Cadeias de Markov para Recifes de Coral

Table of contents

1 O Problema

Os recifes de coral enfrentam várias ameaças ambientais, como branqueamento, acidificação dos oceanos e destruição física. Essas ameaças podem ser modeladas usando uma Cadeia de Markov para entender a probabilidade de um recife estar em um certo estado de saúde ao longo do tempo.

Estados

Definimos três estados possíveis para a saúde de um recife de coral:

- **S1:** Saudável
- **S2:** Moderadamente Degradado
- **S3:** Severamente Degradado

Matriz de Transição

A matriz de transição de estados, P, representa as probabilidades de transição entre os estados de saúde de um recife de coral de um período para o outro.

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Cada elemento P_{ij} na matriz representa a probabilidade de transição do estado j na coluna para o estado i na linha. Por exemplo, $P_{12} = 0.2$ indica que há uma probabilidade de 20% de um recife saudável ($S1$) passar para o estado moderadamente degradado ($S2$) no próximo período.

Vamos considerar que inicialmente no tempo t_0 80% dos recifes estão saudáveis, 15% estão moderadamente degradados e 5% estão severamente degradados. Isso pode ser representado pelo vetor de estado inicial:

$$\vec{v_0} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.15 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Para determinar o estado dos recifes após um período de tempo t_1, multiplicamos o vetor de estado inicial pela matriz de transição:

$$\vec{v_1} = P \times \vec{v_0} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.15 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Realizando a multiplicação, obtemos:

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.25 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

Isso significa que, após um período, 61% dos recifes estarão saudáveis, 25% estarão moderadamente degradados e 14% estarão severamente degradados.

2 Estado Estacionário

Um estado estacionário é alcançado quando o vetor de estado não muda mais após a aplicação da matriz de transição. Isso significa que:

$$\vec{v_{ss}} = P \times \vec{v_{ss}}$$

Portanto, precisamos resolver o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$$

Além disso, há ainda uma condição adicional de que a soma das probabilidades em $\vec{v_t}$ seja 1:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

2.1 Resolução do Sistema

O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_1 \\ 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 = \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.6\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Que pode ser reorganizado como:

$$\begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 \\ 0.2\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.4\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

E em seguida, podemos multiplicar as linhas 1 a 3 por 10 para simplificar o processo e eliminação de variáveis:

$$\begin{cases} -3\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ 2\pi_1 - 5\pi_2 + 3\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 2\pi_2 - 4\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

2.1.1 Passo 1: Eliminação de Variáveis

Podemos simplificar o sistema resolvendo uma equação em termos de outra.

1. Da primeira equação:
$$3\pi_2 = 3\pi_1 - \pi_3 \implies \pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{3}\pi_3$$

2. Substituímos π_2 na segunda equação:
$$2\pi_1 - 5\left(\pi_1 - \frac{1}{3}\pi_3\right) + 3\pi_3 = 0$$
Simplificando:
$$2\pi_1 - 5\pi_1 + \frac{5}{3}\pi_3 + 3\pi_3 = 0 \implies -3\pi_1 + \frac{5}{3}\pi_3 + \frac{9}{3}\pi_3 = 0 \implies -3\pi_1 + \frac{14}{3}\pi_3 = 0 \implies \pi_1 = \frac{14}{9}\pi_3$$

3. Substituindo π_1 e π_2 na equação $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:
$$\frac{14}{9}\pi_3 + \left(\frac{14}{9}\pi_3 - \frac{1}{3}\pi_3\right) + \pi_3 = 1$$
Simplificando:
$$\frac{14 + 14 - 3 + 9}{9}\pi_3 = 1 \implies \pi_3 = \frac{9}{34}$$

2.1.2 Passo 2: Substituindo para Encontrar π_1 e π_2

1. $\pi_1 = \frac{14}{9}\pi_3 = \frac{14}{9} \times \frac{9}{34} = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$
2. $\pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{3}\pi_3 = \frac{7}{17} - \frac{1}{3} \times \frac{9}{34} = \frac{7}{17} - \frac{3}{34} = \frac{14-3}{34} = \frac{11}{34}$

Portanto, o vetor de estado estacionário é:

$$\vec{v_{ss}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{17} \\ \frac{11}{34} \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix}$$

2.2 Interpretação do vetor de Estado Estacionário

No longo prazo, as proporções dos estados dos recifes de coral serão:

$$\vec{v_{ss}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{17} \\ \frac{11}{34} \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.4117 \\ 0.3235 \\ 0.2647 \end{bmatrix}$$

Portanto, no estado estacionário, a distribuição das probabilidades entre os estados é:

- $\pi_1 = \frac{7}{17} \sim 0.4117$
- $\pi_2 = \frac{11}{34} \sim 0.3235$
- $\pi_3 = \frac{9}{34} \sim 0.2647$

A existência de um vetor estacionário indica que, independentemente do estado inicial, a cadeia de Markov converge para essa distribuição de probabilidade quando o sistema está em equilíbrio.

Portanto, mantendo as condições atuais que resultam na matriz de transição vigente, espera-se que, a longo prazo, aproximadamente 41,18% do recife de coral permanecerá em condições *Saudáveis*, 32,35% estará *Moderadamente Degradado* e 26,47% será *Severamente Degradado*.