Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
FIS1523 – Termodinámica
Profesor Iván Muñoz (Sección 7)
Primer Semestre del 2025

Ayudantía 1

Termodinámica

José Antonio Rojas Cancino – jrojaa@uc.cl

Problema 1 (*Problema 1.73, Cengel & Boles*)

Determine la presión que se ejerce sobre un buzo a 45 m debajo de la superficie libre del mar. Suponga una presión barométrica de 101 kPa, y una gravedad específica de 1.03 para el agua de mar.

Respuesta

Sumatoria de presiones

Primero, para ver la presión que se ejerce sobre el buzo, debemos ver **todas** las presiones que podrían afectar, las cuales serían:

$$P_{buzo} = \sum P_i = P_{mar} + P_{atm} = \rho_{mar} \cdot h_{mar} \cdot g + P_{atm}$$

Gravedad específica y reemplazo

Recordando que:

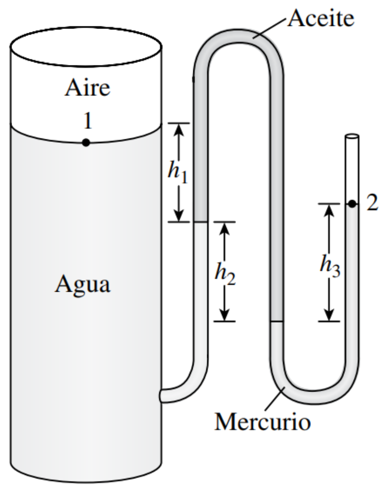
$$\text{Gravedad específica} = SG_x = \frac{\rho_x}{\rho_{H_2O}} \Longrightarrow \rho_x = SG_x \cdot \rho_{H_2O}.$$

Recordando que $\rho_{H_20} = 1000$ kg/m^3, podremos ahora relacionar la gravedad específica. Reemplazando entonces en nuestra ecuación original, y manteniéndonos consistentes con las unidades, se tiene:

$$\begin{aligned} P_{buzo} &= SG_{mar} \cdot \rho_{H_2O} \cdot h_{mar} \cdot g + P_{atm} \\ &= 1.03 \cdot 1000 \mathrm{kg/m}^3 \cdot 45\,\mathrm{m} \cdot 9.8 \mathrm{m/s}^2 + 101 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa} \approx 555.6\,\mathrm{kPa} \end{aligned}$$

Problema 2 (*Ejemplo 1.10, Cengel & Boles*)

El agua en un recipiente está a presión, mediante aire comprimido, cuya presión se mide con un manómetro de varios líquidos, como se ve en la figura. Calcule la presión manométrica del aire en el recipiente si $h_1 = 0.2$ m, $h_2 = 0.3$ m y $h_3 = 0.4$ m. Suponga que las densidades de agua, aceite y mercurio son 1 000 kg/m^3, 850 kg/m^3 y 13 600 kg/m^3, respectivamente.



Respuesta

Puntos Estratégicos

Vamos a definir los siguientes puntos estratégicos:

- **Punto A:** Aquel que está en el recipiento de agua, a una profundidad h_1 de la membrana con el aire.
- **Punto B:** Aquel que está en la membrana entre el aire y el mercurio. Al estar también a una profundidad h_1 relativa al aire (misma altura), tendrá la misma presión que el Punto A.
- **Punto C:** Ubicado en el aceite, a una altura h_2 sobre la membrana aceite-mercurio. Al estar a la misma altura que el Punto B, tienen la misma presión.
- **Punto D:** Ubicado en la membrana aceite-mercurio.
- **Punto E:** Ubicado en el mercurio, a una profundidad h_3 con respecto a la apertura al exterior. Al estar a la misma altura que el Punto D, tienen la misma presión.

Presiones e Igualdades

Ahora, podemos plantear las ecuaciones para las presiones:

$$
\begin{aligned}
&P_A = P_{aire} + P_{agua} = P_{aire} + \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g \\
&P_B = P_A = P_{aire} + \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g \\
&P_C = P_B = P_{aire} + \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g \\
&P_D = P_C + P_{aceite} = P_{aire} + \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g + \rho_{aceite} \cdot h_2 \cdot g
\end{aligned}
$$

Finalmente, para P_E, podemos verlo desde la igualdad con P_D, como también observando qué presiones le afectan por arriba:

$$P_{aire} + \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g + \rho_{aceite} \cdot h_2 \cdot g = P_D = P_E = P_{Hg} + P_{atm} = \rho_{Hg} \cdot h_3 \cdot g + P_{atm}$$

Quedándonos con los dos extremos, se tiene entonces:

$$P_{aire} + \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g + \rho_{aceite} \cdot h_2 \cdot g = \rho_{Hg} \cdot h_3 \cdot g + P_{atm}$$

Despejar P_{aire} y evaluar

Finalmente, con la igualdad anterior, podemos despejar P_{aire}, teniendo:

$$\begin{aligned} P_{aire} &= \rho_{Hg} \cdot h_3 \cdot g + P_{atm} - \rho_{H_2O} \cdot h_1 \cdot g - \rho_{aceite} \cdot h_2 \cdot g \\ &= P_{atm} + g \cdot (\rho_{Hg} \cdot h_3 - \rho_{aceite} \cdot h_2 - \rho_{H_2O} \cdot h_1) \end{aligned}$$

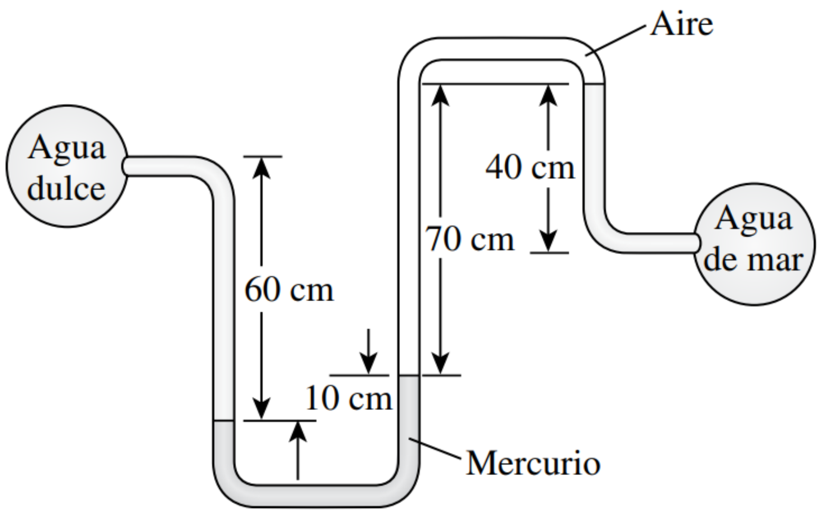
Reemplazando, dejando todo en unidades SI, y ocupando $P = 100$ kPa, se tiene:

$$\begin{aligned} P_{aire} &= 101 \cdot 10^3 + 9.8 \text{m/s}^2 \cdot \left(13600 \text{kg/m}^3 \cdot 0.4\,\text{m} - 850 \text{kg/m}^3 \cdot 0.3\,\text{m} - 1000 \text{kg/m}^3 \cdot 0.2\,\text{m}\right) \\ &= 149853\,\text{Pa} = 149.853\,\text{kPa} \end{aligned}$$

Por lo que la presión manométrica del aire es 149.853 kPa .

Problema 3 (P1 I1 2023-1)

Agua dulce y de mar fluyen en tuberías horizontales paralelas conectadas entre sí mediante un manómetro de tubo en doble U, tal como se muestra en la figura. Determine la diferencia de presión entre las dos tuberías, considerando que: la densidad de agua de mar es $\rho_m = 1035$ kg/m^3, del agua dulce es $\rho_d = 1000$ kg/m^3, del mercurio es $\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3, y del aire es $\rho_a = 1.2$ kg/m^3. Se puede ignorar la comuna del aire en el análisis?



Respuesta

Puntos Estratégicos

Vamos a definir los siguientes puntos estratégicos:

- **Punto A:** Aquel que está en la interfaz agua dulce-mercurio.
- **Punto B:** Aquel que está en el mercurio 10 cm por debajo de la interfaz con el aire, tal que su presión es igual al Punto A.
- **Punto C:** Ubicado en la interfaz mercurio-aire.

- **Punto D:** Ubicado en el aire, 70 cm por sobre la interfaz mercurio-aire.
- **Punto E:** Ubicado en la interfaz aire-agua de mar.
- **Punto F:** Ubicado en la entrada del agua de mar.

Vamos a llamar P_d la presión del agua dulce, P_m la presión del agua de mar, y P_{aire} la presión que está en la sección transversal.

Presiones e Igualdades

Ahora, podemos plantear las ecuaciones para las presiones:

$$\begin{aligned}
&P_A = P_d + \rho_d \cdot g \cdot 0.6\\
&P_B = P_A = P_d + \rho_d \cdot g \cdot 0.6 = P_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot 0.1\\
&P_C = P_{aire} + \rho_a \cdot g \cdot 0.7\\
&P_D = P_{aire}\\
&P_E = P_D = P_{aire}\\
&P_F = P_E + \rho_m \cdot g \cdot 0.4 = P_{aire} + \rho_m \cdot g \cdot 0.4 = P_m
\end{aligned}$$

Primero, reemplazamos nos preocupamos de la siguiente ecuación:

$$P_d + \rho_d \cdot g \cdot 0.6 = P_C + \rho_{Hg} \cdot g \cdot 0.1,$$

donde reemplazamos el valor de P_C, teniendo:

$$P_d + \rho_d \cdot g \cdot 0.6 = P_{aire} + \rho_a \cdot g \cdot 0.7 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot 0.1.$$

De las ecuaciones de P_F podemos despejar P_{aire}:

$$P_{aire} + \rho_m \cdot g \cdot 0.4 = P_m \implies P_{aire} = P_m - \rho_m \cdot g \cdot 0.4,$$

la cual reemplazamos en la ecuación anterior:

$$P_d + \rho_d \cdot g \cdot 0.6 = P_m - \rho_m \cdot g \cdot 0.4 + \rho_a \cdot g \cdot 0.7 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot 0.1.$$

Finalmente, buscamos la diferencia, por lo que dejamos a un lado la diferencia:

$$\begin{aligned}
P_d - P_m &= -\rho_m \cdot g \cdot 0.4 + \rho_a \cdot g \cdot 0.7 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot 0.1 - \rho_d \cdot g \cdot 0.6.\\
&= g \cdot (0.7 \cdot \rho_a + 0.1 \cdot \rho_{Hg} - 0.4 \cdot \rho_m - 0.6 \cdot \rho_d)
\end{aligned}$$

Evaluando con y sin el aire

Para determinar la diferencia, vamos a evaluar primero con y después sin el aire, tal que:

$$\begin{aligned}
P_d - P_m &= 9.8\text{m/s}^2 \cdot \big(0.7\,\text{m} \cdot 1.2\text{kg/m}^3 + 0.1\,\text{m} \cdot 13600\text{kg/m}^3 - 0.4\,\text{m} \cdot 1035\text{kg/m}^3\\
&\qquad -0.6\,\text{m} \cdot 1000\text{kg/m}^3\big)\\
&= 33999.032\,\text{Pa} \approx 34\,\text{kPa}
\end{aligned}$$

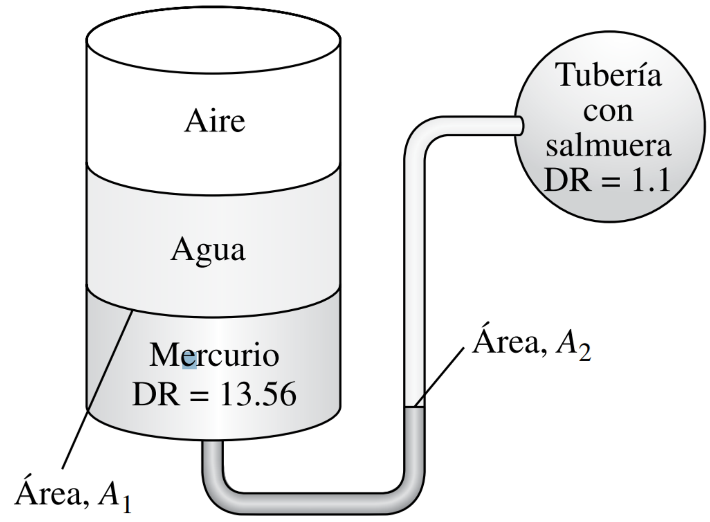
Si es que ignoramos la columna de aire, se tiene:

$$\begin{aligned}
P_d - P_m &= 9.8\text{m/s}^2 \cdot \big(0.1\,\text{m} \cdot 13600\text{kg/m}^3 - 0.4\,\text{m} \cdot 1035\text{kg/m}^3 - 0.6\,\text{m} \cdot 1000\text{kg/m}^3\big)\\
&= 3390.8\,\text{Pa} \approx 34\,\text{kPa}
\end{aligned}$$

Al tener un error tan pequeño, se puede despreciar la columna de aire.

Problema 4 (*Problema 1.81, Cengel & Boles*)

Examine el sistema de la figura. Si un cambio de 0.7 kPa en la presión del aire causa que baje 5mm la interfase entre salmuera y mercurio, en la columna derecha, mientras que la presión en el tubo de salmuera permanece constante, determine la relación A_2/A_1.



Respuesta

Para este problema, pongámonos primero en una situación de equilibrio. Denotemos el **Punto A** como aquel que está en la interfaz mercurio-salmuera. También denotemos el **Punto B** como aquel que está a la misma altura que el Punto A, en el cilindro más grande. Entonces, se debe cumplir que;

$$P_B = P_A$$

$$P_{aire} + P_{agua} + P_{Hg^*} = P_{salmuera},$$

donde P_{Hg^*} es la presión de mercurio que está justo por encima del Punto B.
Ahora, pongámonos en la situación de cambio del aire (que la presión baje). Notemos que los puntos van a cambiar su posición, por lo que los nuevos puntos serán **Punto C** como aquel que está en la interfaz mercurio-salmuera, y **Punto D** el que está a su misma altura. Notemos que, por este cambio, las presiones de los puntos serán tal que:

$$P_C = P_A + \Delta P_{Salmuera} = P_A + \rho_{salmuera} \cdot g \cdot h_s$$

$$P_D = P_B - \Delta P_{aire} + \Delta P_{Hg^*}$$

Tal como definimos estos nuevos puntos, se mantiene la igualdad de presiones, por tanto:

$$P_C = P_D$$

$$P_A + \rho_{salmuera} \cdot g \cdot h_s = P_B - \Delta P_{aire} + \Delta P_{Hg^*}$$

como $P_A = P_B$, podemos cancelarlo, dejándonos:

$$\rho_{salmuera} \cdot g \cdot h_s = -\Delta P_{aire} + \Delta P_{Hg^*}.$$

Sabemos todo menos ΔP_{Hg^*}, lo cual deberíamos poder conseguir a partir de $\rho_{Hg} \cdot g \cdot h^*$, con $h*$ la altura que varía. Sin embargo, como todo el volumen se movió, se va a tener que el volumen que bajó la salmuera es igual al volumen de mercurio que desplazó, es decir:

$$h^* \times A_1 = h_s \times A_2.$$

De aquí, podemos obtener h^*, tal que:

$$h^* = h_s \cdot \frac{A_2}{A_1}.$$

Reemplazando ahora ésto en ΔP_{Hg^*}, y su fórmula en la ecuación original, se tiene:

$$\rho_{salmuera} \cdot g \cdot h_s = -\Delta P_{aire} + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_s \cdot \frac{A_2}{A_1}.$$

Despejando ahora por la fracción que se nos pide, nos queda:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_{salmuera} \cdot g \cdot h_s + \Delta P_{aire}}{\rho_{Hg} \cdot g \cdot h_s}.$$

Sin embargo, lo último que nos faltan son las densidades. Teniendo las gravedades específicas, y recordando que

$$DR_x = \frac{\rho_x}{\rho_{H_2O}} \Longrightarrow \rho_x = DR_x \cdot \rho_{H_2O},$$

podemos finalmente reemplazar esto para $\rho_{salmuera}$ y ρ_{Hg} y encontrar una ecuación completa con información qeu tenemos:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{DR_{salmuera} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_s + \Delta P_{aire}}{DR_{Hg} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_s}.$$