Cadeias de Markov para Recifes de Coral

Table of contents

1 O Problema

Os recifes de coral enfrentam várias ameaças ambientais, como branqueamento, acidificação dos oceanos e destruição física. Essas ameaças podem ser modeladas usando uma Cadeia de Markov para entender a probabilidade de um recife estar em um certo estado de saúde ao longo do tempo.

Estados

Definimos três estados possíveis para a saúde de um recife de coral:

- **S1:** Saudável
- **S2:** Moderadamente Degradado
- **S3:** Severamente Degradado

Matriz de Transição

A matriz de transição de estados, P, representa as probabilidades de transição entre os estados de saúde de um recife de coral de um período para o outro.

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Cada elemento P_{ij} na matriz representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j. Por exemplo, $P_{12} = 0.2$ indica que há uma probabilidade de 20% de um recife saudável ($S1$) passar para o estado moderadamente degradado ($S2$) no próximo período.

Vamos considerar que inicialmente no tempo t_0 80% dos recifes estão saudáveis, 15% estão moderadamente degradados e 5% estão severamente degradados. Isso pode ser representado pelo vetor de estado inicial:

$$\vec{v_0} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.15 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Para determinar o estado dos recifes após um período de tempo t_1, multiplicamos o vetor de estado inicial pela matriz de transição:

$$\vec{v_1} = \vec{v_0} \times P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Calculando:

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0.8(0.7) + 0.15(0.3) + 0.05(0.1) \\ 0.8(0.2) + 0.15(0.5) + 0.05(0.3) \\ 0.8(0.1) + 0.15(0.2) + 0.05(0.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.635 \\ 0.2425 \\ 0.1225 \end{bmatrix}$$

Isso indica que, após um período, aproximadamente 63,5% dos recifes estarão saudáveis, 24,25% estarão moderadamente degradados, e 12,25% estarão severamente degradados.

2 Estado Estacionário

O estado estacionário é um vetor de probabilidades que representa a distribuição dos estados de um sistema em equilíbrio, onde as probabilidades de estar em cada estado não mudam com o tempo. Para uma cadeia de Markov, isso ocorre quando o vetor de estado não muda após uma multiplicação pela matriz de transição.

Propriedade: Se $\vec{v}$ é um vetor de estado estacionário e P é a matriz de transição, então:

$$\vec{v} \times P = \vec{v}$$

Isso significa que a multiplicação do vetor de estado estacionário pela matriz de transição retorna o mesmo vetor.

Vamos continuar com a matriz de transição P que definimos anteriormente:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Para encontrar o vetor de estado estacionário $\vec{v}_{ss}$, resolvemos a equação:

$$\vec{v}_{ss} \times P = \vec{v}_{ss}$$

em que

$\vec{v}_{ss} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$

Para encontrar o vetor de estado estacionário $\vec{v}_{ss}$, precisamos resolver:

$$\vec{v}_{ss} \times P = \vec{v}_{ss}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$$

Isso gera o sistema de equações:

$$\begin{cases} \pi_1 \cdot 0.7 + \pi_2 \cdot 0.3 + \pi_3 \cdot 0.1 & = \pi_1 \\ \pi_1 \cdot 0.2 + \pi_2 \cdot 0.5 + \pi_3 \cdot 0.3 & = \pi_2 \\ \pi_1 \cdot 0.1 + \pi_2 \cdot 0.2 + \pi_3 \cdot 0.6 & = \pi_3 \end{cases}$$

Que simplificado fica:

$$\begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 \\ 0.2\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.4\pi_3 = 0 \end{cases}$$

Há ainda uma condição adicional de que a soma das probabilidades seja 1, portanto $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

De modo que:

$$\begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 \\ 0.2\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.4\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

3 Resolução do Estado Estacionário de Cadeias de Markov

Para encontrar o vetor de estado estacionário $\vec{v}_{ss}$, resolvemos o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix}$$

Além disso, temos a condição adicional:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Assim, o sistema de equações é:

$$\begin{cases} -0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 \\ 0.2\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 \\ 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.4\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

3.1 Simplificação das Equações

Primeiro, simplificamos as equações:

- Dividindo a primeira equação por 0.1:

$$-3\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 0 \quad (1)$$

- Dividindo a segunda equação por 0.1:

$$2\pi_1 - 5\pi_2 + 3\pi_3 = 0 \quad (2)$$

- Dividindo a terceira equação por 0.1:

$$\pi_1 + 2\pi_2 - 4\pi_3 = 0 \quad (3)$$

3.2 Resolver o Sistema de Equações

3.2.1 Expressar π_1 em termos de π_2 e π_3 usando a equação (1).

Isolamos π_1:

$$\pi_1 = \frac{3\pi_2 + \pi_3}{3} \quad (4)$$

3.2.2 Substituir π_1 nas equações (2) e (3).

Substituindo (4) na equação (2):

$$2\left(\frac{3\pi_2 + \pi_3}{3}\right) - 5\pi_2 + 3\pi_3 = 0$$

Simplificando:

$$\frac{6\pi_2 + 2\pi_3}{3} - 5\pi_2 + 3\pi_3 = 0$$

Multiplicando tudo por 3:

$$6\pi_2 + 2\pi_3 - 15\pi_2 + 9\pi_3 = 0$$

Simplificando:

$$-9\pi_2 + 11\pi_3 = 0 \quad (5)$$

Substituindo (4) na equação (3):

$$\frac{3\pi_2 + \pi_3}{3} + 2\pi_2 - 4\pi_3 = 0$$

Simplificando:

$$\frac{3\pi_2 + \pi_3}{3} + 2\pi_2 - 4\pi_3 = 0$$

Multiplicando tudo por 3:

$$3\pi_2 + \pi_3 + 6\pi_2 - 12\pi_3 = 0$$

Simplificando:

$$9\pi_2 - 11\pi_3 = 0 \quad (6)$$

3.2.3 Resolver o sistema (5) e (6).

As equações (5) e (6) são equivalentes. Portanto, apenas uma delas é necessária.

Da equação (5):

$$-9\pi_2 + 11\pi_3 = 0$$

Isolando π_2:

$$\pi_2 = \frac{11}{9}\pi_3 \quad (7)$$

3.2.4 Substituir π_2 na equação de normalização.

Usando a equação de normalização:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Substituindo (4) e (7):

$$\frac{3\left(\frac{11}{9}\pi_3\right) + \pi_3}{3} + \frac{11}{9}\pi_3 + \pi_3 = 1$$

Simplificando:

$$\frac{\frac{33}{9}\pi_3 + \pi_3}{3} + \frac{11}{9}\pi_3 + \pi_3 = 1$$

$$\frac{42}{9}\pi_3 + \frac{11}{9}\pi_3 + \pi_3 = 1$$

$$\frac{34}{9}\pi_3 = 1$$

$$\pi_3 = \frac{9}{34}$$

Substituindo π_3 em (7):

$$\pi_2 = \frac{11}{9} \times \frac{9}{34} = \frac{11}{34}$$

Finalmente, substituindo π_2 e π_3 em (4):

$$\pi_1 = \frac{3 \times \frac{11}{34} + \frac{9}{34}}{3} = \frac{42}{102} = \frac{7}{17}$$

3.3 Resultado Final

O vetor de estado estacionário é:

$$\vec{v}_{ss} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{17} \\ \frac{11}{34} \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.4117 \\ 0.3235 \\ 0.2647 \end{bmatrix}$$

4 Interpretação

No estado estacionário, a distribuição das probabilidades entre os estados é:

- $\pi_1 = \frac{7}{17} \sim 0.4117$
- $\pi_2 = \frac{11}{34} \sim 0.3235$
- $\pi_3 = \frac{9}{34} \sim 0.2647$

A existência de um vetor estacionário indica que, independentemente do estado inicial, a cadeia de Markov converge para essa distribuição de probabilidade quando o sistema está em equilíbrio.

Portanto, mantendo as condições atuais que resultam na matriz de transição vigente, espera-se que, a longo prazo, aproximadamente 41,18% do recife de coral permanecerá em condições *Saudáveis*, 32,35% estará *Moderadamente Degradado* e 26,47% será *Severamente Degradado*.