{ moles} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times 1203 \text{ K}}{0.005 \text{ m}^3} = 2 \times 10^5 \text{ Pa} = 200 \text{ kPa} \end{aligned} \quad (0.1)$$

### Ecuación de Estado y $P_d$

Para el proceso  $c \rightarrow d$ , sabemos que es un proceso adiabático. Por tanto, se debe cumplir:

$$P_c V_c^\gamma = P_d V_d^\gamma \implies P_d = P_c \cdot \left( \frac{V_c}{V_d} \right)^\gamma$$

Sabiendo que  $V_d = 0.01 \text{ m}^3$ ,  $P_c = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_c = 0.005 \text{ m}^3$  y que  $\gamma = 7/5$ , reemplazamos y obtenemos:

$$P_d = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \times \left( \frac{0.005 \text{ m}^3}{0.01 \text{ m}^3} \right)^{7/5} = 1.137 \times 10^5 \text{ Pa} = 113.7 \text{ kPa} \quad (0.2)$$

### Temperatura en los procesos

Ya obtuvimos antes que  $T_a = T_b = 1203 \text{ K}$ . Sin embargo, para obtener  $T_c$  y  $T_d$ , debemos ocupar la ecuación de estado:

$$T = \frac{P V}{n R}$$

Reemplazando para los estados  $c$  y  $d$ , tenemos:

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{P_c V_c}{n R} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \times 0.005 \text{ m}^3}{0.1 \text{ moles} \times 8.314 \text{ J/mol K}} = 1804.2 \text{ K} \\ T_d &= \frac{P_d V_d}{n R} = \frac{1.137 \cdot 10^5 \text{ Pa} \times 0.010 \text{ m}^3}{0.1 \text{ moles} \times 8.314 \text{ J/mol K}} = 1368 \text{ K} \end{aligned} \quad (0.3)$$

## Trabajo Realizado por el ciclo

El trabajo realizado por el ciclo es equivalente a la suma de los trabajos en cada proceso, es decir:

$$W_T = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}.$$

Sabiendo que la definición de trabajo es  $W_{12} = \int_1^2 P dV$ , y teniendo que los procesos  $b \rightarrow c$  y  $d \rightarrow a$  son isocóricos, entonces:

$$W_{bc} = W_{da} = 0. \quad (0.4)$$

Para el proceso  $a \rightarrow b$ , ocupamos el hecho que el proceso isotérmico, entonces dejamos la presión con respecto al volumen:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow W_{ab} \int_{V_a}^{V_b} P dV = \int_{V_a}^{V_b} \frac{nRT}{V} dV.$$

Simplificando, y reemplazando por los valores de  $T = T_a = T_b$ , se tiene:

$$\begin{aligned} W_{ab} &= nRT \int_{V_a}^{V_b} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \left( \frac{V_b}{V_a} \right) \\ &= 0.1 \text{ moles} \times 8.314 \text{ J/mol K} \times 1203 \text{ K} \ln \left( \frac{0.005}{0.01} \right) = -0.693 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (0.5)$$

Para el proceso  $c \rightarrow d$ , el proceso es adiabático, por lo que la presión se mantiene cumpliendo que:

$$PV^\gamma = \star \Rightarrow P = \frac{\star}{V^\gamma}$$

Teniendo que también se tiene que cumplir que  $P_c V_c^\gamma = \star$  (información que conocemos), podemos reemplazar en la fracción para definir a  $P$ . Reemplazando para la integral del trabajo, se tiene que:

$$W_{cd} = \int_{V_c}^{V_d} P dV = \int_{V_c}^{V_d} \frac{P_c V_c^\gamma}{V^\gamma} dV = P_c V_c^\gamma \int_{V_c}^{V_d} \frac{1}{V^\gamma} dV = \frac{P_c V_c^\gamma}{1-\gamma} (V_d^{1-\gamma} - V_c^{1-\gamma})$$

Reemplazando ahora los valores que tenemos, se tiene para el trabajo en el proceso  $c \rightarrow d$ :

$$W_{cd} = \frac{3 \cdot 10^5 \times 0.005^{7/5}}{1 - 7/5} (0.01^{1-7/5} - 0.005^{1-7/5}) = 0.91 \text{ kJ} \quad (0.6)$$

Finalmente, el trabajo total realizar en el ciclo es:

$$W_T = -0.693 \text{ kJ} + 0 \text{ kJ} + 0.91 \text{ kJ} + 0 \text{ kJ} = 0.217 \text{ kJ} \quad (0.7)$$

## Calor Realizado por cada tramo

Para esto, vamos a hacer uso que obtuvimos el trabajo para cada tramo. Por tanto, podemos ocupar para cada uno la primera ley de la termodinámica:

$$\Delta U = Q - W,$$

además de la variación de energía interna a volumen constante:

$$\Delta U = n \cdot c_v \cdot \Delta T.$$

Para el tramo  $a \rightarrow b$ , al ser isotérmico, se tiene que  $\Delta U_{ab} = 0$ . Por tanto, se tiene que:

$$\Delta U_{ab} = Q_{ab} - W_{ab} = 0 \implies Q_{ab} = W_{ab} = -0.693 \text{ kJ}. \quad (0.8)$$

Para el tramo  $b \rightarrow c$ , al ser isocórico y que obtuvimos antes, se tiene que  $W_{bc} = 0$ . Por tanto, se tiene que:

$$Q_{bc} = \Delta U_{bc} = n \cdot c_v \cdot (T_c - T_b).$$

Evaluyendo con  $T_b$  y  $T_c$  que obtuvimos anteriormente,  $n$  que nos da el problema, y  $c_v = (5/2)R$  al tratar el aire como un gas ideal diatómico, se tiene:

$$Q_{bc} = 0.1 \text{ moles} \times \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/mol K} \times (1804.2 - 1203) \text{ K} = 1.25 \text{ kJ}. \quad (0.9)$$

Para el tramo  $c \rightarrow d$ , al ser adiabático, se cumple que

$$Q_{cd} = 0. \quad (0.10)$$

Finalmente, para  $Q_{da}$ , nuevamente ocupamos que sea un proceso isocórico donde  $W_{da} = 0$  y se cumple:

$$Q_{da} = \Delta U_{da} = n \cdot c_v \cdot (T_a - T_d),$$

donde, al evaluarlo, se tiene:

$$Q_{da} = 0.1 \text{ moles} \times \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/mol K} \times (1203 - 1368) \text{ K} = -0.343 \text{ kJ}. \quad (0.11)$$

## Problema 2 (*Problema 4.14, Cengel & Boles*)

Un dispositivo de cilindro-émbolo sin fricción contiene 5 kg de nitrógeno a 100 kPa y 250 K. El nitrógeno se comprime entonces lentamente, siguiendo la relación  $PV^{1.4} = \text{constante}$ , hasta que llega a una temperatura final de 360 K. Calcule el trabajo consumido durante este proceso. La constante de gas del nitrógeno es  $\mathcal{R} = 0.2968 \text{ kJ/kg K}$ .

## Respuesta

Notemos que hoy tenemos un trabajo de frontera en un proceso politrópico. Por tanto, se tiene:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - n}.$$

Notemos que implícitamente nos dicen que el coeficiente politrópico es  $n = 1.4$ . Además, podemos ocupar que  $PV = mRT$ , por lo que podemos expresar el trabajo de frontera como:

$$W = \frac{mR(T_2 - T_1)}{1 - n} = \frac{5 \text{ kg} \cdot 0.2968 \text{ kJ/kg K} \cdot (360 - 250) \text{ K}}{1 - 1.4} = -408 \text{ kJ}.$$

## Problema 3 (*Ejemplo 3.120, Cengel & Boles*)

Un dispositivo pistón-cilindro contiene inicialmente 0.2 kg de vapor a 200 kPa y 300 °C. El vapor se enfría a una presión constante hasta que está a 150 °C. Determine el cambio en el volumen del cilindro durante este proceso usando el factor de compresibilidad y compare el resultado con el vapor real. La constante de gas del vapor de agua es  $R = 0.4615 \text{ kJ/kg K}$ , su temperatura crítica es de 647.1 K, y su presión crítica es de 22.06 MPa.

## Respuesta

### Valor Real

Para el valor real, simplemente buscamos las tablas de vapor saturado, teniendo que  $v_1 = 1.131623 \text{ m}^3/\text{kg}$  y  $v_2 = 0.95986 \text{ m}^3/\text{kg}$ . Con esto, se tiene:

$$\Delta V = m(v_2 - v_1) = 0.2 \text{ kg} \cdot (1.131623 - 0.95986) \text{ m}^3/\text{kg} = 0.07128 \text{ m}^3.$$

### Con compresibilidad

Usando las cartas de compresibilidad, tenemos para el primer estado que:

$$P_{r,1} = \frac{P_1}{P_{cr}} = \frac{0.2 \text{ MPa}}{22.06 \text{ MPa}} = 0.0091 \quad T_{r,1} = \frac{T_1}{T_{cr}} = \frac{300 + 273.15}{647.1} = 0.886.$$

Con esto, podemos buscar en la carta de compresibilidad, teniendo que  $Z_1 = 0.9956$ . Ahora, para el segundo estado, tenemos que:

$$P_{r,2} = \frac{P_2}{P_{cr}} = \frac{0.2 \text{ MPa}}{22.06 \text{ MPa}} = 0.0091 \quad T_{r,2} = \frac{T_2}{T_{cr}} = \frac{150 + 273.15}{647.1} = 0.65.$$

Con esto, podemos buscar en la carta de compresibilidad, teniendo que  $Z_2 = 0.9897$ . Con esto, podemos calcular los volúmenes de cada estado:

$$V_1 = \frac{Z_1 m R T_1}{P_1} = \frac{0.9956 \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot 0.4615 \text{ kJ/kg K} \cdot (300 + 273.15) \text{ K}}{0.2 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 0.2633 \text{ m}^3,$$
$$V_2 = \frac{Z_2 m R T_2}{P_2} = \frac{0.9897 \cdot 0.2 \text{ kg} \cdot 0.4615 \text{ kJ/kg K} \cdot (150 + 273.15) \text{ K}}{0.2 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 0.1932 \text{ m}^3.$$

Con esto, finalmente se tiene que:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 0.2633 \text{ m}^3 - 0.1932 \text{ m}^3 = 0.0701 \text{ m}^3.$$

Lo cual corresponde a un error de:

$$\left| \frac{0.07128 - 0.0701}{0.07128} \right| \approx 1.7\%.$$

## Problema 4 (*Problema 4.63, Cengel & Boles*)

Se va a calentar un recinto de  $4 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 6 \text{ m}$  con un calentador eléctrico colocado sobre un rodapié. Se desea que ese calentador pueda elevar la temperatura del recinto de  $5$  a  $25^\circ \text{C}$  en  $11 \text{ min}$ . Suponiendo que no hay pérdidas de calor del recinto, y que la presión atmosférica sea  $100 \text{ kPa}$ , calcule la potencia requerida en el calentador. Suponga que los calores específicos son constantes a la temperatura ambiente. La constante de gas del aire es  $R = 0.287 \text{ kJ/kg K}$  y el calor específico a volumen constante es  $c_V = 0.718 \text{ kJ/kg K}$ .

## Respuesta

### Balace de energía

Notemos que es un sistema cerrado, donde no hay flujo de masa y no pérdidas de calor. Por tanto,  $V = \text{cte.}$  y  $Q_{in} = Q_{out} = 0$ . Teniendo además que no hay trabajo ejercido por el sistema, el balance de energía se reduce a:

$$\Delta U = W_{in}$$

Como además podemos modelar como gas ideal en un proceso isocórico, podemos escribir el balance de energía como:

$$\Delta U = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \implies W_{in} = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1).$$

Notando que buscamos la potencia requerida, y recordando que la potencia es trabajo por unidad de tiempo, podemos escribir la ecuación como:

$$\dot{W} \cdot \Delta t = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1)$$

### Ecuación de Estado

Ocupando primero las dimensiones del recinto, podemos calcular el volumen:

$$V = 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 120 \text{ m}^3.$$

con esto, podemos reemplazar en la ecuación de estado del gas ideal (en el primer estado) para calcular la masa:

$$m = \frac{PV_1}{RT_1} = \frac{100 \text{ kPa} \cdot 120 \text{ m}^3}{0.287 \text{ kJ/kg K} \cdot (5 + 273.15) \text{ K}} = 150.6 \text{ kg}.$$

### Potencia

Finalmente, podemos reemplazar en la ecuación de potencia:

$$\dot{W} = \frac{m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1)}{\Delta t} = \frac{150.6 \text{ kg} \cdot 0.718 \text{ kJ/kg K} \cdot (25 - 5) \text{ K}}{11 \text{ min} \cdot 60 \text{ s/min}} = 3.28 \text{ kW}.$$