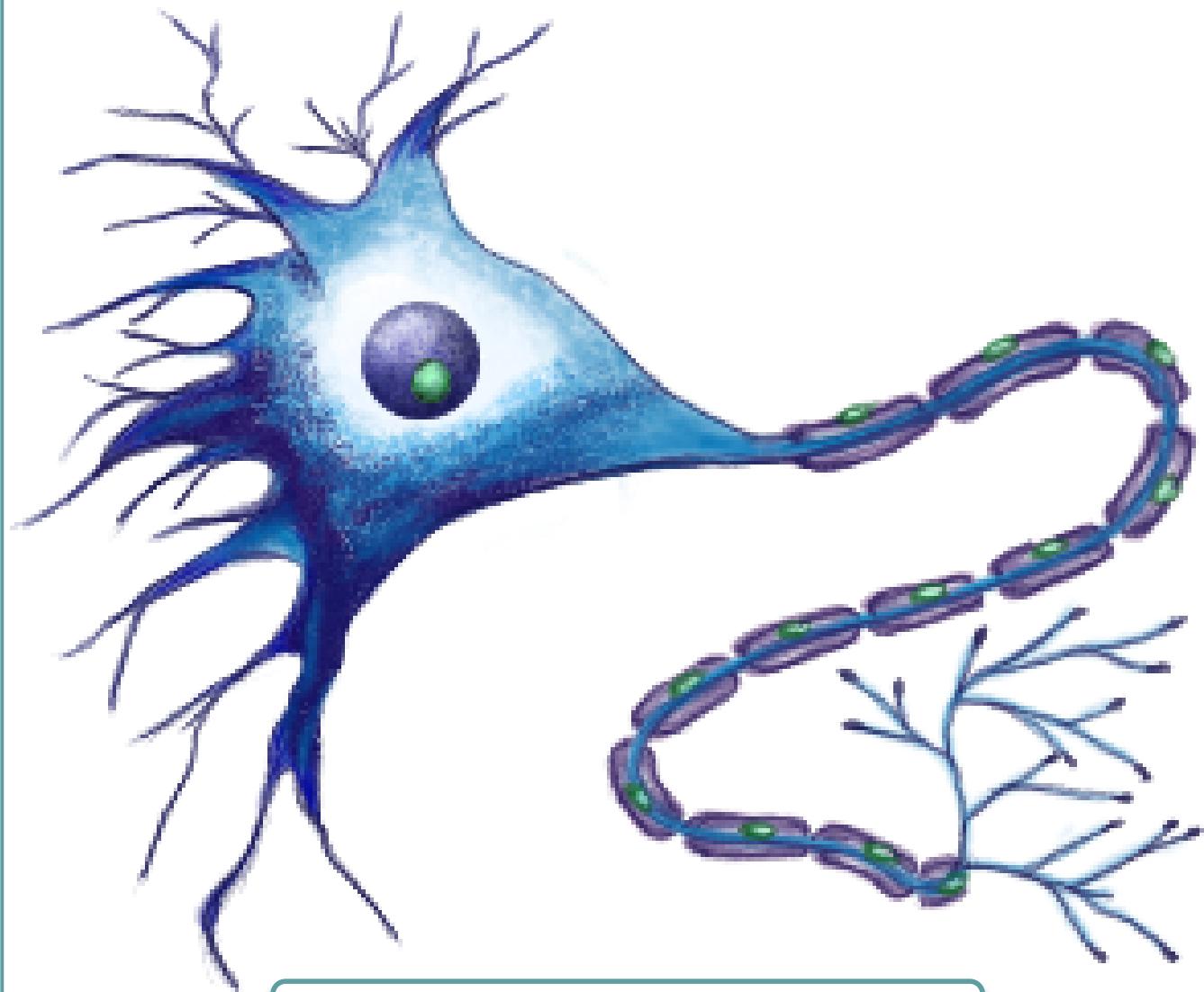


# Redes Neuronales

*Notas de clase*

Karla Fernanda Jiménez Gutiérrez  
Verónica Esther Arriola Ríos



FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM



# Índice general

## Índice general

<b>I Antecedentes</b>	<b>2</b>
<b>1 Neurona biológica</b>	<b>3</b>
1.1 Neurociencias computacionales . . . . .	3
1.2 Sistema Nervioso . . . . .	4
1.2.1 Cerebro . . . . .	5
1.2.2 Zonas funcionales . . . . .	6
1.3 Neurona biológica . . . . .	9
1.3.1 La neurona . . . . .	9
1.3.2 Elementos de las neuronas en la transmisión de señales . . . . .	10
1.3.3 Sinapsis . . . . .	11
1.3.4 Señal eléctrica . . . . .	12
<b>2 Modelo de Hodgkin-Huxley</b>	<b>15</b>
2.1 Introducción . . . . .	15
2.2 Membrana y canal . . . . .	17
2.3 Potenciales de Nerst o de reposo . . . . .	21
2.4 Modelo de la membrana como bicapa de lípidos . . . . .	21
2.4.1 Las conductancias iónicas . . . . .	25
2.5 Modelo de las compuertas iónicas controladas por voltaje . . . . .	27
2.6 Dinámica del voltaje durante un disparo . . . . .	30
2.7 Simulación usando el método de Euler . . . . .	34
2.8 Información codificada en las dendritas . . . . .	36
<b>3 Aprendizaje de máquina</b>	<b>40</b>
3.1 Introducción . . . . .	40
3.2 Espacio de Hipótesis . . . . .	42
3.3 Clasificación de los conjuntos de datos . . . . .	43
3.3.1 Tipos de aprendizaje . . . . .	44

ÍNDICE GENERAL

---

<b>II Redes dirigidas acíclicas</b>	<b>46</b>
<b>4 Perceptrón simple</b>	<b>47</b>
4.1 Perceptrón . . . . .	47
4.2 Compuertas lógicas con neuronas . . . . .	50
4.3 Funciones de activación . . . . .	52
4.4 Funciones de error . . . . .	52
4.5 Medidas de rendimiento . . . . .	55
<b>5 Perceptrón multicapa</b>	<b>61</b>
5.1 Intro . . . . .	61
5.2 XOR . . . . .	61
5.3 Propagación hacia adelante manual . . . . .	61
5.4 Propagación hacia adelante vectorizada (con matrices) . . . . .	61
5.5 Interpretación matemática del mapeo no lineal . . . . .	61
5.6 Propagación hacia adelante para el perceptrón multicapa . . . . .	61
<b>6 Entrenamiento por retropropagación</b>	<b>62</b>
6.1 Esquema general entrenamiento . . . . .	62
6.2 Función de error: Entropía cruzada . . . . .	62
6.3 Derivada de la función logística . . . . .	62
6.4 Entrenamiento en la última capa . . . . .	62
6.5 Parcial con respecto a los pesos en la última capa . . . . .	62
6.6 Vectorización . . . . .	62
<b>7 Optimización del entrenamiento</b>	<b>63</b>
7.1 Problemas en redes profundas . . . . .	63
7.2 Gradiente desvaneciente (o que explota) . . . . .	63
7.3 Estilos de entrenamiento . . . . .	63
7.4 Normalización y normalización por lotes . . . . .	63
7.5 Regularización . . . . .	63
<b>8 Caso de análisis e interpretación</b>	<b>64</b>
8.1 Red Hinton árbol familiar con numpy (entrenamiento) . . . . .	64
8.2 Red Hinton árbol familiar con pytorch . . . . .	64
<b>9 Entrenamiento con genéticos</b>	<b>65</b>
9.1 Algoritmos genéticos . . . . .	65
9.2 Neuroevolución . . . . .	65
9.2.1 Antecedentes: Aprendizaje por refuerzo en videojuegos . . . . .	65
9.2.2 Arquitectura para estimar la función de recompensa . . . . .	65
9.2.3 Entrenamiento . . . . .	65
<b>10 Mapeos autoorganizados</b>	<b>66</b>
10.1 Introducción . . . . .	66

10.2 Aprendizaje no supervisado . . . . .	66
10.3 Mapeos autoo-organizados . . . . .	66
10.4 Kohonen . . . . .	66
<b>11 Redes Neuronales Convolucionales</b>	<b>67</b>
11.1 Convolución . . . . .	67
11.2 Redes Convolucionales . . . . .	67
11.3 Softmax . . . . .	67
11.4 MNIST . . . . .	67
<b>III Redes con ciclos</b>	<b>68</b>
<b>12 Redes Neuronales Recurrentes</b>	<b>69</b>
12.1 Derivadas ordenadas . . . . .	69
12.2 Retropropagación en el tiempo . . . . .	69
12.3 Sistemas dinámicos y despliegue del grafo . . . . .	69
12.4 Arquitectura recurrente universal . . . . .	69
12.5 Función de error . . . . .	69
12.6 Forzamiento del profesor . . . . .	69
<b>13 Atención</b>	<b>70</b>
<b>14 LSTM</b>	<b>71</b>
<b>15 GRU</b>	<b>72</b>
<b>16 Casos de análisis: etiquetado de palabras y conjugación de verbos</b>	<b>73</b>
<b>IV Redes no dirigidas</b>	<b>74</b>
<b>17 Redes de hopfield</b>	<b>75</b>
17.1 Entrenamiento . . . . .	75
<b>18 Máquinas de Boltzman</b>	<b>76</b>
18.1 Entrenamiento . . . . .	76
18.1.1 Partículas y partículas de fantasía . . . . .	76
18.1.2 Máquinas de Boltzman Restringidas . . . . .	76
<b>19 Redes adversarias</b>	<b>77</b>
19.1 GANs . . . . .	77
<b>A Ecuaciones diferenciales</b>	<b>78</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



# Etc

A lo largo del texto se utilizará la siguiente notación para diversos elementos:

Conjuntos	C
Vectores	x
Matrices	M
Unidades	cm

# **PARTE I**

## **Antecedentes**

# 1 | Neurona biológica

## Neurociencias computacionales

El campo conocido como **neurociencias computacionales**(Trappenberg 2010) es el que se dedica explícitamente al estudio/modelado de los sistemas biológicos con ayuda de varios campos de estudio. Se interesa notablemente en descripciones y modelos funcionales biológicamente realistas de neuronas y sistemas neuronales.

Los campos de estudio de los cuales nos ayudamos son:

- **Ciencias cognitivas** dedicadas a tratar directamente con los humanos, de éstas tomamos los conceptos de aprendizaje.
- **Biofísica** por el estudio de las propiedades físicas en de los sistemas biológicos.
- **Neurociencias tradicionales** con modelos matemáticos.
- **Ciencias de la computación** modelar e implementar los modelos dados, por las áreas aquí listadas. Simulaciones computacionales.
- **Ingeniería eléctrica** diseño de hardware específico y eficiente para tomar los pulsos y medidas exactas.

Las neurociencias computacionales, estudian modelos del sistema nervioso y clasifican estos modelos en tres tipos, recordemos el método científico:

1. **Modelos descriptivos**, Describen. Por ejemplo describe el comportamiento de los ratones a ciertas sustancias. La **comparación**, lo que estaba pasando antes de la sustancia, con la sustancia y después.
2. **Modelos mecanistas**, Mecánicamente. El **cómo** paso el evento o la acción. Siguiendo con el ejemplo. El ratón se cayo y se levanto, ¿Cómo? Doblo sus articulaciones, tomo impulso con sus musculos, roto su cuerpo, hasta reincorporarse totalmente.

## 1. Neurona biológica

3. **Modelos interpretativos**, Se interpreta. ¿Por qué hizo los movimientos mecánicos?. Siguiendo con el ejemplo. ¿Por qué el ratón se reincorporó? Porqué el ratón quiere regresar a su estado anterior antes de la perturbación por la sustancia. ¿Será verdad? Es lo que se interpreta, no la verdad absoluta. Se tiene que buscar intencionalidad, razonamiento de más alto nivel.

Los **objetivos del modelado** en neurociencias de nuestro interés en el curso son; Las corrientes, las proteínas, las oscilaciones de las redes completa, la arquitectura topográfica y de columnas, el aprendizaje y la memoria. Por lo menos para el curso de Redes Neuronales en la Universidad Nacional Autónoma de México con la doctora Verónica Esther Arriola Ríos.

Para más información en Neurociencias ([Kandel 2012](#)), siempre está el interés propio.

Las redes neuronales artificiales (RNA), están inspiradas en las redes neuronales biológicas, tales como las de los animales ([Francisco López-Muñoz 2006](#)), en un primer momento. Hasta llegar al ser humano con el sistema nervioso y nuestras neuronas. ([Waldeyer-Hartz 1891](#)).

Los modelos de redes neuronales que tomaremos, son simples. Distan mucho de los sistemas naturales y aun así dan solución. Lo que nos interesa es que resuelvan los problemas inmediatos y de corto plazo. Si el cerebro humano funciona, la imitación debe darnos algunos resultados, idea que ha funcionado para procesar información y dar solución con modelos diseñados.

Los problemas más notorios a resolver son:

- Problemas de visión por computadora.
- Procesamiento del lenguaje natural.

## Sistema Nervioso

El sistema nervioso se estudia principalmente en dos partes, sistema nervioso periférico (SNP) y sistema nervioso central (SNC). El SNC es donde nos enfocaremos, este se compone principalmente por la medula espinal y el encéfalo que son los centros principales donde ocurre la correlación e integración de la información nerviosa. Es en el encéfalo donde se encuentra principalmente el cerebro, cerebelo y el tallo encefálico. ([Snell 2001](#))

Un nervio es una estructura conductora de impulsos nerviosos. Esta compuesto por una colección de axones los cuales son prolongaciones largas y delgadas de las células nerviosas agrupados en fibras y rodeados de vasos sanguíneos. Se origina desde la médula espinal o el encéfalo.

Los nervios en conjunto son la estructura organizada por tejido conectivo en el sistema nervioso, encargada de transmitir información entre diferentes partes del cuerpo del SNP y del SNC, permitiendo así el control y coordinación eficientes de las actividades corporales. Se extienden desde el cráneo y la médula espinal para abarcar todo el cuerpo humano. (Kandel 2012)

Los nervios del SNP se pueden clasificar en tres categorías:

- **Nervios motores:** están asociados con las salidas y la ejecución de acciones, conectándose y ejerciendo su influencia sobre los músculos.
- **Nervios sensitivos:** estos reciben señales de entrada, como en ojos, oídos y piel. Son responsables de transmitir información sensorial hacia el sistema nervioso.
- **Nervios mixtos:** estos tienen tanto fibras sensitivas como motoras. Es decir, cumplen funciones tanto de entrada como de salida de información.

El SNC está compuesto por gran cantidad de células nerviosas excitables y sus prolongaciones, denominadas neuronas. (Snell 2001)

## Cerebro

Desde la parte tangible del cerebro hasta la intangible del pensamiento, está directamente relacionada con la forma que funciona nuestro pensamiento y reacciones motoras.

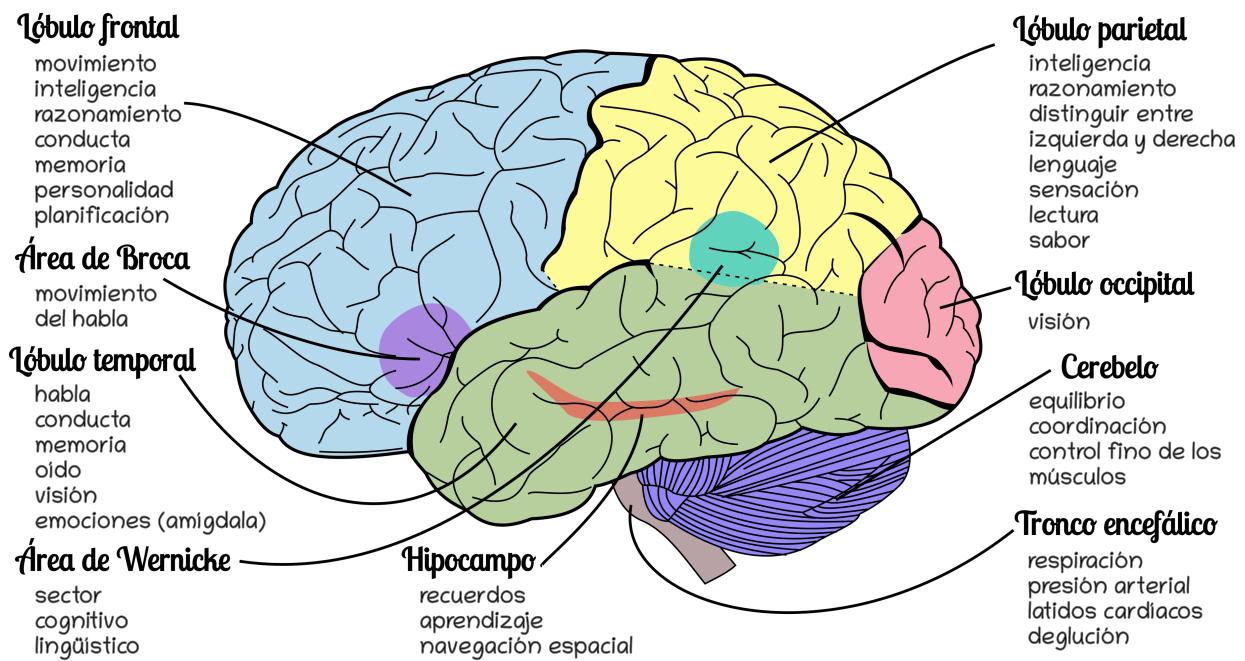
El cerebro, por su gran tamaño, da lugar a un mejor registro de su actividad. Los muchos registros realizados muestran que se incrementa la circulación de la sangre en el área del cerebro con mayor actividad neuronal. Se tienen identificadas regiones que se activan ante cierto estímulo. (John G. Nicholls 2011)

Se detecta cuánta sangre se está bombeando en diferentes regiones del cerebro dependiendo de los estímulos que se le presentan a una persona; o si alguna persona tiene un padecimiento, se toman escaneos para ver qué regiones del cerebro están funcionando y cuáles presentan lesiones. A partir de las lesiones y de la identificación de la actividad que ya no se puede realizar de forma normal, se infiere qué región era responsable de esa actividad que ahora está dañada. (Doidge 2007)

En la figura Figura 1.1 se puede observar las regiones del cerebro que han sido identificadas y sus respectivas funciones asociadas.

Para obtener más detalle de los estudios de la actividad del cerebro, ver el documental "The Brain with David Eagleman".

## 1. Neurona biológica



**Figura 1.1** Representación de las regiones del cerebro. Adaptado de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brain\\_diagram\\_pl.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brain_diagram_pl.svg). Redibujado por Verónica E. Arriola Ríos., CC-BY-SA 3.0

## Zonas funcionales

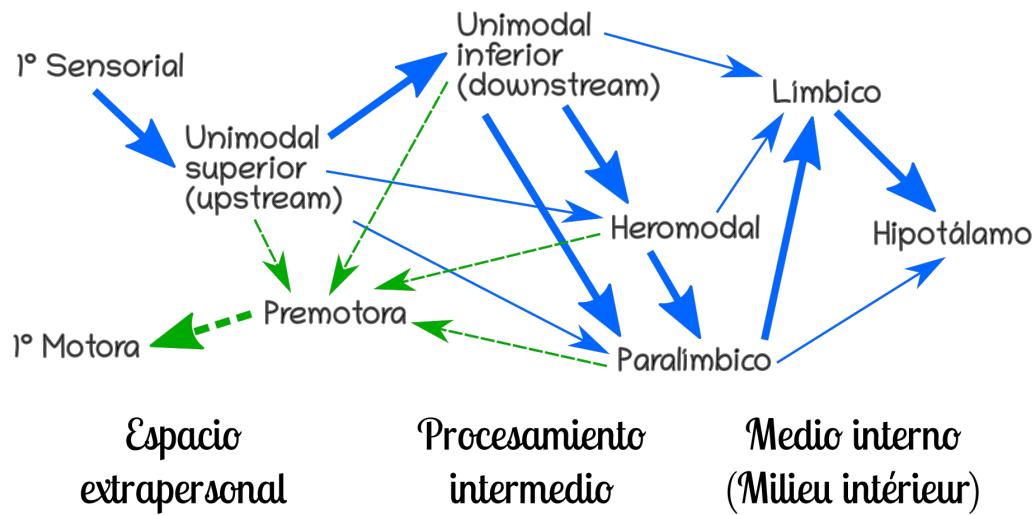
En el cerebro, las diversas zonas identificadas con funciones específicas, están conectadas, por una ruta que se conoce como "la ruta desde la sensación hasta la cognición". Esta ruta está representada por el diagrama de la figura Figura 1.2. (M Marsel Mesulam 1998a)

La ruta es una abstracción que registra la manera en que una señal recorre las zonas funcionales del cerebro. La Figura 1.2, describe un gradiente sensorial que transmite información desde las áreas sensoriales primarias hasta las áreas límbicas del cerebro.

El punto de partida de la ruta es la zona sensorial, que vamos a considerar como **la entrada**. El cerebro está recibiendo información en el momento que existe una señal que viene del mundo exterior.

Su primera conexión es hacia la capa unimodal superior, que vamos a considerar como **la primera capa**, donde se procesa la información más básica de la señal de un solo sentido, tales como el color, las formas o los tonos de sonido.

Luego están las capas intermedias unimodal inferior, heteromodal, parálímbico, límbico, donde se dará un procesamiento intermedio; se juntarán varias características interpretadas por la primera capa. Conforme avance la señal a las siguientes capas, las neuronas notarán características más complejas. Tales como las identificación de cara, objetos y



**Figura 1.2** Diagrama de la arquitectura del cerebro a nivel funcional. Enfocado en sentido de la visión o la audición. (M. Marsel Mesulam 1998b). Redibujado por Verónica E. Arriola Ríos.

más.

Una vez que llegue la señal con la codificación de todas las capas por las que pasó al hipotálamo, la zona que funciona como coordinador principal de los sistemas homeostático, autónomo y aspectos hormonales del medio interno, éste se encarga de coordinar las respuestas de regreso tales como regulación de la emoción, motivación, memoria y autonomía. Hacia las capas paralímbicas o límbicas estás a su vez mandarán su respuesta ya sea hacia la salida motora o a una de las capas de procesamiento intermedio.

M. Marsel Mesulam explica que en este contexto, las áreas unimodales y heteromodales están más involucradas en la elaboración perceptual y la planificación motora, mientras que las áreas paralímbicas desempeñan un papel crítico en canalizar la emoción y la motivación hacia objetivos intrapsíquicos y extrapersonales relevantes para el comportamiento. Este mapa funcional del córtex cerebral proporciona la plantilla básica para vincular la sensación con la cognición en el cerebro de primates.

En el caso del diagrama Figura 1.2 las flechas rectas representan las conexiones neuronales sensoriales de los sentidos; auditivo y visual. Las flechas gruesas indican más conexiones entre las zonas que las flechas delgadas. Las flechas de discontinuas indican conexiones hacia la salida motora. Las flechas en color verde indican que la señal tuvo respuesta, hacia el área motora es decir hubo una respuesta hacia la capa premotora, que tendrá una salida hacia los nervios motores, el recorrido de la señal pudo ser corto o largo es decir una reacción motora inmediata de la señal o alguna regulación paralímbica hacia la emoción. Las flechas de color azul indican que la señal tuvo un recorrido largo bien a las áreas intermedias o hasta el hipotálamo que pudo coordinar una o varias respuestas.

Cabe destacar que, si bien no es imprescindible contar con un conocimiento profundo

## 1. Neurona biológica

del cerebro para trabajar con Redes Neuronales Artificiales (RNA), poseer una comprensión básica del sistema nervioso y las zonas funcionales del cerebro es esencial para el desarrollo de una RNA por varias razones:

- **Inspiración biológica:**
  - ★ Nuestro sistema nervioso ha evolucionado para procesar información de manera eficiente, comprender sus componentes proporciona ideas valiosas para diseñar algoritmos y arquitectura de redes neuronales.
- **Arquitectura y función:**
  - ★ Comprender someramente la arquitectura y funciones del sistema nervioso en nuestro cuerpo, nos ayuda en la creación de modelos de redes artificiales que pueden realizar tareas específicas, como reconocimiento de patrones, procesamiento de lenguaje natural, y más.
- **Aprendizaje y Adaptación:**
  - ★ El sistema nervioso es capaz de aprender y adaptarse a través de experiencias. Conocer los mecanismos de aprendizaje en el cerebro puede inspirar algoritmos de aprendizaje profundo que permitan a las RNA mejorar su rendimiento con el tiempo.
- **Optimización de Rendimiento:**
  - ★ El sistema nervioso está altamente interconectado, permite la comunicación rápida y eficaz entre las células nerviosas. Esto nos guía en el diseño de conexiones eficientes en las RNA para optimizar el rendimiento del paso de información.
- **Robustez y tolerancia a fallos:**
  - ★ El sistema nervioso es robusto y capaz de funcionar en condiciones adversas. La observación cuidadosa de esta capacidad, nos sugiere estrategias para mejorar la robustez y la tolerancia a fallos en las RNA.
- **Ética y Seguridad:**
  - ★ Al notar la gran complejidad de nuestro sistema nervioso, notamos también nuestros límites de imitación y semejanza que realmente se puede lograr. La responsabilidad de crear RNA conlleva sus posibles riesgos y dilemas/desafíos éticos.

Esta atención especial a las zonas funcionales del cerebro se hace por la necesidad de entender los conceptos fundamentales de entradas, capas, salidas y conexiones, los cuales son la base para comprender conceptos más avanzados como memoria y reacciones, tanto

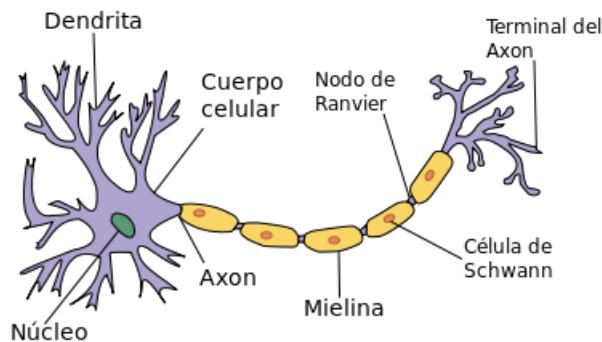
inmediatas como a largo plazo. Estos últimos conceptos son especialmente relevantes en modelos específicos, como las RNA de memoria a corto y largo plazo LSTM, por sus siglas en inglés Long Short Time Memory (Gers, Schmidhuber y Cummins 1999) y las RNA con Unidad Recurrente con Puertas GRU, por sus siglas en inglés Gate Recurrent Unit (Cho y col. 2014) que se estudiarán detenidamente en etapas posteriores del curso.

## Neurona biológica

### La neurona

La neurona es un tipo de célula perteneciente al sistema nervioso central, que se comunica tanto por señales eléctricas como por señales químicas. Cada neurona tiene (Snell 2009):

- Un cuerpo celular llamado **soma** que contiene un núcleo y otros componentes celulares.
- Una zona de recepción con protuberancias elongadas llamadas **dendritas**.
- Una zona de emisión llamado **axón**, el cual está compuesto de:
  - ★ Cono axónico.
  - ★ Membrana plasmática axónica y citoplasma.
  - ★ Recubrimientos de mielina, interrumpido a intervalos regulares por nodos de Ranvier.
  - ★ Terminales del axón donde se encuentran los botones sinápticos.



**Figura 1.3** Neurona, Acracia, 14 January 2007, Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Neurona.svg>, Creative Commons Attribution-ShareAlike 2.5 Generic

## 1. Neurona biológica

### Elementos de las neuronas en la transmisión de señales

Los principales elementos que participan durante la transmisión de señales entre neuronas son (Snell 2009):

- **Impulsos eléctricos:** potenciales de acción, cambios de voltaje que ocurren a lo largo del axón. Pueden generar dos efectos en la membrana de la neurona:
  - ★ **El efecto excitatorio**, despolariza la membrana postsináptica. La neurona es más propensa a mandar un pulso eléctrico.
  - ★ **El efecto inhibitorio**, hiperpolariza la membrana postsináptica. La neurona no manda pulso eléctrico.
- **Neurotransmisor/es:** donde se encuentra la sustancia química, son los mensajeros químicos que se comunican entre neuronas adyacentes. La liberación de neurotransmisores de una neurona ayudará a despolarizar o hiperpolarizar (aumentar la magnitud de la carga) de la neurona adyacente, lo que hará que sea más o menos probable que ocurra un potencial de acción en la siguiente neurona.
- **Plasticidad:** La modificación a largo plazo de las conexiones entre neuronas.

En el contexto de la transmisión neuronal de señales, es necesario realizar ciertas distinciones para denotar claramente si una neurona particular está recibiendo o transmitiendo una señal. Las distinciones son las siguientes:

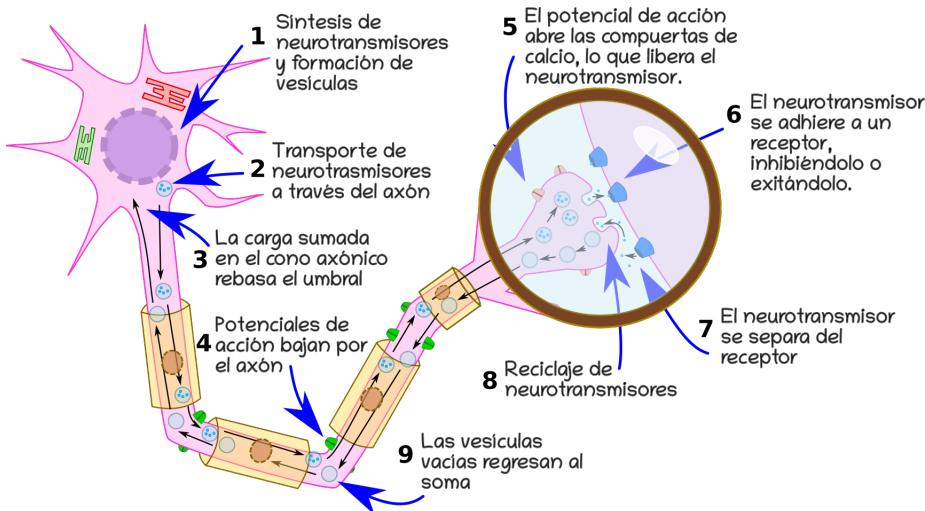
- Neurona presináptica: Transmite una señal a otras neuronas o células a lo largo del sistema nervioso.
- Neurona postsináptica: Recibe una señal de otras neuronas o células, procesando y respondiendo a dicha señal.

La transmisión de señales y almacenamiento de información en las neuronas se da de la siguiente forma:(John G. Nicholls 2011)

1. La neurona desde sus dendritas recibe señales de otras neuronas vecinas.
2. Cada señal se va acumulando en su cuerpo hasta el cono axónico, donde se van a estar sumando la contribución de todos los efectos de cambios de potencial.
3. En el momento que se rebasa un cierto valor umbral, la diferencia de potencial se propaga hasta los botones terminales.
4. La neurona entra en un período refractario, donde empieza a cambiar el potencial entre el cono axónico y el axón de la neurona.

5. Se transmite un disparo eléctrico en seguida.
6. La neurona se va a quedar totalmente quieta, durante un breve momento para que la señal pueda viajar hacia el axón.
7. Se va a notar un cambio muy violento en el voltaje, que se va recorriendo a lo largo de todo el axón.

A lo anterior también se le conoce como neurotransmisión que esta descrita con mayor precisión en la figura Figura 1.4.



**Figura 1.4** Esquema detallado de una neurotransmisión. Author: Verónica Arriola Rios.

La neurona a lo largo de su axón, está cubierta de nodos (y de células de mielina). Estos nodos están para evitar que se distorsione o se pierda la señal recibida en la dendritas, en ellos se recarga la señal para que llegue desde el soma hasta las terminales del axón. Y así pase a la neurona postsináptica, que a su vez la pasará a otra hasta lograr llegar a algún nervio del SNP.

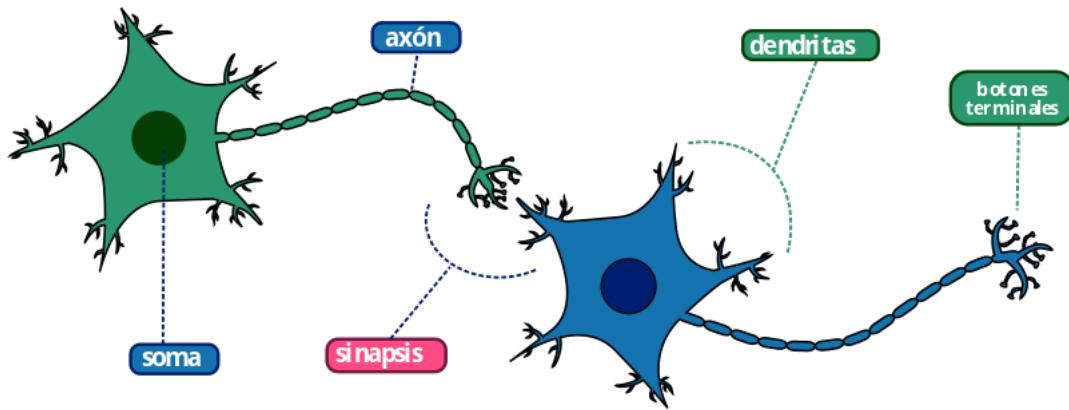
## Sinapsis

El espacio donde dos neuronas en estrecha proximidad, se transmiten información se llama **sinapsis**. La sinapsis (típica) se establece entre el axón de una neurona y la dendrita de otra neurona. (Snell 2009)

### Clasificación de sinapsis

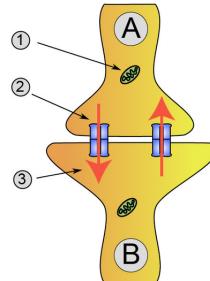
Los dos tipos de sinapsis (relevantes para el curso) son:

## 1. Neurona biológica



**Figura 1.5** Part of neurons in Spanish, Dana Scarinci Zabaleta, 24 February 2019, Wikimedia Commons, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Part\\_of\\_neurons\\_in\\_Spanish.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Part_of_neurons_in_Spanish.svg), OpenStax, CC0

**Sinapsis eléctrica:** las membranas de las células pre y post sinápticas se unen en la brecha sináptica, que son pequeños canales que permiten el paso de iones (Figura 1.6).



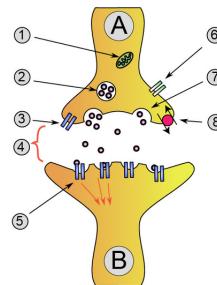
**Figura 1.6** Synaptical transmission (electrical). Neurona A transmisora, Neurona B receptora, 1. Mitocondria, 2. Uniones gap formadas por conexiones, 3. Señal eléctrica, Nrets commonswiki, 23 September 2005, Wikimedia Commons, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synapse\\_diag2.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synapse_diag2.png), Inkscape 0.42, CC-BY-SA 3.0

**Sinapsis química:** la neurona libera moléculas neurotransmisoras a otra neurona adyacente en un pequeño espacio, la brecha sináptica (Figura 1.7).

### Señal eléctrica

El paso de las señales eléctricas entre neuronas, se da gracias a los canales de iones. Los que destacan son los siguientes:

- **Canal por fuga:** Estos se abren y cierran aleatoriamente, todo el tiempo están activos en la neurona. Por ejemplo: sodio y potasio.



**Figura 1.7** Synaptical transmission (chemical). Neurona A transmisora, Neurona B receptora, 1. Mitocondria, 2. Vesícula sináptica llena de neurotransmisor, 3. Autorreceptor, 4. Brecha sináptica, 5. Receptor de neurotransmisores, 6. Canal de calcio, 7. Neurotransmisor liberador de vesículas fusionadas, 8. Bomba de recaptación de neurotransmisores, Utilisateur:Dake, 23 September 2005, Wikimedia Commons, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synapse\\_diag1.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Synapse_diag1.png), Inkscape 0.42, CC-BY-SA 3.0

- **Canal regulado por ligado:** En este un neurotransmisor que es el que provoca o impide que se abran.
- **Canal por estímulo mecánico:** Permiten que pasen más iones o menos iones dependiendo si se ejerció una presión, por ejemplo, con las neuronas cerca de la piel.
- **Canales regulados por el voltaje:** Un voltaje es el que abre o cierra el canal. Permite o no el paso del pulso eléctrico.

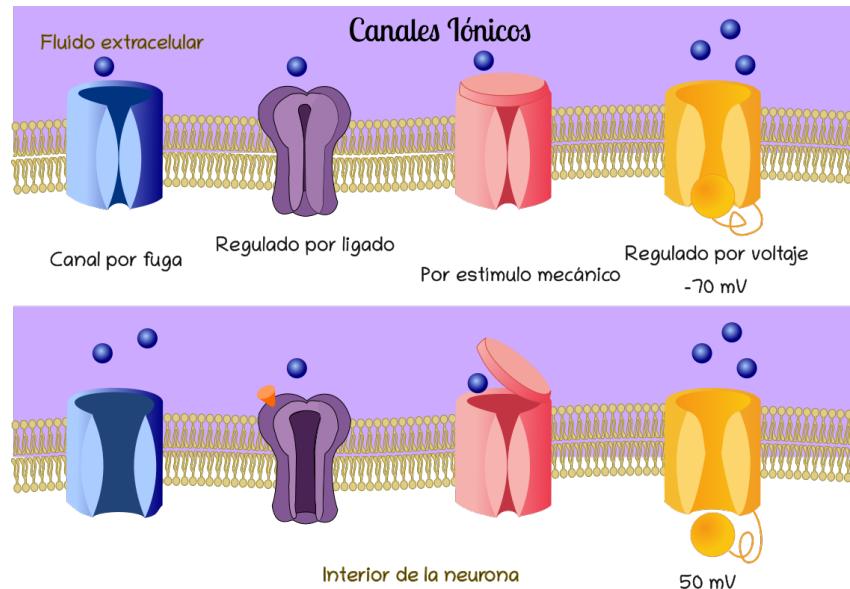
Existen realmente una buena cantidad de iones presentes en el cerebro, pero los más protagonicos son **potasio**, el **sodio** y el **cloro**. Los que vamos a utilizar para un modelo matemático de las neuronas. Veremos más detalles en el siguiente capítulo.

## Neuroplasticidad

Una característica importante de la conexión entre neuronas es la neuroplasticidad, que es lo que nos permite el aprendizaje a largo plazo en el cerebro, es un mecanismo de aprendizaje del cerebro en el cual cuando las neuronas se activan simultáneamente con frecuencia la conexión entre ellas se fortalece.

Este mecanismo constituye la principal inspiración para el diseño de las redes neuronales artificiales, concretamente en esto se inspiran los algoritmos de entrenamiento. Calculamos, qué conexiones debemos reforzar y cuáles debemos de debilitar para que nuestras redes neuronales calculen las funciones que a nosotros nos interesan.

## 1. Neurona biológica



**Figura 1.8** Representación de la clasificación de los canales iónicos.

## 2 | Modelo de Hodgkin-Huxley

### Introducción

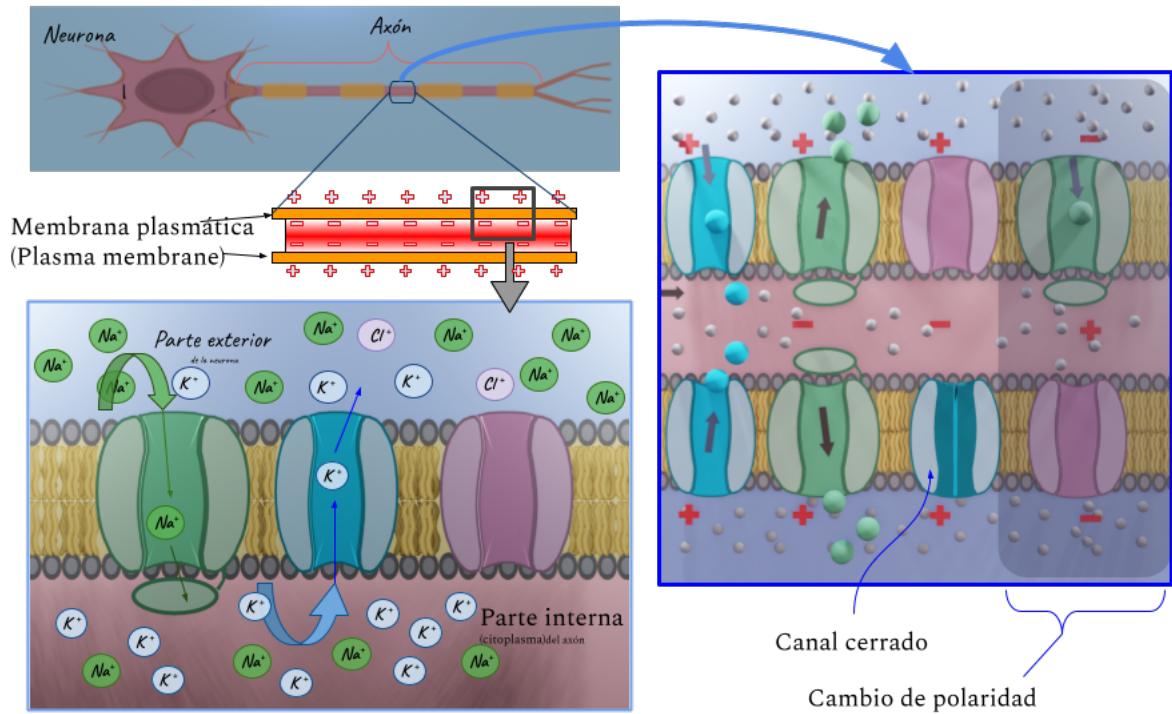
Esta sección se aborda el proceso de transmisión de información y se analizan las operaciones biológicas que hacen posible los cálculos en el cerebro. Para empezar a modelar de una red neuronal se detallará primero la dinámica de los disparos neuronales.

Recordando los conceptos abordados en el capítulo anterior, las neuronas son células especializadas del sistema nervioso central que se comunican mediante señales tanto eléctricas como químicas. Son células con núcleo, axón y dendritas capaces de transferir impulsos eléctricos. La transmisión de un pulso eléctrico se lleva a cabo desde el soma a través de sus membranas, pasando por los nodos de Ranvier a lo largo del axón, hasta la terminal del axón en los botones sinápticos. Donde se espera que una neurona muy próxima de lugar a una sinapsis que es el espacio donde el pulso eléctrico pasa a las dendritas de la neurona postsináptica, mediante canales iónicos. (John G. Nicholls 2011)

El impulso nervioso, configurado como una onda, se desplaza desde el cono axónico de la neurona presináptica hasta la neurona postsináptica. Esta onda electroquímica se genera por la diferencia de potencial existente entre el interior y el exterior de la neurona, la cual resulta de las varias concentraciones de iones en ambos lados de la membrana plasmática. Los estados potenciales neuronales presentes en la membrana plasmática del axón se distinguen en los siguientes (Wells 2010):

- **Potencial de reposo:** Se refiere a la diferencia de cargas eléctricas a través de la membrana celular cuando no hay una señal nerviosa en curso. La membrana está polarizada a -70 mV, lo que significa que tiene una carga positiva en el exterior (por la presencia de iones de sodio,  $\text{Na}^+$ ) y una carga negativa en el interior debido a iones como el cloruro ( $\text{Cl}^-$ ) y proteínas. En este estado, la membrana no transmite señales nerviosas.
- **Potencial de acción o membrana:** Se produce cuando un estímulo alcanza un nivel umbral de 55 mV. Este evento despolariza la membrana, lo que significa que cambia rápidamente su polaridad de negativa a positiva. Esto ocurre porque se abren canales de iones de sodio ( $\text{Na}^+$ ) y potasio ( $\text{K}^+$ ), permitiendo el flujo

de estos iones a través de la membrana. Este cambio rápido en la polaridad de la membrana es lo que impulsa el avance de la señal nerviosa. Las etapas del potencial de acción están representado en la figura Figura 2.2

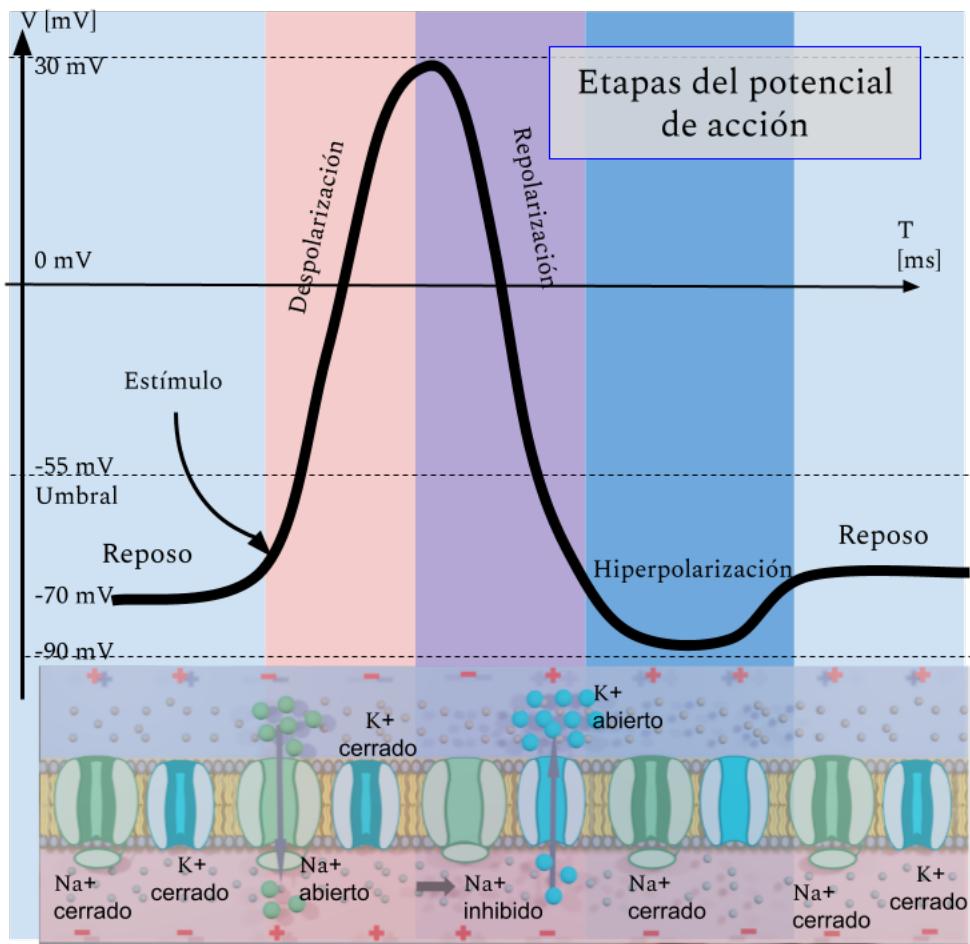


**Figura 2.1** Representación de la membrana axónica en potencial de reposo en la parte inferior izquierda, y en la parte derecha con un estímulo que genera el cambio de polaridad en la misma, así como el cierre de canales y paso de iones.

Los pioneros en el estudio del potencial de acción y elaboración de un modelo para la unión sináptica eléctrica fueron Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley alrededor de 1952. Este modelo matemático, intentaba esclarecer los procesos neurales, surgió a partir de investigaciones experimentales <sup>1</sup>.

Estos científicos llevaron a cabo sus estudios utilizando un calamar gigante, un animal que puede alcanzar hasta 4 metros de longitud y posee un axón a proporción, que se extiende casi a lo largo de la mitad del cuerpo del calamar y tiene un grosor de medio

<sup>1</sup>El texto original de este experimento se puede encontrar en la siguiente url: <https://physoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1113/jphysiol.1952.sp004764>



**Figura 2.2** Representación gráfica de la respuesta de los canales iónicos de sodio ( $\text{Na}^+$  en verde) y potasio ( $\text{K}^+$  en azul) ante un estímulo de voltaje, dando como resultado un potencial de acción que viajará a lo largo de todo el axón.

milímetro, en comparación con el tamaño estándar del axón de una neurona, que oscila entre 1 y 20 micrómetros. El axón del calamar gigante es tan grande que les permitió introducir dispositivos para medir el voltaje, es decir, la diferencia de potencial entre el interior y exterior de la neurona. Con estas mediciones experimentales, lograron determinar las dinámicas de las cargas eléctricas tanto en el interior como en el exterior de la neurona, lo que facilitó el estudio de la transferencia de electricidad durante la activación de un impulso nervioso.

## Membrana y canal

Para comprender la transferencia de electricidad durante la activación de un impulso nervioso, se modeló como un circuito eléctrico en el que observaron la presencia predo-

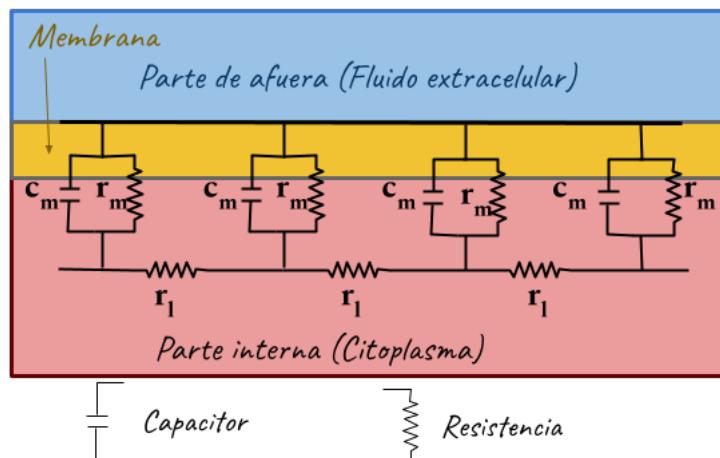
## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

minante de dos elementos: el sodio y el potasio. Se identificó que estos iones existen en diferentes concentraciones en el interior y exterior de las neuronas, lo que resulta esencial en el proceso de transmisión de señales eléctricas.

Hodgkin y Huxley se dedicaron al estudio de las concentraciones de estos iones (sodio y potasio) tanto en el interior como en el exterior de las neuronas, mientras fluían las corrientes eléctricas. Durante sus observaciones, el sistema parecía comportarse como un tipo de circuito eléctrico, donde la membrana actuaba como un componente poroso que *funciona como un capacitor*, almacenando ligeramente las cargas cuando intentan pasar de un lado a otro. Además, esta membrana tenía la cualidad de permitir el paso selectivo de iones en ciertos momentos, es decir, actuaba como una estructura *semipermeable*. Ellos modelaron esto como *resistencias variables*.

Bajo ciertas condiciones de voltaje, determinadas por la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula, los canales iónicos permiten o bloquean el flujo de iones como sodio, potasio o calcio (ver Figura 2.3). Sin embargo, para comprender más a fondo la representación de estos canales, se requiere una exploración más detallada. En este sentido, surge la necesidad de expandir el modelo existente, considerando los comportamientos específicos de estas "resistencias variables" en relación con un voltaje de reposo.

Tomando en cuenta estos aspectos, se destaca que el comportamiento de estas resistencias está estrechamente ligado a un voltaje de reposo particular. En estos voltajes específicos, en cada tipo de ion, representado por estas resistencias modeladas, alcanza una estabilización, lo que implica que ya no varían sus propiedades de conductancia (ver Figura 2.4).

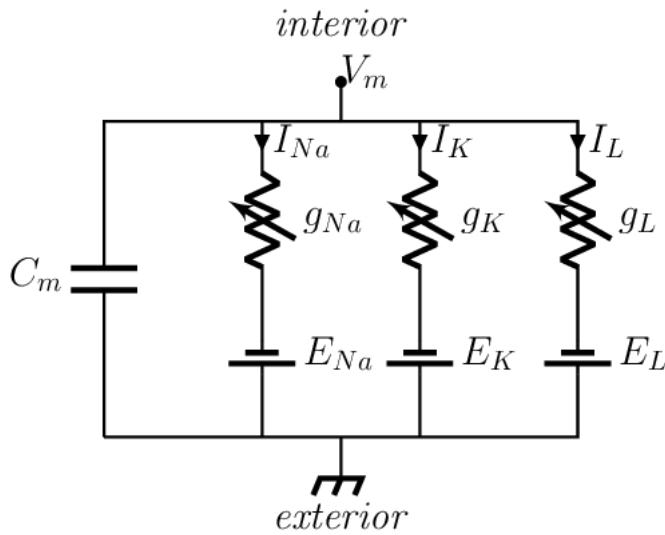


$r_m$  : Resistencia de la membrana

$r_l$  : Resistencia longitudinal

$c_m$ : Capacitancia debido a las fuerzas electrostáticas

**Figura 2.3** Un primer modelo de la membrana axónica modelada como circuito eléctrico. La parte amarilla es la membrana.



**Figura 2.4** Modelo de la membrana axónica modelada como circuito eléctrico, con los distintos canales presentes y su voltaje de reposo.

Durante sus observaciones, identificaron que la conductancia del **ión de sodio (Na<sup>+</sup>)** varía en función del voltaje aplicado, lo que se conoce como un **canal transitorio**. Este canal en determinados voltajes, permite el paso del ion; en voltajes demasiado bajos, se bloquea y no permite su paso, mientras que si supera un umbral específico, vuelve a cerrarse, impidiendo nuevamente su paso.

En cuanto al **ión de potasio (K<sup>+</sup>)**, su comportamiento es distinto: puede salir de la célula cuando el voltaje alcanza un valor específico. Si el voltaje es inferior a este umbral, los iones de potasio no pueden atravesar la membrana celular. Además, el canal de potasio muestra una particularidad interesante: su capacidad para permitir el paso de iones varía de manera gradual en función del voltaje, lo que se denomina un **canal persistente**.

De manera didáctica podemos ver el canal de potasio como una puerta hecha de cuatro subpuertas por donde los elementos pasan o no pasan, es decir tiene dos estados; activado o desactivado. El canal de sodio lo podemos ver como una puerta que está hecha de tres subpuertas que se pueden abrir y tiene aparte un tapón extra, que hace que aunque estas tres están abiertas bloquee toda la compuerta, es decir tiene tres estados; desactivado, activado, inactivada (inhibida).

\*\*Poner imagen de los canales de potasio, sodio.\*\*

Las neuronas están trabajando con muchos más iones aparte de estos dos, uno que destaca bastante es el caso del **ión de cloro (Cl<sup>-</sup>)** que tiene carga negativa. Se tienen canales para intercambio aleatorio de otros iones, **L** un canal aleatorio (leaky).

Entonces con lo que ellos midieron experimentalmente, notaron cómo se estaban comportando estas resistencias dependiendo del voltaje o la diferencia de potencial que había

## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

---

entre ambos lados de la membrana.

- Potenciales eléctricos  $E$  ó  $V$ ; resultan de la separación de cargas opuestas. Se mide en  $mV$ .
  - \*  $E_{(Na,K,L)}$  voltaje en reposo para los iones de Na, K y L, o también conocido como potencial de inversión iónico, es el potencial de membrana en el que no hay flujo neto (total) de ese ion en particular de un lado de la membrana al otro.
  - \*  $V_m$ , el potencial eléctrico de la membrana.
- Corriente  $I$ ; Movimiento de cargas. Se mide en  $\mu A$ .
  - \*  $I_{(Na,K,L)}$  corriente entrante a los canales de Na, K o L.
- Resistencia  $R$ ; Medida de la oposición al movimiento de las partículas cargadas.
- Capacitancia o capacidad eléctrica  $C$ . Cantidad de energía eléctrica almacenada en un capacitor para una diferencia de potencial eléctrico dada.
  - \*  $C_m$  la capacitancia de la membrana.
- Conductancia  $g$ ; Inverso de la resistencia  $\frac{1}{R}$ , es decir, facilidad de transmisión de las partículas cargadas.
  - \*  $g_{(Na,K,L)}$  la conductancia del canal de sodio, potasio, cloro y la L también refiriéndose a otros canales de iones.

Lo que está pasando en los **potenciales eléctricos** es que hay mucho sodio en la parte externa de la membrana por ej. tres iones de sodio que son cargas positivas por dos iones de potasio que hay en la parte interna, entonces hay muchas más cargas positivas en la parte de afuera que las que hay en la parte de adentro y eso es lo que provoca la diferencia de cargas que es lo que estamos viendo como un potencial eléctrico.

La capacidad eléctrica o **capacitancia** es la que estamos utilizando para modelar la membrana conformada por lípidos, que es una capa de grasa y esa es la cantidad de energía eléctrica almacenada en un capacitor para una diferencia de potencial eléctrico dada. Éste comportamiento bastante interesante porque las cargas quedan almacenadas un momento, pero se van liberando poco a poco y se va descargando ese capacitor.

Durante el experimento con el axón, se le dieron cargas eléctricas directamente al axón y gracias a eso lograban ir midiendo que era lo que estaba pasando con las concentraciones de cargas afuera y adentro en el caso de las neuronas reales, esto en un ambiente no alterado ocurre cuando entran en juego los neurotransmisores y provocan que haya cambios, en estas corrientes. Entonces Hodgkin y Huxley jugaron el rol que tendrían que jugar usualmente los **neurotransmisores** para abrir otras compuertas. Nosotros en la manera en la que lo vamos a simular es precisamente con estas corrientes que son las que se están poniendo en el experimento y vamos a ver cómo reacciona el axón.

## Potenciales de Nerst o de reposo

Los Potenciales de Nerst o de reposo son los potenciales a los cuales el flujo neto de iones a través de los canales abiertos es cero. Aquí vemos precisamente porque estamos utilizando la  $E$  generalmente la vamos a utilizar para referirnos a la diferencia de potencial entre la parte de afuera de la célula y la parte de adentro, las vamos a utilizar para representar a aquellos voltajes donde cada una de las compuertas encontrarían su equilibrio. Estos voltajes son distintos para cada una de las compuertas, esto va a provocar precisamente la dinámica de la de la neurona, por ejemplo:

- $E_{Na} \text{ } 50mV$
- $E_{Ca} \text{ } 150mV$
- $E_K \text{ - } 80mV$
- $E_{Cl} \text{ - } 60mV$

Aquí vemos que el sodio estaría su equilibrio en un valor positivo, el calcio que es el que va a jugar un rol de que se activen los neurotransmisores y se transmita el disparo, observamos que el voltaje tendría que ser bastante positivo. El potasio que es el que usualmente está trabajando intercambiándose casi todo el tiempo en la neurona, veremos que el punto de equilibrio usual de la neurona anda por los  $-76mV$  y el del cloro. Cada uno de estos canales pues está tratando de jalar la dinámica hacia su potencial de equilibrio y no hay precisamente un acuerdo entre ellos y eso es precisamente lo que hace que las neuronas cobren "vida".

\*\*\*\*

## Modelo de la membrana como bicapa de lípidos

La membrana de una neurona es modelada como un elemento de un circuito con capacitancia  $C_m$  y potencial  $V$ , las corrientes que fluye a través de la bicapa lipídica están regidos por las siguientes ecuaciones:

$$I_m = C_m \frac{dV_m}{dt} \quad (2.1)$$

Esta sería la ecuación principal (2.1) donde  $\frac{dV_m}{dt}$  está representando el cambio voltaje en la membrana respecto al tiempo.

## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

---

$$C_m \frac{dV_m}{dt} = -g_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) - g_K n^4 (V - E_K) - g_L (V - E_L) + I_{ext} \quad (2.2)$$

Cada una de las partes del lado izquierdo de la ecuación 2.2 corresponde a las compuertas de los canales y la corriente de un estímulo externo que pueda influir a la membrana (este estímulo siempre será desde el exterior hacia el interior).

Retomando lo escrito anteriormente el canal de sodio es una compuerta compuesta de **tres** subpuertas y una subpuerta que actúa como tapón y el canal de potasio es una compuerta compuesta de **cuatro** subpuertas iguales, con esto podemos notar claramente que las conductancias sean representadas como:

- $\frac{1}{R_{Na}} = g_{Na} * m^3 * h$  donde  $g_{Na}$  es una constante que representa el valor de la conductancia máxima,  $m$  es la proporción de los canales de sodio abiertos (representa la concentración de sodio) y nos indica la activación (subpuertas abiertas) del canal,  $h$  es el “tapón” de la compuerta que puede impedir el paso de iones independientemente de las otras tres subpuertas, es decir la inactivación (compuerta bloqueada). Los movimientos combinados de  $m$  y  $h$  son los que controlan la compuerta de sodio.
- $\frac{1}{R_K} = g_K * n^4$  donde  $g_K$  es una constante que representa el valor de la conductancia máxima,  $n$  es la proporción de los canales de potasio abiertos (representa la concentración de potasio) y nos indica la activación del canal de potasio.
- $g_L$  es una constante, de los canales por fuga, que representa la concentración de los demás iones que pasan por la membrana.

Ahora  $m$ ,  $n$  y  $h$ , son variables de activación que describen la probabilidad de que los canales iónicos estén abiertos, se puede describir mediante las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{\gamma(T)} \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n = \frac{n(\infty) - n(t)}{\tau_n(V)} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\gamma(T)} \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m = \frac{m(\infty) - m(t)}{\tau_m(V)} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\gamma(T)} \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h = \frac{h(\infty) - h(t)}{\tau_h(V)} \quad (2.5)$$

Donde la ecuación 2.3 representa al canal de potasio y las ecuaciones 2.4 y 2.5 representando al canal de sodio tomando en cuenta que tiene dos tipos de subpuertas.

Las expresiones de  $\alpha$  y  $\beta$  están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{0.01(10 - V)}{\exp\left(\frac{10 - V}{10}\right) - 1} & \beta_n &= 0.125 \exp - \frac{V}{80} \\ \alpha_m &= \frac{0.01(25 - V)}{\exp\left(\frac{25 - V}{10}\right) - 1} & \beta_m &= 4 \exp - \frac{V}{18} \\ \alpha_h &= \frac{0.07}{\exp - \left(\frac{V}{20}\right)} & \beta_h &= \frac{1}{1 + \exp \frac{30 - V}{10}}\end{aligned}$$

Los factores  $\alpha$  y  $\beta$  se denominan como constantes de velocidad de transición.  $\alpha$  es el número de veces por segundo que se abre una puerta que está en estado cerrado, mientras que  $\beta$  es el número de veces por segundo que se cierra una puerta que está en estado abierto. Si la membrana tiene una carga negativa,  $\alpha$  debe aumentar y la  $\beta$  debe disminuir, cuando la membrana esté despolarizada.

Hasta ahora sabemos que en la bicapa de lípidos, una pequeña carga está pasando entre sus capas de grasa. También sabemos que la carga es almacenada por un breve periodo de tiempo, dando como resultado que la bicapa se comporte como un **capacitor**. Esta membrana también está con cierta resistencia al paso de corriente. Con esto tenemos el siguiente diagrama <sup>2</sup> 2.5

Tenemos dadas las siguientes ecuaciones:

$$I_C + I_R - I_{ext} = 0 \quad (2.6)$$

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} - I_{ext} = 0 \quad (2.7)$$

$$C \frac{dV}{dt} = -\frac{V}{R} + I_{ext}$$

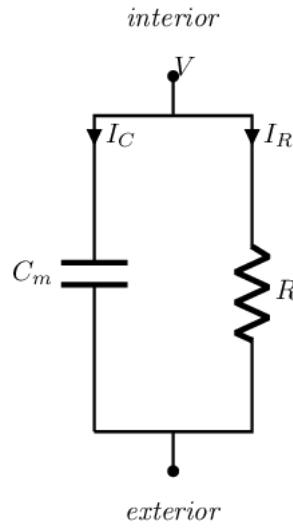
Ahora por la ley de corriente de Kirchhoff <sup>3</sup> tenemos que la suma de las corrientes del capacitor y la resistencia debe ser cero por la conservación de corriente y si consideramos un factor adicional de una corriente externa aplicada o administrada a la neurona, tenemos la ecuación 2.6.

---

<sup>2</sup>Otra explicación más profunda de las ecuaciones dadas partir del diagrama 2.5la podemos encontrar en [https://neurowiki.case.edu/wiki/Action\\_Potential\\_IV:\\_Hodgkin-Huxley\\_Equations\\_and\\_Other\\_Conductances](https://neurowiki.case.edu/wiki/Action_Potential_IV:_Hodgkin-Huxley_Equations_and_Other_Conductances)

<sup>3</sup>La ley de la corriente de Kirchhoff dice que la suma de todas las corrientes que fluyen hacia un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo

## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley



**Figura 2.5** Modelo de la bicapa de lípidos donde,  $V$  son los cambios de voltaje en la membrana que es el potencial eléctrico,  $I_C$  es la corriente del capacitor,  $I_R$  es la corriente de la resistencia,  $C_m$  es la capacitancia de la membrana,  $R$  es la resistencia.

Después tenemos la relación entre la diferencia de potenciales, que almacena energía y la carga eléctrica que guarda, donde:  $C$  es la capacidad, medida en faradios,  $Q$  la carga eléctrica almacenada, medida en culombios,  $V$  la diferencia de potencial medida en voltios. Entonces  $C = Q/V$ , despejando a  $Q$  tenemos  $Q = CV$  y derivando de ambos lados respecto al tiempo y considerando que  $C$  es una constante al ser una propiedad de la membrana  $\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$ . Como la definición de corriente es el cambio de carga en el tiempo tenemos que  $I_C = C \frac{dV}{dt}$ . Notemos finalmente la corriente de la resistencia  $I_R$ , recordando la ley de Ohm <sup>4</sup> la podemos rescribir como  $\frac{V - V_{rest}}{R}$ . Sustituyendo de lo anterior en la ecuación 2.6 se obtiene la siguiente ecuación:

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V - V_{rest}}{R} - I_{ext} = 0 \quad (2.8)$$

$$C \frac{dV}{dt} = -\frac{V - V_{rest}}{R} + I_{ext}$$

Ahora multiplicando todo por  $R$ :

$$RC \frac{dV}{dt} = -V + (V_{rest} + RI_{ext}) \quad (2.9)$$

<sup>4</sup>La ley de Ohm establece que la diferencia de potencial  $V$  que aplicamos entre los extremos de un conductor determinado es directamente proporcional a la intensidad de la corriente  $I$  que circula por el conductor, es decir  $V = R * I$ . Notemos también que  $V = V_m - V_{rest}$

Denotando  $RC$  como la constante de tiempo  $\tau$  y tomando en cuenta que en cuanto se aplica la corriente va a empezar a cambiar el voltaje poco a poco hasta establecerse en un voltaje de equilibrio (ahí se va a quedar quieta). Entonces cuando el voltaje ya no está cambiando con el tiempo quiere decir que su derivada con respecto al tiempo es cero. Observemos que  $dV/dt = 0$  significaría que  $V$  es igual a infinito y que el voltaje en el estado estacionario cuando,  $dV/dt = 0$  depende del potencial de reposo y del producto entre la resistencia con la corriente externa suministrada, entonces tenemos que:

$$V_\infty = V_{\text{rest}} + RI_{\text{ext}} \quad (2.10)$$

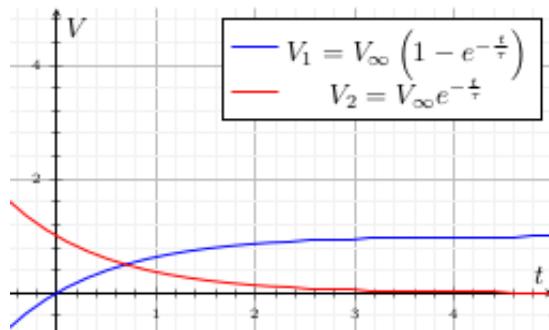
Sustituyendo con 2.10 y la constante, en 2.9 tenemos que:

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V + V_\infty \quad (2.11)$$

## Las conductancias iónicas

Nuestro objetivo aquí es encontrar ecuaciones que describan las conductancias con precisión razonable y lo suficientemente simples para el cálculo teórico de *el potencial de acción* y *el período refractario*.

Si tomamos las ecuaciones diferenciales anteriores notamos que las soluciones tienen este tipo de forma 2.6:

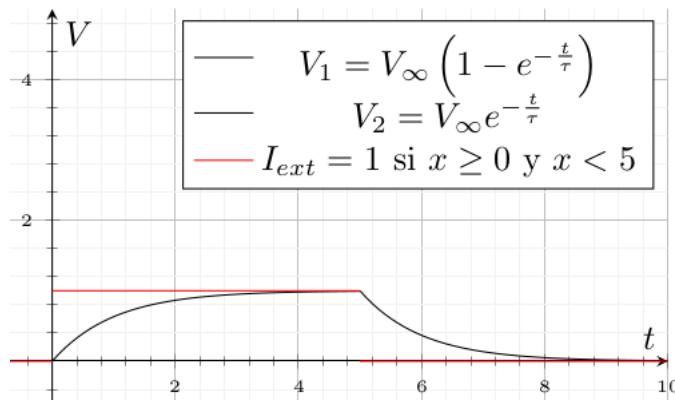


**Figura 2.6** Soluciones para el pulso.

Donde si estamos aplicando una corriente externa lo que sucede es lo que estamos viendo en azul, un exponencial que va creciendo y que tiende hacia un cierto valor límite que sería de infinito. Si dejamos de aplicar la corriente externa entonces ahora tendremos un exponencial, pero que tiende hacia el cero y se va a estabilizar en cero, lo que vemos en rojo.

Simulando lo que hicieron Hodgkin y Huxley que fue al axón de repente darle un toque, siendo en el origen de la gráfica (que visualizamos en la figura 2.7) la parte en la que le están dando el toque al axón, momentos antes estaba quieta la neurona de repente le

## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

**Figura 2.7** Soluciones para el pulso escalón.

aplican una cierta cantidad de electricidad y va a empezar a cambiar el comportamiento de los canales la porosidad de la membrana, vamos a ver que empieza a incrementarse la diferencia de potencial hasta que llegan a un nuevo equilibrio (alrededor de  $t = 3$ ) y si siguieran dándole el toque en esa cantidad se quedaría ahí la neurona, ya no veríamos más cambios lo que va a suceder entonces es que, retiramos las pinzas (se le deja de dar el toque) y los canales otra vez van a empezar a regresar a la normalidad y vamos a ver un descenso en adelante.

Entonces hasta aquí ya tenemos la idea de cómo va a reaccionar la neurona ante cierto estímulo; sin embargo, esto que acabamos de ver en las gráficas sería como si tuviéramos un solo tipo de canal, ahora qué pasa si consideramos que tenemos diferentes tipos de canales pasando iones, en condiciones distintas. Aquí es donde va a importarnos el hecho de que existen diferentes tipos de canales con voltajes de equilibrio diferente. Retomando a los potenciales de Nerst  $E_{Na}$ ,  $E_K$ ,  $E_L$  notemos que están dados por:

$$E = \frac{k_B T}{zq} \ln \frac{[\text{adentro}]}{[\text{afuera}]} \quad (2.12)$$

Estos potenciales están relacionados con las características termodinámicas, en la ecuación anterior  $k_B$  la constante de Boltzman,  $q$  es la carga del ion, y  $z$  es el número de iones. El logaritmo natural representando el promedio de cuántos elementos tenemos en la parte de adentro con respecto a cuántos elementos tenemos en la parte de afuera.

Considerando los diferentes puntos de equilibrio en los cuales se puede encontrar la diferencia de potencial en la membrana, vamos a distinguir entre tres estados de esta (también se puede ver en 2.2):

1. **Polarizada** en su estado de reposo con  $V < 0$  ( $V \approx -70\text{mV}$ ).

- Su estado de reposo, cuando la neurona no está haciendo nada simplemente están corriendo los sodios y entran los potásicos.

**2. Despolarizada** cuando  $V \geq 0$ .

- Cuando en sus dendritas y en el cuerpo de la neurona se acumula una carga muy grande (un voltaje eléctrico, disparo), se abre la compuerta de sodio y van a empezar a entrar el sodio, esta diferencia de potencial que existía entre lo fuera y lo adentro se va a reducir de hecho se puede llegar a reducir bastante dependiendo de la carga que se le aplique.
- Iones positivos entran a la membrana.
- Valores positivos en la diferencia de potencial.

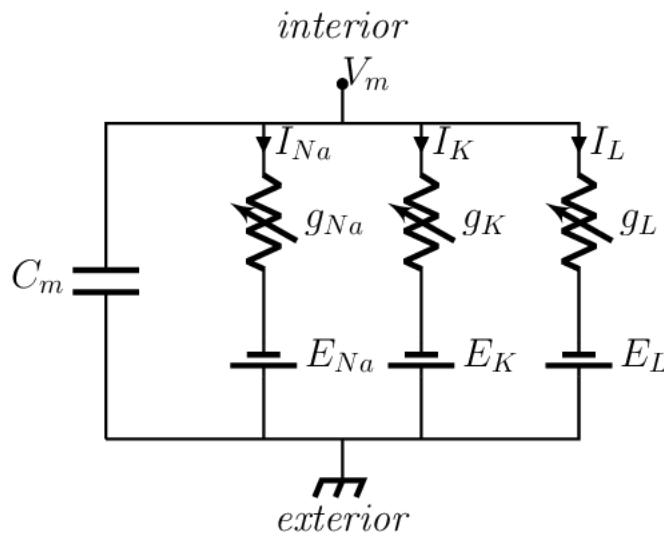
**3. Hiperpolarizada** cuando la diferencia de potencial incrementa su magnitud  $V << 0$ .

- En cuanto se despolarice van a empezar interacciones entre los diferentes tipos de canales que lo que van a intentar hacer es regresar a la neurona en su estado normal.
- Los canales de potasio abren sus compuertas, provocando que salga el potasio que está dentro del axón (en el citoplasma).
- Iones positivos salen de la membrana.
- Si antes estaba quieta a los - 70mV, ahora va a quedar todavía más abajo alrededor de - 90mV. Esto va a permitir un fenómeno que se le conoce como *el periodo de refracción* y ese periodo sirve para que simplemente se lance un disparo y que el comportamiento eléctrico no se rebote otra vez en dirección contraria en la neurona, va a quedar muy quieta la neurona durante un rato y después regresará otra vez a su estado de equilibrio.

## Modelo de las compuertas iónicas controladas por voltaje

Retomando el modelo del circuito eléctrico modelando la membrana, junto con los canales y los iones, volvamos a verlo ahora en la 2.8

## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley



**Figura 2.8** Modelo de la membrana axónica modelada como circuito eléctrico, con los distintos canales presentes y su voltaje de reposo.

Recordemos brevemente las definiciones de los dos tipos de canales protagonistas en el modelo:

### Definición 2.1

*Canal persistente* Tiene un solo tipo de compuerta y dos estados posibles:

1. **Activado**
2. **Desactivado**

### Definición 2.2

*Canal transitorio* Tiene compuertas de activación e inactivación, y tres estados:

1. **Activado** Ambas compuertas abiertas.
2. **Desactivado** Compuerta de activación cerrada, inactivación abierta.
3. **Inactivada** Compuerta de inactivación cerrada.

Y retomando la primera ecuación diferencial donde tenemos, por un lado, la corriente que está pasando a través del capacitor, por otro lado, vamos a tener las corrientes que están circulando a través de los diferentes canales,

$$C_m \frac{dV_m}{dt} = -g_{Na} m^3 h(V_m - E_{Na}) - g_K n^4 (V_m - E_K) - g_L (V_m - E_L) + I_{ext} \quad (2.2)$$

Las capacitancias y variables del lado izquierdo están explicadas en la sección [Modelo de la membrana como bicapa de lípidos](#), aquí vamos a retomar las ecuaciones 2.3,2.4,2.5 de esa misma sección, (recordemos que estas ecuaciones describen la probabilidad de que los canales iónicos estén abiertos) que son las siguientes:

$$\frac{1}{\gamma(T)} \frac{dn}{dt} = \alpha_{n^\infty}(V)(1-n) - \beta_n(V)n = \frac{n(V) - n(t)}{\tau_n(V)} \quad (??)$$

$$\frac{1}{\gamma(T)} \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m = \frac{m^\infty(V) - m(t)}{\tau_m(V)} \quad (??)$$

$$\frac{1}{\gamma(T)} \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h = \frac{h^\infty(V) - h(t)}{\tau_h(V)} \quad (??)$$

Ahora notemos los elementos en estas ecuaciones anteriores con  $ion$  pudiendo denotar las compuertas del potasio  $n$  o del sodio, ya sea  $m$  o  $h$ :

- $\frac{1}{\gamma(T)}$  Este es el coeficiente de escala temporal, dependiente de la temperatura los por eso está apareciendo aquí una  $t$ . Para las simulaciones que nosotros vamos a hacer vamos a pensar que estamos en una temperatura fija.
- $\alpha_{ion}(V)$  probabilidad de que una compuerta transite de cerrada a abierta.
- $\beta_{ion}(V)$  probabilidad de que una compuerta transite de abierta a cerrada.
- $ion^\infty(V)$  probabilidad de compuerta abierta en el equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- $(ion)$  Probabilidad de que cada compuerta ( $n, m, h$ ) esté abierta.
- $(1 - ion)$  Probabilidad de que cada compuerta ( $n, m, h$ ) esté cerrada.
- $\tau_{ion}(V)$  Tiempo que toma llegar al equilibrio.

Lo que vamos a ver es que forma de escribir la ecuación depende precisamente del número de compuertas que tenían para poder abrirse y cerrarse. Reescribir la ecuación de esta manera lo que nos permite es medirlo en términos de estas probabilidades de que se abran y cierren las compuertas que serían

Esta probabilidad se empieza a alterar conforme cambiamos el voltaje, pero no va a llegar a su valor de equilibrio sino hasta después de pasado un cierto periodo.

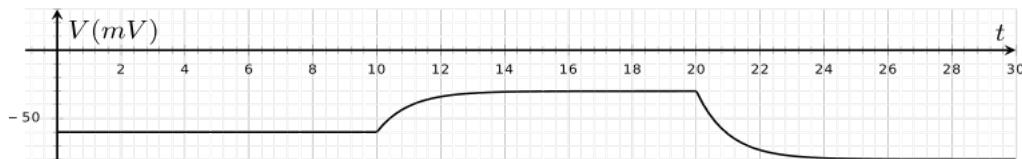
## Dinámica del voltaje durante un disparo

Ahora qué pasa cuando tomamos en cuenta que todas las compuertas están reaccionando al mismo tiempo. Notemos primeramente como está reaccionando la membrana ante un impulso eléctrico o voltaje, en la siguiente imagen 2.9.



**Figura 2.9** En la primera parte los canales están en un estado de reposo y la membrana está polarizada. En la segunda parte los canales han sido afectados por un impulso recibido desde el cono axónico, las compuertas de sodio se abren permitiendo el paso de iones de sodio al interior de la membrana y dejando a la membrana despolarizada. Momentos después la membrana llega a un estado de hiperpolarización donde intentará regresar al estado de equilibrio que tenía previamente, para esto la subpuerta de inactivación de sodio cerrará hasta no permitir el paso de sodio y el canal de potasio abrirá sus compuertas para dar salida a los potasios (iones positivos) que fluyan hacia el exterior de la membrana, así dejando el voltaje de la membrana incluso más negativo de lo que tenía durante su estado polarizado.

Ahora lo que vemos en la imagen 2.9 se grafica de manera un poco más apegada a lo que pasa en los experimentos de la siguiente forma en la imagen 2.10.

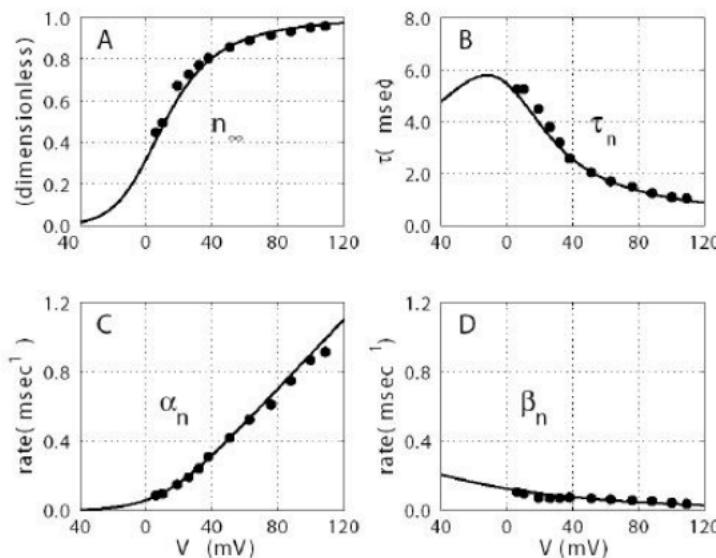


**Figura 2.10** Gráfica del cambio de voltaje en la membrana dado un impulso a través del tiempo. Cuando se rebasa el voltaje umbral, los canales de  $\text{Na}^+$  y  $\text{K}^+$  interactúan para producir una rápida despolarización de la membrana provocando una elevación del voltaje, para luego hiperpolarizarla. Durante el momento de despolarización la membrana puede llegar a valores positivos en este caso en particular el estímulo no es tan grande y se queda en valores negativos.

Ahora lo anterior está en términos de lo deseado, veamos entonces que pasó en las mediciones de Hodgkin y Huxley con el axón en las siguientes gráficas 2.11, donde nos está mostrando como las subpuertas  $n$  y los factores  $\tau$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  del canal de potasio se comportaron antes, durante y después del estímulo del voltaje. Recordemos que  $n$  nos indica la probabilidad que las compuertas de potasio estén abiertas, este es un factor

adimensional.  $\tau$  es el tiempo que tarda en llegar a un estado de equilibrio.  $\alpha$  y  $\beta$  las probabilidades que las compuertas del canal de potasio pasen de cerrados a abiertos y viceversa.

Entonces notamos que en el mismo periodo de tiempo, la membrana está en reposo y conforme va recibiendo el voltaje incrementa la probabilidad que las compuertas de potasio estén abiertas, es decir  $n$  va incrementando conforme al estímulo, mientras que el estado de reposo es claramente alterado provocando que el valor  $\tau$  disminuya considerablemente. La probabilidad que las compuertas de potasio pasen de un estado cerrado a uno abierto durante el proceso ( $\alpha$ ) aumenta prácticamente de forma exponencial, mientras que la probabilidad de que pasen de abierto a cerrado disminuye poco a poco. Con esto cumpliendo lo esperado en la dinámica del voltaje, al notar como está reaccionando el canal de potasio durante la polarización y despolarización (pulso).



**Figura 2.11** Medición experimental de los parámetros y ajuste manual de curvas. Imagen de Nelson 2004

Con estas medidas experimentales ellos dan con curvas paramétricas ajustadas a los factores  $\alpha$  y  $\beta$  expresadas de la siguiente forma:

$$\alpha_n = \frac{0.01(10-V)}{e^{\left(\frac{10-V}{10}\right)} - 1} \quad \beta_n = 0.125e^{-\frac{V}{80}}$$

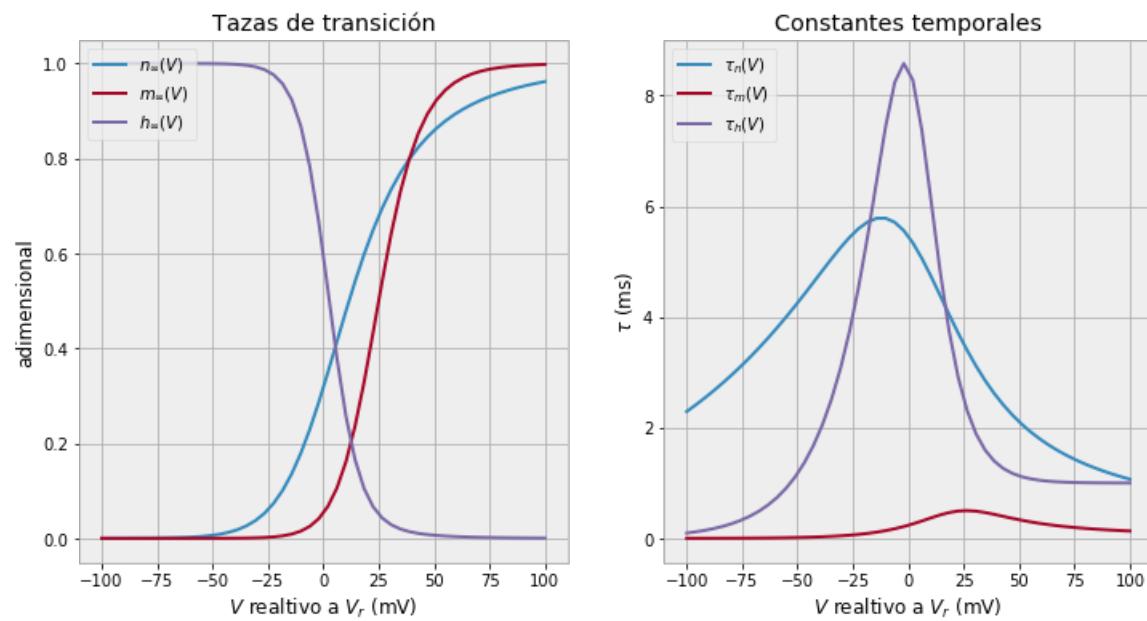
$$\alpha_m = \frac{0.01(25-V)}{e^{\left(\frac{25-V}{10}\right)} - 1} \quad \beta_m = 4e^{-\frac{V}{18}}$$

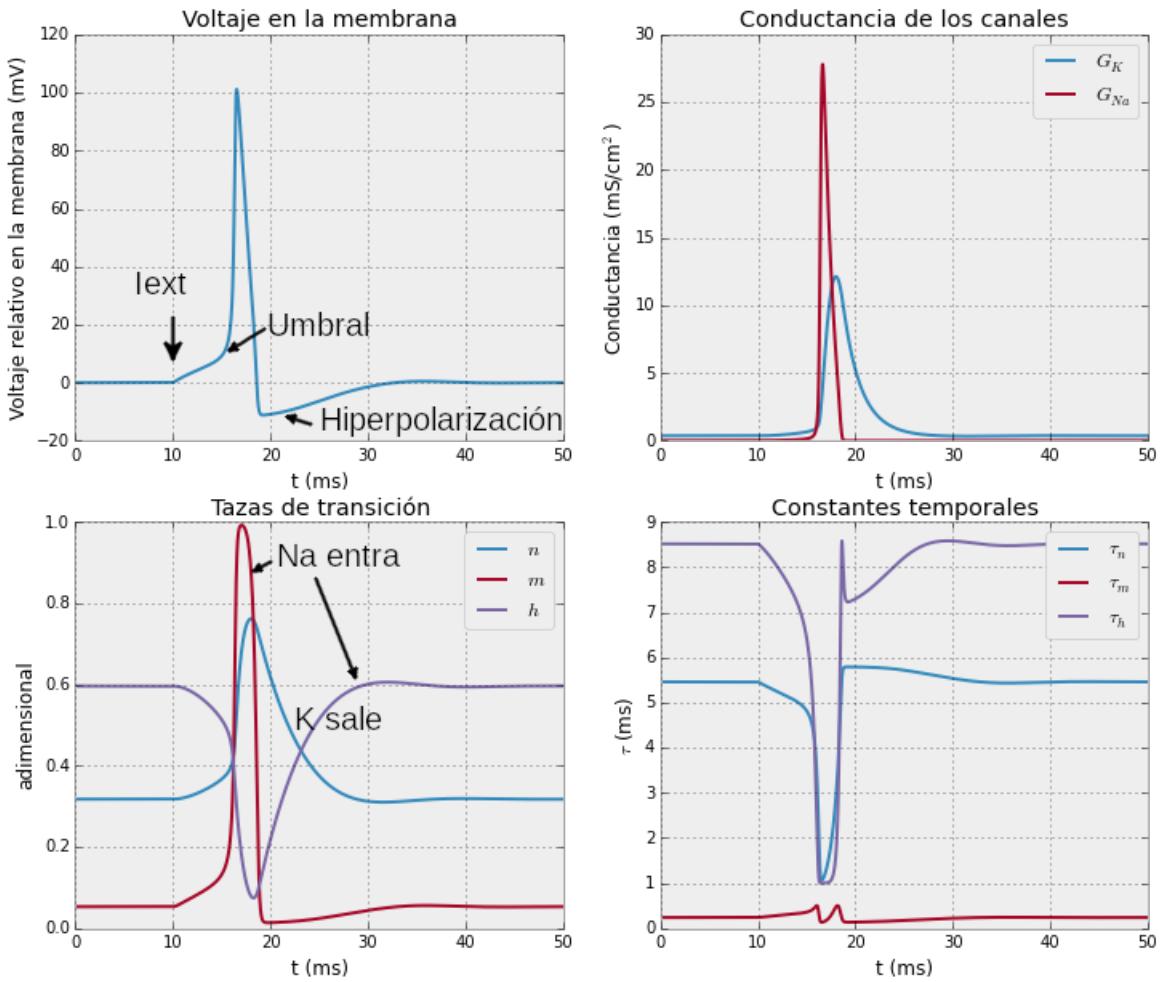
## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

$$\alpha_h = 0.07 e^{-\left(\frac{V}{20}\right)}$$

$$\beta_h = \frac{1}{e^{\left(\frac{30-V}{10}\right)} + 1}$$

Ahora veamos las gráficas de la dinámica del disparo pero ya con las compuertas del potasio y sodio interactuando al mismo tiempo, en las figuras 2.12 y 2.13





**Figura 2.12** Medidas experimentales del estímulo y la reacción de todos los componentes de la membrana. El origen en estas gráficas realmente representa el punto de equilibrio que es alrededor de los -70mV. Del lado superior izquierdo mostrando como cambia el voltaje de la membrana respecto al tiempo, del lado superior derecho el comportamiento de la conductancia de los canales mostrando que aunque la conductancia del sodio reacciona más, es más breve, mientras que el potasio reacciona en menor medida pero durante más tiempo. En la parte inferior derecha la taza de transición de las compuertas n,m y h, mostrando que en cuando llega el impulso el primero en reaccionar es el sodio permitiendo que entre muy brevemente el sodio e inactivándose casi inmediatamente después, mientras que en ese momento los potasios se están liberando hacia la parte exterior de la neurona. Finalmente del lado inferior izquierdo mostrando como se comporta las constantes temporales, mostrando que las compuertas de activación de sodio no son tan afectadas comparado a la compuerta de bloqueo, notando algunos cambios bruscos en esta, mientras que el potasio si se nota más afectado y durante más tiempo pero recuperándose sin cambios bruscos.

## Simulación usando el método de Euler

En esta sección se listará como estamos resolviendo las ecuaciones diferenciales, para tener una simulación numérica y se trata del algoritmo de integración<sup>5</sup>. Las gráficas de la sección anterior se obtuvieron con el método de Euler que se describe más adelante.

---

### Algoritmo 1 Algoritmo de integración de Euler [Wells pp51].

---

```

1: function INTEGRADISPANO(T, ΔT, V0, Iext(t))
2:   Inicializar arreglos de logitud T[], V[], n[], m[], h[], GNa[], GK[], τn[], τm[], τh[] ←
      arreglo[numeroDePasos]
3:   V[0] ← V0
4:   for t = 0 at = TcadaΔt do
5:     Calcular αn, βn, αm, βm, αh, βh utilizando V(t).
6:     Calcular las tres τx y x∞ apartir de las anteriores.
7:     Calcular las probabilidades de las compuertas n, m, h, utilizando las ecuacio-
      nes en diferencias en su forma matricial Π(t + Δt) = AπΠ(t) + Bπ.
8:     Calcular GNa = gNam3h y GK = gKn4.
9:     Almacenar los resultados de este paso en los arreglos
      T[], V[], n[], m[], h[], GNa[], GK[], τn[], τm[], τh[]
10:    Iext ← Iext(t)
11:    Calcular Vm(t + Δt)
12:   end for
13:   Devolver los arreglos T[], V[], n[], m[], h[], GNa[], GK[], τn[], τm[], τh[] con los re-
      sultados para los tiempos [0, T]
14: end function

```

---

Comenzamos con un valor inicial y a partir de ahí empleamos las ecuaciones, para calcular las tangentes, aproximamos a la curva con su tangente.

Para la función INTEGRADISPANO necesitamos cuatro valores de entrada que van a provocar diferentes comportamientos:

1. T nos indica durante cuánto tiempo queremos correr la simulación.
2. ΔT nos indica que tan finos queremos que sean los pasos recordemos que vamos a aproximar la función con segmentos de recta siguiendo la tangente. Si hacemos pasos demasiado pequeños nos vamos a tardar demasiado en hacer el cómputo.
3. V<sub>0</sub> es el voltaje inicial en donde empieza nuestra simulación donde estaba en nuestra neurona cuando empezamos a trabajar.

---

<sup>5</sup>Hodgkin-Huxley Simulation Using Euler's Method lo puedes encontrar en la siguiente liga <https://webpages.uidaho.edu/rwells/techdocs/Biological%20Signal%20Processing/Chapter%2003%20The%20Hodgkin-Huxley%20Model.pdf>

4.  $I_{ext}(t)$  es la corriente externa, de qué magnitud fue el toque que le estamos dando en este momento al axón

A partir de los elementos iniciales proporcionados ya podemos calcular lo demás. Vamos a querer guardar lo que está ocurriendo para todos los tiempos desde cero hasta  $t$  en cada delta, y lo vamos a hacer en forma de arreglos donde en la posición [0], está la primera medición en  $t=0$  y la posición  $t$  está la medición en el tiempo  $t$ . Vamos a tener toda una serie de puntos donde estamos guardando estos pasos para inicializarlo.

Sabemos que necesitamos es un primer valor a partir del cual vamos a calcular la tangente y vamos a ir aproximando lo demás, entonces para eso queríamos *el voltaje inicial*, como nosotros sabemos donde estaba en reposo nuestra célula originalmente, vamos a poder guardar ese voltaje como el primer valor para nuestra simulación. Ahora todos los demás elementos como  $\alpha_s$  y  $\beta_s$  y etc. se pueden calcular si ya conocímos ese voltaje inicial, entonces a partir de este momento podemos repetir el mismo ciclo tantas veces como sea necesario para cubrir, el intervalo. Desde el tiempo inicial hasta el tiempo  $t$ , brincando de delta  $T$  en delta  $T$ . Entonces dado un voltaje vamos a calcular las diferentes  $\alpha_s$  que son las que se median experimentalmente originalmente utilizando las ecuaciones de las curvas paramétricas ajustadas ?? (paso 5).

Ya calculadas las alfas y betas ahora si se puede calcular las  $\tau$ ,  $n^\infty$ ,  $m^\infty$ ,  $h^\infty$  (paso 6). Teniendo estas entonces podemos calcular las probabilidades para las compuertas  $n$ ,  $m$ ,  $h$  usando las ecuaciones en diferencias en forma matricial, estas matrices se pueden expresar como 2.14.

$$\begin{bmatrix} n(t + \Delta t) \\ m(t + \Delta t) \\ h(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \Delta t/\tau_n) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \Delta t/\tau_m) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \Delta t/\tau_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(t) \\ m(t) \\ h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\Delta t/\tau_n)n_\infty \\ (\Delta t/\tau_m)m_\infty \\ (\Delta t/\tau_h)h_\infty \end{bmatrix}.$$

**Figura 2.13** Forma matricial para el cálculo de las probabilidades de las compuertas  $n$ ,  $m$ ,  $h$ .

Ahora esta parte fue importante sobre todo por el asunto de las pérdidas numéricas, recordemos que la computadora tiene una representación en punto flotante, lo cual quiere decir que un número real no se puede representar en la computadora, esto es importante por el problema del truncamiento, cada vez que se truncan dígitos al momento de calcular estamos perdiendo precisión, por esto es importante la forma en la que se procede a hacer los cálculos porque puede que se llegue a resultados un tanto distintos a los deseados aunque los cálculos sean correctos.

Ya teniendo estos datos podemos fácilmente calcular las conductancias, simplemente sustituyendo los valores (paso 8).

Es bueno una vez que ya terminamos de calcular estos términos que se van a necesitar

## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

en la ecuación principal 2.2 que es la del voltaje de la membrana, ir almacenando en los *resultados temporales* dentro de nuestros arreglos en la casilla que les corresponda, para ese momento (paso 8). En el paso 9, es donde ya vamos a utilizar *la corriente externa* para meterla en la ecuación diferencial para el voltaje. Una vez que tengamos esto tenemos que repetirlo para cada paso, se está calculando el tiempo t, entonces conforme avance el tiempo, va a dar el siguiente valor del voltaje, ya teniendo el siguiente valor del voltaje se va a poder usar para el siguiente paso ("como valor inicial nuevo") y así nos vamos a seguir todo el tiempo. Terminando el tiempo asignado a la simulación, tenemos ya los arreglos llenos de los datos que nos van a poder permitir graficar, qué fue lo que sucedió en cada tiempo, con cada canal y es precisamente así que se puede graficar las mediciones presentadas en la sección anterior.

## Información condificada en las dendritas

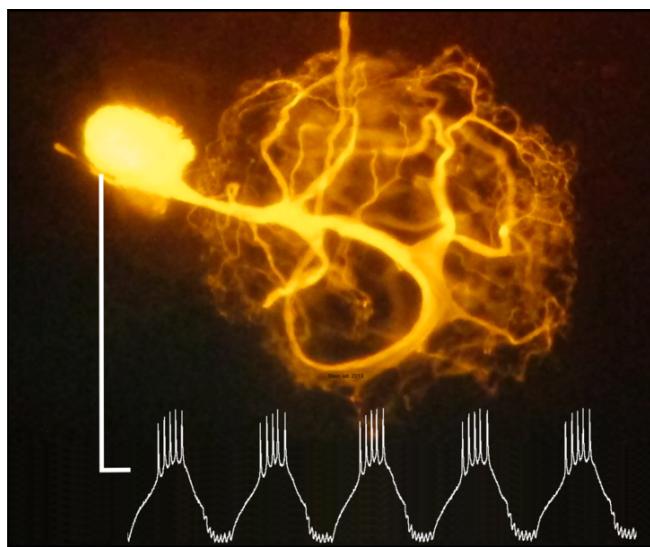
En esta última sección de este capítulo, se va a tratar el cómputo en las neuronas, que vamos a simplificar para poder modelar las neuronas artificiales. Ya vimos detalladamente que pasa a lo largo del axón de la neurona, se ha mencionado que son quienes conforman la región que recibe la información (disparos / pulsos). Estos mandados desde los botones de las terminales de las neuronas presinápticas y son las dendritas las encargadas de enviar estas señales hasta el soma de la neurona y hacer que estas señales químicas se transformen o no en impulsos eléctricos. Ahora la siguiente cuestión es ¿Podemos hacer que se dispare más de una vez (con el mismo estímulo)?.

Los disparos que produzca una neurona depende fuertemente de la interacción con sus neuronas vecinas. Recordemos que durante el período refractario lo que sucede, es que cuando se acumula información en las periferias del cuerpo de la neurona a través de las dendritas y de su cuerpo es porque; está recibiendo información de neuronas vecinas y eso va a hacer que dispare.

Algunas neuronas tienen el período de refractario muy pequeño y disparan frecuentemente, por las conexiones que tienen con sus vecinas, son neuronas que mandan frecuentemente información y a veces pueden lanzar una serie de pulsos muy seguidos, en otras ocasiones puede haber interrupciones entre estas series de pulsos (ver imagen 2.15, en caso de los seres humanos podemos referirnos a las neuronas motoras que están en constante recepción y transmisión de información).

Por otro lado, hay otras neuronas que son muchísimo más pasivas y disparan muy rara vez (neuronas que están a niveles más altos, como reconocimiento de olores, colores, imágenes). Y también nos encontramos con casos donde aparentemente una neurona no reacciona ante ningún estímulo, hasta que pasa un estímulo muy específico<sup>6</sup> y está

<sup>6</sup>Neuronas individuales que forman conceptos abstractos, responden por ejemplo, al nombre de un ser humano. Es así como se descubrió la neurona 'Jennifer Aniston', que disparaba cada vez que el retrato de la actriz se mostraba a los sujetos. Estas neuronas, que responden ante la presentación de



**Figura 2.14** Disparos de una neurona, Wstein, 14 September 2013, Wikimedia Commons. Esta foto muestra la neurona de cangrejo que se tiñó mediante la inyección intracelular de un colorante fluorescente. El recuadro muestra una grabación de las oscilaciones rítmicas del potencial de membrana. Las grabaciones fueron realizadas por Christopher Goldsmith en el laboratorio de Wolfgang Stein en la Universidad Estatal de Illinois, [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ca/PD\\_neuron\\_staining\\_and\\_recording.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ca/PD_neuron_staining_and_recording.png), CC BY-SA 3.0.

dispara (neuronas conceptuales o aisladas). La comunidad científica aún no se atreve a afirmar si este tipo de neurona solo dispara ante ese estímulo específico, o simplemente se trata de un evento que cumple con todas las condiciones para que esta neurona reaccione y mande un pulso. Cabe mencionar que estas neuronas se encuentran en las capas más altas de abstracción de procesamiento del cerebro<sup>7</sup>. Este tipo de diferencias entre neuronas te será más fácil recordar si regresas a la última sección del primer capítulo donde se encuentra un diagrama de los procesos de información en los que puede invertir una neurona, este diagrama es 1.2.

En este momento notamos la gran importancia de la codificación de la información en las redes neuronales de un cerebro. Donde la frecuencia de potenciales de acción nos muestran, ciertos patrones que nos indican el nivel de abstracción al que está respondiendo la neurona y el tipo de información que ayuda codificar o decodificar.

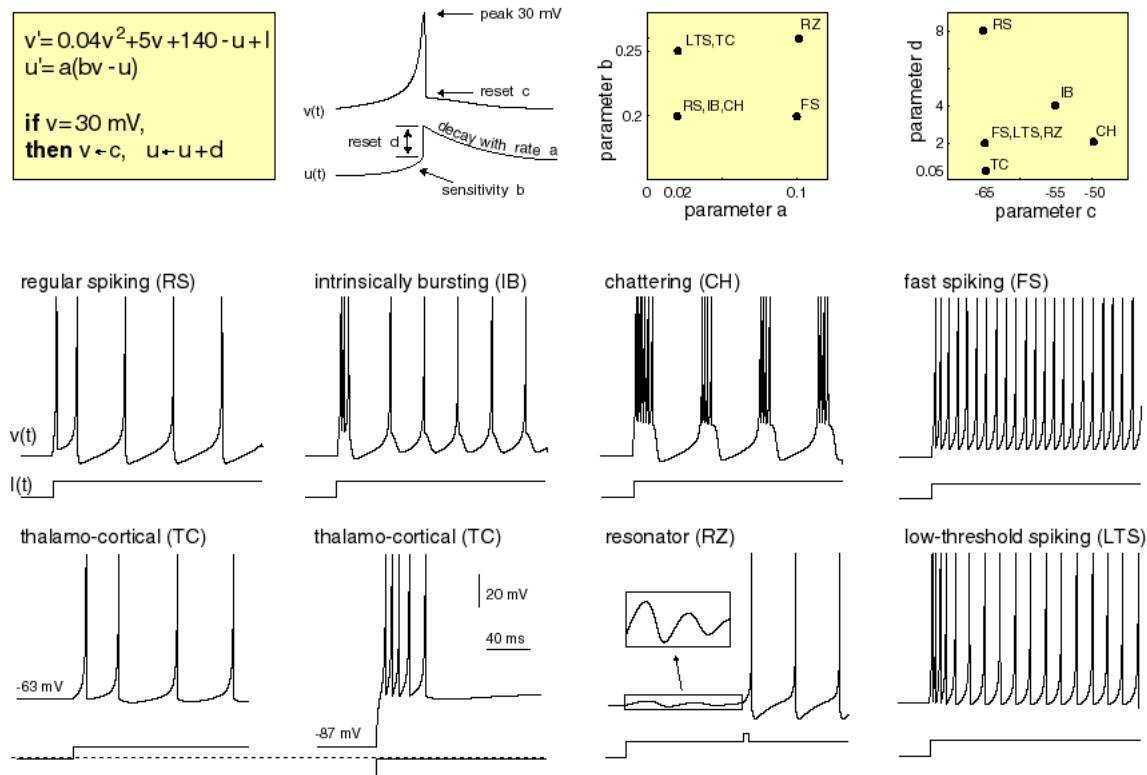
Teniendo ahora noción del papel que juegan los patrones de la frecuencia de disparos, se han hecho numerosas investigaciones acerca de estos. En un intento de entender mejor como es que un cerebro recibe la información desde el exterior, procesa y finalmente provoca ciertas reacciones ante el estímulo. En la siguiente imagen 2.16 que es el resultado

algunas imágenes recibieron la denominación de “células abuelas”.

<sup>7</sup>En la siguiente liga se puede encontrar información más detallada acerca de la investigación con estas neuronas: <https://www.nature.com/articles/s41598-020-64466-7>

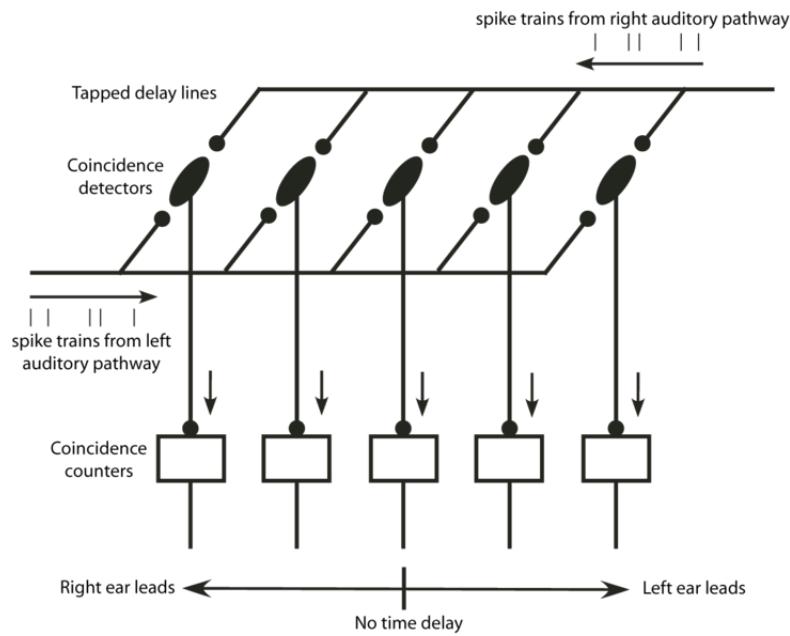
## 2. Modelo de Hodgkin-Huxley

de un artículo donde se utilizaron diferentes métodos para simular disparos de neuronas y notamos la clasificación de estos patrones que se dan ante ciertos estímulos. Cada uno de estos patrones, están codificando cosas distintas, donde una misma neurona podría alternar entre diferentes patrones dependiendo de cuál es el estímulo que está recibiendo. Si bien ha habido algunas propuestas donde se tratan de hacer neuronas artificiales que tomen en cuenta la frecuencia de disparos aún hay un amplio campo de investigación en este tema.



**Figura 2.15** Diferentes patrones de disparo (simulados), Eugene M. Izhikevich, 2003, The Neurosciences Institute, <http://www.izhikevich.org/publications/spikes.html>

Por último mostremos la situación del sistema auditivo con la siguiente imagen 2.17:



**Figura 2.16** Localización del sonido por disparidad, Ian Stevenson, 7 enero 2008, El sistema auditivo registra y analiza pequeñas diferencias en el tiempo de llegada de los sonidos a los dos oídos para estimar la dirección desde la cual el sonido es emitido, <http://www.scholarpedia.org/w/images/4/4d/JeffressFig1.png>

La imagen muestra cómo computan las neuronas, este ejemplo se trata del sistema de audio humano. Cuando nosotros oímos podemos tratar de inferir aproximadamente desde donde está siendo emitido el sonido y eso se logra gracias a que tenemos neuronas conectadas al área auditiva (tanto con el oído derecho como con el oído izquierdo). La señal auditiva va a tardar más en llegar a un oído que al otro, dependiendo de su posición en el espacio, por lo que el cerebro siempre tratar de calcular ese desfase. En el esquema se representa como dentro del espacio de una persona se encuentra una fuente de sonido. Dependiendo de la dirección que provenga (izquierda o derecha), las neuronas receptoras de cada oído harán un cálculo rápido de la distancia a la que se percibió la señal, estás llegaran al cerebro y en algún punto enlazaran con neuronas donde estás cuentan las diferencias de distancias percibidas hasta llegar a dar con el resultado, dándonos a saber cuáles receptores (izquierda o derecha) están más cerca de la señal, y así ubiquemos desde donde proviene el sonido.

# 3 | Aprendizaje de máquina

## Introducción

En este capítulo se desarrolla el proceso que pasa una máquina para que *aprenda*, para esto notemos el concepto de aprender. En los seres humanos se denota como el hecho de adquirir el conocimiento de algo mediante el estudio o la experiencia a partir de ejemplos específicos en nuestro medio, entonces aquellos problemas que inicialmente no pueden resolverse, puedan ser resueltos después de obtener más información acerca del problema. Desde pequeños empezamos por aprender por palabras (conceptos) que asociamos con algo específico, para después relacionar que varios objetos pertenecen a un tipo de conjunto y otros no. Como que un muñeco, una pelota y unos bloques de construcción de plástico, pertenecen a un conjunto denominado como "juguetes", y que plato, taza, y tazón no pertenecen a este conjunto sino al conjunto "vajilla". Entonces para organizar los conceptos que vamos aprendiendo hacemos uso de una función booleana, donde la entrada es el concepto, la pregunta es, ¿Este objeto pertenece a un cierto conjunto de objetos con características similares? y la salida es falso o verdadero. A este proceso, se le conoce como *aprendizaje de conceptos* y en este curso lo simplificamos como *función booleana de aproximación mediante ejemplos*.

Ahora lo que denotamos como el hecho que una máquina aprenda, lo vemos como cualquier programa que mejore su desempeño en alguna tarea mediante la experiencia. Con más formalidad se denota como:

### Definición 3.1

**Aprendizaje maquina:** Se dice que un programa de computadora aprende, si su desempeño en T, medido por P, mejora con la experiencia E. Tal que:

- $T$  es un tipo de tarea.
- $P$  es una medida de desempeño.

- *E* la experiencia con ejemplos (entrenamiento).

, <sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>Machine Learning, Mitchell 1997, pag. 14.

Algunos ejemplos para definición anterior pueden ser los siguientes:

- *T*, como:

- ★ Jugar un juego de mesa.
- ★ Clasificar varios tipo de hojas.
- ★ Reconocer una voz en particular.

- *P*, como:

- ★ Porcentaje de juegos ganados en las partidas.
- ★ Porcentaje de hojas correctamente clasificadas.
- ★ Porcentaje de reconocimiento de timbre de la voz.

- *E*, como:

- ★ Jugar juegos de práctica.
- ★ Una secuencia de imágenes etiquetadas.
- ★ Una secuencia de audios etiquetados.

A partir de ahora nos dedicaremos a definir correctamente tareas que nos interese que un programa aprenda, para entender la forma más abstracta del problema y así proponer los algoritmos que nos ayuden a resolverlo.

Consideremos también que los sistemas de redes neuronales artificiales son un tipo de algoritmo para la representación del proceso de aprendizaje. Un problema de aprendizaje bien definido requiere una tarea bien especificada, medidas de desempeño y datos para obtener experiencia.

El aprendizaje maquina se apoya de disciplinas, como la inteligencia artificial, probabilidad, estadística, complejidad computacional, psicología, neurobiología y filosofía.

Para proponer un algoritmos de aprendizaje automático necesitamos, elegir el tipo de experiencia de entrenamiento, definir la función objetivo a aprender y un algoritmo para aprender la función objeto a partir de ejemplos de entrenamiento.

Los algoritmos de aprendizaje maquina han sido utilizados ampliamente por la industria bancaria, por gobiernos y por su puesto por el área de la salud. En la industria bancaria por

### 3. Aprendizaje de máquina

ejemplo, donde es necesario aprender las reglas generales para determinar la solvencia crediticia, a partir de las bases de datos. Por los gobiernos para el reconocimiento de rostros humanos a partir de imágenes. En el área de salud para a partir de bases de datos de pacientes descubrir automáticamente regularidades implícitas en los resultados de tratamientos.

## Espacio de Hipótesis

El aprendizaje automático, es utilizar datos disponibles para, aprender una tarea mediante una función que mejor mapee entradas a ciertas salidas. A esto se le llama aproximación de función, en el que aproximamos una función de destino desconocida (que suponemos que existe) que puede asignar mejor las entradas a las salidas en todas las observaciones posibles del dominio del problema.

Una función de un modelo que se aproxima a la función objetivo y realiza asignaciones de entradas a salidas se denomina hipótesis.

Ahora estas funciones pueden tener formas muy generales en el aprendizaje de máquina pueden tener forma, por ejemplo, de estructuras de datos, como los árboles de decisión, donde cada nodo pregunta si o no, pertenece una clasificación. Pueden ser también funciones matemáticas como el caso de las redes neuronales, entonces la forma que tomen estas hipótesis en general puede abarcar muchos métodos y estructuras.

Entonces el aprendizaje consiste en, explorar un espacio de posibles hipótesis para encontrar la hipótesis (una función) que mejor encaje, de acuerdo a lo que se obtuvo en los ejemplos de entrenamiento, y predecir alguna característica de salida deseada. Usualmente se denotan como sigue:

- $h$  (hipótesis): una sola hipótesis, por ejemplo una instancia o modelo candidato específico que asigna entradas a salidas, se puede evaluar y se usa para hacer predicciones.
- $H$  (conjunto de hipótesis): Un espacio de posibles hipótesis para mapear entradas.

Una breve ejemplo para denotar un espacio de hipótesis sería el problema de saber los días que nos conviene ir al cine, donde nuestra tarea  $T$  es aprender a predecir el conjunto de días que nos conviene ir al cine, basado en los atributos de los días, donde cada hipótesis la representaremos apartir de un conjunto de atributos de las instancias (días), entonces cada hipótesis es un vector con tres atributos, *tiene2x1*, *esEstrenoDePelicula*, *actoresConocidos*. Para cada atributo de la hipótesis tendría uno de los siguientes valores; Si, No, ?. Donde ? indica que cualquier valor es valido para ese atributo.

Cuando alguna instancia  $x$  cumpla con todos los atributos de una  $h$ , entonces  $h(x) = 1$  y  $x$  es un ejemplo positivo. Entonces para representar la hipótesis, que nos conviene ir

solo los días con  $2 \times 1$ , y que hay películas donde los actores son conocidos, la escribimos como  $h(<Si, ?, Si>) = 1$ , la hipótesis que cualquier día nos conviene ir al cine la denotamos como  $h(<?, ?, ?>) = 1$ , nuestra función objetivo la denotamos como una función booleana  $c : X \rightarrow \{0, 1\}^{|X|}$ , el conjunto de los 365 días del año, entonces  $c(x) = 1$  cuando en los datos nos dicen que con la instancia  $x$  conviene ir al cine,  $c(x) = 0$  en caso que no. Por tanto para aprender la tarea  $T$ , necesitamos *una hipótesis  $h$  en  $H$  tal que  $h(x) = c(x)$  para todas las  $x$  en  $X$* . La tarea de aprendizaje del concepto  $c$  requiere aprender el conjunto de instancias que lo satisface, describiendo este conjunto mediante una conjunción de restricciones sobre los atributos de la instancia.

Estas hipótesis (funciones) pueden llegar a ser sumamente complejas y tener que mapear datos de entrada con muchas formas ej. imágenes, trayectorias, etc. En el caso de las redes neuronales, el espacio de hipótesis está determinado por la arquitectura de la red. Vamos a definir el espacio de hipótesis, cuando decidimos qué neuronas vamos a poner en nuestro sistema, como las conectamos entre sí y cómo van a transferirse información de una a la otra y cuántas neuronas van a ser. Lo que veremos a lo largo del curso son diferentes arquitecturas y el impacto que tiene hacer diferentes modificaciones así como las matemáticas que existen detrás de estas.

## Clasificación de los conjuntos de datos

La experiencia  $E$  para aprender la vamos a obtener mediante un conjunto de datos, llamados datos de entrenamiento, estos se separan en tres bloques:

- **Entrenamiento:** Datos con los cuales se ajustan los parámetros de la hipótesis (del 50 % al 80 % de los datos). En este bloque se escoje qué función del espacio fue mejor para el aprendizaje.
- **Validación:** Datos utilizados para ajustar los parámetros (hiperparámetros) del algoritmo de entrenamiento, que puedan afectar qué hipótesis es seleccionada (del 25 % al 10 % de los datos y no deben ser usado durante el entrenamiento). Un ejemplo de un hiperparámetro para redes neuronales son el número de nodos ocultos en cada capa.
- **Prueba:** Datos utilizados para evaluar la posibilidad de que la hipótesis aprendida generalice<sup>1</sup> a datos no vistos anteriormente. Esta porción que se mantiene aparte. Con estos se evalúa el modelo, se reporta la eficacia del modelo según los resultados en este conjunto (del 25 % al 10 % de los datos).

---

<sup>1</sup>Se desea que nuestro modelo de aprendizaje, una vez entrenado con datos que ya hemos visto, se pueda usar con datos nuevos. Para ello debemos asegurarnos que el modelo no ha simplemente memorizado las muestras de entrenamiento, sino que ha aprendido propiedades del conjunto.

### 3. Aprendizaje de máquina

*El conjunto de datos de entrenamiento se usa para aprender una hipótesis y el conjunto de datos de prueba para evaluarla.*

## Tipos de aprendizaje

**Aprendizaje Supervisado**, el modelo usa datos etiquetados a una respuesta específica(labeled data), durante el entrenamiento se intenta encontrar una función que aprenda a asignar los datos de entrada (input data) con los datos en el etiquetado. Para después predecir una relación, dado un dato totalmente nuevo para el modelo. Los modelos pueden ser:

- Regresión: Un modelo de regresión busca predecir valores de salida continuos. Por ejemplo, en predicciones meteorológicas, de expectativa de vida, de crecimiento de población.
- Clasificación: En un problema de clasificación se desea predecir una salida discreta. Por ejemplo, identificación de dígitos, diagnósticos.

**Aprendizaje no supervisado**, es usado cuando no se tienen datos “etiquetados” para el entrenamiento. Solo sabemos los datos de entrada. Por tanto, únicamente podemos describir la estructura de los datos, para intentar encontrar algún tipo de organización que simplifique un análisis. Por ello, no se tienen valores correctos o incorrectos (es utilizado para aprender de una manera autoorganizada).

**Aprendizaje por refuerzo**, inspirado en la psicología conductista; donde el modelo aprende por sí solo el comportamiento a seguir basándose en *recompensas y penalizaciones*. Este tipo de aprendizaje se basa en mejorar la respuesta del modelo usando un proceso de retroalimentación (*feedback*). Su información de entrada es el feedback que obtiene del mundo exterior como respuesta a sus acciones. Aprende a base de ensayo-error.

Mientras que el aprendizaje supervisado y el no supervisado aprenden a partir de datos obtenidos en el pasado, el aprendizaje por refuerzo aprende desde cero, es decir, con un estado inicial y su ambiente, va aprendiendo a futuro, mediante posibles penalizaciones o recompensas. El *aprendizaje por refuerzo* es usado en videojuegos porque cada vez que se realizan las acciones correctas se ganan puntos y entonces se entrena a la gente para que pueda conseguir la mayor cantidad de puntos. En este siempre hay: un agente, un ambiente definido por estados, acciones que el agente lleva a cabo (que le llevan de un estado a otro), y recompensas o penalizaciones que el agente obtiene.

En cada acción, el agente solo conoce el estado en el cual se encuentra y las acciones posibles que puede elegir a partir de ese estado. No sabe si llegando al siguiente estado, obtendrá mejores o peores recompensas, irá aprendiendo en cada estado qué acciones lo llevarán a obtener una mayor recompensa a largo plazo, y qué el valor de las acciones en ese estado puedan subir. *Se enfoca en que el agente aprenda una política óptima*

*para alcanzar el objetivo.* El agente siempre está en fases de *exploración* y *explotación*, en la fase de exploración el agente toma una acciones de manera aleatoria, y en la de explotación va a tomar acciones basándose en cuán valiosa es realizar una acción a partir de un estado dado.

En plataforma de ventas en línea es donde podemos encontrar este tipo de modelo que están entrenados con este tipo de aprendizaje, donde al iniciar la sesión no conoce nada del usuario, solamente tiene un ambiente dado por los productos de la plataforma y su estado inicial es cero, para hacer individual la experiencia del usuario y que compre más. El algoritmo realiza la acción de mostrar ciertos productos (algún estado) si el usuario da clic a estos productos, el agente recibirá un punto de recompensa, por lo cual pasará a otro estado donde ofrecerá productos del mismo estilo donde pueda maximizar una venta, así se irá adaptando a cada usuario.

## **PARTE II**

# **Redes dirigidas acíclicas**

# 4 | Perceptrón simple

## Perceptrón

El perceptrón fue la primera red neuronal artificial (o ANS, Artificial Neural Systems) descrita algorítmicamente. En las décadas de los 60's y 70's, lo popularizó el psicólogo Franck Rosenblatt, en su libro llamado Principios de neurodinámica, donde presentó varios modelos de perceptrones, en el Laboratorio Aeronáutico de Cornell en Estados Unidos, originalmente estaba diseñado para ser una máquina, en vez de un algoritmo. Estaba diseñado específicamente para el reconocimiento de imágenes donde, cada peso era un cable físico por pixel de entrada, este será una matriz de 200 x 200, conectados aleatoriamente a las "neuronas", las actualizaciones de los pesos se realizaron mediante motores eléctricos.

El perceptrón es en sí, es la representación de una sola neurona, este se ocupa para la clasificación de patrones en un conjunto de datos multivariados, con ese se obtienen fronteras lineales en el plano, mediante un algoritmo de aprendizaje que veremos más adelante.

Recordando, una neurona es una célula elemental que a partir de un vector de entrada procedente del exterior o de otras neuronas (estímulo), proporciona una única respuesta (si activo el potencial de acción o no), ver figura 4.1. Los elementos que actúan en una neurona los podemos listar como:

- **Entradas:**  $x_j(t)$ . Las variables de entrada y salida pueden ser binarias (digitales) o continuas (analógicas) dependiendo del modelo de aplicación.
- **Pesos sinápticos:**  $w_{ij}$ . Representan la intensidad de interacción entre cada neurona presináptica  $j$  y la neurona postsináptica  $i$ .
- **Regla de propagación:**  $h_i(t) = \sigma(w_{ij}x_j(t))$ . Proporciona el valor del potencial postsináptico, de la neurona  $i$  en función de sus pesos y entradas.

\*  $h_i(t) = \sum_{j=0}^n w_{ij}x_j$ , Es una suma ponderada de las entradas con los pesos sinápticos. Así, si la entrada es positiva, dependiendo de los pesos podemos

#### 4. Perceptrón simple

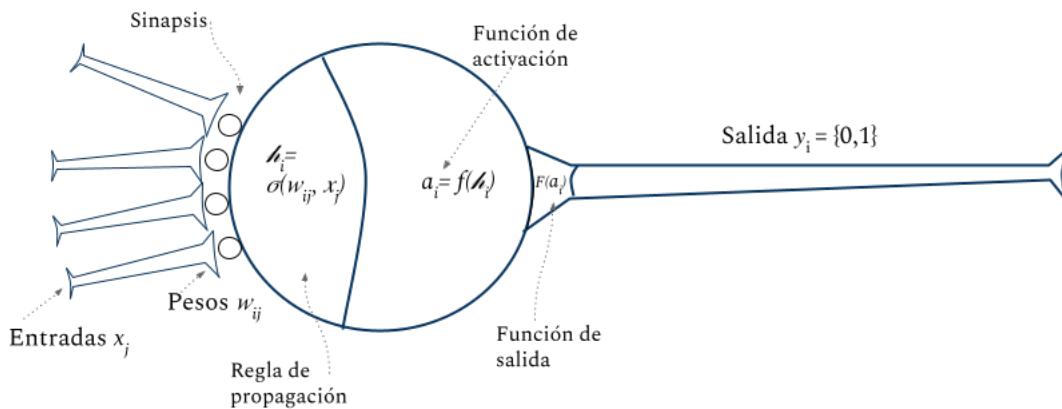
saber si fue una sinapsis excitadora (pesos positivos) o inhibidora (pesos negativos).

- **Función de activación o de transferencia:**  $a_i(t)$  Proporciona el estado de activación actual, de la neurona  $i$  en función de su estado anterior,  $a_i(t - 1)$  y de su potencial postsináptico actual.

- $\star a_i(t) = f_i(a_i(t - 1), h_i(t))$ , es la que usualmente se usa.
- $\star a_i(t) = f_i(h_i(t))$ , en algunos modelos solo se considera que el estado actual no depende del tiempo anterior.

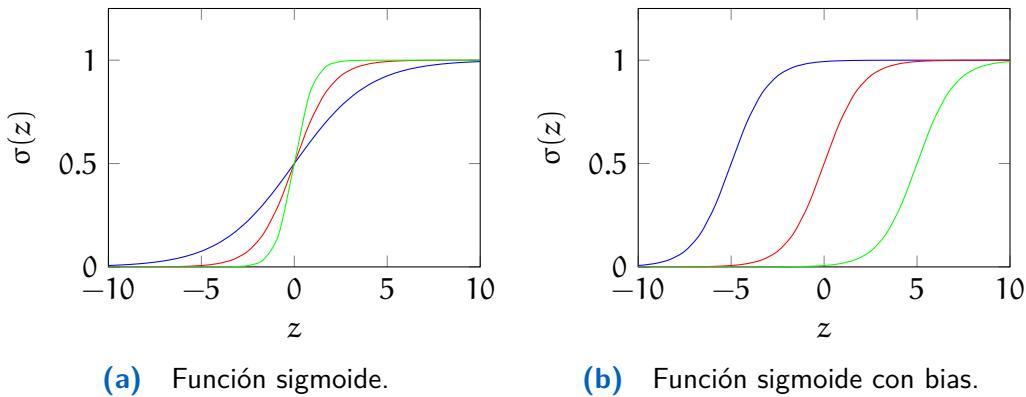
- **Función de salida:**  $F_i(a_i(t))$  Da la salida actual,  $y_i(t)$ , de la neurona  $i$  en función de su estado de activación actual. El estado de activación de la neurona se considera como la propia salida.

- $\star y_i(t) = F_i(a_i(t))$
- $\star y_i(t) = F_i(f_i(a_i(t - 1), \sigma(w_{ij}, x_j(t))))$



**Figura 4.1** Neurona vista como un modelo artificial (perceptrón).

Un perceptrón toma un vector de entradas de números reales, calcula una combinación lineal de estas entradas, luego emite un 1 si el resultado es mayor que algún umbral y -1 de lo contrario. Es decir, dadas las entradas  $x_1 \dots x_n$ , la salida  $o(x_1, \dots, x_n)$  calculada por el perceptrón es 1 si  $w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n > 0$  y -1 de lo contrario, donde cada  $w$  es una constante  $\mathbb{R}$ , un peso, que determina la contribución de la entrada  $x$  a la salida del perceptrón. La constante  $w_0$  es un *umbral* (bias) que la suma de las entradas con los pesos debe superar para que el perceptrón emita un 1. En otras palabras es un peso que va a actuar junto con una entrada de valor 1, que vamos a poder ajustar para que nuestra función de activación se mueva de derecha a izquierda en el plano para ayudarnos a ajustar nuestros resultados, provocando un gran impacto en el aprendizaje.



**Figura 4.2** Comportamiento de la función de activación (sigmoide) de un perceptrón con una sola entrada, (b) el perceptrón sin el uso de bias, (b) con el uso del bias, donde apesar de estar representandos con la misma entrada , el uso del bias afecta en los resultados de salida. Así si quisieramos que este perceptrón nos diera  $y = 0$  con una entrada  $x = 2$  sin el uso, ni ajuste del bias sería imposible, pues en (a) apesar que la gráfica azul está la entrada está ajustada con el peso  $w = 0.5$ , la roja con el  $w = 1$ , y la verde con el  $w = 2$  solo lo logramos alargarla un poco, haciendo que entradas que antes eran correctas ahora caigan 0 también. Entonces lo que necesitamos es más bien "mover" la gráfica, esto lo logramos con la gráfica (b) donde la entrada (única) está sumada con un bias (umbral)  $x_0 = 1$ , ajustado en azul con peso  $w_0 = 5$ , en rojo con  $w_0 = 0$ , en verde con  $w_0 = -5$  y el peso  $w_1 = 1$ . Donde con  $w_0 = -5$  logramos nuestro objetivo de tener una salida  $y = 0$  con  $x = 2$ . El bias nos permite mover la función fuera del origen.

Esto se muestra en la siguientes graficas 4.2b. Más adelante hablaremos de su regla de entrenamiento (Training rule).

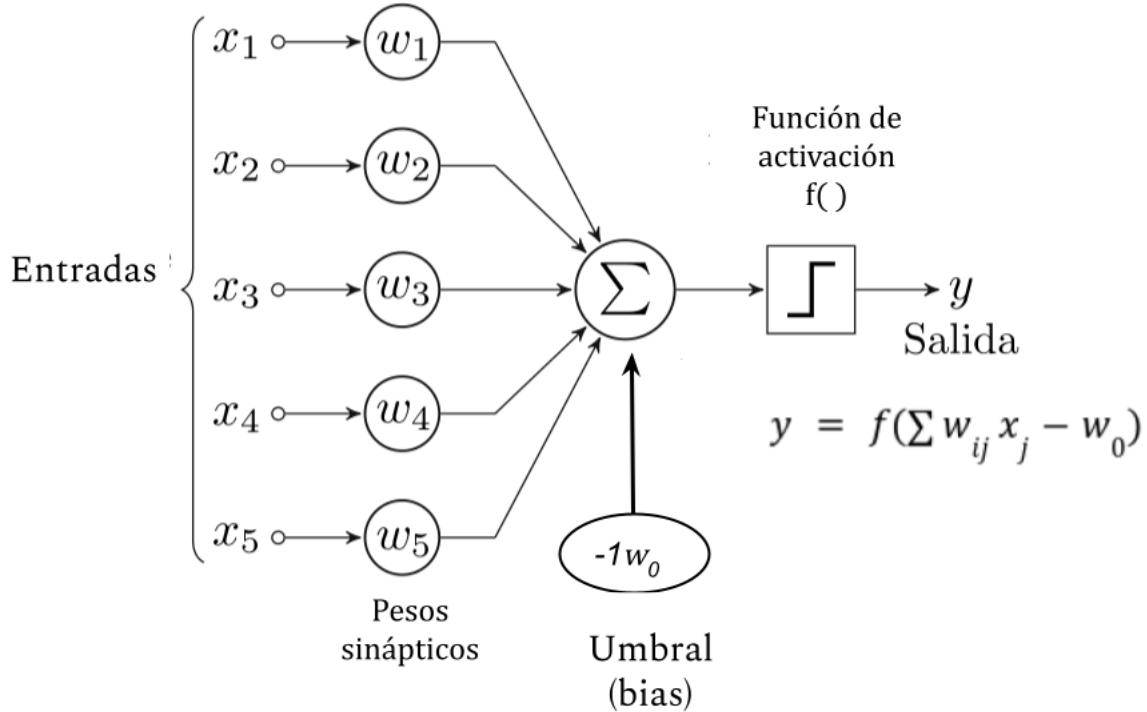
El hecho de que un perceptrón aprenda implica elegir valores para los pesos denotados también por  $\theta$ . Ahora, el espacio  $H$  de las hipótesis candidatas consideradas en el aprendizaje del perceptrón, es el conjunto de todos los posibles vectores de pesos.

$$H = \{w | w \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Si bien en el momento que se publicó los logros con el modelo del percetrón las expectativas eran bastante altas, a medida de los años los científicos Marvin Minsky and Seymour Papert desestiman en gran medida los alcances que realmente se puede tener con el perceptrón, al mostrar<sup>1</sup> que no puede predecir operaciones lógicas que no sean linealmente separables, tal es el caso de la función XOR, que no es separable linealmente, siendo imposible que pueda aprender esta función. Esto y el gran costo que representaba procesar todos los elementos que implicaba el entrenamiento, causa que por un buen

<sup>1</sup>En 1969 publican Marvin Minsky y Seymour Papert que perceptrones de una sola capa (simples) solo son capaces de aprender a distinguir patrones linealmente separables, en el libro "Perceptrons".

## 4. Perceptrón simple



**Figura 4.3** Modelo estandar de un perceptrón.

tiempo se desetime el uso del perceptrón. Es hasta después de unas decadas que vuelve a tener relevancia con la propuesta de un perceptrón multicapa usando retropagación (Feedforward), siendo estos capaces de resolver la función XOR

## Compuertas lógicas con neuronas

Aquí se muestra como se puede utilizar un perceptrón para simular compuertas lógicas tales como el or, not, and.

Para simular la compuerta *not*, como está es una función booleana de  $B \rightarrow B$ , tal que  $\text{not}(x) = -x$  entonces en un plano de dos dimensiones, la podemos representar con dos puntos, el  $p_1 = (0, 0)$  y  $p_2 = (1, 0)$  donde  $p_1$  representa cuando  $\text{not}(0) = 1$ ,  $p_1$  representa cuando  $\text{not}(0) = 1$ . Teniendo el espacio de la función definido lo que nos toca es, separar el plano para clasificar las entradas, este claramente se puede separar con una linea vertical, o con lineas con pendiente 1 o  $-1$ . Para esta función solo necesitamos de una entrada y un sesgo (bias), donde la entrada la combinaremos con un peso, este peso lo asignaremos a tanteo (por la sencillez de la operación). Así el peso  $w_1 = -1$  y el peso asignado al bias sera  $w_0 = 0.5$ , ahora con esto datos podemos:

- Hacer la función de propagación donde  $h(x) = (x * -1) + (0.5) * 1 = 0.5 - x$

- Hacer la función de activación escalón  $a(x) = \text{sgn}(h) = \text{sgn}(0.5 - x)$
- Dar la salida donde  $s(1) = \text{sgn}(0.5 - 1) = 0$  y  $s(0) = \text{sgn}(0.5 - 0) = 1$ , en este caso la salida es la identidad de la activación.

$x$	$h$	$s$
0	0.5	1
1	-1.5	0

Algo similar va a pasar con la compuerta *and* y *or* donde al necesitar de dos entradas para la compuerta, asignaremos dos entradas para el perceptrón igualmente y las representaremos en el plano con cuatro puntos, donde cada punto representa una instancia y se le asigna valor positivo o negativo en el plano, así pues para el *and* tenemos los puntos  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (0, 1)$ ,  $p_3 = (1, 0)$ , negativos y  $p_4 = (1, 1)$  el único positivo. Así nos damos cuenta que necesitamos una recta con pendiente negativa y fuera del origen, que nos separe estas clases de puntos. Por tanto para el bias le asignamos un peso de  $w_0 = -1.5$ ,  $w_1 = 1$  y  $w_2 = 1$ , con estos datos podemos:

- Hacer la función de propagación donde  $h((x_1, x_2)) = (x_1 * 1) + (x_2 * 1) + (-1.5) * 1 = x_1 + x_2 - 1.5$
- Hacer la función de activación escalón  $a((x_1, x_2)) = \text{sgn}(h) = \text{sgn}(x_1 + x_2 - 1.5)$
- Dar la salida donde  $s = a(x)$ , es la identidad de la activación.

$x_1$	$x_2$	$h$	$s$
0	0	-1.5	0
0	1	-0.5	0
1	0	-0.5	0
1	1	0.5	1

Para la compuerta *or* es algo muy similar pues podemos igualmente representar la función con cuatro puntos en el espacio cada uno representando una instancia, solo que ahora tres de estos puntos serán positivos y solo uno negativo, los puentes positivos serían  $p_2 = (0, 1)$ ,  $p_3 = (1, 0)$  y  $p_4 = (1, 1)$ , mientras que  $p_1 = (0, 0)$  negativo, el plano lo podemos dividir con una linea recta con pendiente negativa, así le asignamos  $w_0 = -0.5$ ,  $w_1 = 1$  y  $w_2 = 1$ , con esto hacemos los paso que ya sabemos:

- Hacer la función de propagación donde  $h((x_1, x_2)) = (x_1 * 1) + (x_2 * 1) + (-0.5) * 1 = x_1 + x_2 + 0.5$
- Hacer la función de activación escalón  $a((x_1, x_2)) = \text{sgn}(h) = \text{sgn}(x_1 + x_2 + -0.5)$

#### 4. Perceptrón simple

---

- Dar la salida donde  $s = a(x)$ , es la identidad de la activación.

$x_1$	$x_2$	$h$	$s$
0	0	-0.5	0
0	1	0.5	1
1	0	0.5	1
1	1	-1.5	1

Tomando el hecho que en la naturaleza las neuronas van pasando información en una estructura que forma niveles de abstracción, esto lo modelamos como capas de neuronas conectadas entre sí, cada capa haciendo su trabajo de abstracción. El perceptrón simple es un modelo neuronal unidireccional, una capa de entrada y otra de salida, que por si solo no puede separar todas las funciones lógicas pues tenemos el XOR, para resolver esto usaron perceptrones multicapa que se explicará más adelante en el curso.

## Funciones de activación

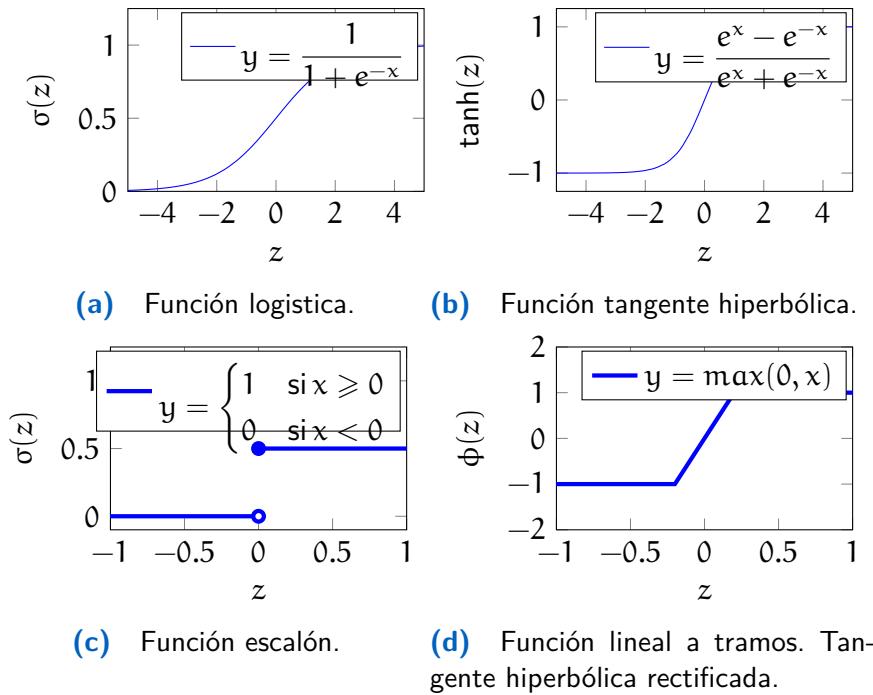
Recordando que la forma de las funciones de activación es  $y = f(x)$ , donde  $x$  representa el potencial postsináptico e  $y$  el estado de activación de la neurona, es decir si va a lanzar un disparo o no. Las funciones de activación más empleadas son:

## Funciones de error

Entonces tomando como base el perceptrón, una vez obtenidas las salidas con una primera iteración nos daremos cuenta de que tan lejos o que tan cerca estuvimos de la respuesta correcta, con esto darnos la oportunidad de que pesos ajustar respecto a sus entradas, en la segunda iteración. Ahora para facilitarnos esto y tomando en cuenta que el entrenamiento consiste en varias iteraciones hasta llegar a aprender la tarea  $T$ , hacemos uso de una función de error que nos ayude a minimizar la diferencia de error en las salidas.

Primero veamos el entrenamiento para una sola neurona, para esto haremos uso de la regla de aprendizaje del perceptrón (learning rule perceptron), donde para cada entrada, en la capa de salida se le calcula la desviación a la función objetivo. El cual utilizamos para ajustar los pesos del perceptrón (ver fig 4.5).

Usualmente al principio del entrenamiento se asignan pesos aleatorios, a medida que avance el entrenamiento, se van modificando con cada iteración, así  $w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i$ . Esto con base a [la regla de aprendizaje](#) donde:



**Figura 4.4** Las funciones de activación más usadas son la función sigmoide  $\sigma(z)$  y la tangente hiperbólica  $\tanh(z)$ .

$$\Delta w_i = \alpha(y - y_{out})x_i \quad (4.1)$$

Con  $y$  es la salida deseada,  $y_{out}$  la salida generada,  $\alpha$  la taza de aprendizaje (learning rate) y  $x_i$  la entrada  $i$ . Lo que hace la taza de aprendizaje es moderar el grado en que los pesos son cambiados con cada iteración, se le asigna un valor muy pequeño (0.1 o 0.2) y conforme se logran ajustar los pesos se minimiza aún más.

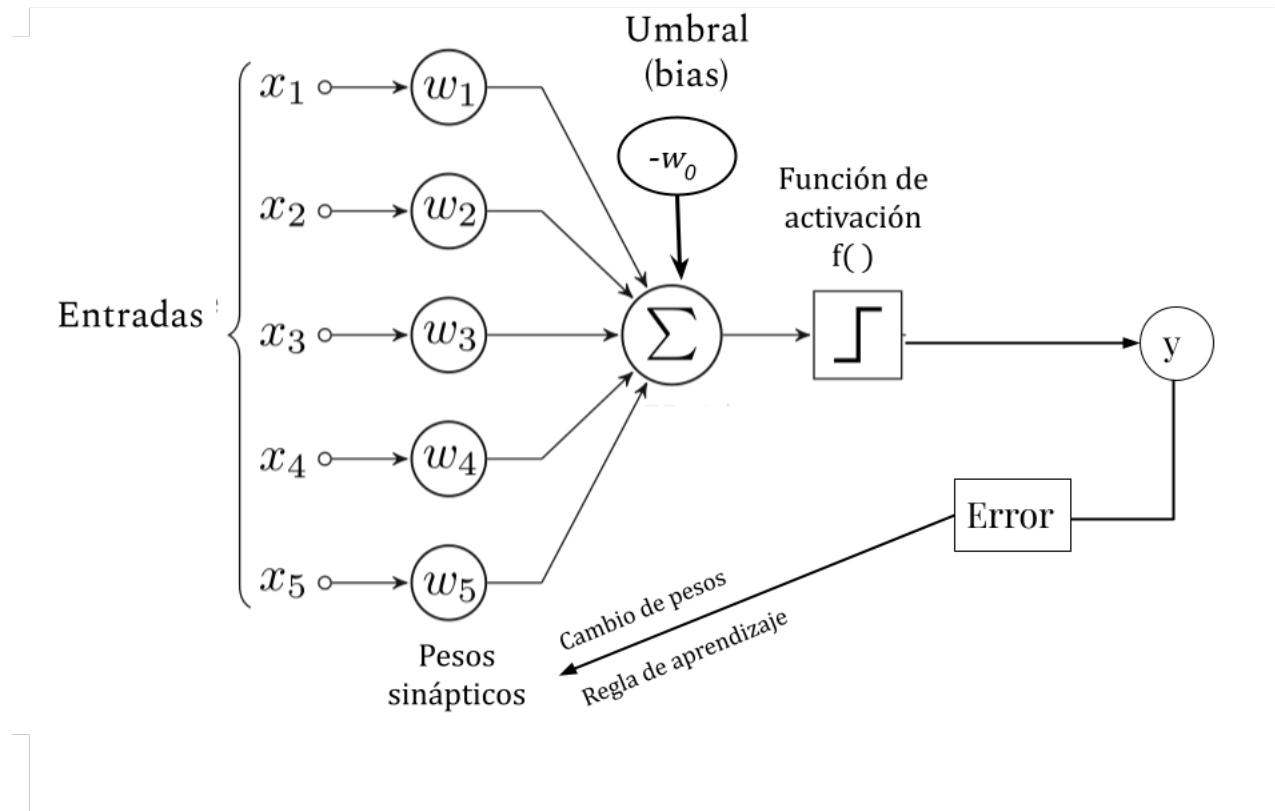
Para entrenar un perceptrón, utilizamos cualquier método de optimización de funciones para encontrar los parámetros  $w$  que minimizan el error con alguna de las siguientes funciones de error:

**Diferencias al cuadrado**, también conocida como regla aprendizaje delta, es la suma de cuadrados de errores que se tuvieron con cada ejemplar el el conjunto de entrenamiento. Los podemos describir como:

$$\frac{1}{2m} \sum_{m=0}^{M-1} (y_m - a_m)^2 \quad (4.2)$$

con  $y_m$  y  $a_m$ , la salida obtenida dado un ejemplar  $m$  y la salida correcta del ejemplar  $m$  respectivamente.

## 4. Perceptrón simple



**Figura 4.5** Modelo estandar de un perceptrón.

**Entropía cruzada.** Se usa para problemas de clasificación ya que su comportamiento es más suave (soft) y permite hacer clasificaciones más certeras. Se define como:

$$L(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{m=1}^{m=0} (y^{(m)} \log(a_m) + (1 - y_m) \log(1 - a_m)) \quad (4.3)$$

Entonces juntando los conceptos que ya sabemos podemos describir el algoritmo de entrenamiento para el perceptrón de la siguiente forma:

1. Iteramos sobre todos los ejemplares.
2. Para cada ejemplar se calcula la función de propagación, es decir la suma ponderada.
3. Se calcula la función de activación con esta suma.

4. Se calcula la función de salida.
5. Actualización de pesos de acuerdo a la regla de aprendizaje.
6. Repetir de 1-6 hasta que los pesos nos satisfagan, un número de iteraciones establecidas.

## Medidas de rendimiento

Las medidas de rendimiento de una red nos sirven para ver de manera concreta como se comportó nuestra red, durante el entrenamiento. Que fue lo que pudo aprender (clasificar). Si tuvo un sobreajuste, es decir, memorizo y por tanto, será incapaz de predecir la clase a la que pertenece realmente el ejemplar. Para esto se usan las siguientes herramientas:

**Matriz de confusión** : (Confusion matrix) Es una matriz, donde las celdas representan las predicciones que hizo nuestro modelo de clasificación de clases, respecto a las salidas esperadas. Así siendo las columnas las salidas y's del modelo entrenado y las filas las salidas esperadas  $y_{true}$ . Nos facilita a ver cuando un clasificador está confundiendo clases, contabilizando a que clase etiqueto a los diferentes ejemplares. Ahora veamos, que puede estar representando cada celda en la matriz de confusión, estos pueden ser:

1. **VP** Verdaderos positivos (*TP, True Positive*): La clasificación de los ejemplares predichos, condicen con las etiquetas esperadas de los ejemplares.
2. **VN** Verdaderos negativos (*TN, True Negative*): El ejemplar que no es parte de clase, no son asignados a esa clase, son predichos correctamente.
3. **FP** Falso positivo (*FP, False Positivo*): El ejemplar que **no** es parte de una clase i fue clasificado como tal.
4. **FN** False negativo (*FN, False Negative*): El ejemplar que es parte de una clase i no fue clasificado como tal.

**Ejemplo 4.1.** Notemos un ejemplo sencillo, supongamos que tenemos una tarea binaria, donde queremos indicar que una persona está embarazada (de acuerdo a unos estudios). Ahora tenemos que:

- **VP**, sería predecir que una mujer está embarazada y que en efecto esté embarazada. (**Correcto**)
- **VN**, sería con un hombre que no está embarazado y pues en efecto no está embarazado. (**Correcto**)
- **FP**, sería predecir que un hombre está embarazado y **no** este embarazado. (**Error, tipo 1**)

#### 4. Perceptrón simple

- ***FN***, sería predecir que una mujer **no** está embarazada y esta embarazada. (**Error, tipo 2**)

Entonces dados los resultados binarios que nos entregó el modelo, los médicos nos dan las respuestas correctas a 10 estudios, representadas en la siguiente tabla.

Ejemplar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sujeto	M	F	M	F	M	M	F	F	F	M
Etiqueta	No	Si	No	Si	No	No	No	Si	No	No
Clase	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
Predicho	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
Valores	VN	FN	VN	VP	VN	FP	VN	VP	VN	VN

Con estos datos, podemos construir nuestra matriz de confusión MC contabilizando las salidas obtenidas respecto a las deseadas. Quedando así de la siguiente manera:

		Salidas y	
		Si	No
Etiquetas	Si	VP = 2	FN = 1
	No	FP = 1	VN = 6

**Tabla 4.1** Matriz de confusión binaria.

Ahora para un modelo que sea multiclase, en el que tengamos que clasificar varias clases de ejemplares. Tendremos una matriz M de  $n * n$  donde n es el número de clases, así los valores **VP**, **VN**, **FP**, **FN**, son calculados para cada clase e identificados en la matriz M de la siguiente forma, también puedes ver la figura 4.6:

- **VP**, para la clase i será la celda  $M[i][j]$  con la  $i = j$ .
- **VN**, para la clase i será la suma de los valores de toda la matriz menos los valores de la fila i ni los valores de la columna i.
- **FN**, para la clase i será la suma de los valores en la fila i, excepto la celda  $M[i][j]$ , con  $i = j$  que es el **VP**.
- **FP**, para la clase i será la suma de los valores en la columna i, excepto la celda  $M[i][i]$  que es el **VP**.

Valores para la clase i		Salidas y del clasificador			
		clase 1	clase 2	clase i	clase n
Etiquetas ytrue	clase 1	VN	VN	FP	VN
	clase 2	VN	VN	FP	VN
	clase i	FN	FN	VP	FN
	clase n	VN	VN	FP	VN

**Figura 4.6** Matriz de confusión para clasificador multiclasses.

**Ejemplo 4.2.** Tenemos un clasificador encargado de identificar las cinco vocales del español, escritas a mano. Entonces tenemos un total de 5 clases representadas por a, e, i, o, u, cada letra representada por un número del 0 al 4. Así la clase 0 = a, la clase 1 = e y así respectivamente. Este fue entrenado con 15 ejemplares etiquetados y se obtuvieron los siguientes resultados:

Ejemplar e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Etiqueta	a	e	i	o	u	a	a	e	i	i	o	u	o	u	a
Clase y <sub>true</sub>	0	1	2	3	4	0	0	1	2	2	3	4	3	4	0
Predicho y	0	1	3	3	2	1	1	1	2	2	4	4	3	2	0

Ahora para hacer la matriz de confusión MC notamos que tenemos una matriz de 5x5, donde  $MC[i] = \text{Predicho } y$   $MC[j] = \text{EtiquetasReales}$ . Entonces necesitamos contabilizar las predicciones y asignarlas a sus respectivas celdas, donde con la tabla anterior notamos que en el ejemplar e3 con  $y_{true}(e3) = 2$ , se predijo que  $y(e3) = 3$ , entonces  $MC[2][3] += 1$ , pues la etiqueta nos posiciona en la fila 2 y lo predicho en la columna 3. Ahora en el ejemplar e4 con  $y_{true}(e4) = 3$  se predijo que  $y(e4) = 3$ , entonces  $MC[2][2] += 1$ . Así con cada ejemplar vamos a ir sumando su clasificación. Para construirla tendríamos un pseudocódigo siguiente:

```
def getMC (Ejemplares, y):
    """
    :param y: salidas obtenidas (int)
    """
    MC = [len(y)] [len(Ejemplares)] # y == Ejemplares
    full_zeros(MC)
    for e in range (0, len(Ejemplares)):
        predicho = y[e]
        y_true = Ejemplares[e].etiqueta
```

#### 4. Perceptrón simple

---

```
MC[predicho][y_true] += 1
return MC
```

Dados los datos anteriores tenemos, la siguiente matriz de confusión:

		Salidas y				
		1	2	3	4	5
Etiquetas	1	2	2	0	0	0
	2	0	2	0	0	0
	3	0	0	2	1	0
	4	0	0	0	2	1
	5	0	0	2	0	1

**Tabla 4.2** MC = Matriz de confusión multiclas.

Para calcular los valores *VP*, *VN*, *FP*, *FN*, por clase se propone el siguiente pseudo-código:

```
MC = getMC(y_salidas, y_true)

VP = VN = FP = FN = [0,0,0,0,0]

for i in range(len(MC)):
    for j in range(len(MC[0])):
        FN[i] = FN[i] + MC[i][j] if (i != j) else FN[i]
        FP[i] = FP[i] + MC[j][i] if (i != j) else FP[i]
        VP[i] = MC[i][j] if (i == j) else VP[i]
        VN[i] = sum(MC) - FN[i] - FP[i] - VP[i]
```

Si quisieramos saber los valores *VP*, *VN*, *FP*, *FN*, para todo el desempeño total, simplemente sumamos lo obtenido en cada clase así:

```
VP_total = sum(VP)
VN_total = sum(VN)
FP_total = sum(FP)
FN_total = sum(FN)
```

Ahora los valores de cada celda nos representan lo siguiente:

- $VP_{total}$ , toda la diagonal de la matriz. La salida del modelo coincide con lo etiquetado con el ejemplar.
- $VN_{total}$ , todas las veces que no era la clase  $i$  y dijó que no era de la clase  $i$ .
- $FN_{total}$ , todas las veces que era  $clase_i$  y dijó que era  $clase_x$ . (deseado  $FN = 0$ )
- $FP_{total}$ , todas las veces que predijo que era  $clase_i$  y era  $clase_x$ . (deseado  $FP = 0$ )

Así que, si los valores que no están en la diagonal de la matriz son cero o todas nuestras clasificaciones están en la diagonal, podemos decir que nuestro modelo aprendió a clasificar correctamente todas las clases.

**Precisión y recuperación** : La precisión (*precision*) nos dice la proporción de ejemplares que se logró clasificar correctamente. Mientras que recuperación (*recall*) nos dice cuantas asignaciones de lo que nos interesa pudo clasificar correctamente en otras palabras donde del total de las respuestas correctas que se pueden tener, cuantas respuestas positivas acertadas se tuvo.

$$P = \frac{VP}{VP + FP} = \frac{\text{VerdaderosPositivos}}{\text{ValoresEsperados}} \quad (4.4)$$

$$R = \frac{VP}{VP + FN} = \frac{\text{VerdaderosPositivos}}{\text{ValoresPredichos}} \quad (4.5)$$

Valores para la clase $i$		Salidas y del clasificador			
		clase 1	clase 2	clase $i$	clase n
Etiquetas ytrue	clase 1	VN	VN	FP	VN
	clase 2	VN	VN	FP	VN
	clase $i$	FN	FN	VP	FN
	clase n	VN	VN	FP	VN

Recall =  $VP / (VP + FN)$   
Cuantos valores esperados fueron asignados realmente.

Precisión =  $VP / (VP + FP)$   
Cuento de lo que clasifico fue correcto

- Cuando el modelo detecta los ejemplares, pero los incluye en otras clases también:  $P$  es bajo y  $R$  es alto.
- Cuando el modelo no detectó bien los ejemplares, pero tampoco los incluyó en otras clases:  $P$  es alto y  $R$  es bajo.

#### 4. Perceptrón simple

---

- Cuando el modelo detecta los ejemplares y no los incluye en otras clases:  $P$  y  $R$  es alto.
- Cuando el modelo no detecta los ejemplares:  $P$  y  $R$  es bajo.

En ocasiones le daremos más importancia al recall y en otras a la precisión. Retomando el ejemplo previo 4.1, no nos importa tanto los casos de error tipo 1, donde el modelo se equivoca con los ejemplares negativos, nos importa los errores de tipo 2, los Falsos Negativos, en este caso le daremos especial atención al Recall y que este sea alto. Pero si bien nuestra tarea es detectar cuando un correo es spam, no impacta tanto que aunque en ocasiones un correo sea spam, no lo clasifique como tal (error tipo 2 FN), nos es crucial que un correo que no sea spam nos lo clasifique como tal (error tipo 1 FP). Así deseando que los falsos positivos se acerquen a cero, dandonos como resultado una precisión alta aunque el recall sea bajo.

**Exactitud y medida f** : La exactitud (*accuracy*) es una medida de cuántas predicciones correctas en total hizo el modelo para el conjunto de datos completo (no se recomienda usar si tienes clases desbalanceadas, es decir, muchos elementos de una clase y poco de otra pues nos puede fallar totalmente con las clases pequeñas y aun así su valor sería alto). La medida f (*f score*) se utiliza para combinar las medidas de precisión y recall en un solo valor. Es práctico porque hace más fácil el poder comparar el rendimiento combinado de la precisión y la recall. Se dan las ecuaciones a continuación:

$$\text{Accuracy} = A = \frac{VP + VN}{VP + VN + FP + FN} = \frac{VP + VN}{\text{TodosLosValoresClasificados}} \quad (4.6)$$

$$F = \frac{2}{\frac{1}{P} + \frac{1}{R}} = 2 \frac{P * R}{P + R} \quad (4.7)$$

La medida f, también la podemos escribir (con un poco de aritmética) como:

$$F = \frac{2VP}{2VP + FP + FN} \quad (4.8)$$

# 5 | Perceptrón multicapa

## Intro

Vacio, si vacio.

## XOR

Vacio no vacio.

## Propagación hacia adelante manual

Vacio no vacio.

## Propagación hacia adelante vectorizada (con matrices)

Vacio no vacio.

## Interpretación matemática del mapeo no lineal

Vacio no vacio, pero si vacio :P.

## Propagación hacia adelante para el perceptrón multicapa

Cuasi vacio.

## 6 | Entrenamiento por retropropagación

### Esquema general entrenamiento

Vacio pero no vacio.

### Función de error: Entropía cruzada

Vacio pero no vacio.

### Derivada de la función logística

Vacio, pero no vacio :P

### Entrenamiento en la última capa

Vacio no vacio pero si vacio :P

### Parcial con respecto a los pesos en la última capa

Vacio >:]

### Vectorización

La vectorización.

# 7 | Optimización del entrenamiento

## Problemas en redes profundas

Vacio.

## Gradiente desvaneciente (o que explota)

Vacio.

## Estilos de entrenamiento

Vacio.

## Normalización y normalización por lotes

Vacio.

## Regularización

Vacio.

## 8 | Caso de análisis e interpretación

### Red Hinton árbol familiar con numpy (entrenamiento)

Vacio.

### Red Hinton árbol familiar con pytorch

Vacio.

# 9 | Entrenamiento con genéticos

## Algoritmos genéticos

Vacio.

## Neuroevolución

Vacio.

## Antecedentes: Aprendizaje por refuerzo en videojuegos

Vacio.

## Arquitectura para estimar la función de recompensa

Vacio.

## Entrenamiento

Vacio.

# 10 | Mapeos autoorganizados

## Introducción

Vacio.

## Aprendizaje no supervisado

Vacio.

## Mapeos auto-organizados

Vacio.

## Kohonen

Vacio.

# 11 | Redes Neuronales Convolucionales

**Convolución**

**Redes Convolucionales**

**Softmax**

**MNIST**

## **PARTE III**

# **Redes con ciclos**

# 12 | Redes Neuronales Recurrentes

**Derivadas ordenadas**

**Retropropagación en el tiempo**

**Sistemas dinámicos y despliegue del grafo**

**Arquitectura recurrente universal**

**Función de error**

**Forzamiento del profesor**

# 13 | Atención

# 14 | LSTM

# 15 | GRU

## **16 | Casos de análisis: etiquetado de palabras y conjugación de verbos**

16. Casos de análisis:  
etiquetado de palabras y

## **PARTE IV**

# **Redes no dirigidas**

# 17 | Redes de hopfield

## Entrenamiento

# 18 | Máquinas de Boltzman

## Entrenamiento

Partículas y partículas de fantasía

Máquinas de Boltzman Restringidas

# 19 | Redes adversarias

## GANs

# A | Ecuaciones diferenciales

# Bibliografía

- Waldeyer-Hartz, Wilhelm von (1891). «Forschungen im Gebiete der Anatomie des Zentralnervensystems. Deutsche medizinische Wochenschrift 1891; 17 (44)». En: (Sobre algunas investigaciones recientes en el campo de la anatomía del sistema nervioso central)volumen 17, número 44.
- Cho, Kyunghyun y col. (2014). *Learning Phrase Representations using RNN Encoder-Decoder for Statistical Machine Translation*. arXiv: 1406.1078 [cs.CL].
- Doidge, Norman (2007). *The Brain That Changes Itself: Stories of Personal Triumph from the Frontiers of Brain Science*. Penguin Life; Reprint edition.
- Francisco López-Muñoz, Jesús Boya y Cecilio Alamo (2006). «"Neuron theory, the cornerstone of neuroscience, on the centenary of the Nobel Prize award to Santiago Ramón y Cajal"». En: *Brain Research Bulletin*. 70 (4-6): 391–405. doi:10.1016/j.brainresbull.2006.07.010.
- Gers, F.A., J. Schmidhuber y F. Cummins (1999). «Learning to forget: continual prediction with LSTM». En: *1999 Ninth International Conference on Artificial Neural Networks ICANN 99. (Conf. Publ. No. 470)*. Vol. 2, 850-855 vol.2. DOI: 10.1049/cp:19991218.
- John G. Nicholls, A. Robert Martin (2011). *From Neuron to Brain*. Sinauer Associates Inc.
- Kandel, Eric R. (2012). *Principles of Neural Science, Fifth Edition*. McGraw-Hill Education.
- Mesulam, M Marsel (1998a). *From sensation to cognition*. Brain 121.  
– (1998b). «From Sensation to Cognition». En: *Brain* 121, págs. 1013-1052.
- Snell, Richard S. (2001). *Neuroanatomía Clínica*. En español. 3pp,50pp, varias más. Editorial medica panamericana.  
– (2009). *Clinical Neuroanatomy*. 3pp. Lippincott Williams y Wilkins.
- Trappenberg, Thomas P. (2010). *Fundamentals of Computational Neuroscience*. Oxford University Press Inc.
- Wells, Richard B. (2010). «Biological Signal Processing». En: *The Hodgkin-Huxley Model*. Cap. 3, págs. 41-65.