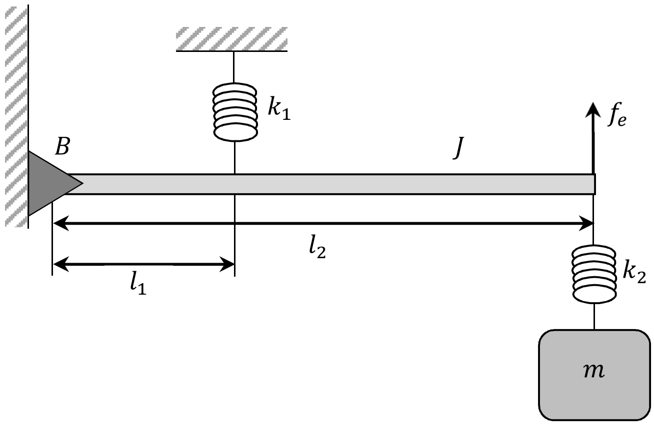
MÉTODOS NUMÉRICOS
Trabajo Práctico de Integración. PL 2020

La siguiente figura, esquematiza un *sistema mecánico de equilibrio gravitacional*. El equilibrio del sistema se logra aplicando al mismo una fuerza f_e contraria a la aceleración de la gravedad. La palanca de movimiento rotacional y momento de inercia J, tiene un rozamiento viscoso B en su eje de rotación, sosteniendo a la masa m a través del resorte de constante elástica k_2. Las variables de salida en este sistema son la posición vertical de la masa $y(t)$, su velocidad $v(t)$, la posición angular de la palanca $\theta(t)$ y su velocidad angular $\omega(t)$.



El *modelo de estados* del sistema de equilibrio gravitatorio, considera como variables de estado a las fuerzas netas aplicadas a los resortes, $f_{k_1}(t)$ y $f_{k_2}(t)$, la velocidad de la masa m, $v(t)$ y la velocidad angular de la palanca de rotación J, $\omega(t)$. Este sistema, queda definido por su *matriz de estado* A, *matriz de entradas* B, *matriz de salida* C y *matriz de transmisión directa* D, como se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{k_2}(t) \\ \dot{\omega}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{f}_{k_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 l_2 & -k_2 & 0 \\ -\frac{l_2}{J} & -\frac{B}{J} & 0 & -\frac{l_1}{J} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k_2}(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \\ f_{k_1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_2}{J} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e(t) \\ g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ y(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_1 l_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_2} & 0 & 0 & \frac{l_2}{k_1 l_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k_2}(t) \\ \omega(t) \\ v(t) \\ f_{k_1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e \\ g \end{bmatrix}$$

Siendo:

$l_1 = 3(\mathrm{cm})$;	longitud parcial de la palanca
$l_2 = 17(\mathrm{cm})$;	longitud total de la palanca
$k_1 = 30250(\mathrm{N/m})$;	constante elástica del resorte 1
$k_2 = 937(\mathrm{N/m})$;	constante elástica del resorte 2
$m = 50(\mathrm{kg})$;	masa en movimiento vertical
$J = 1(\mathrm{kgm^2})$;	momento de inercia de la palanca
$B = 15(\mathrm{Nms})$;	rozamiento viscoso del eje de la palanca
$g = 9{,}81(\mathrm{m/s^2})$;	aceleración de la gravedad
$f_e = F_0 u(t)$	fuerza de contención del sistema
$F_0 = 490(\mathrm{N})$;	magnitud de la fuerza de contención del sistema

Se pide:

Ejercicio#1

Resuelva el sistema de *ecuaciones de estado* y *salida* del sistema de equilibrio gravitatorio, mediante el método de *Runge–Kutta*. El tiempo de análisis es $[T_0, T_F] = [0, 5\mathrm{s}]$. La resolución del análisis (intervalo temporal de análisis numérico), es de $\Delta t = 10\ \mathrm{ms}$. Grafique todas las variables de salida del sistema.
Repita nuevamente el análisis, si se varía ahora la longitud mayor de la palanca y el segundo resorte, es decir, $l_2 = 50(\mathrm{cm})$ y $k_2 = 9370(\mathrm{N/m})$.

Ejercicio#2

Teniendo en cuenta la posición vertical de la masa $y(t)$, como así también la posición angular de la palanca $\theta(t)$, se pide calcular en forma numérica sus respectivas derivadas temporales $y'(t)$ y $\theta'(t)$ mediante la extrapolación de Richardson. Grafique los resultados obtenidos junto a las velocidades traslacionales y angulares calculadas en el ***Ejercicio#1***, $v(t)$ y $\omega(t)$ respectivamente,

Ejercicio#3

Se desea realizar una comparación estadística entre las velocidades lineales y angulares del sistema gravitacional calculadas en el ***Ejercicio#1*** y el ***Ejercicio#2***. Para ello, se computarán ajustes lineales entre las velocidades, es decir:

- Ajuste lineal entre $v(t)$ e $y'(t)$, calculando pendiente, ordenada al origen y coeficiente de correlación A_1, B_1 y ρ_1 respectivamente.
- Ajuste lineal entre $\omega(t)$ y $\theta'(t)$, calculando pendiente, ordenada al origen y coeficiente de correlación A_2, B_2 y ρ_2 respectivamente.

Grafique las dichas velocidades en un gráfico xy junto a las rectas de ajuste lineal. Realice un cálculo de residuos en su error cuadrático medio, es decir:

$$E_1 = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{v=1}^{N}[v(t) - y'(t)]^2} \text{ y } E_2 = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{v=1}^{N}[\omega(t) - \theta'(t)]^2}$$

Muestre estos errores cuadráticos medios junto a los gráficos de correlación lineal.

Ejercicio#4

La performance de un sistema mecánico, es función directa de su gasto energético. Una manera simple y proporcional de evaluar este gasto, es calculando el área de las velocidades del sistema. Calcule el área de las velocidades traslacional y rotacional $v(t)$ y $\omega(t)$, mediante *Regla de Simpson Compuesta*. Indique el resultado de tales áreas junto al gráfico de las mismas. Repita este análisis calculando el área bajo las curvas de las fuerzas en los resortes, es decir:

$$\int_{T_0}^{T_F} f_{k_1}(t)dt \ \ y \int_{T_0}^{T_F} f_{k_2}(t)dt$$

Ejercicio#5

Calcule los tiempos de cruce por cero de las velocidades traslacional y rotacional, $v(t)$ y $\omega(t)$ respectivamente. Almacene dichos valores en vectores. Calcule valor medio y desvío estándar de los mismos, es decir:

$$\bar{T}_{CC} = \frac{1}{M}\sum_{v=1}^{M} T_{CC} \text{ y } \sigma_{T_{CC}} = \sqrt{\frac{\sum_{v=1}^{M}[T_{CC} - \bar{T}_{CC}]^2}{M-1}}$$

Ejercicio#6

La técnica de *Submuestreo*, consiste en tomar las muestras *e-mésimas* de una señal digital, es decir, reduciendo su frecuencia de muestreo original M veces. En consecuencia:

$$v[n] \equiv v[nT_{S1}] \rightarrow v_S[n] = v[nM] \equiv v[nT_{S2}], con\ T_{S2} = MT_{S1}\ y\ T_{S1} = 1/f_S$$

Con esta técnica, se reduce en un factor de M veces, el almacenamiento en memoria de una señal digital. Sin embargo, esto trae aparejado la pérdida de resolución de la señal temporal y la posibilidad de solapamiento en los espectros frecuenciales si no se cumple el *teorema del muestro de Nyquist*.
Realice un *submuestreo* de las velocidades traslacional y rotacional $v(t)$ y $\omega(t)$ respectivamente, con un factor $M = 10$. Grafique estos resultados junto a las velocidades originales, observando esta reducción en la resolución temporal de las señales submuestreadas $v_S[n]$ y $\omega_S[n]$.

Ejercicio#7

Teniendo en cuenta las señales de *velocidad traslacional y rotacional submuestreadas*, $v_S[n]$ y $\omega_S[n]$ respectivamente, se pide encontrar una *interpolación* por *Spline Cúbicas* de las mismas, que se denominarán $v_{S_{Int}}[n]$ y $\omega_{S_{Int}}[n]$. Teniendo los polinomios interpoladores de ambas señales, se pide evaluar los mismos en los intervalos de tiempo original del sistema gravitatorio, es decir, con $\Delta t = 10$ ms. De esta forma, se obtendrán las señales interpoladas de velocidad traslacional y rotacional de la misma longitud temporal de las señales originales $v(t)$ y $\omega(t)$. Estas señales se denominarán $v_{SC_{Int}}(t)$ y $\omega_{SC_{Int}}(t)$.
Realice gráficos comparativos de las velocidades traslacionales original e interpolada por spline cúbico $v(t)$ y $v_{SC_{Int}}(t)$ respectivamente, así también como las velocidades angulares $\omega(t)$ y $\omega_{SC_{Int}}(t)$.

Ejercicio#8

Se desea realizar la *comparación estadística* del *submuestreo* e *interpolación por Spline Cúbicas* de señales temporales. Realice para ello:

- Ajuste lineal entre $v(t)$ e $v_{SC_{Int}}(t)$, calculando pendiente, ordenada al origen y coeficiente de correlación A_1, B_1 y ρ_1 respectivamente.
- Ajuste lineal entre $\omega(t)$ e $\omega_{SC_{Int}}(t)$, calculando pendiente, ordenada al origen y coeficiente de correlación A_2, B_2 y ρ_2 respectivamente.

Grafique las dichas velocidades en un gráfico xy junto a las rectas de ajuste lineal. Realice un cálculo de residuos en su error cuadrático medio, es decir:

$$E_1 = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{v=1}^{N}\left[v(t) - v_{SC_{Int}}(t)\right]^2}\ \text{y}\ E_2 = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{v=1}^{N}\left[\omega(t) - \omega_{SC_{Int}}(t)\right]^2}$$

Muestre estos errores cuadráticos medios junto a los gráficos de correlación lineal.