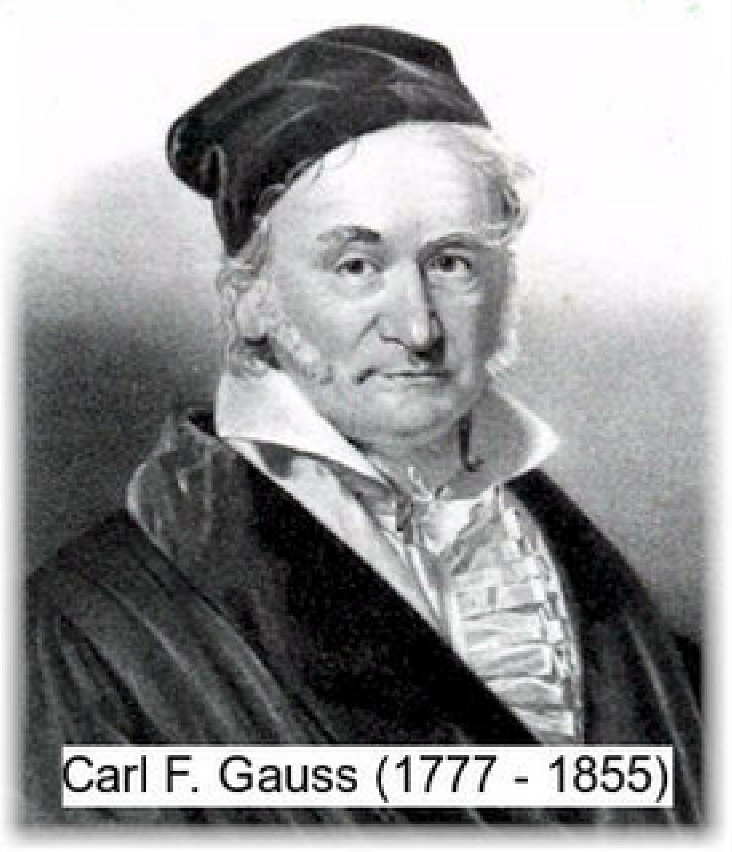
Inferência Estatística

Correlação e Regressão Linear Simples

Fabio Cop (fabiocopf@gmail.com)
Instituto do Mar - UNIFESP
Última atualização em 16 de março de 2022

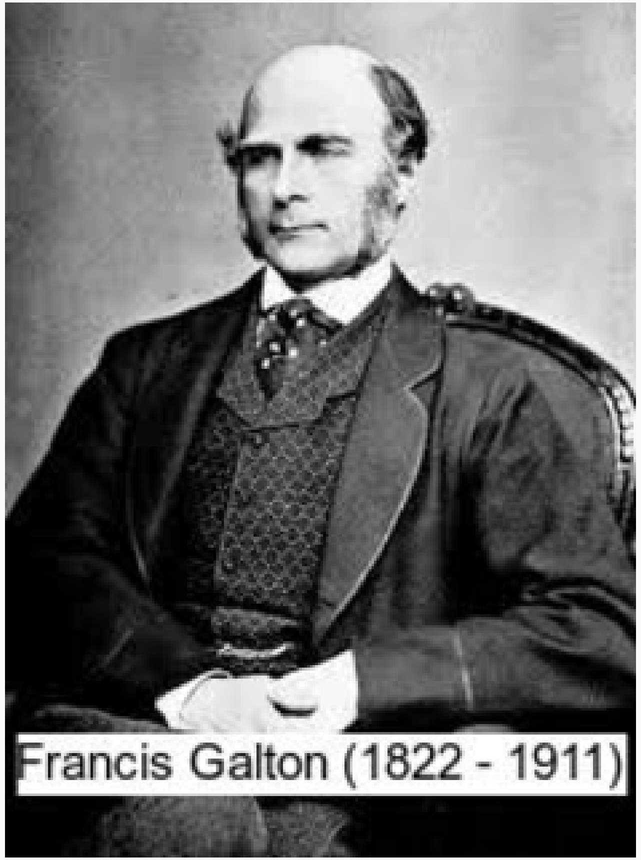
Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

A primeira solução para o problema da regressão (relacionar uma variável resposta Y a uma variável preditora X) foi o **Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)**, publicado por por Gauss (1777 – 1855) em 1809, embora haja relatos históricos de que Gauss pensou e resolveu o problema quando tinha apenas 11 anos. Gauss aplicou o método para obter predições sobre as órbitas dos corpos ao redor do Sol a partir de observações astronômicas.



O termo Regressão

O termo **regressão** foi empregado por Francis Galton em 1866, um dos pais da Biometria e primo de *Charles Darwin*, no séc. XIX, para descrever o fenômeno biológico em que pais muito altos tenderiam a ter descendentes mais baixos que eles próprios e vice versa. A altura dos descendentes tenderia portanto a *regressar* à média da população.

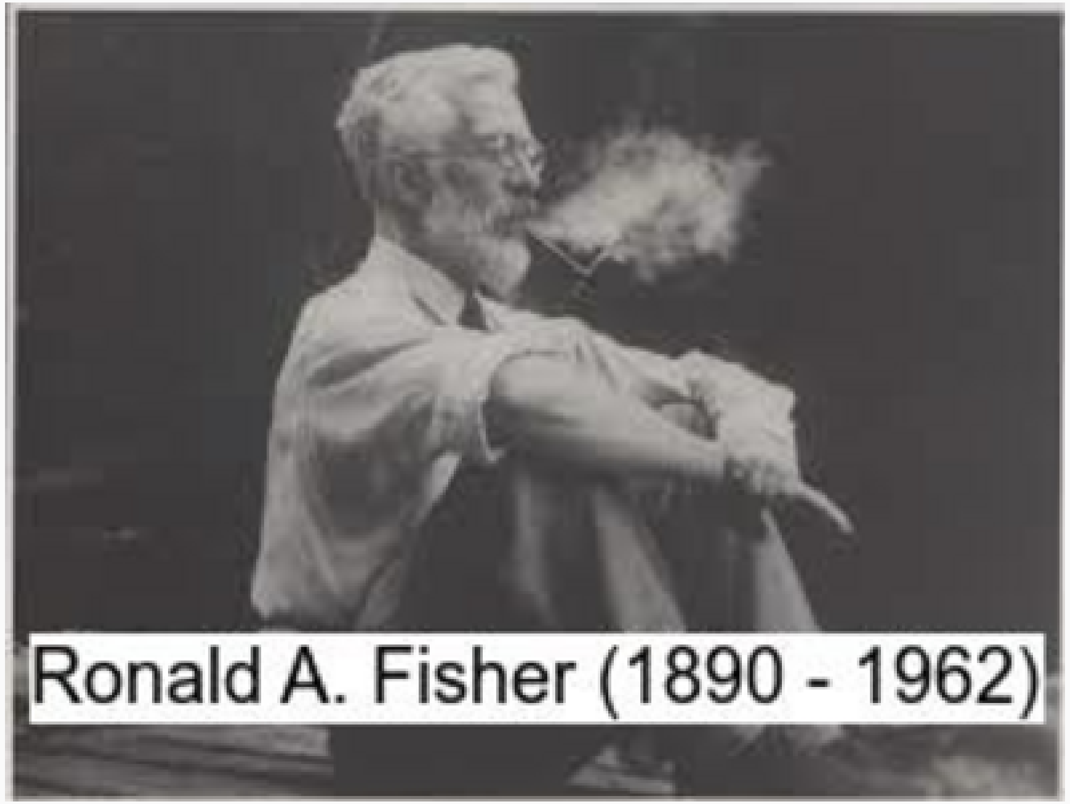


O coeficiente de correlação de Pearson

Galton propôs o **coeficiente de correlação** para medir a associação linear entre duas variáveis quantitativas. Suas idéias foram estendidas por Udny Yule e Karl Pearson para um contexto estatístico mais geral. No modelo de Udny e Pearson assume-se que a distribuição conjunta entre a variável resposta e a variável preditora $f(Y, X)$ é Gaussiana (Normal). Pearson foi um dos diversos autores que começaram a utilizar o termo **distribuição Normal** no início do século XX.

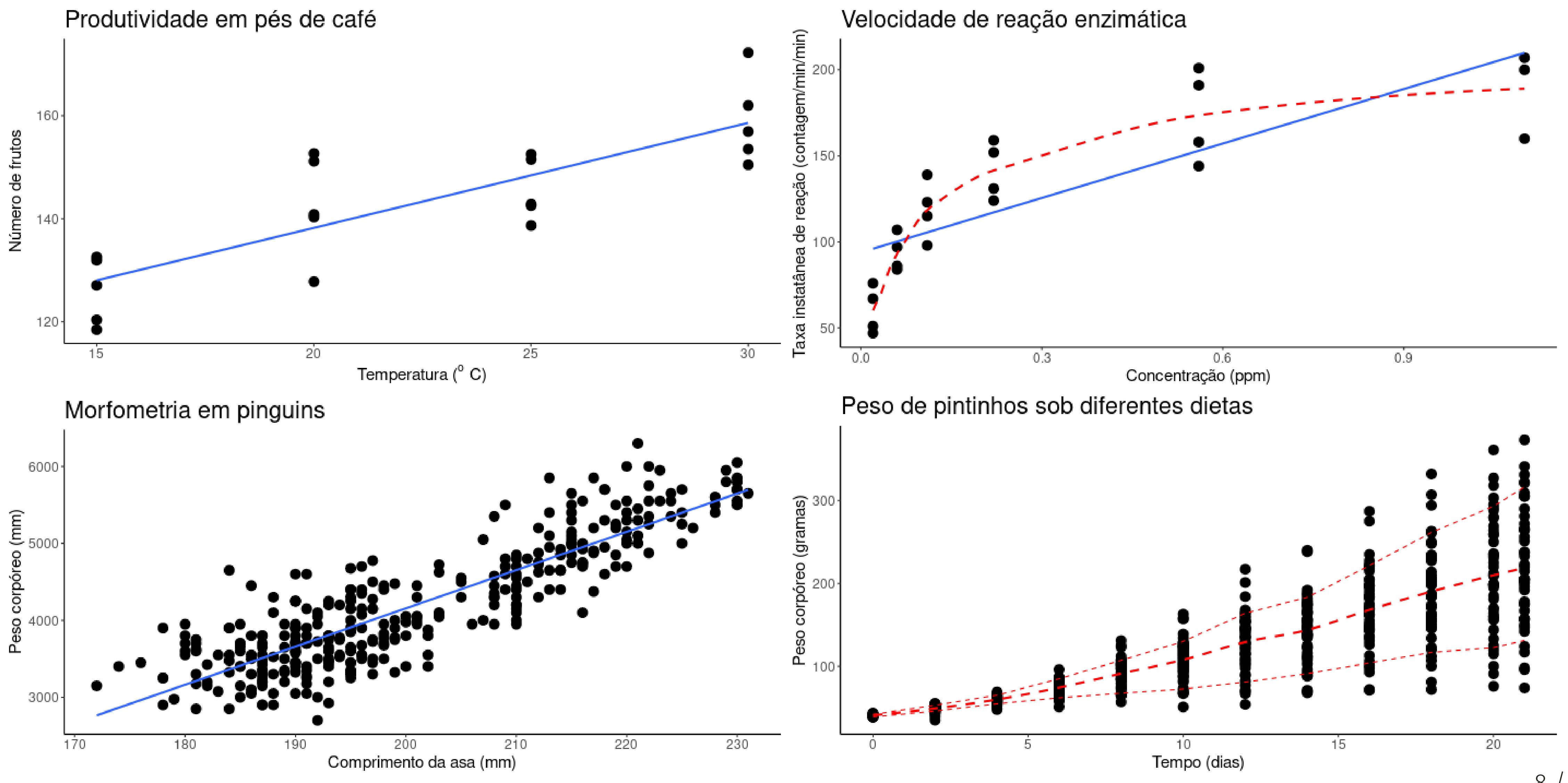
A formulação de Fisher

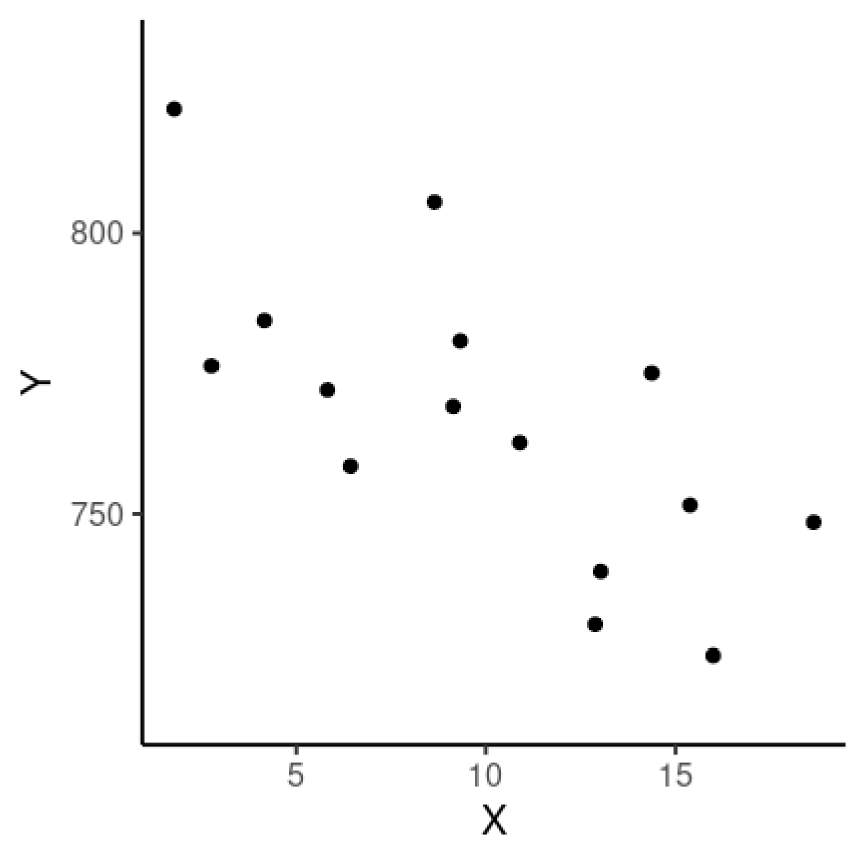
A suposição de Pearson confunde os conceitos de regressão e correlação. Esta suposição foi modificada por R. A. Fisher em 1922 e 1925. Fisher assumiu que a distribuição **condicional** da variável resposta $f(Y|X)$ seja Gaussiana - a conjunta não precisa ser. Esta solução é mais próxima daquela formulada por Gauss. Fisher desenvolveu também o método da **Máxima Verossimilhança (MV)**. Para uma variável em que $f(Y|X)$ é Gaussiana, a solução pelo **MMQ** e pela **MV** convergem. Fisher se dedicou também ao problema de encontrar uma distribuição estatística para o coeficiente de correlação de Pearson.



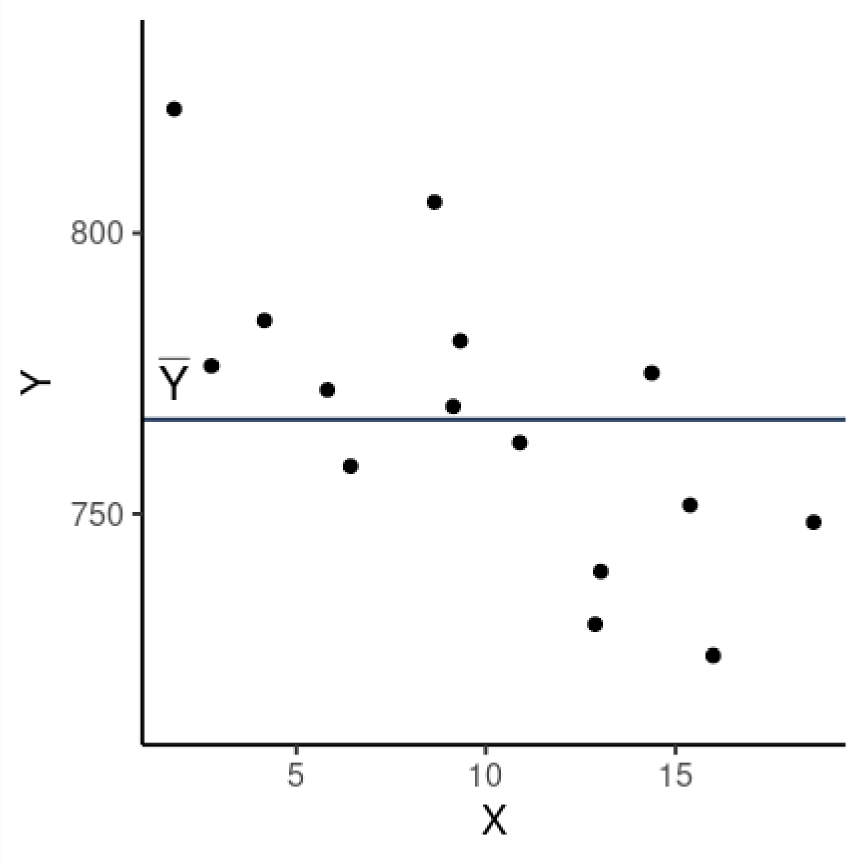
Conteúdo da aula

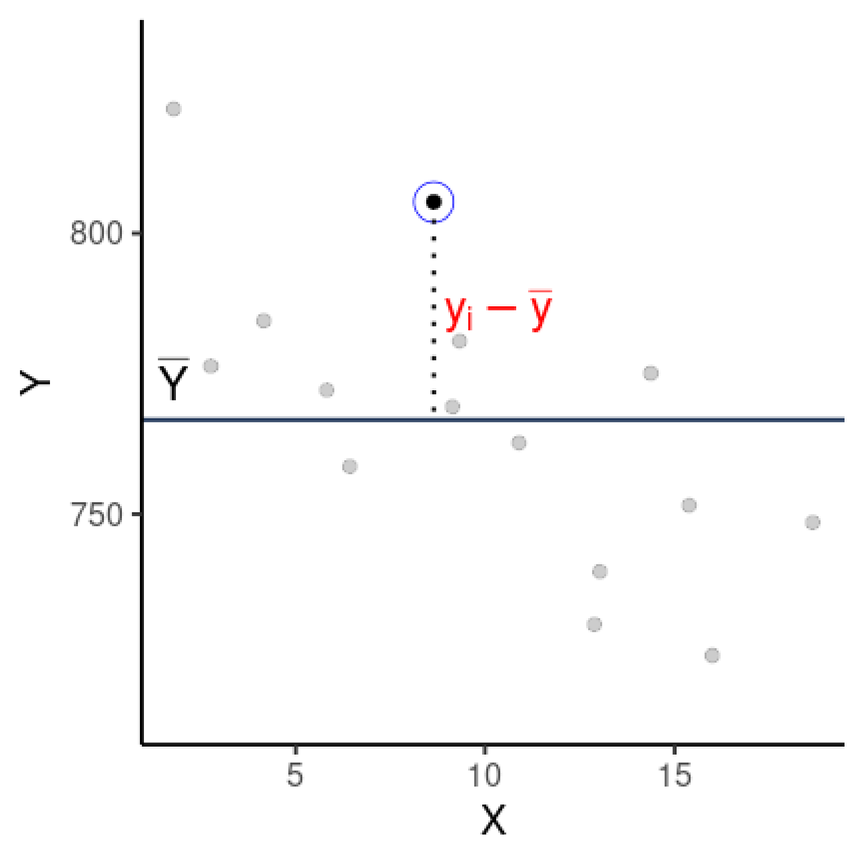
1. Medindo a intensidade de relações lineares

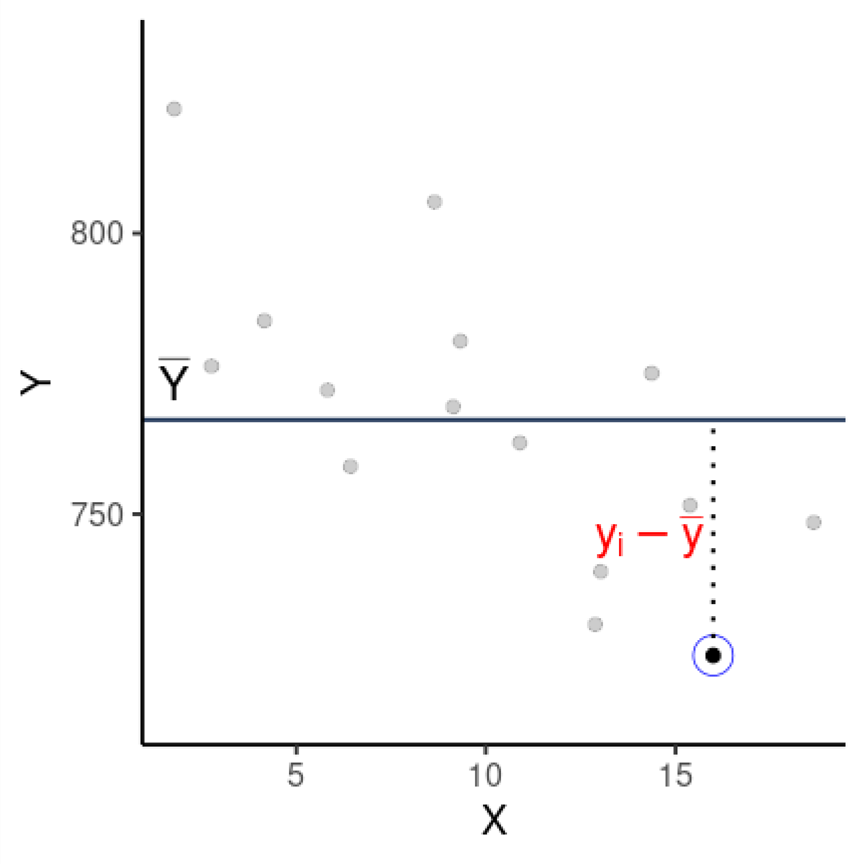


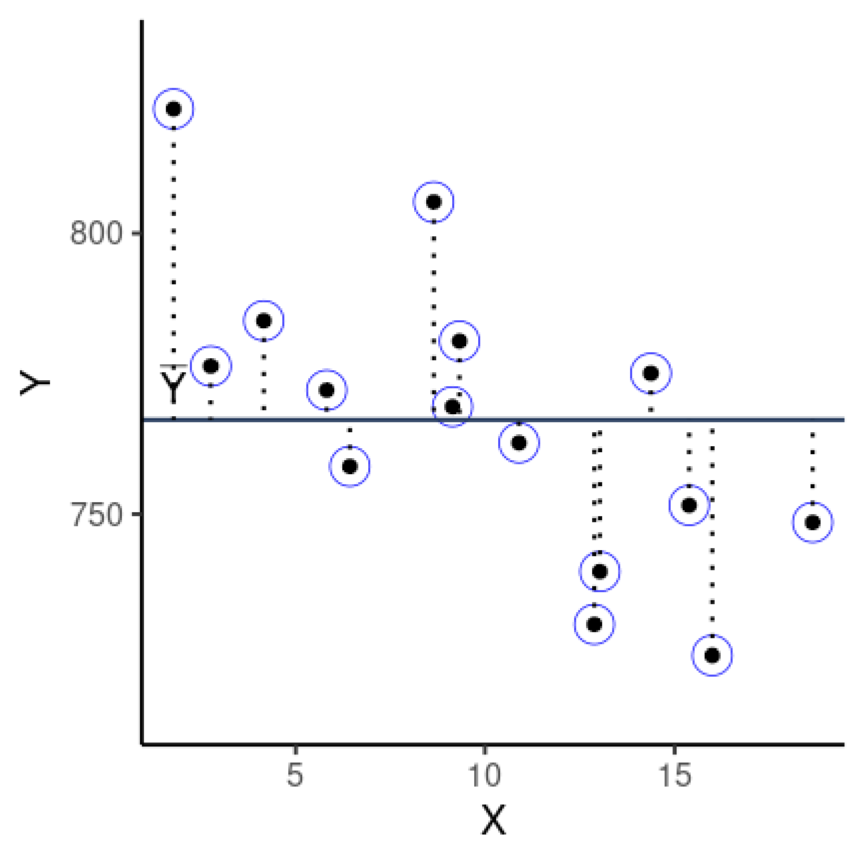

800
750
Y
5
10
15
X

2. Variâncias e Covariâncias




800
750
Y
$\overline{Y}$
$y_i - \overline{y}$
5
10
15
X


800
750
Y
$\overline{Y}$
$y_i - \overline{y}$
5
10
15
X

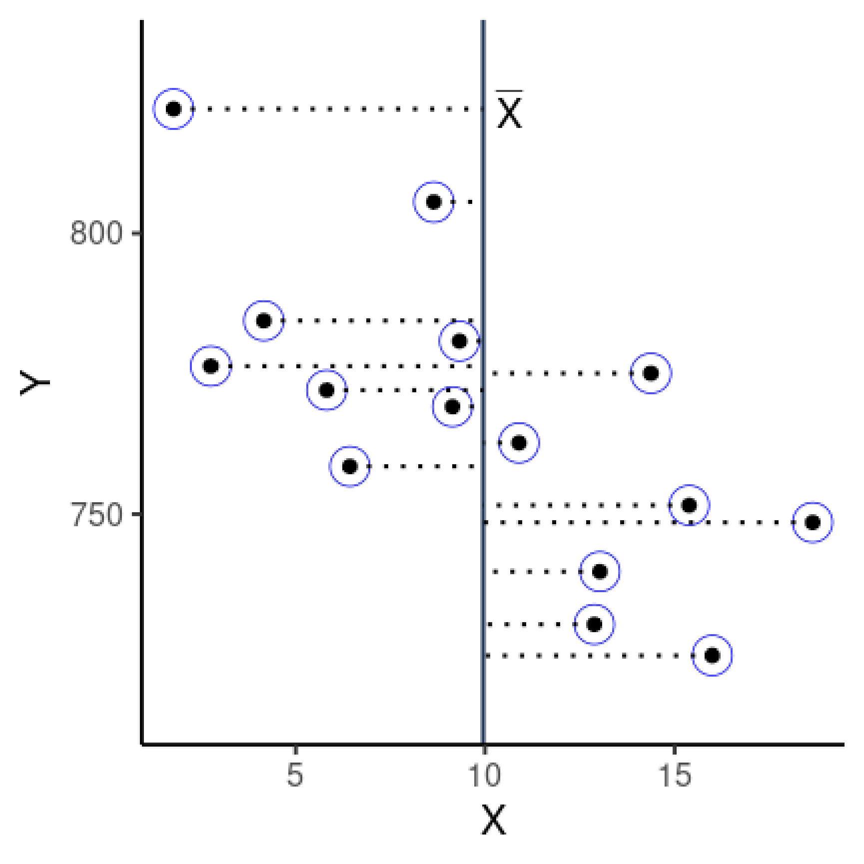


Soma dos Quadrados de Y

$$SQ_Y = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})$$

Variância amostral de Y

$$s_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

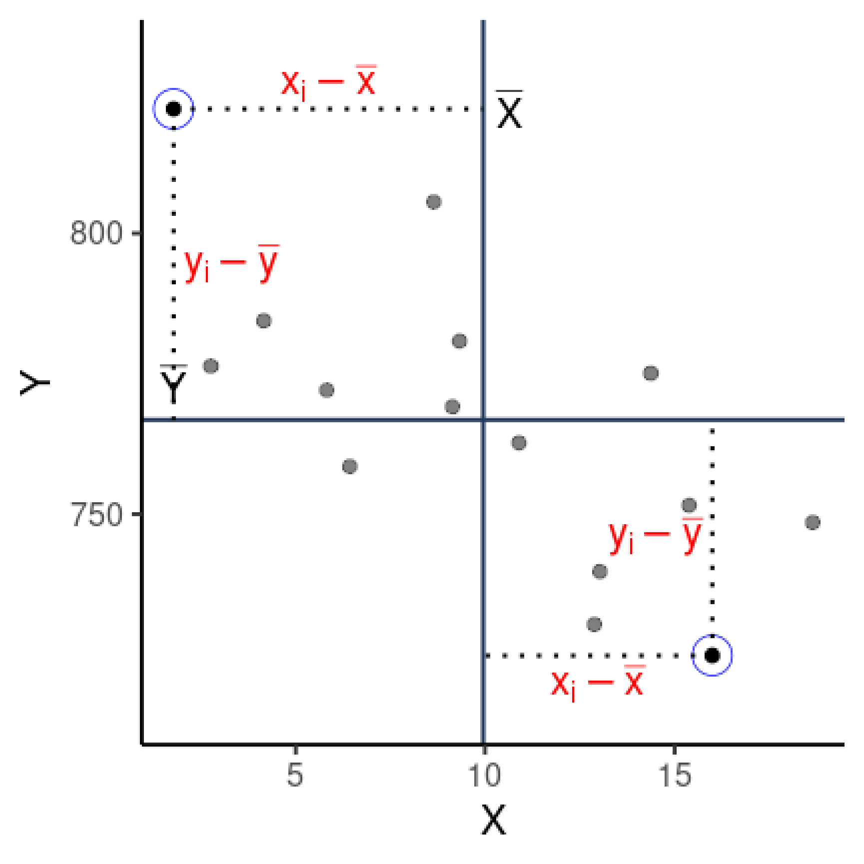


Soma dos Quadrados de X

$$SQ_X = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})$$

Variância amostral de X

$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

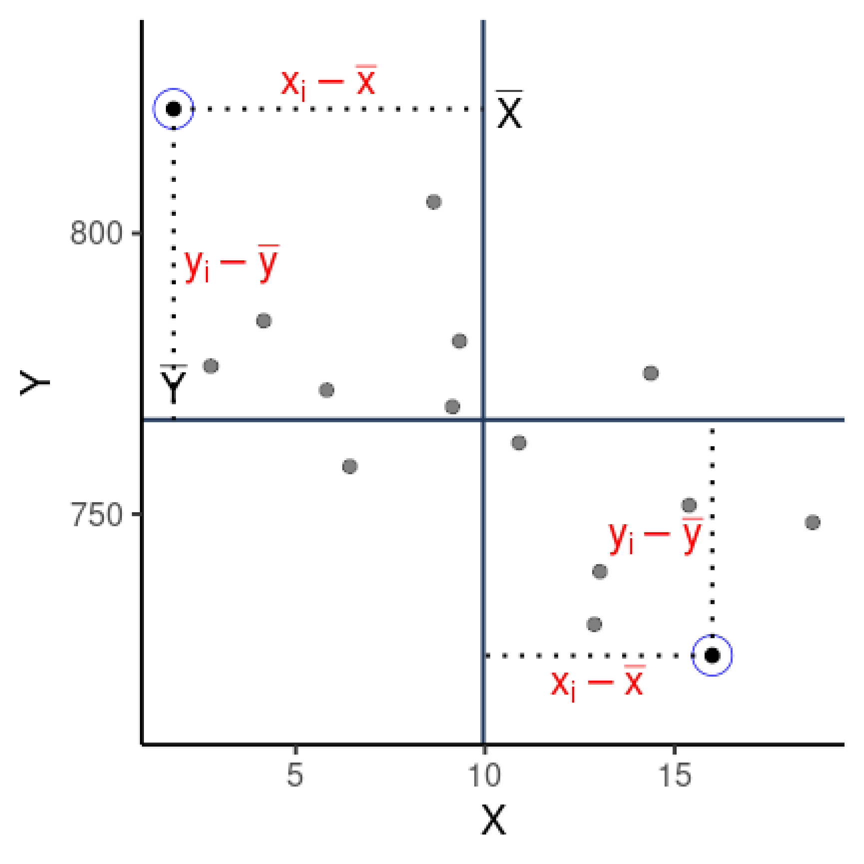


Soma dos produtos cruzados de Y e X

$$SQ_{YX} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

Covariância amostral entre Y e X

$$s_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1}$$



Se

$(y_i - \bar{y}) > 0; (x_i - \bar{x}) < 0$

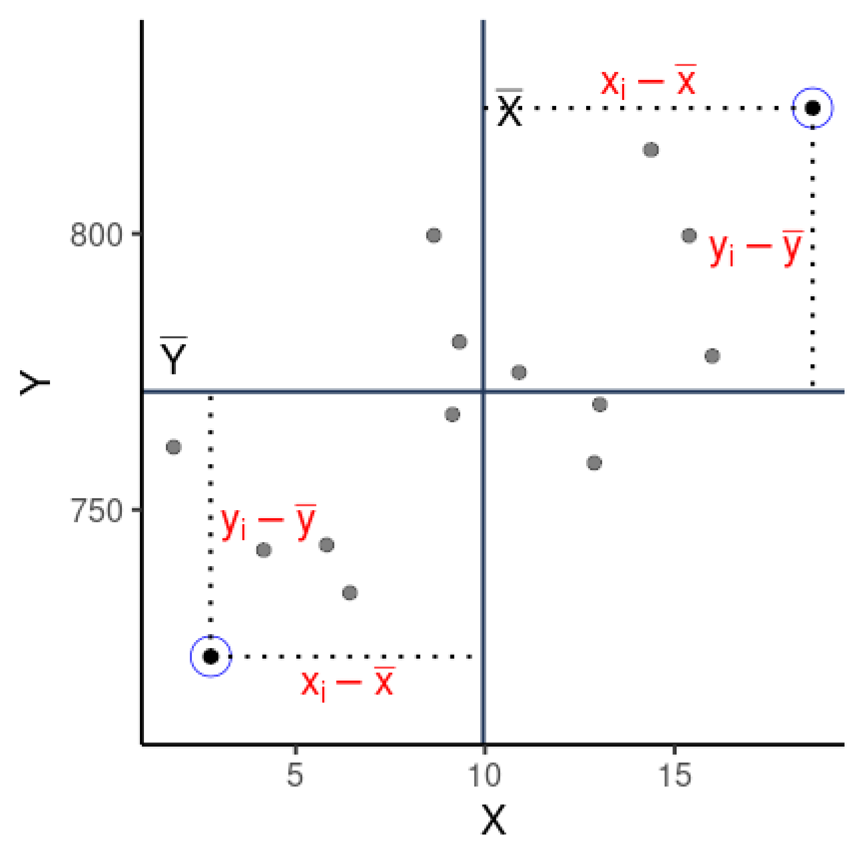
ou

$(y_i - \bar{y}) < 0; (x_i - \bar{x}) > 0$

temos

$$s_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1} < 0$$

A covariância pode ser **NEGATIVA**



Se

$$(y_i - \bar{y}) > 0; (x_i - \bar{x}) > 0$$

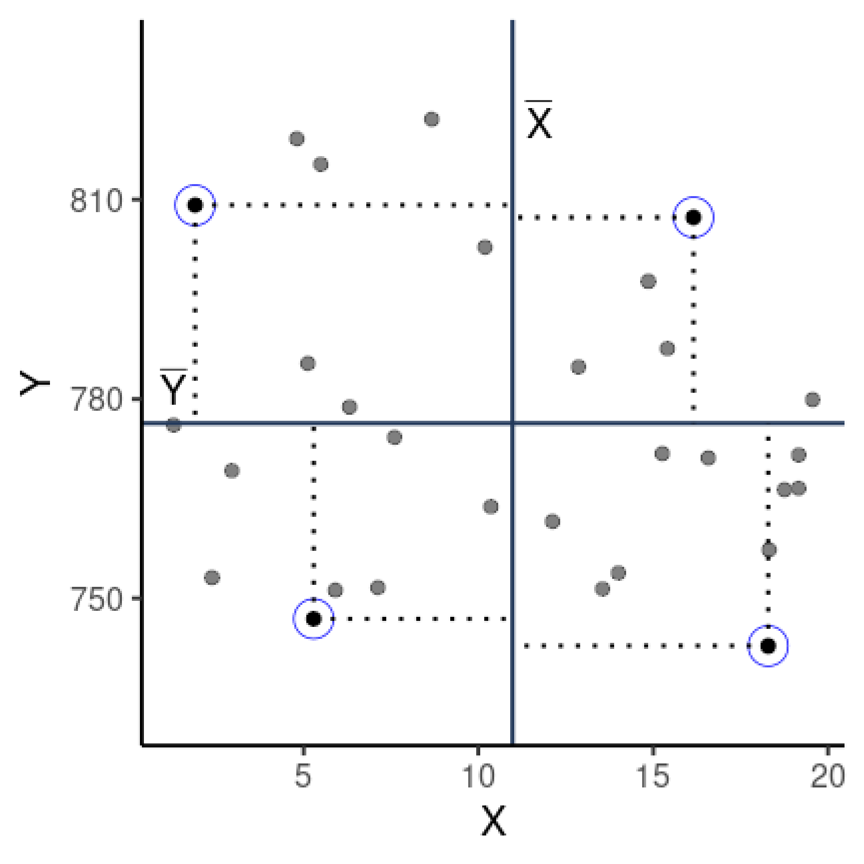
ou

$$(y_i - \bar{y}) < 0; (x_i - \bar{x}) < 0$$

temos

$$s_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1} > 0$$

A covariância pode ser **POSITIVA**



Se

$$(y_i - \bar{y}) \approx 0; (x_i - \bar{x}) \approx 0$$

ou

$$(y_i - \bar{y}) \approx 0; (x_i - \bar{x}) \approx 0$$

Temos

$$s_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1} \approx 0$$

A covariância pode ser **NULA**

Covariância amostral entre Y e X

$$s_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1}$$

Variância amostral de Y

$$s_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Variância amostral de X

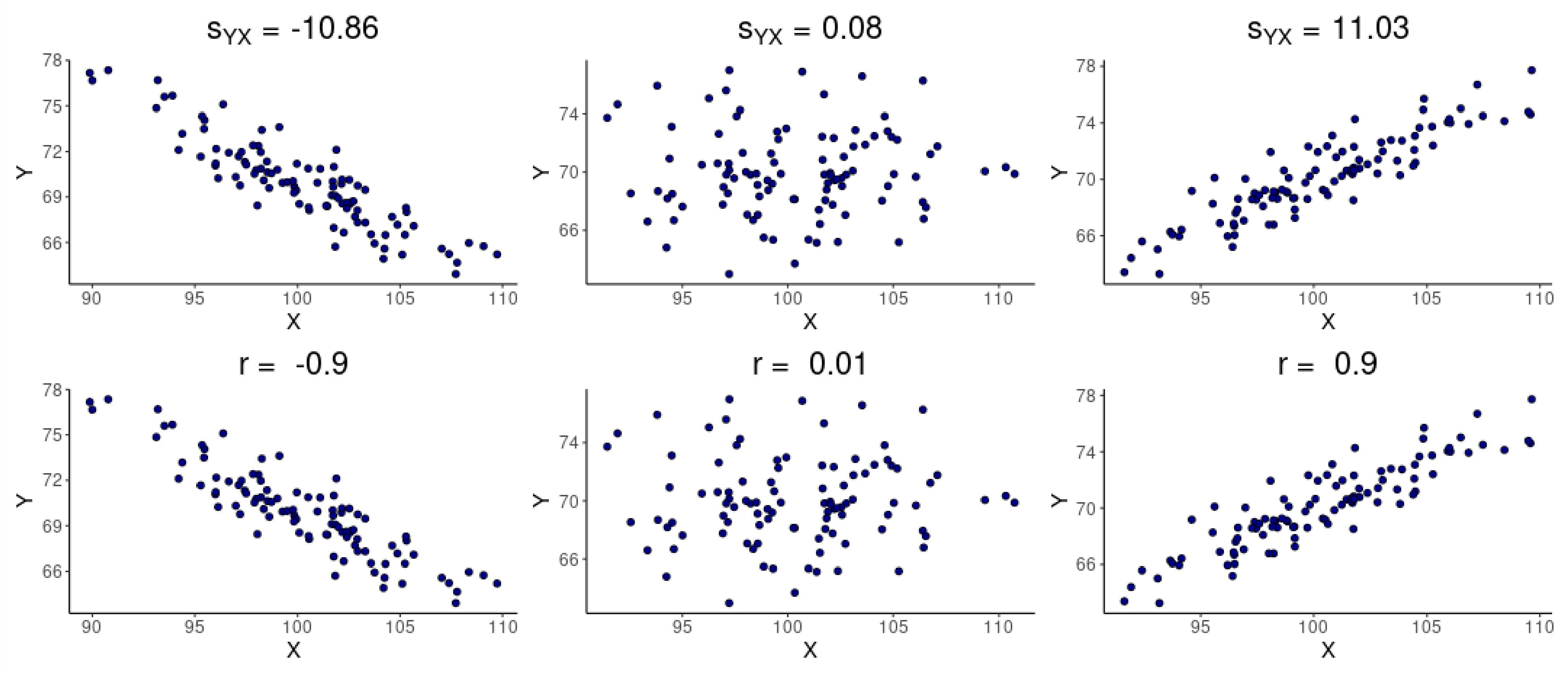
$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

O coeficiente de correlaçao linear de Pearson r

$$r = \frac{s_{YX}}{\sqrt{s_Y^2} \times \sqrt{s_X^2}}$$

O r de Pearson é a covariância **padronizada** pelos desvios padrões de Y e X

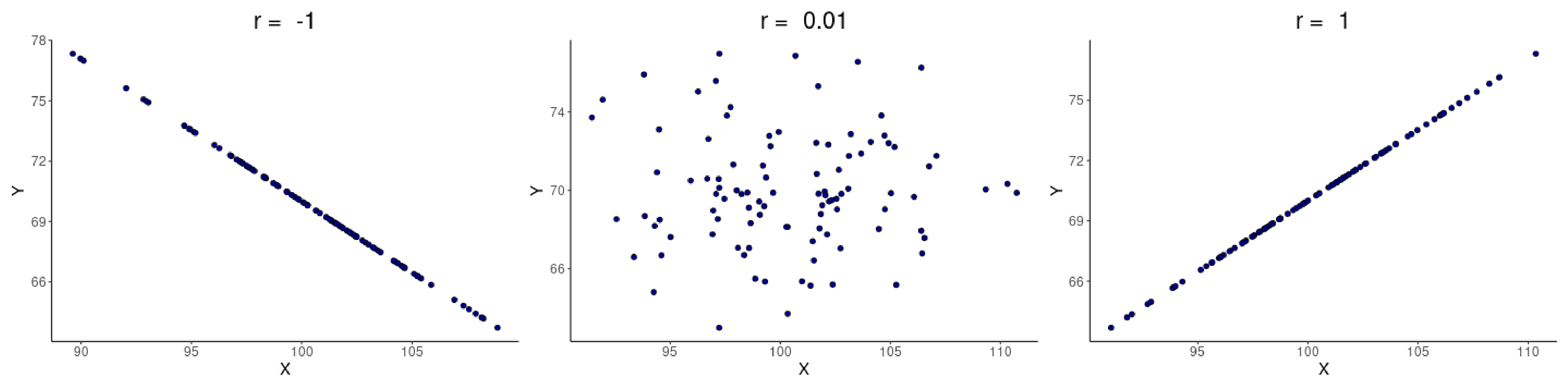
A covariância não tem limites negativos ou positivos. A escala depende das magnitudes de Y e de X.



O r de Pearson varia entre -1 e $+1$.

3. O coeficiente de correlaçao linear de Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$



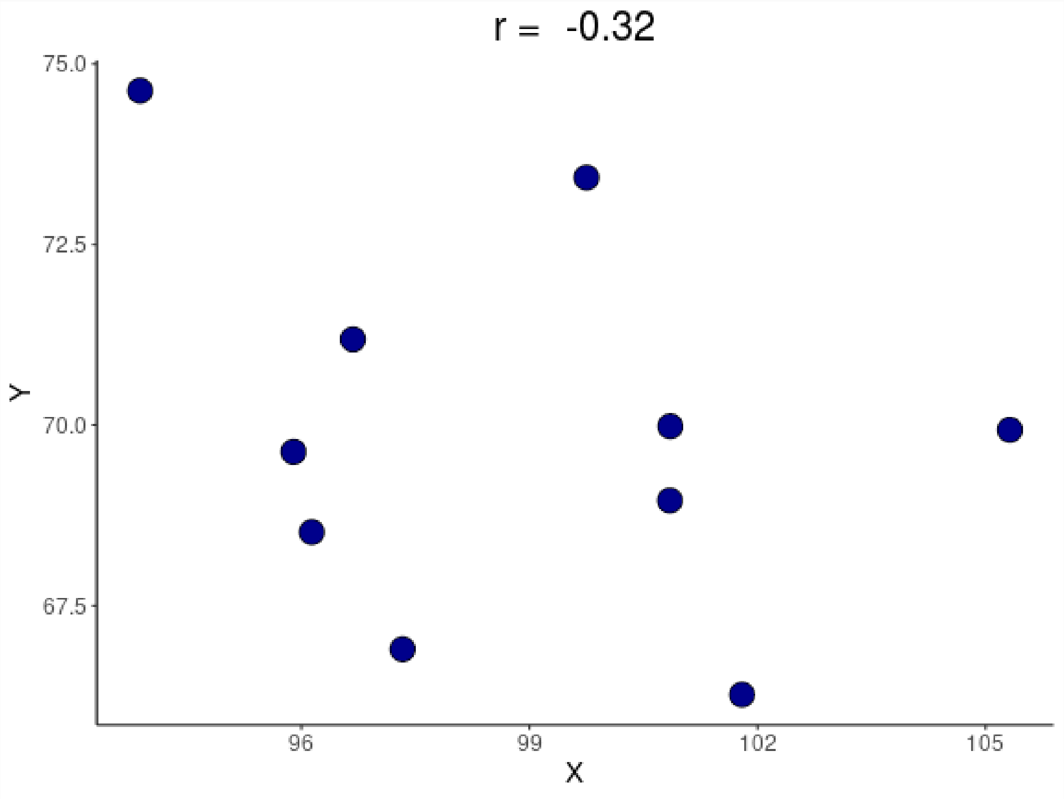
- $r = -1$ (Associção linear perfeitamente **negativa**)
- $r = 0$ (Associção linear inexistente)
- $r = 1$ (Associção linear perfeitamente **positiva**)

Dada uma **amostra** com n observações para os pares Y e X, a correlação entre Y e X na **população estatística** é diferente de zero?

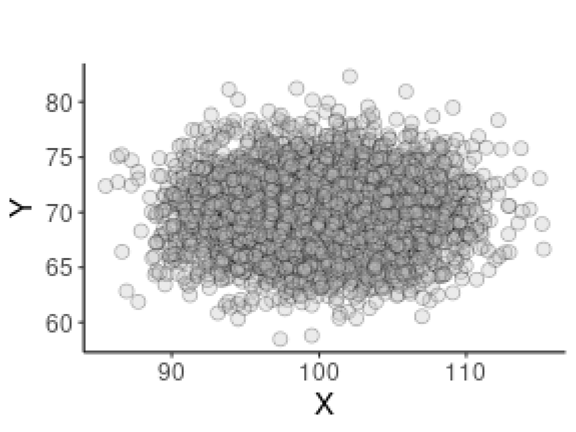
$H_0 : \rho = 0$

$H_a : \rho \neq 0$

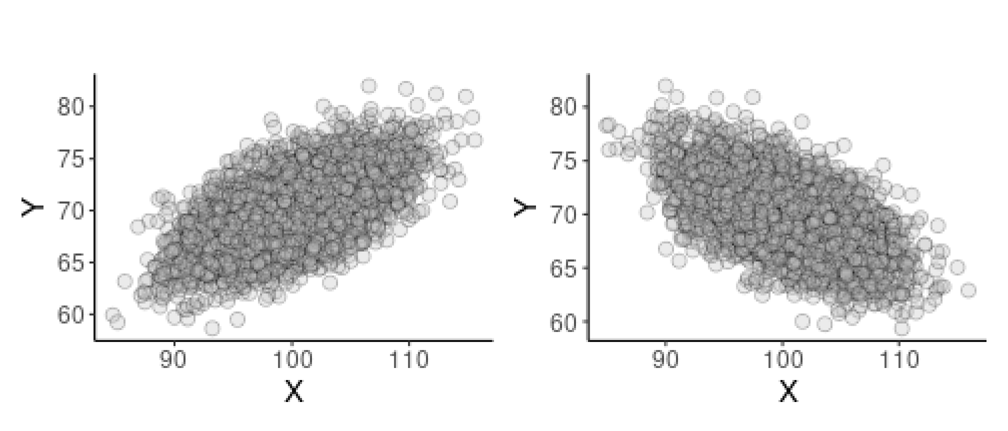
$n = 10$



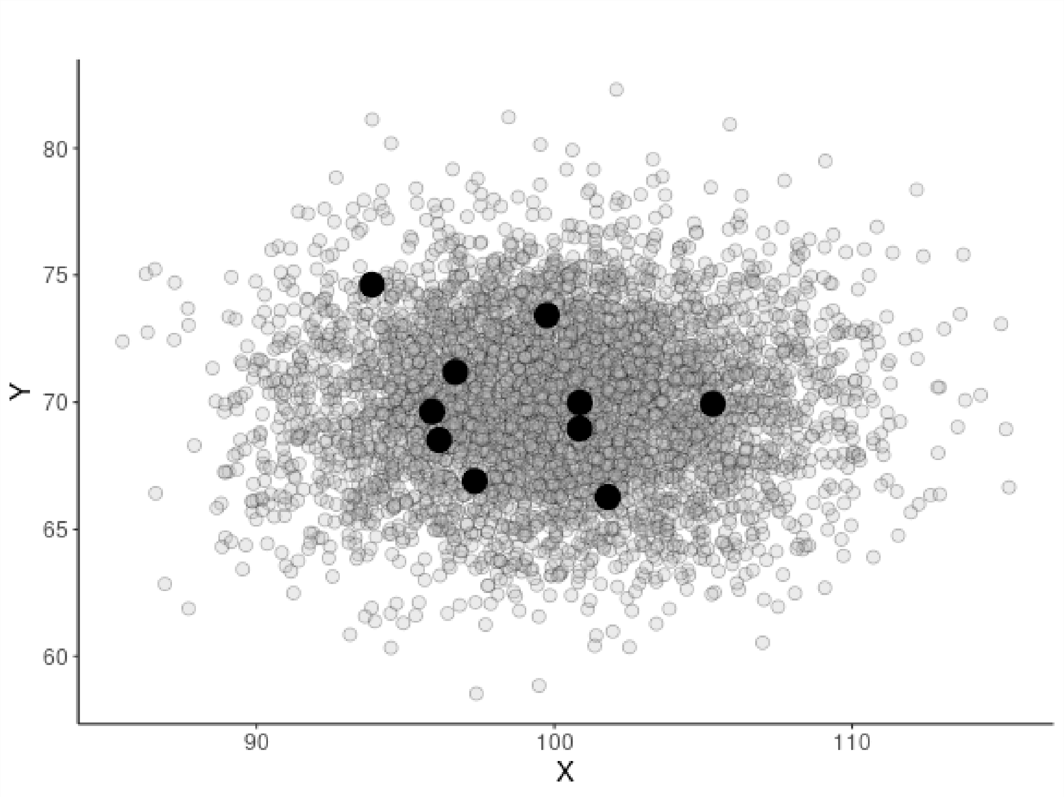
$H_0 : \rho = 0$



$H_a : \rho \neq 0$



Os dados segundo H_0



4. Teste de hipóteses sobre o r de Pearson

Assumimos que distribuição conjunta entre $f(Y, X)$ é Normal.

$H_0 : \rho = 0$

$H_a : \rho \neq 0$

$\alpha = 0.05$

$n = 10$

$r = -0.32$

Estatística do teste - t

$$t_{calculado} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

Segundo H_0

4. Teste de hipóteses sobre o r de Pearson

Teste de hipótese sobre ρ

$\overline{Y} = 98.85$; $\overline{X} = 69.94$; $n = 10$

$r = -0.32$

$$t_{calculado} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{-0.32}{\sqrt{\frac{1-(-0.32)^2}{8}}} = -0.965$$

$p = 0.363$

Assumindo $\alpha = 0.05$, **Aceito** H_0:

> Não há evidências de correlação entre Y e X.

Cálculo do coeficiente de correlação

	Y	X	$\sum(y_i - \bar{y})^2$	$\sum(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$
1	95.9	69.63	8.72	0.10	0.92
2	101.8	66.27	8.68	13.50	-10.83
3	100.85	69.98	4.01	0.00	0.08
4	99.75	73.43	0.81	12.13	3.14
5	93.88	74.63	24.69	21.95	-23.28
6	97.33	66.9	2.30	9.27	4.62
7	96.68	71.19	4.71	1.55	-2.70
8	100.85	68.96	3.99	0.97	-1.97
9	96.14	68.52	7.36	2.03	3.87
10	105.32	69.93	41.87	0.00	-0.06
$\sum$			**107.15**	**61.52**	**-26.21**

Aumentando o tamanho amostral

$H_0 : \rho = 0$

$H_a : \rho \neq 0$

$\alpha = 0.05$

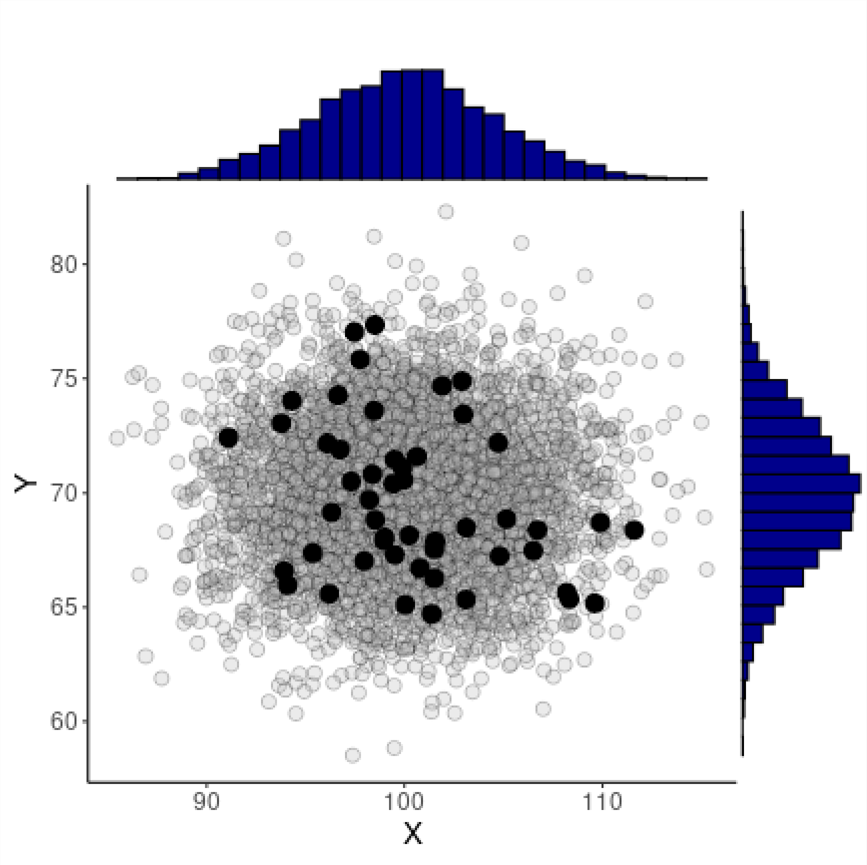
$n = 50$

$r = -0.32$

Estatística do teste - t

$t_{calculado} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$

Segundo H_0



Teste de hipótese sobre ρ

$\overline{Y} = 100.41$; $\overline{X} = 69.64$; $n = 50$

$r = -0.32$

$$t_{calculado} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{-0.32}{\sqrt{\frac{1-(-0.32)^2}{48}}} = -2.363$$

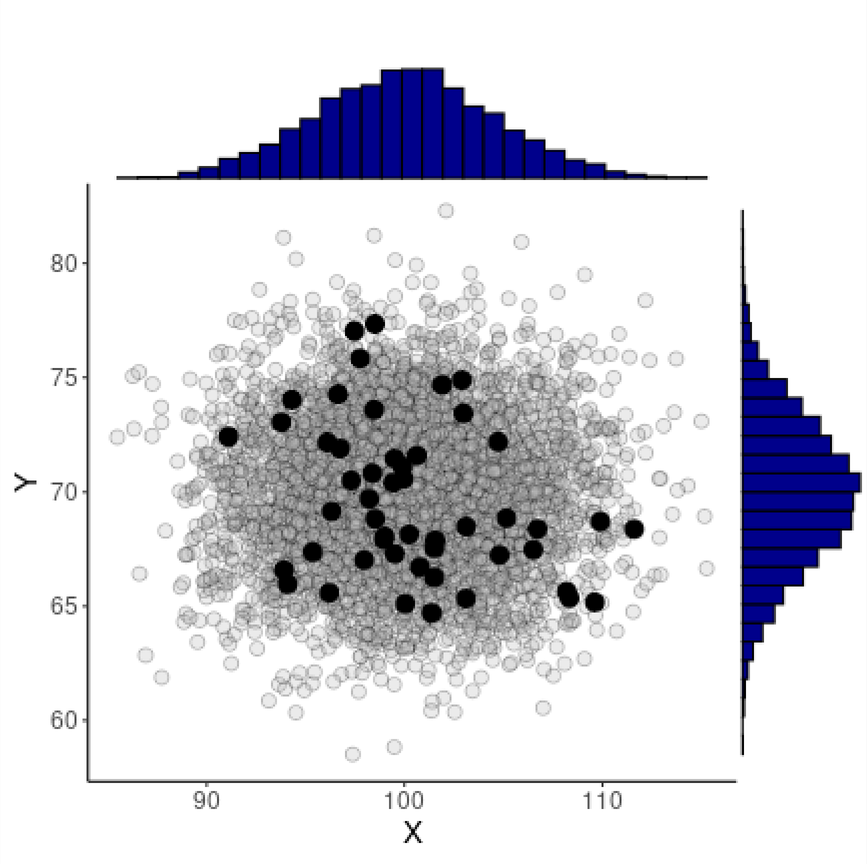
$p = 0.022$

Assumindo $\alpha = 0.05$, **Rejeito** H_0:

> Há evidências de correlação entre Y e X

.

Segundo H_0



4. Teste de hipóteses sobre o r de Pearson

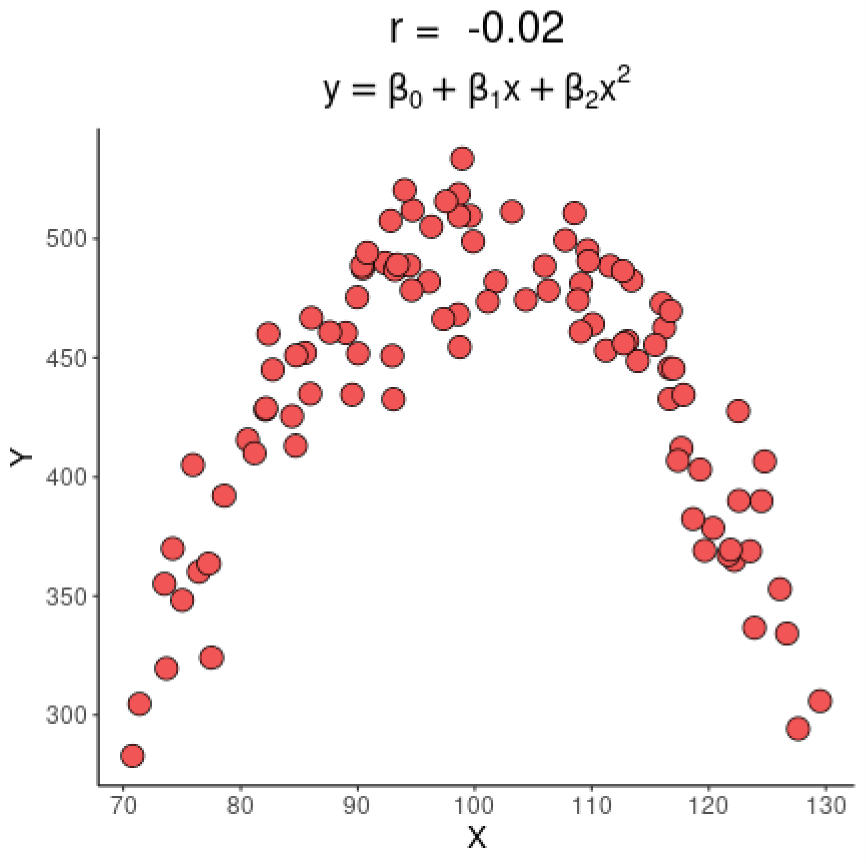
$r = -0.32; n = 10$

$t_{calculado} = -0.965; p = 0.363$

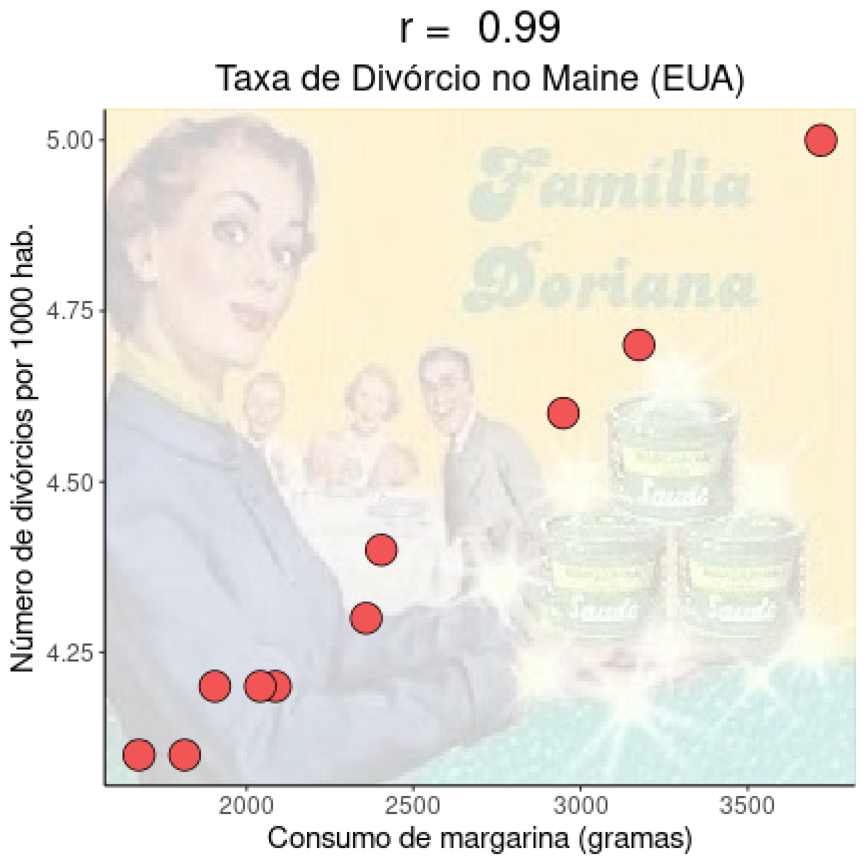
$r = -0.32; n = 50$

$t_{calculado} = -2.363; p = 0.022$

O r mede associações **lineares**



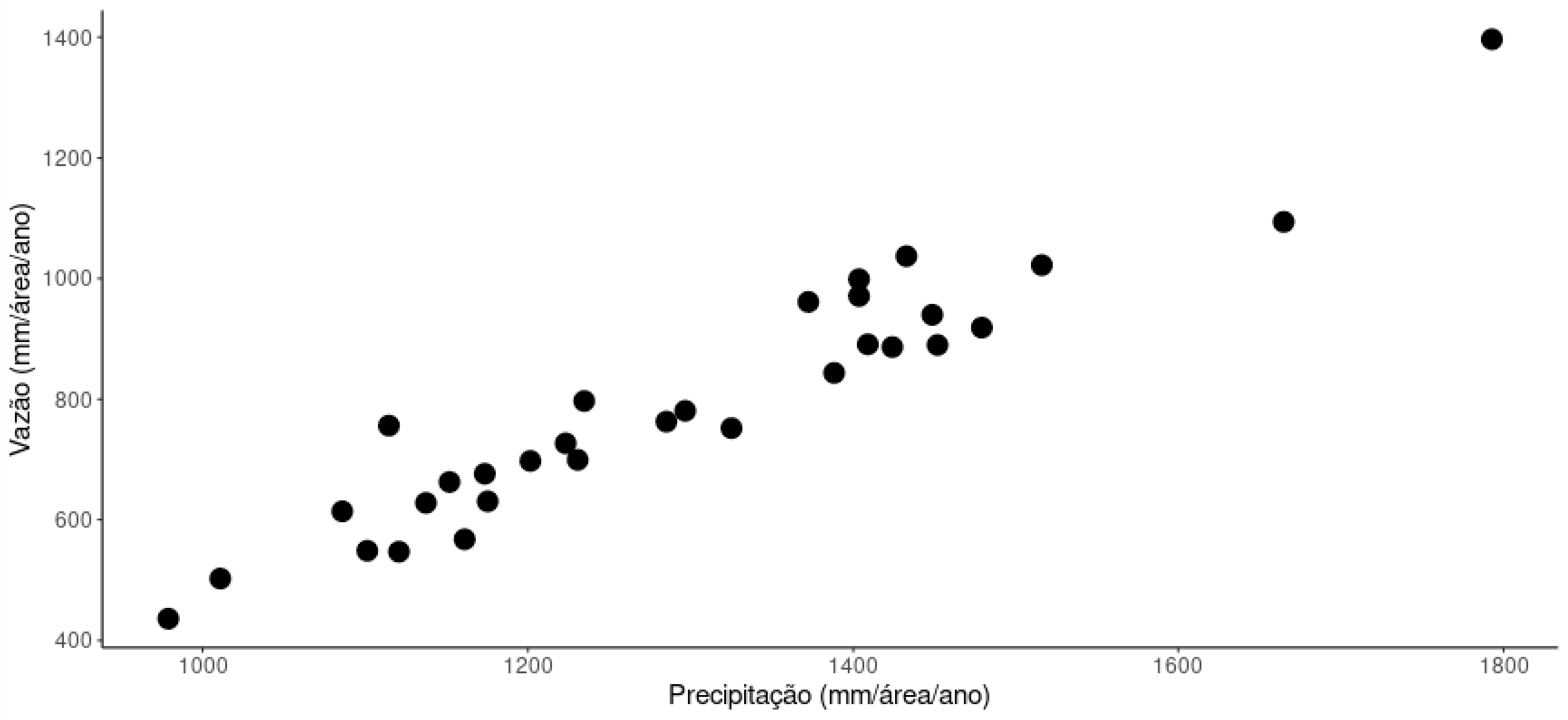
Correlação **não implica** causalidade



5. Regressão linear simples: descrevendo relações funcionais

Um serviço ecossistêmico essencial de bacias hidrográficas é o fornecimento hídrico. Em 1955, o Serviço Florestal americano estabeleceu a Floresta Experimental de **Hubbard Brook (HBEF)** como um centro de pesquisa hidrológica.

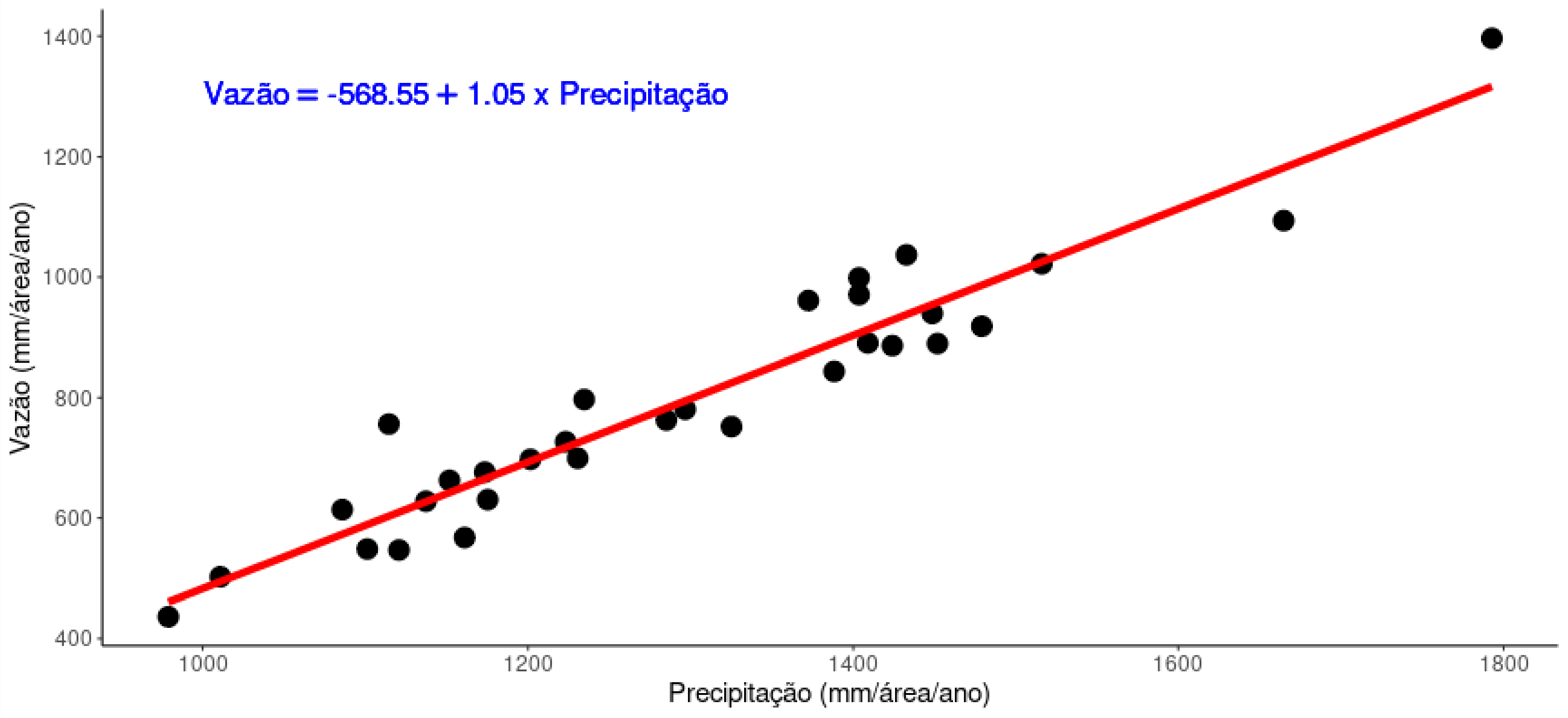
Podemos supor que o volume de água anual que uma bacia pode fornecer tem relação com o volume de chuva na região.



5. Regressão linear simples: descrevendo relações funcionais

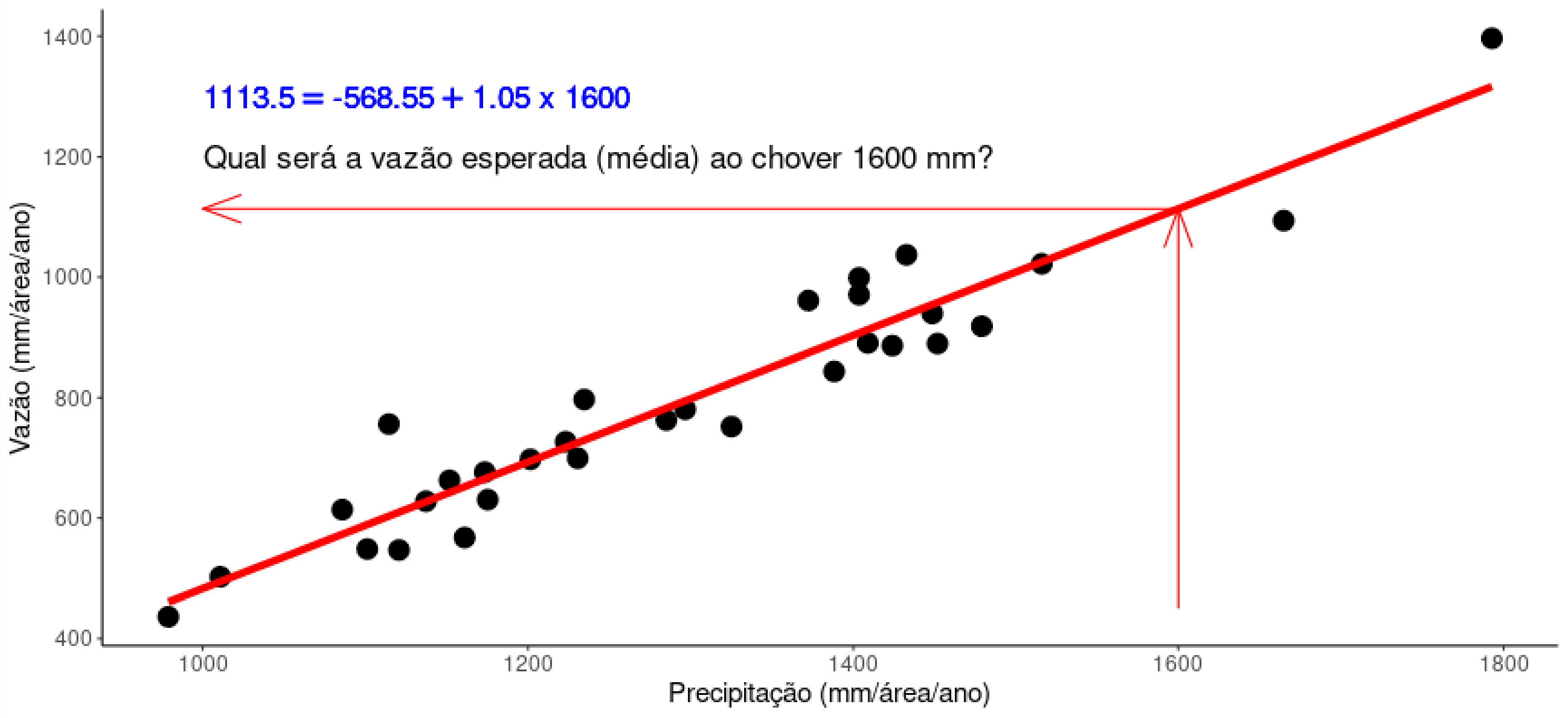
Um serviço ecossistêmico essencial de bacias hidrográficas é o fornecimento hídrico. Em 1955, o Serviço Florestal americano estabeleceu a Floresta Experimental de **Hubbard Brook (HBEF)** como um centro de pesquisa hidrológica.

Podemos supor que o volume de água anual que uma bacia pode fornecer tem relação com o volume de chuva na região.

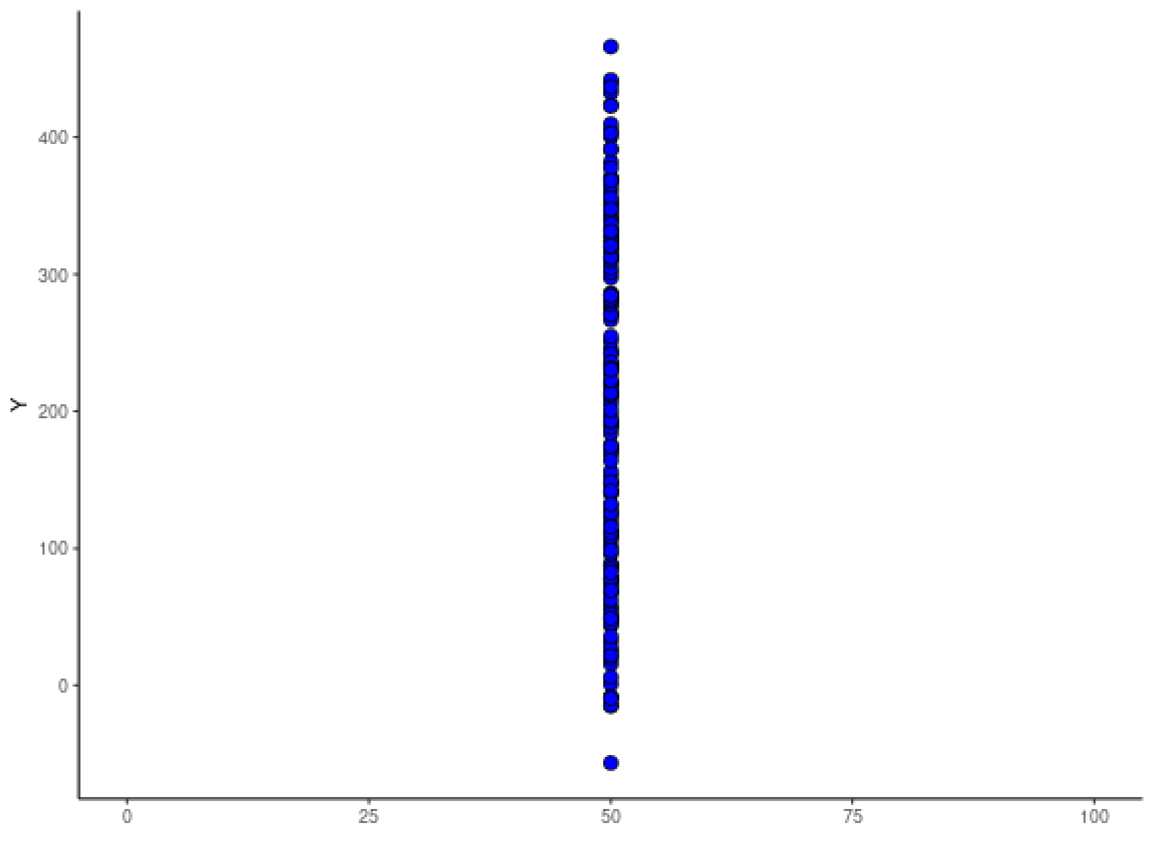


Um serviço ecossistêmico essencial de bacias hidrográficas é o fornecimento hídrico. Em 1955, o Serviço Florestal americano estabeleceu a Floresta Experimental de **Hubbard Brook (HBEF)** como um centro de pesquisa hidrológica.

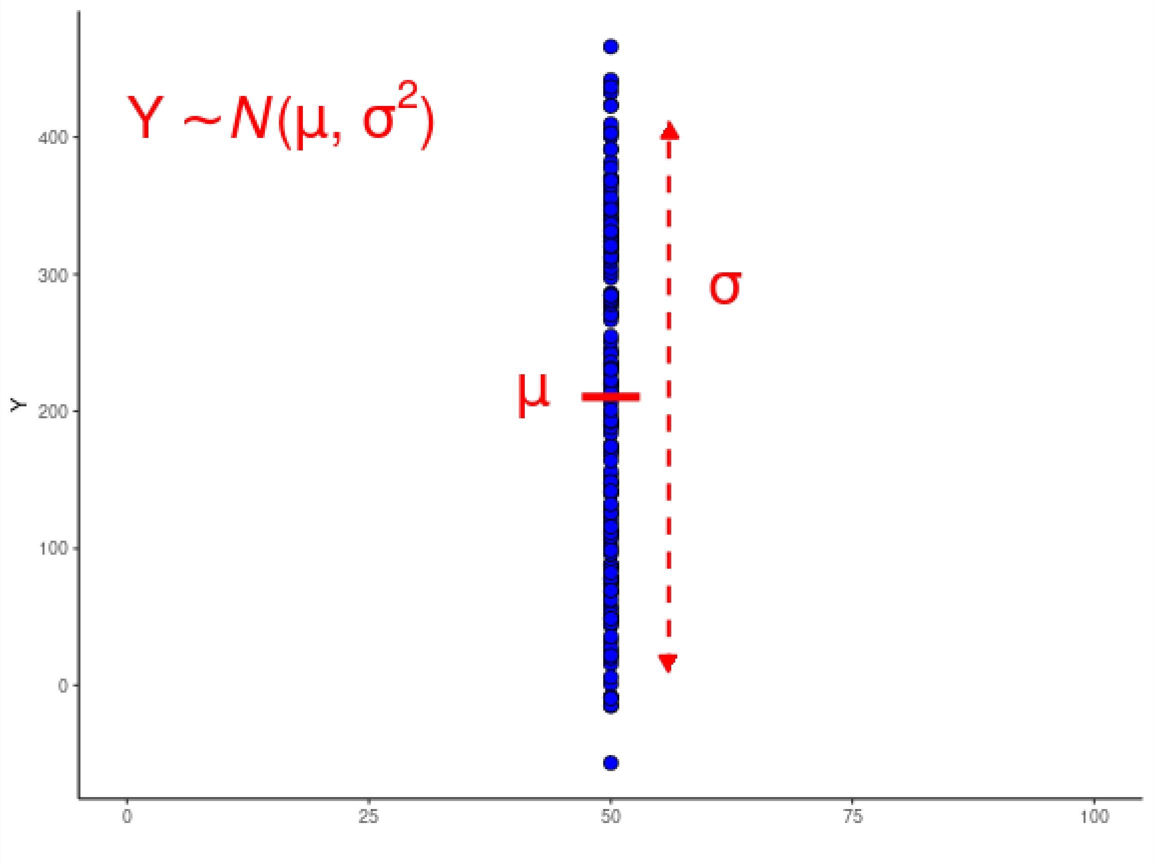
Podemos supor que o volume de água anual que uma bacia pode fornecer tem relação com o volume de chuva na região.



Seja uma variável aleatória Y com distribuição normal proveniente de um *experimento aleatório*.

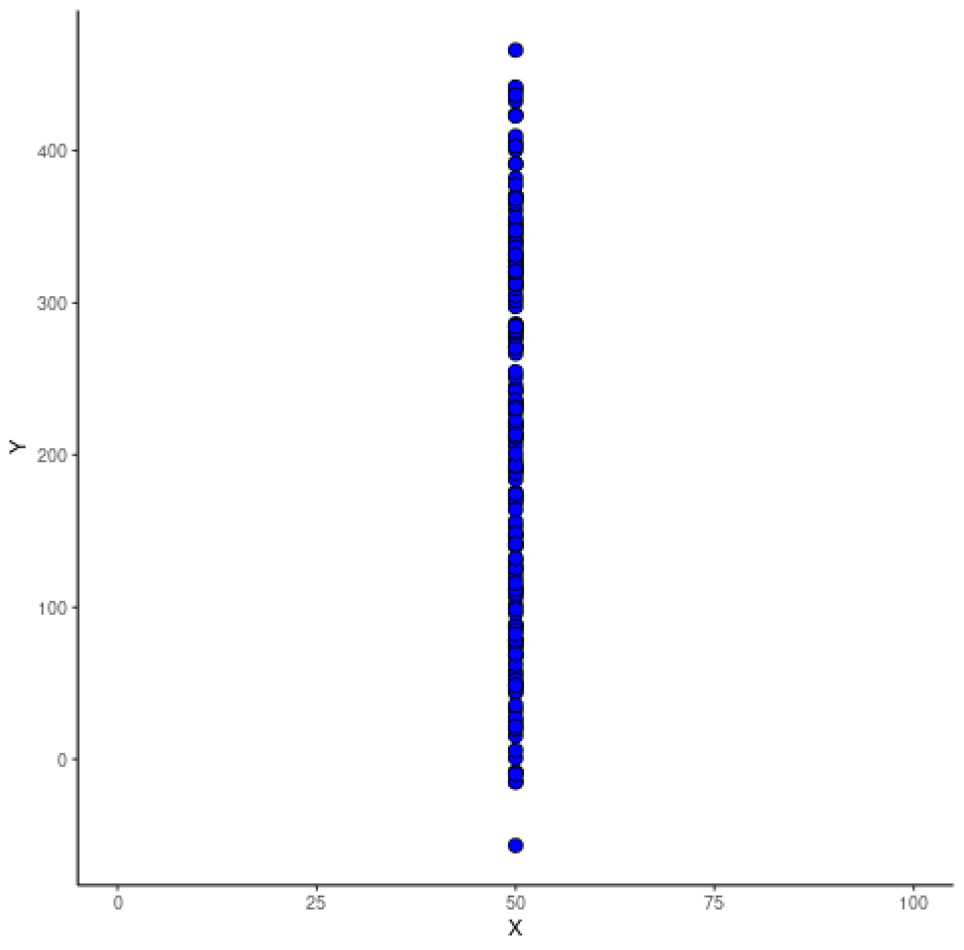


Seja uma variável aleatória Y com distribuição normal proveniente de um *experimento aleatório*.



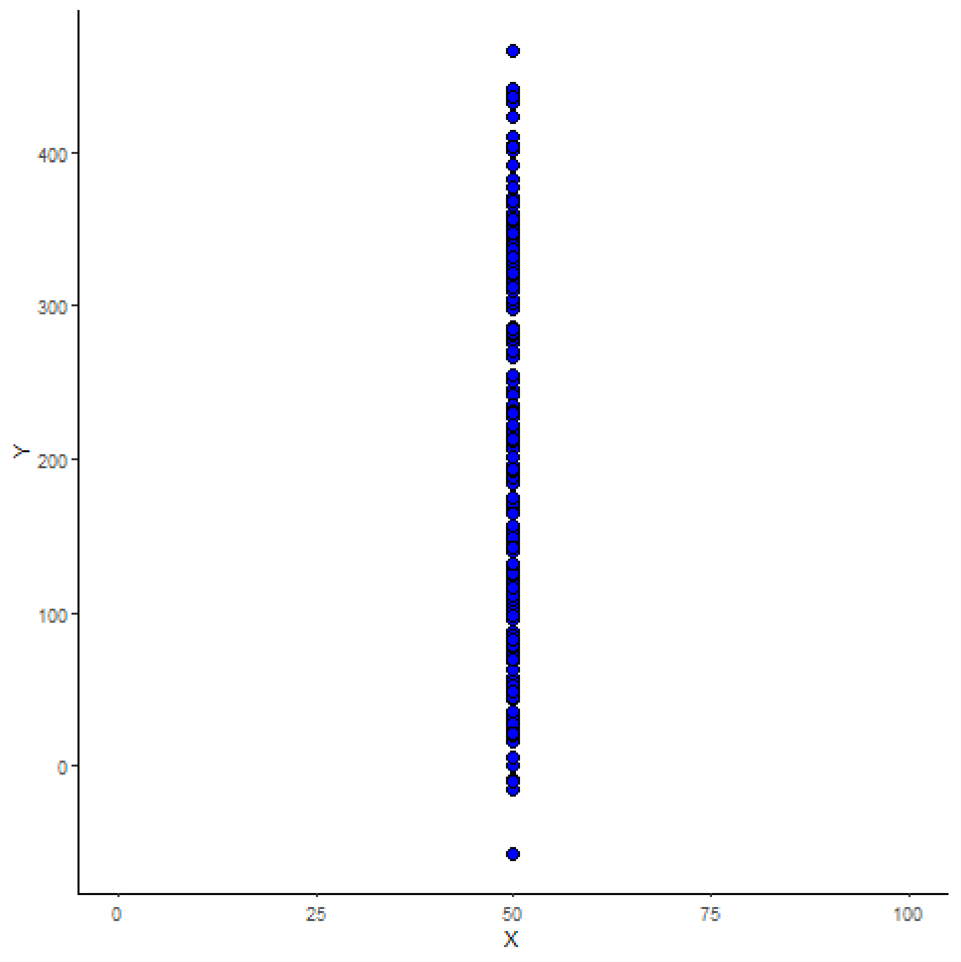
5. Regressão linear simples: estrutura geral do modelo

Para cada observação y_i é conhecida também uma informação sobre x_i.



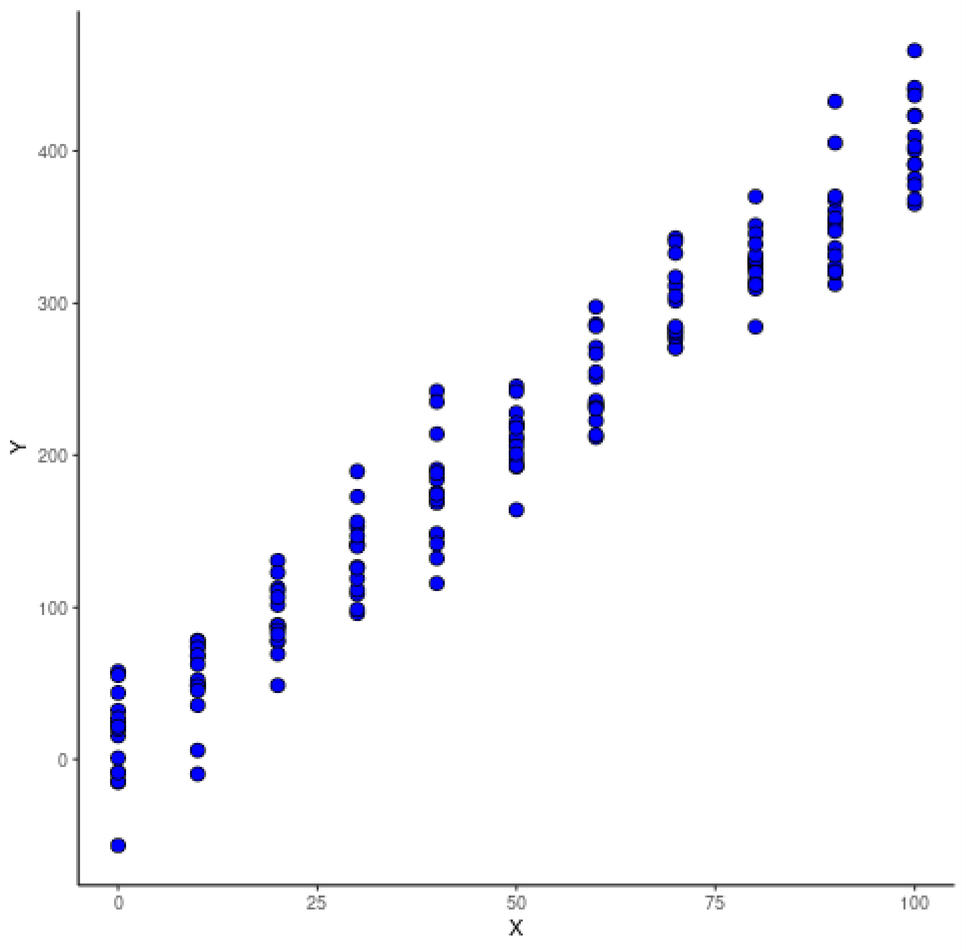
5. Regressão linear simples: estrutura geral do modelo

Para cada observação y_i é conhecida também uma informação sobre x_i.

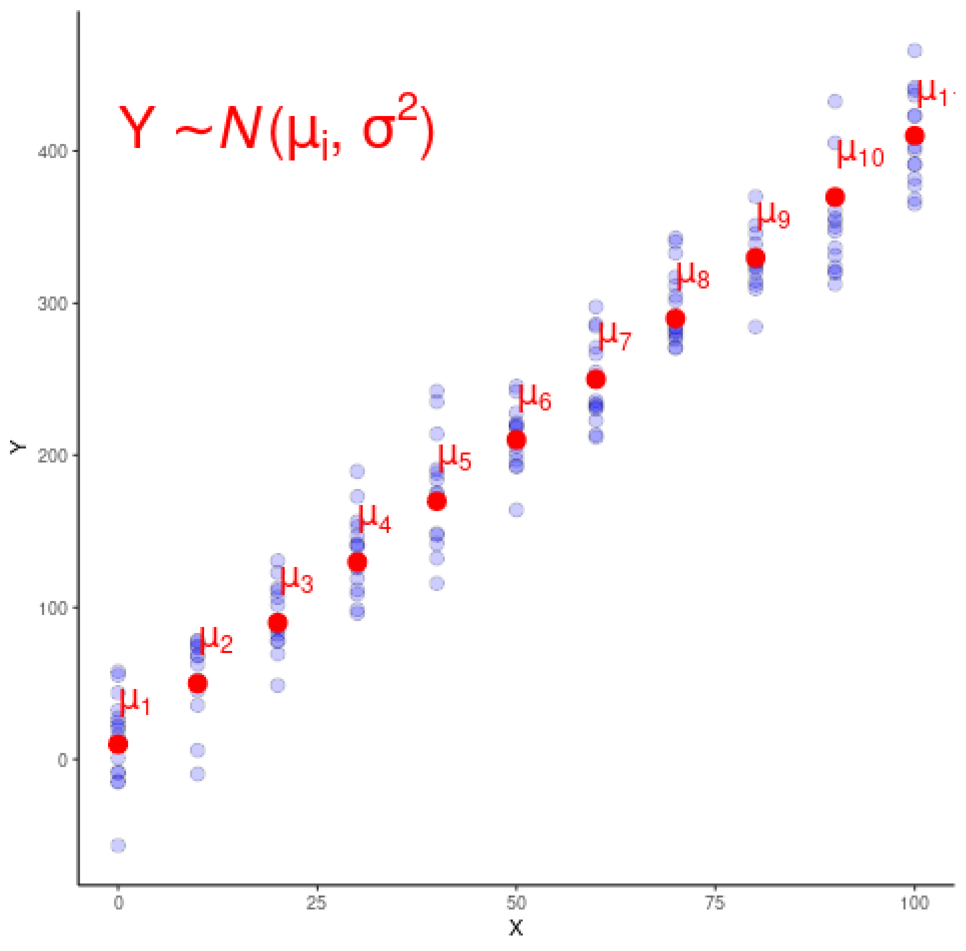


5. Regressão linear simples: estrutura geral do modelo

Para cada observação y_i é conhecida também uma informação sobre x_i.

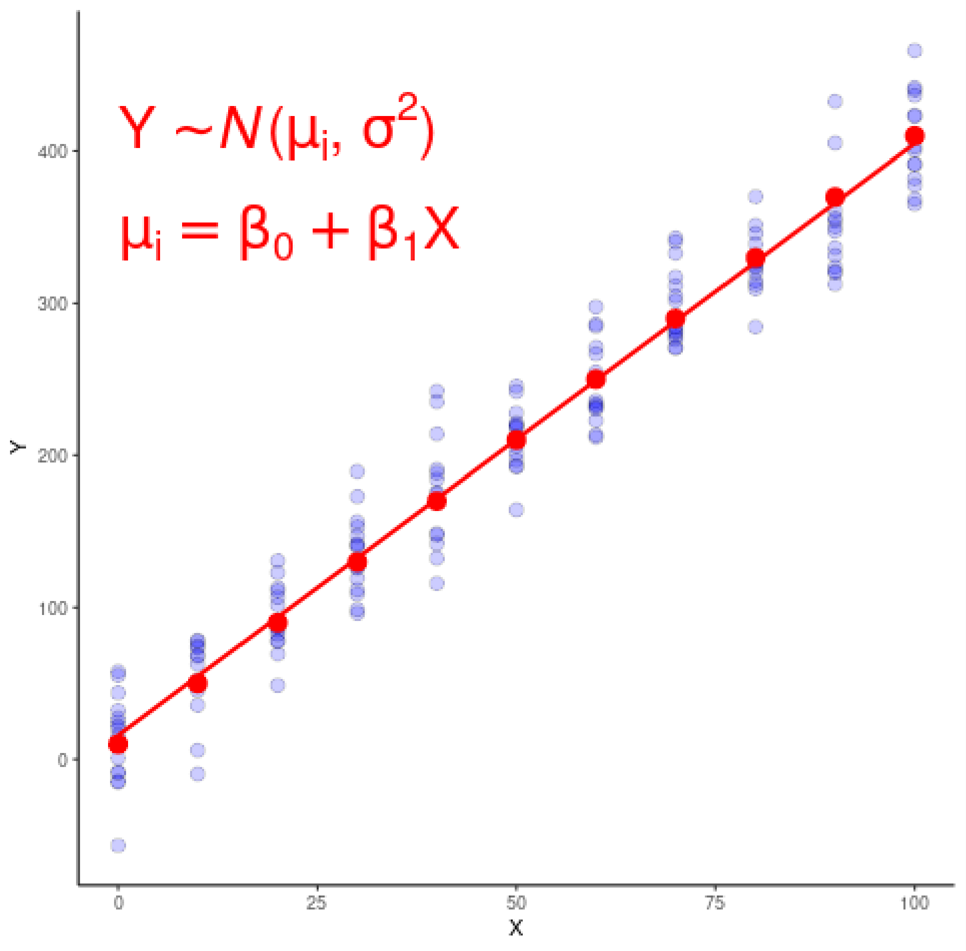


Para cada observação y_i é conhecida também uma informação sobre x_i.



5. Regressão linear simples: estrutura geral do modelo

Para cada observação y_i é conhecida também uma informação sobre x_i.



5. Regressão linear simples: estrutura geral do modelo

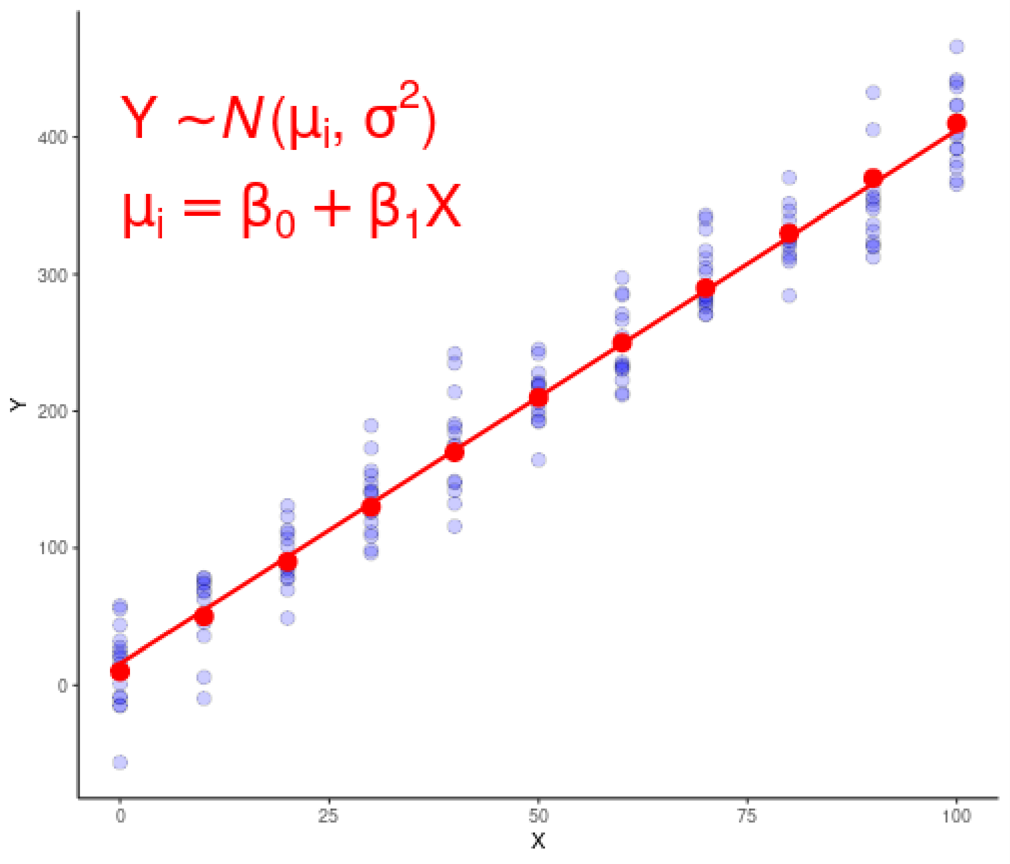
1 - As observações em Y e X compõem um par (y_i, x_i) de modo que:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 - X é determinada **experimentalmente** e **sem erros**.

3 - Y é uma variável aleatória normalmente distribuída, com μ_i variância σ^2.

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

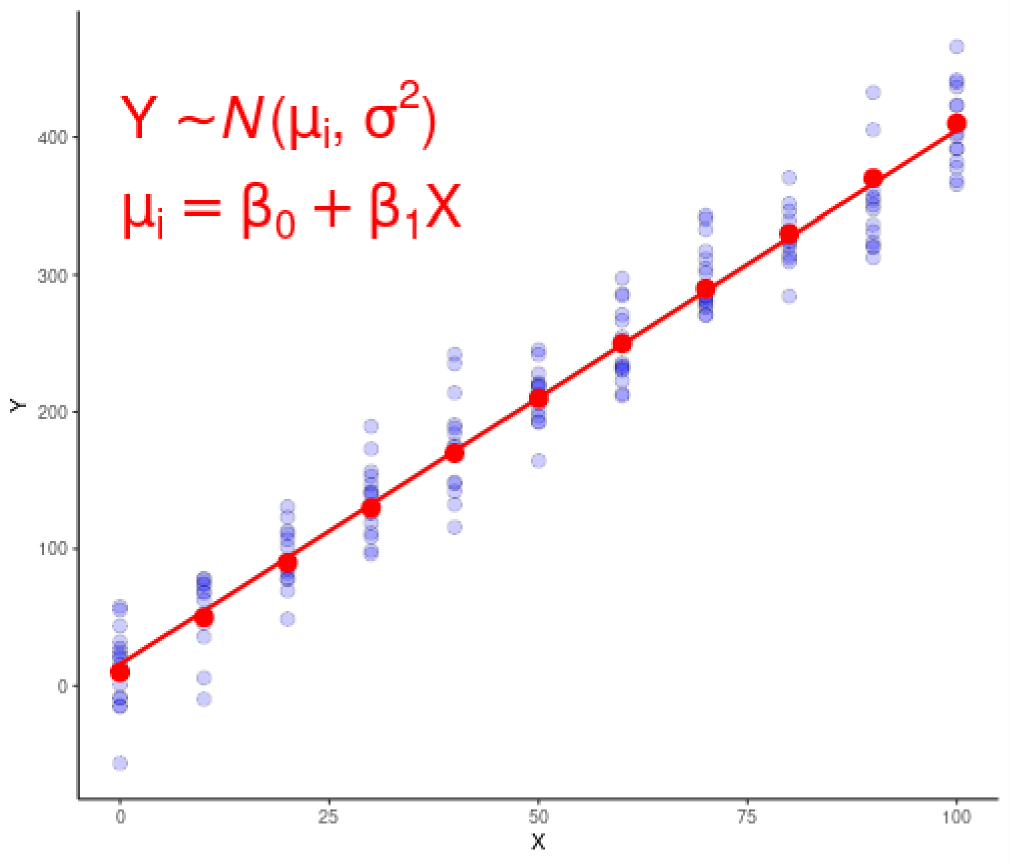


4 - μ_i é representado por um **modelo linear** que expressa o valor esperado de y_i para um dado valor de x_i. Compõe a **parcela determinística** do modelo.

$$E(Y|x_i) = \mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

5 - β_0 e β_1 são as contantes a serem estimadas, representando o **intercepto** e o **coeficience de inclinação da reta**, repectivamente.

6 - σ^2 é a **variância** de Y e ser estimada. σ^2 é **constante** para todos os valores em X.



5. Regressão linear simples: o modelo matemático

Variáveis envolvidas

Y: variável resposta (dependente);

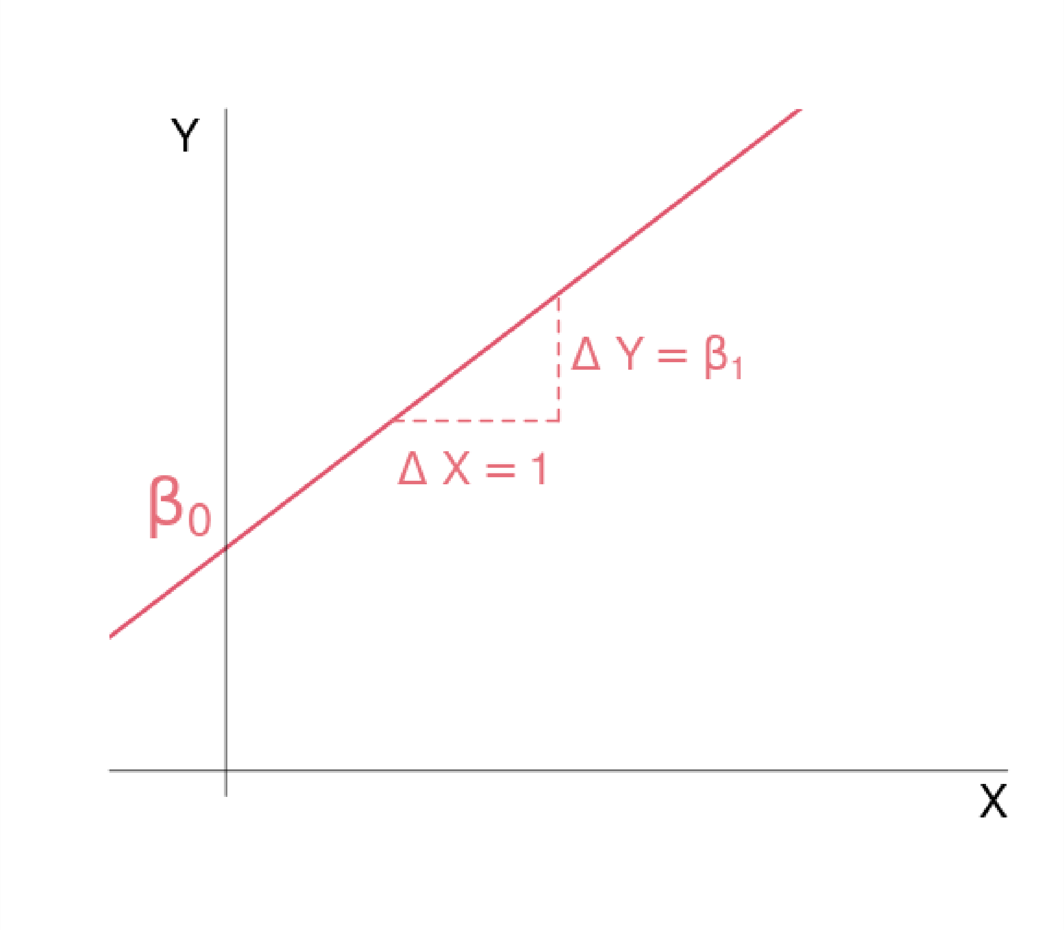
X: variável preditora (**in**dependente);

$$E(Y|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

Parâmetros do modelo

β_0: Intercepto;

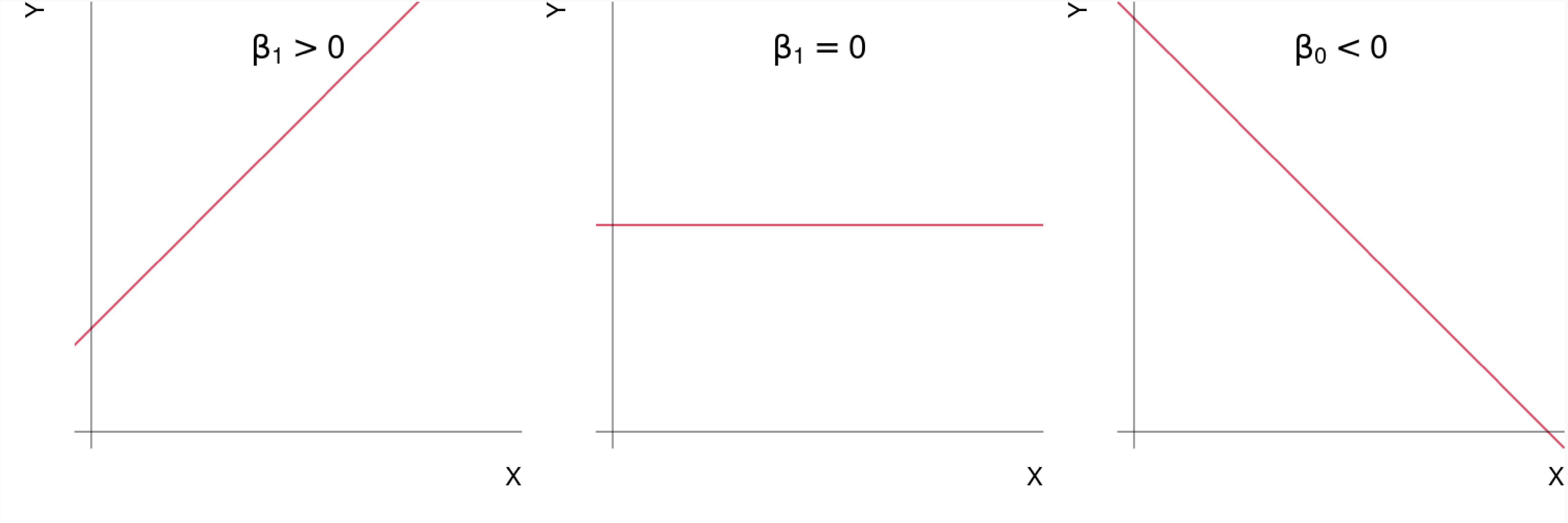
β_1: coeficiente de inclinação da reta (**coeficiente de regressão**);



5. Regressão linear simples: o modelo matemático

Se o intercepto β_0 e a inclinação β_1 são conhecidos, podemos **PREDIZER** qualquer valor y_i para um dado valor em x_i.

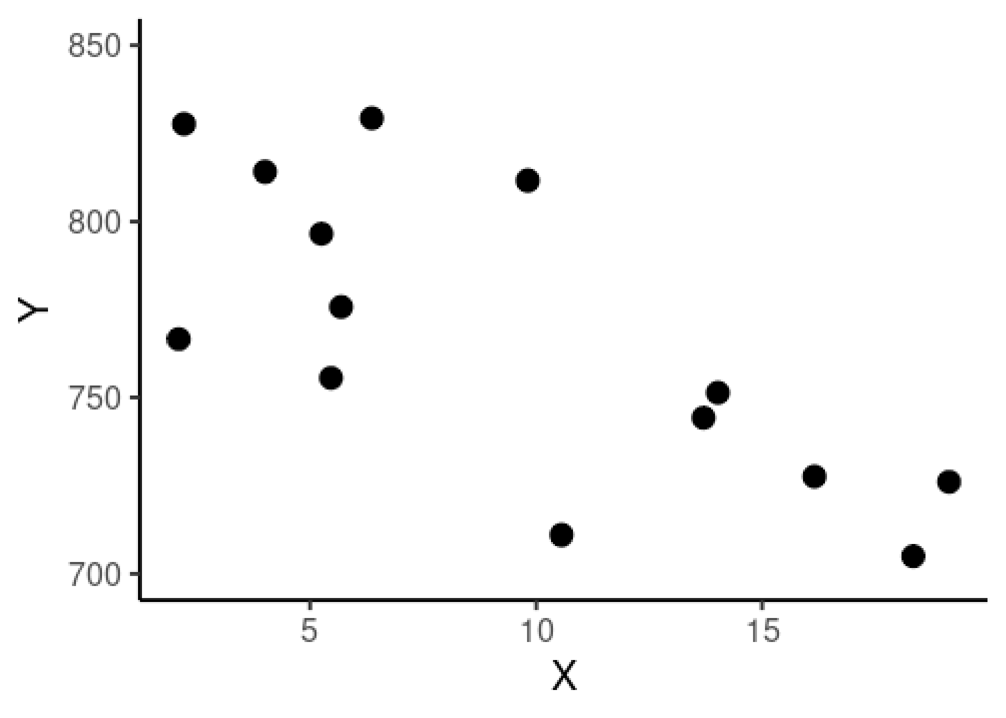
$$E(Y|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$



5. Regressão linear simples: a tabela e o gráfico de dispersão

$$y_i | x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

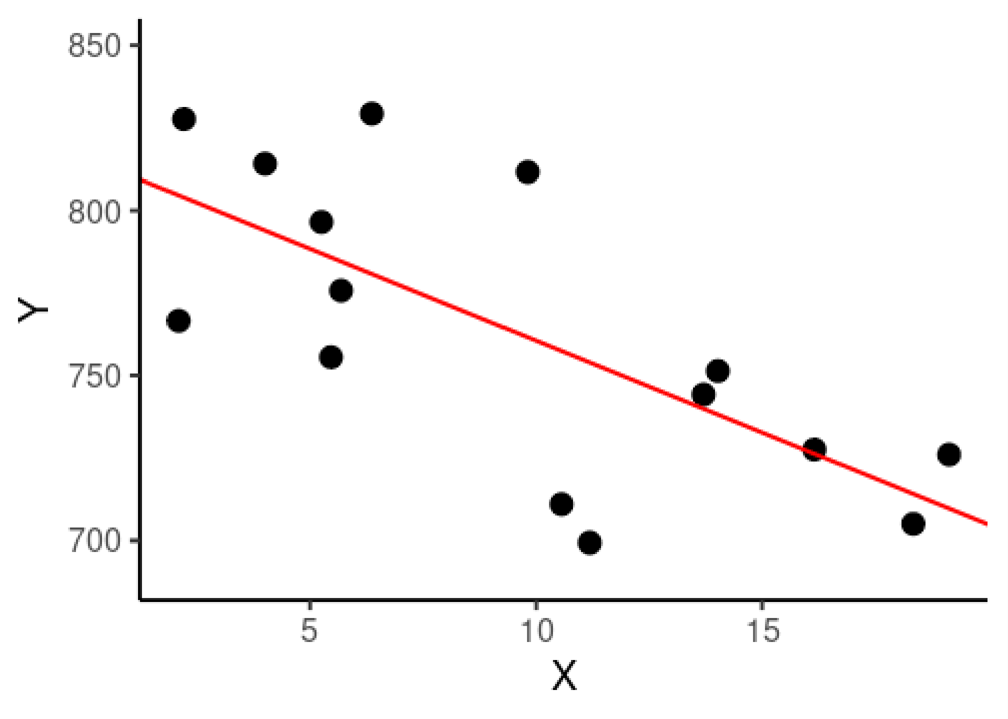
`$x_i$`	`$y_i$`
2.09	766.58
2.21	827.62
4.00	814.09
5.25	796.54
5.47	755.55
5.69	775.74
6.37	829.26
9.81	811.61
10.56	710.96
11.18	699.34
13.70	744.22
14.02	751.35
16.16	727.52
18.34	704.99
19.13	726.00



5. Regressão linear simples: o modelo estatístico

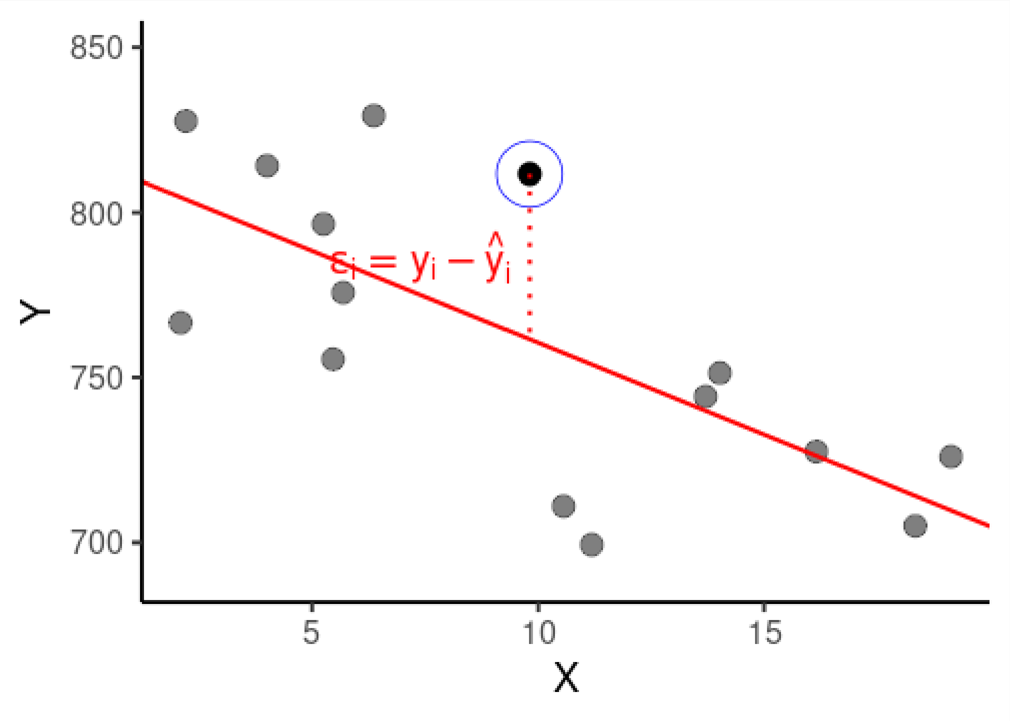
$$y_i | x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

`$x_i$`	`$y_i$`	`$\hat{y}_i$`
2.09	766.58	804.59
2.21	827.62	803.94
4.00	814.09	793.94
5.25	796.54	786.98
5.47	755.55	785.79
5.69	775.74	784.55
6.37	829.26	780.76
9.81	811.61	761.58
10.56	710.96	757.41
11.18	699.34	753.93
13.70	744.22	739.88
14.02	751.35	738.11
16.16	727.52	726.20
18.34	704.99	714.06
19.13	726.00	709.64



$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

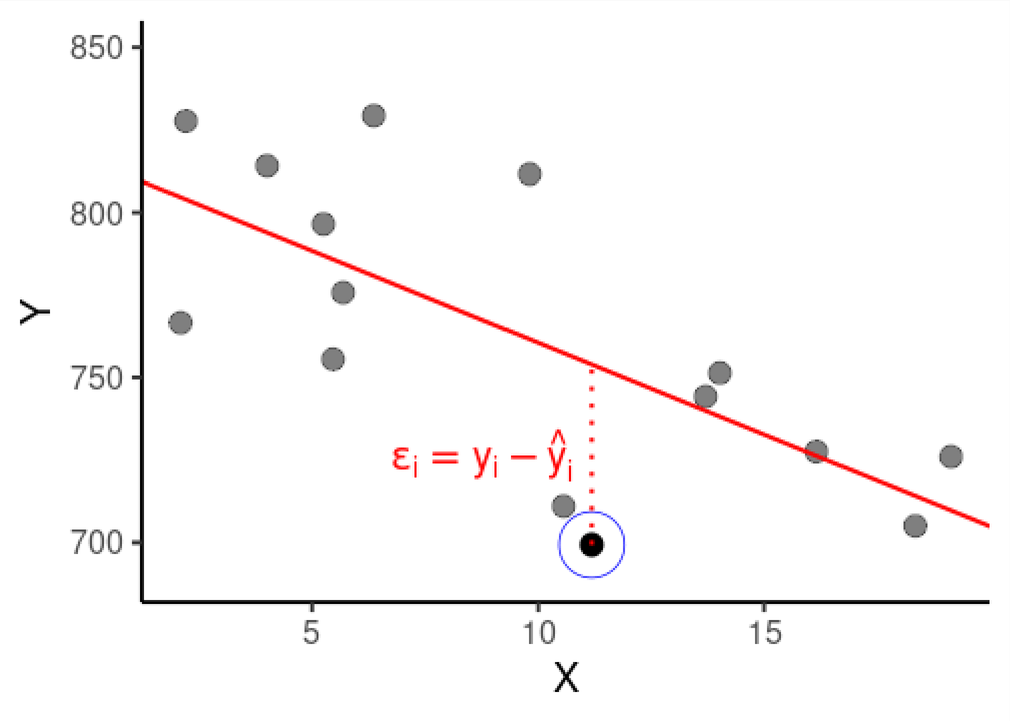
\`$x_i$\`	\`$y_i$\`	\`$\hat{y}_i$\`	\`$\epsilon_i$\`
2.09	766.58	804.59	-38.01
2.21	827.62	803.94	23.68
4.00	814.09	793.94	20.15
5.25	796.54	786.98	9.56
5.47	755.55	785.79	-30.25
5.69	775.74	784.55	-8.82
6.37	829.26	780.76	48.50
9.81	**811.61**	**761.58**	**50.03**
10.56	710.96	757.41	-46.45
11.18	699.34	753.93	-54.59
13.70	744.22	739.88	4.34
14.02	751.35	738.11	13.24
16.16	727.52	726.20	1.32
18.34	704.99	714.06	-9.06
19.13	726.00	709.64	16.36



ε_i: resíduo - responsável pela variação de y_i em torno do valor **predito** $(\hat{y}_i)$ pela reta de regressão.

$$y_i | x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

\`$x_i$\`	\`$y_i$\`	\`$\hat{y}_i$\`	\`$\epsilon_i$\`
2.09	766.58	804.59	-38.01
2.21	827.62	803.94	23.68
4.00	814.09	793.94	20.15
5.25	796.54	786.98	9.56
5.47	755.55	785.79	-30.25
5.69	775.74	784.55	-8.82
6.37	829.26	780.76	48.50
9.81	811.61	761.58	50.03
10.56	710.96	757.41	-46.45
11.18	**699.34**	**753.93**	**-54.59**
13.70	744.22	739.88	4.34
14.02	751.35	738.11	13.24
16.16	727.52	726.20	1.32
18.34	704.99	714.06	-9.06
19.13	726.00	709.64	16.36



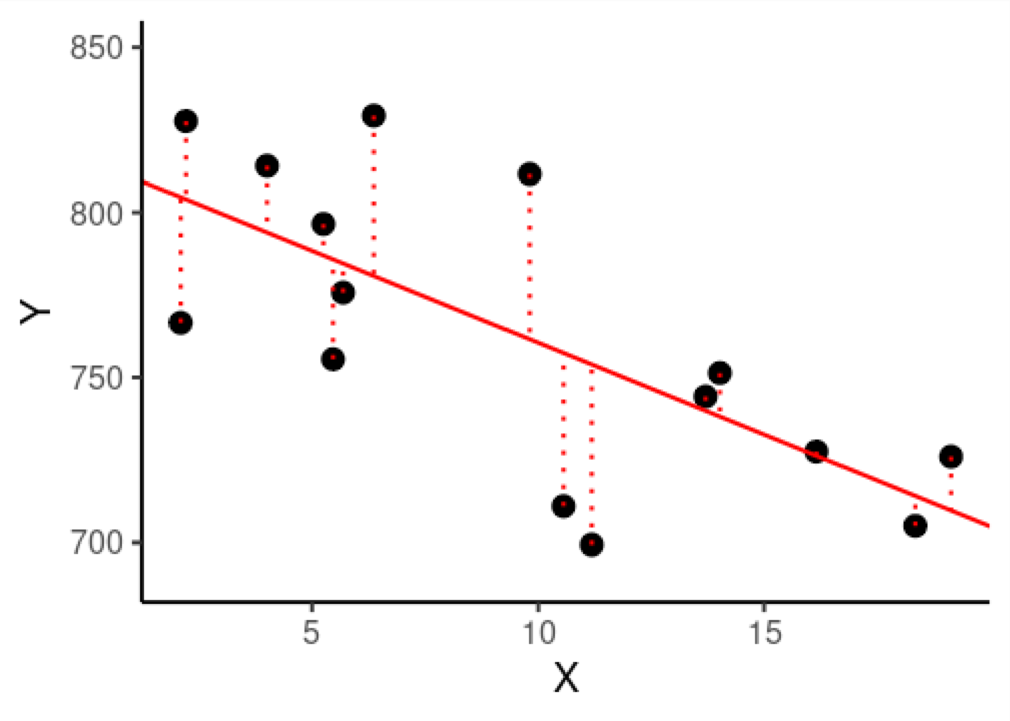
ε_i: resíduo - responsável pela variação de y_i em torno do valor **predito** $(\hat{y}_i)$ pela reta de regressão.

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

O resíduo associado a cada observação diminui ou aumenta à medida que o ponto está mais próximo ou distante da reta de regressão.

Assume-se que os resíduos têm distribuição Normal de probabilidades com média zero e variância σ^2.

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$



σ^2 elevada

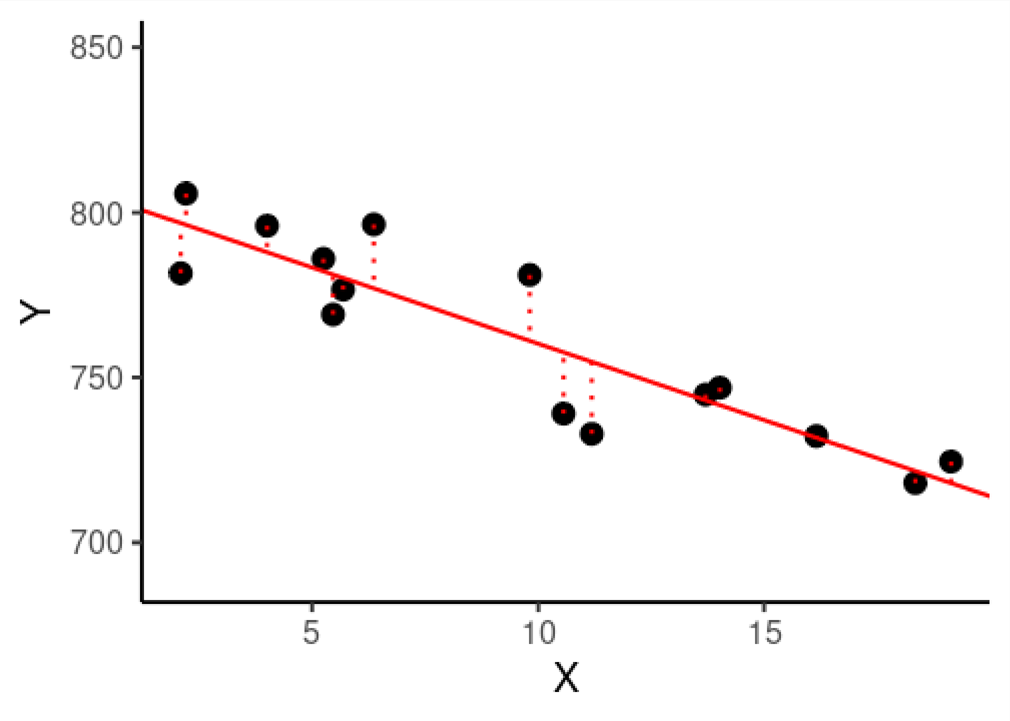
- pontos distantes da reta

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

O resíduo associado a cada observação diminui ou aumenta à medida que o ponto está mais próximo ou distante da reta de regressão.

Assume-se que os resíduos têm distribuição Normal de probabilidades com média zero e variância σ^2.

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$



σ^2 reduzida

- pontos próximos da reta

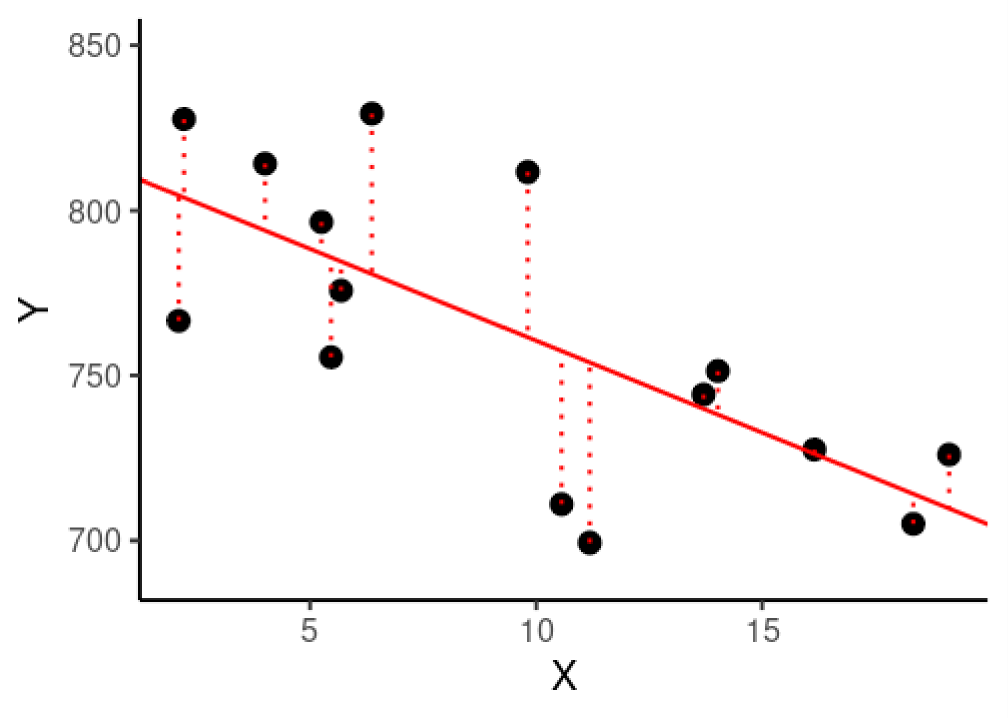
$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Variáveis e quantias envolvidas

- y_i: variável resposta - i: $1 \cdots n$;
- x_i: variável preditora - i: $1 \cdots n$;
- n: tamanho da amostra;

Parâmetros do modelo

- β_0: intercepto;
- β_1: coeficiente inclinação da reta;
- σ^2: variância do resíduo.



5. Regressão linear simples: o modelo estatístico

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Parte determinística: β_0 e β_1

$$\beta_0 + \beta_1 x_i$$

Parte estocástica: σ^2

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

5. Regressão linear simples: estimativa dos parâmetros

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

5. Regressão linear simples: estimativa dos parâmetros

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

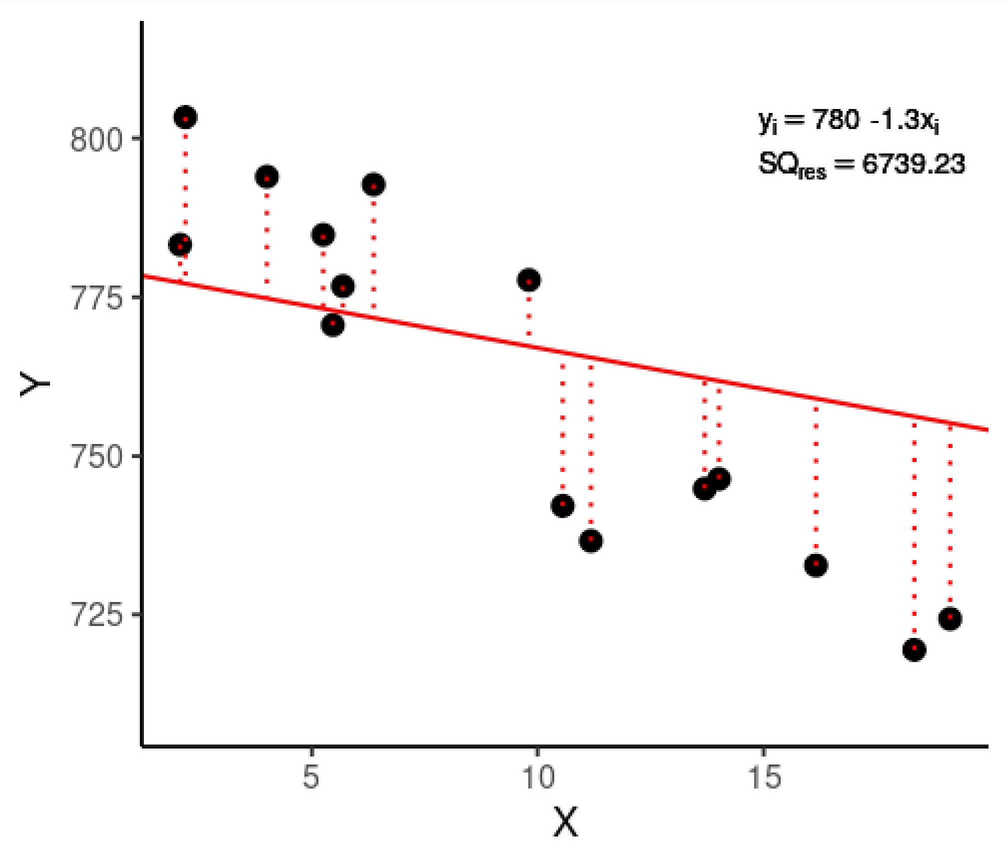
5. Regressão linear simples: estimativa dos parâmetros

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

5. Regressão linear simples: estimativa dos parâmetros

$$y_i|x_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

O Método dos Mínimos Quadrados

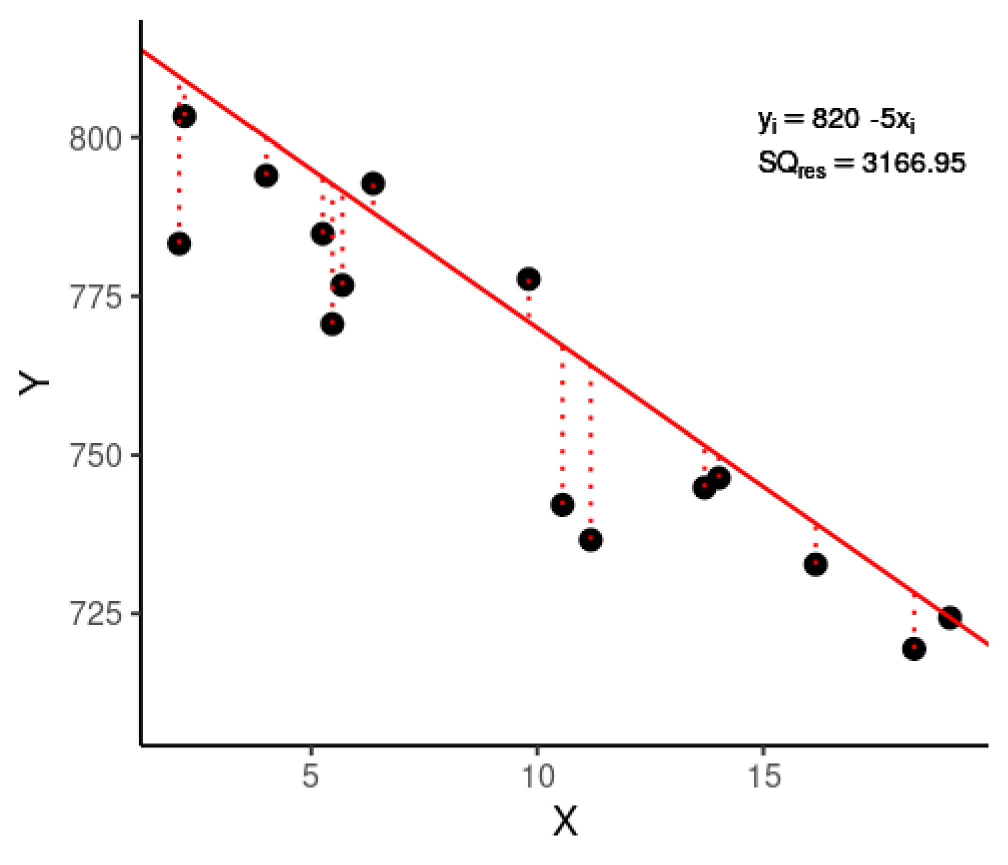


Soma dos quadrados dos resíduos (SQ_{Res})

$$SQ_{Res} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

O método dos mínimos quadrados consiste em encontrar a reta que **MINIMIZA** o somatório dos quadrados dos resíduos.

O Método dos Mínimos Quadrados

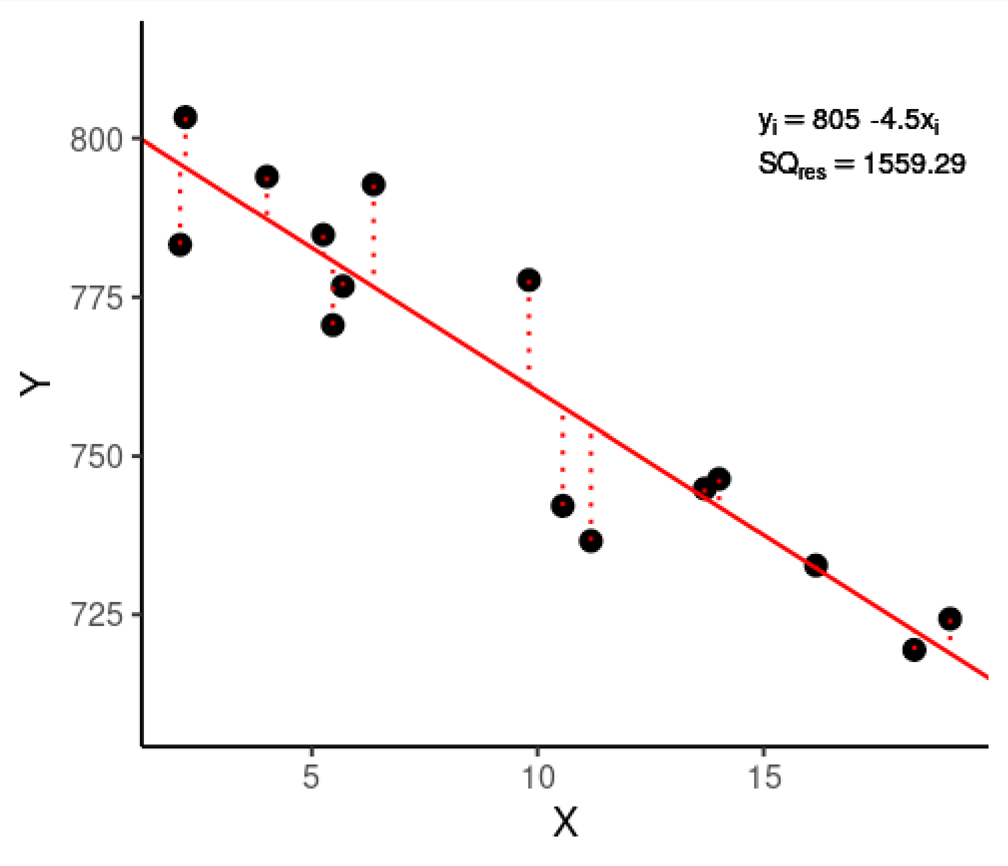


Soma dos quadrados dos resíduos (SQ_{Res})

$$SQ_{Res} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

O método dos mínimos quadrados consiste em encontrar a reta que **MINIMIZA** o somatório dos quadrados dos resíduos.

O Método dos Mínimos Quadrados



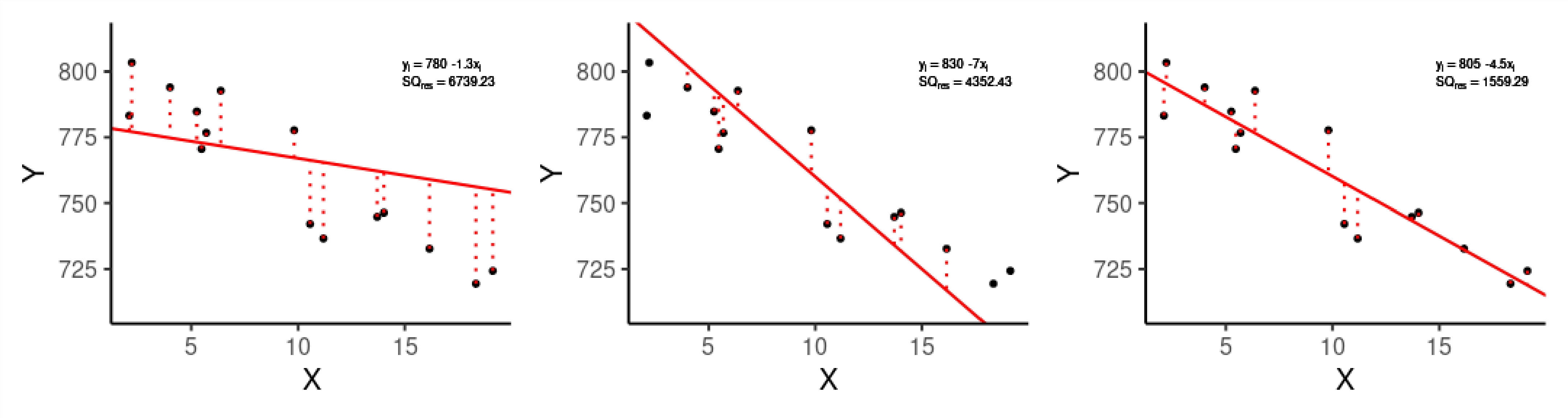
Soma dos quadrados dos resíduos (SQ_{Res})

$$SQ_{Res} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

O método dos mínimos quadrados consiste em encontrar a reta que **MINIMIZA** o somatório dos quadrados dos resíduos.

O Método dos Mínimos Quadrados

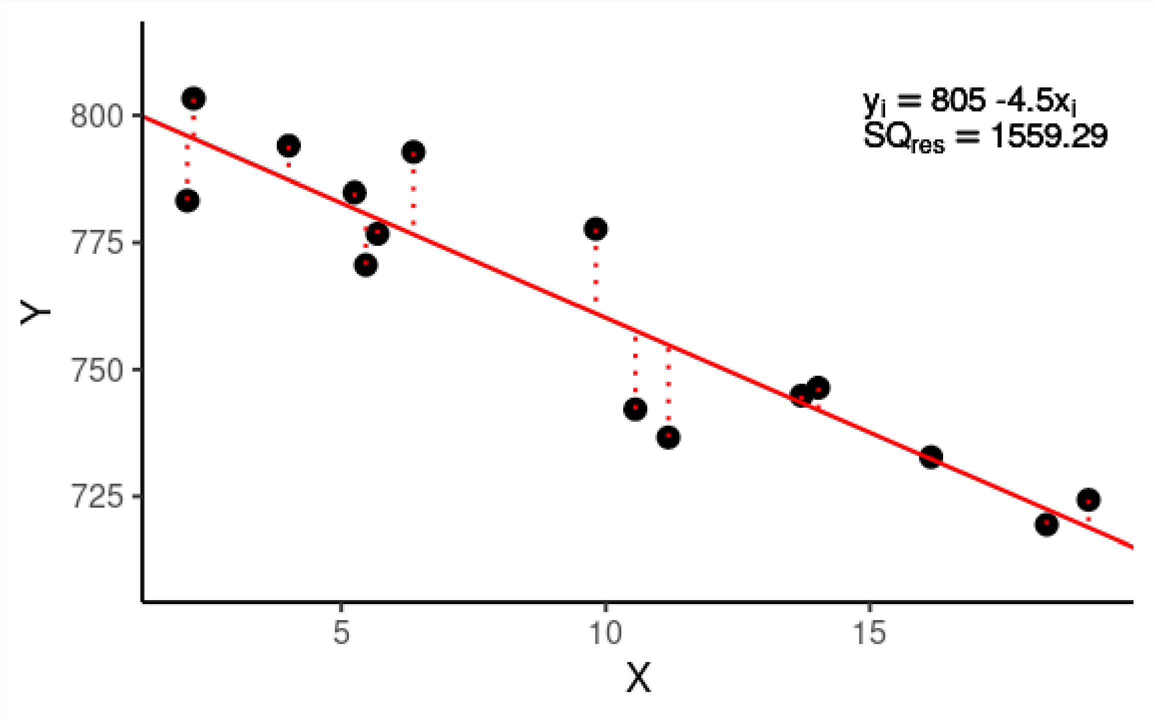
$$SQ_{Res} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

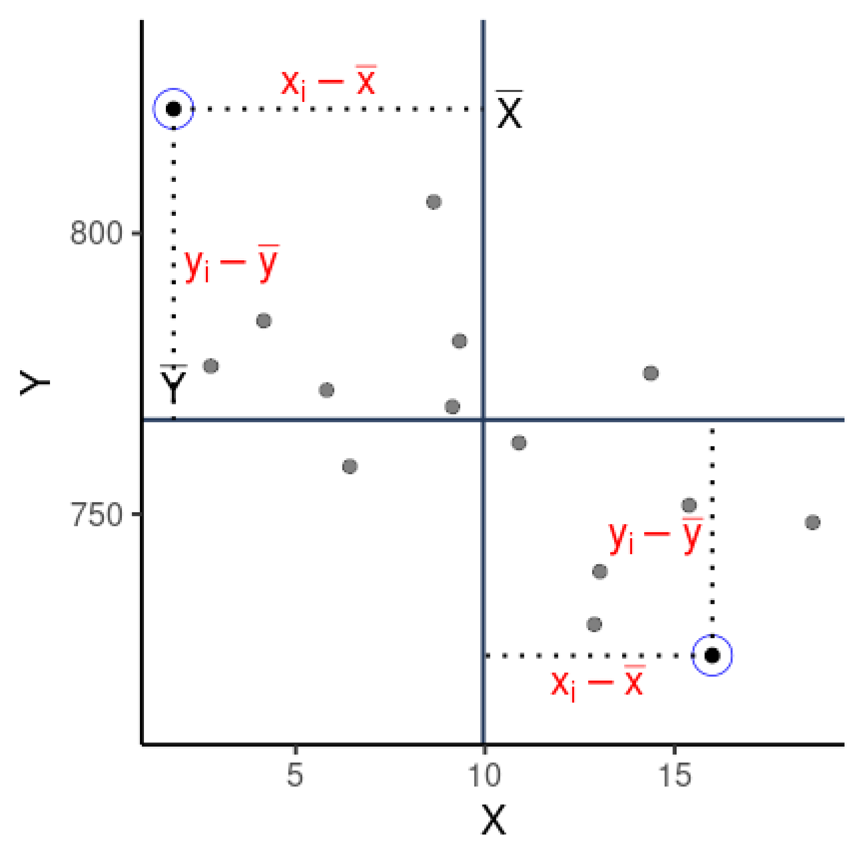


5. Regressão linear simples: estimativa dos parâmetros

---> *Estime* $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ que minimize a quantia:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2$$





Soma dos produtos cruzados de Y e X

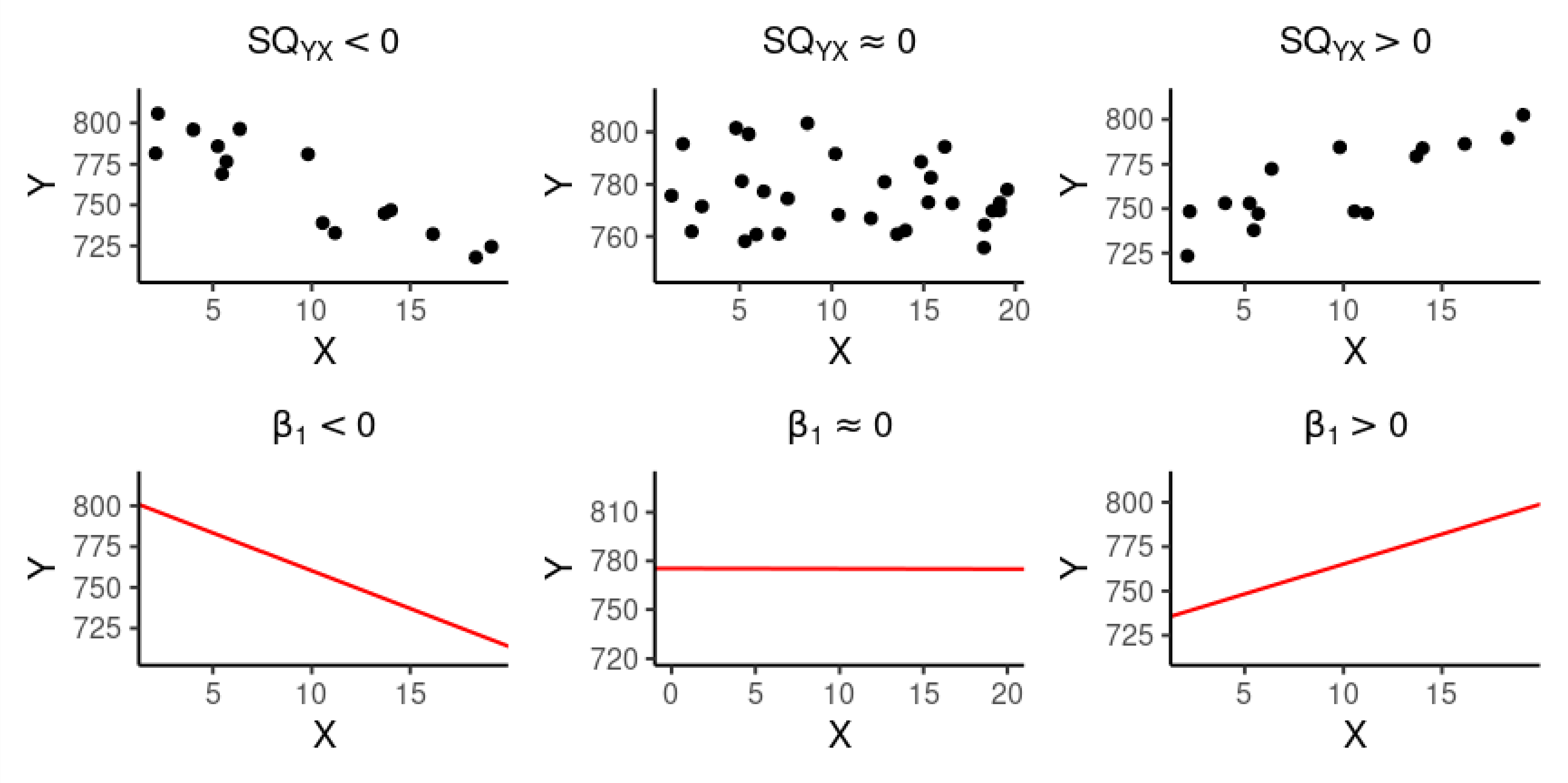
$$SQ_{YX} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

Covariância amostral entre Y e X

$$s_{YX} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n - 1}$$

5. Regressão linear simples: estimando β_1

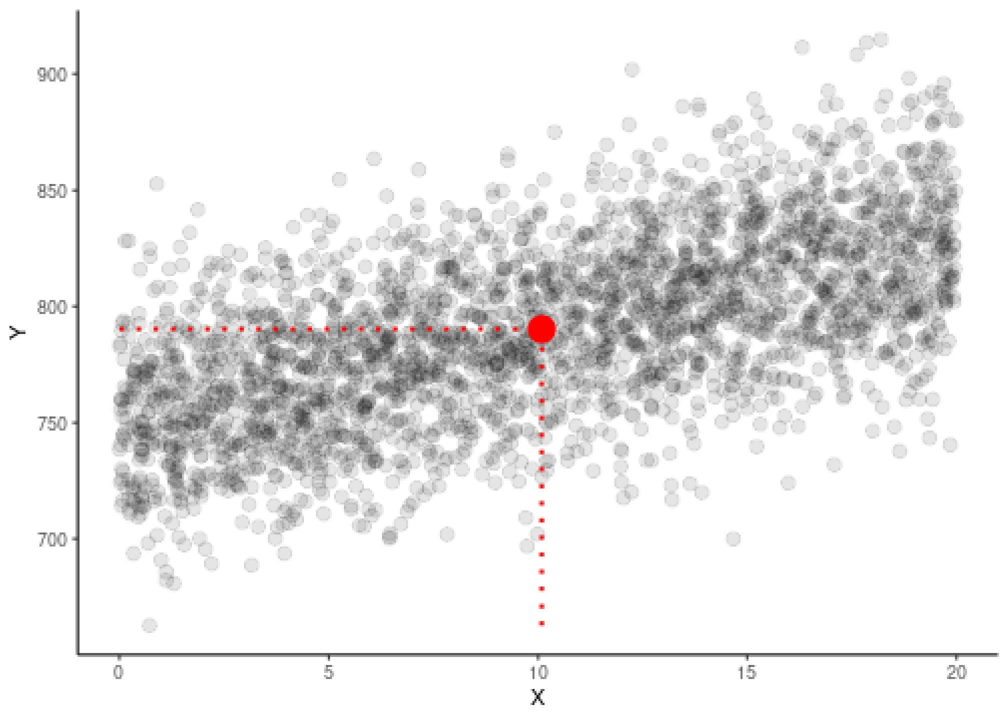
$$\hat{\beta}_1 = \frac{SQ_{YX}}{SQ_X} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}$$



5. Regressão linear simples: estimando β_0

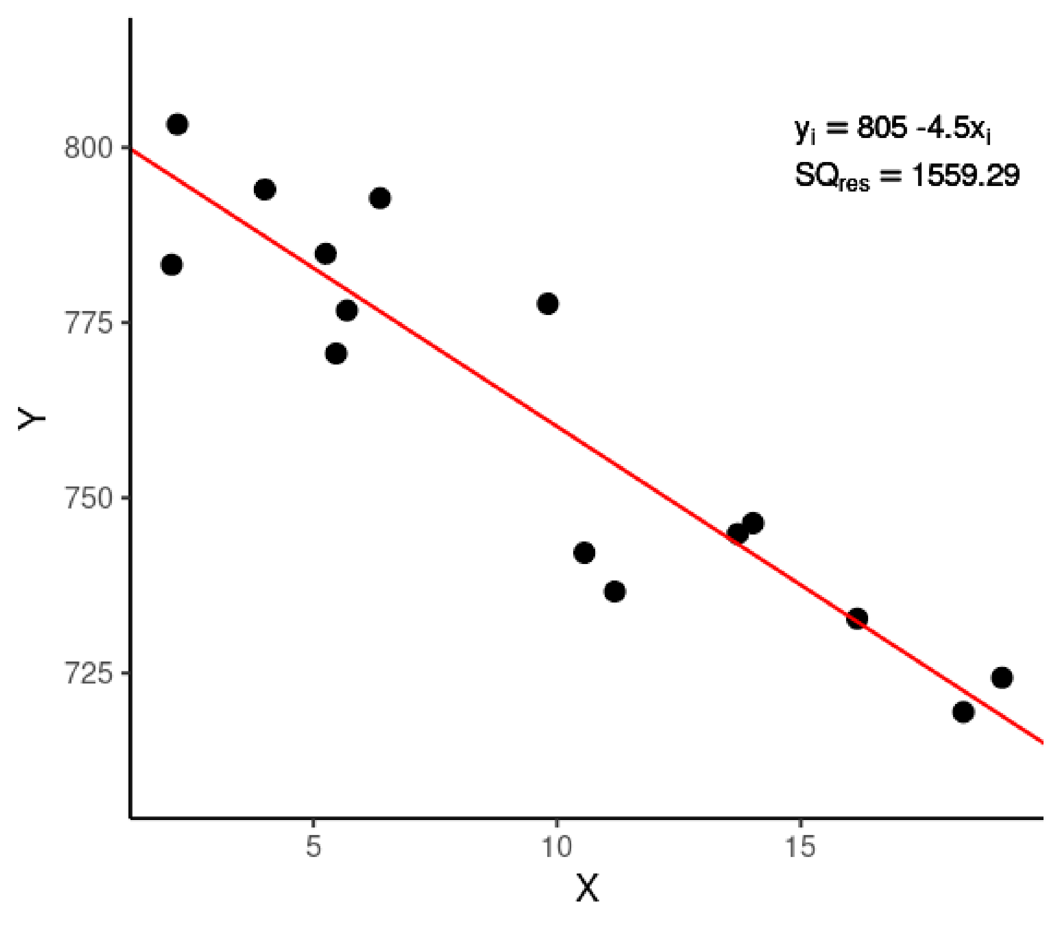
$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$



5. Regressão linear simples: estimando σ^2

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \varepsilon_i$$

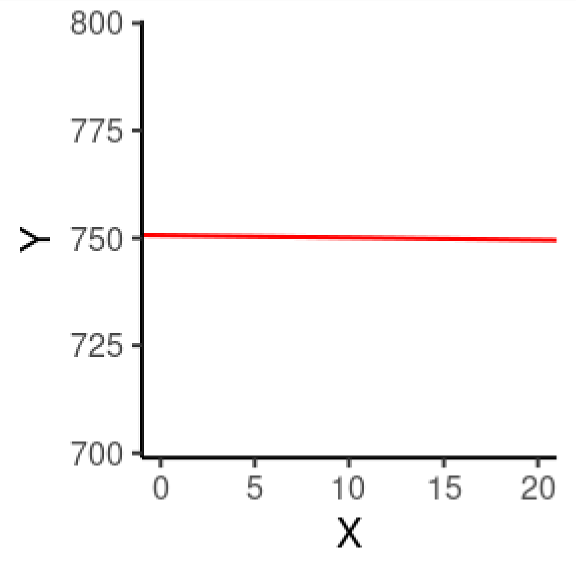


O Quadrado Médio do Resíduo (QM_{Res})

$$s^2 = QM_{Res} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2}{n-2}$$

Hipótese nula

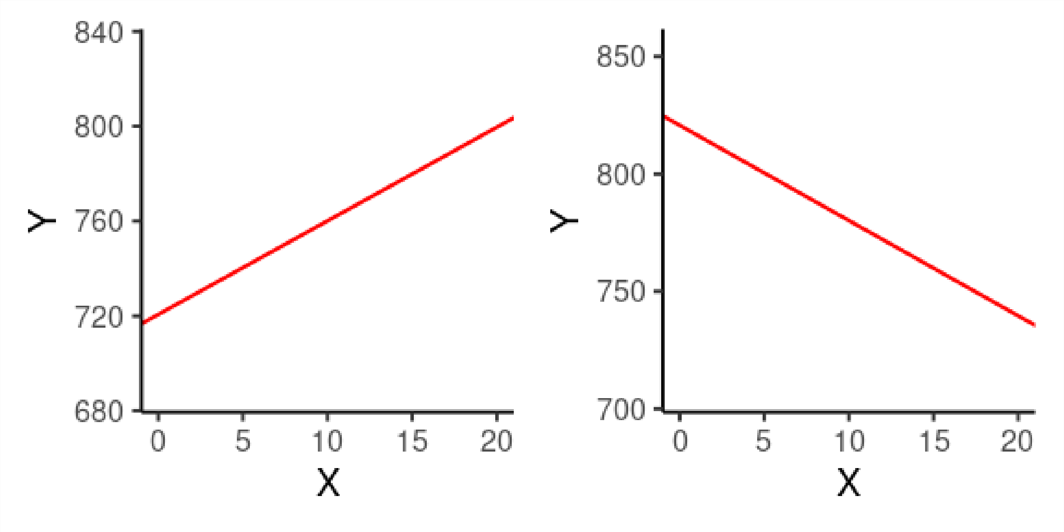
$$H_0 : \beta_1 = 0$$



$$y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$$

Hipótese alternativa

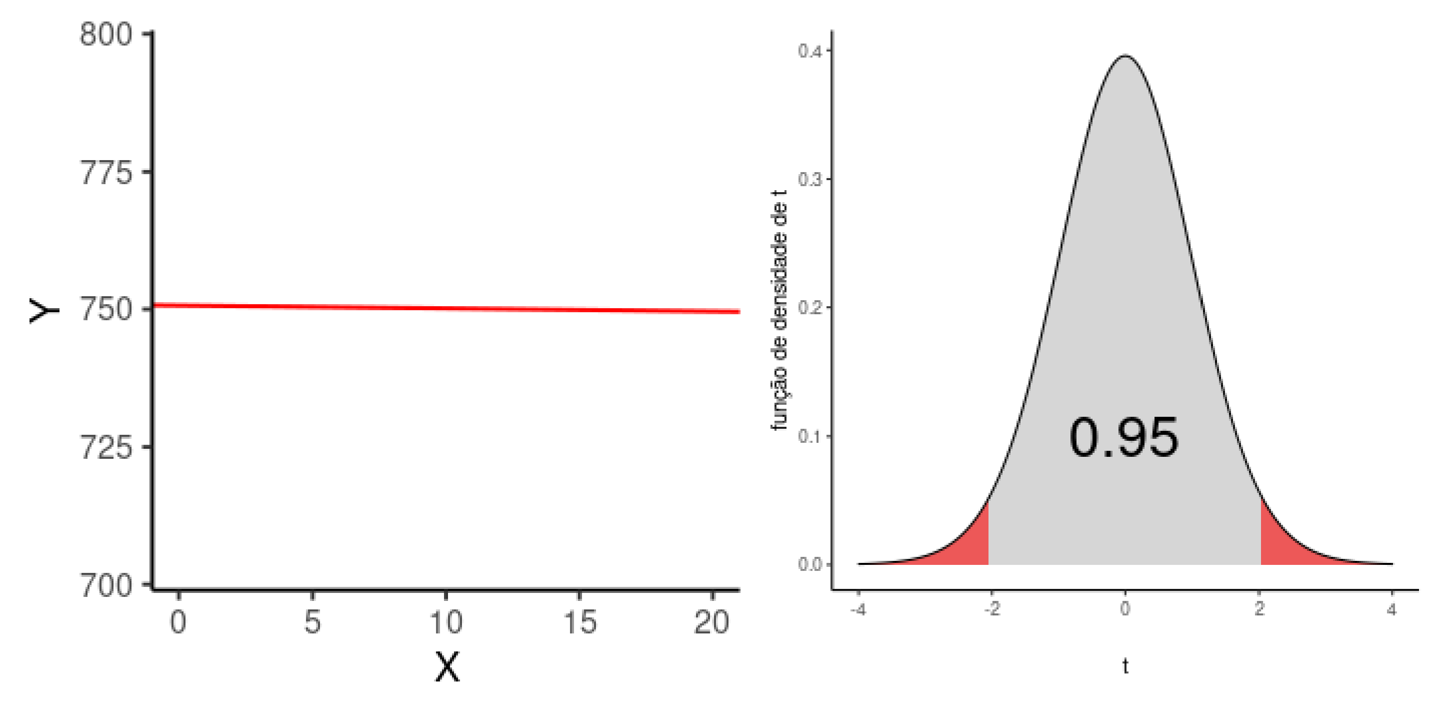
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$



$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

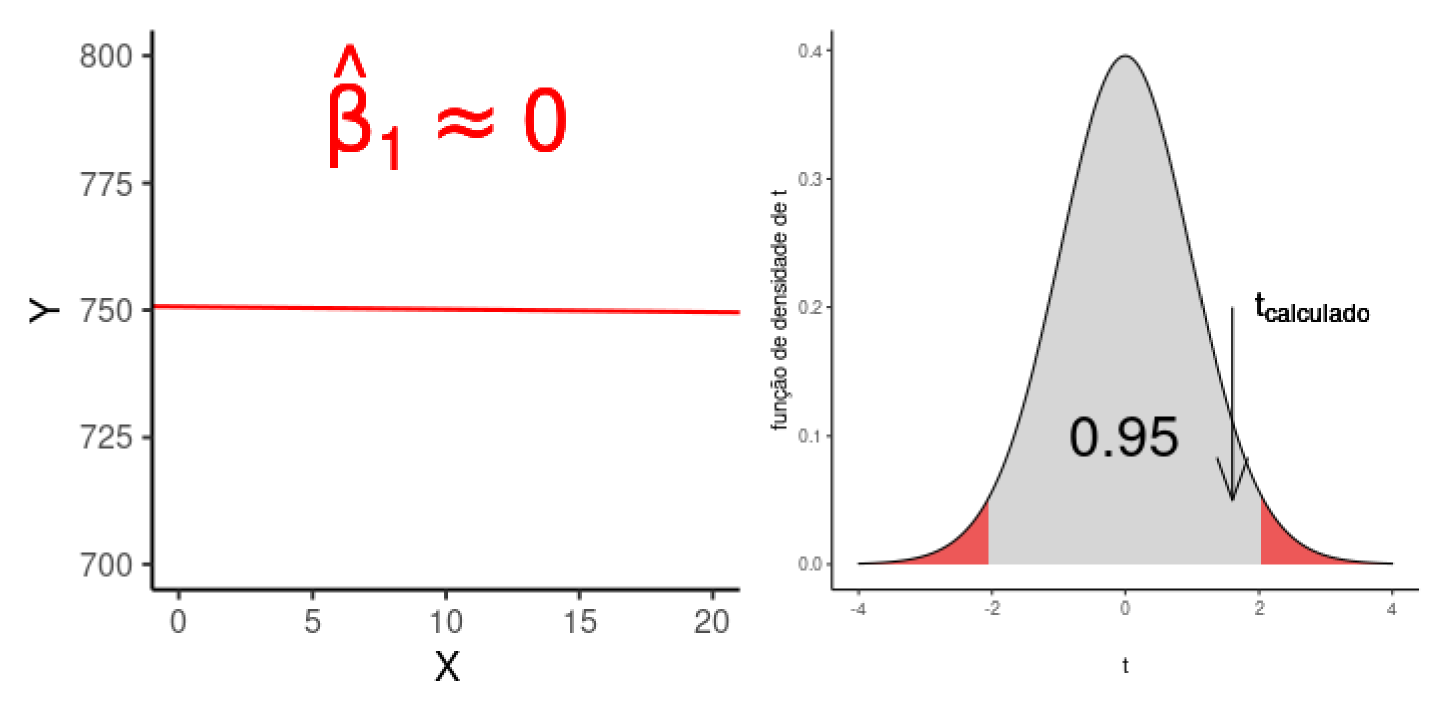
H_0 pode ser testada por meio do teste t para o estimador $\hat{\beta}_1$

$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$; $s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{s^2}{SQ_X}}$



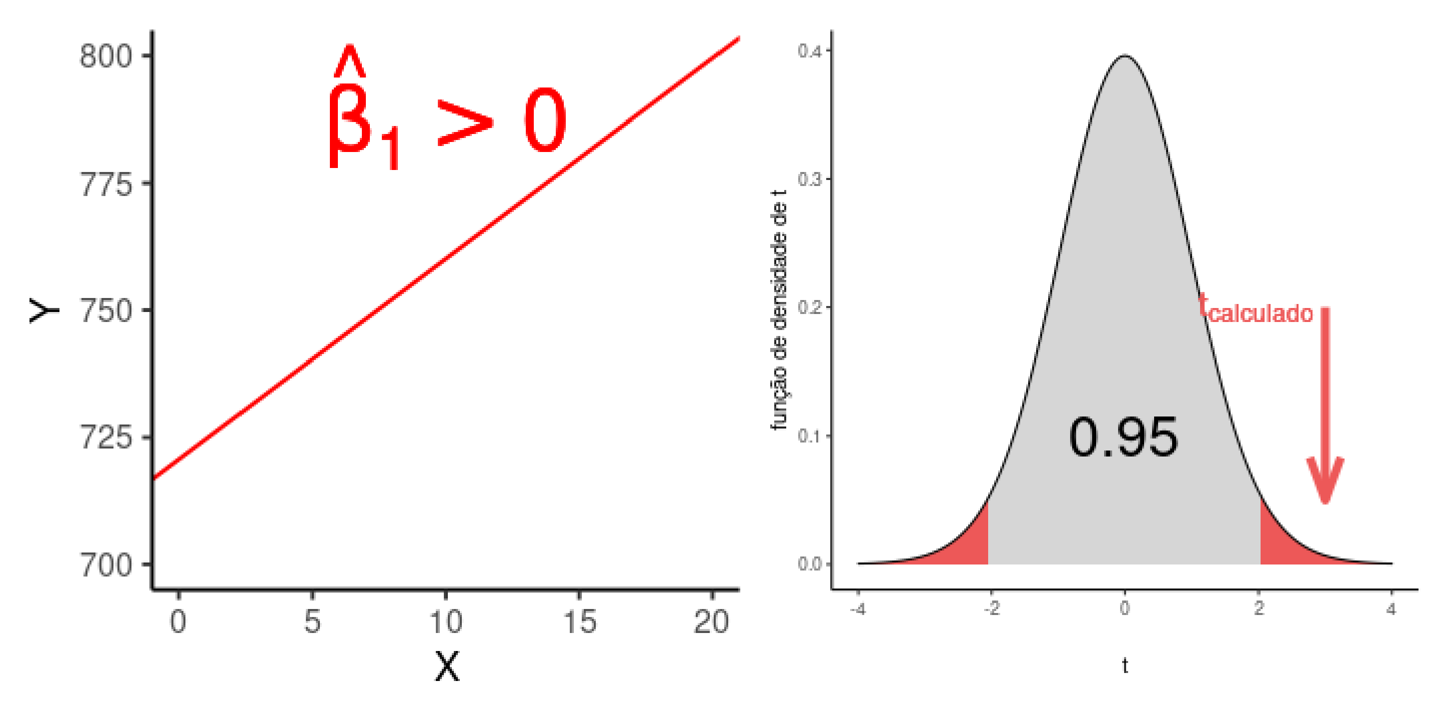
$t_{calculado}$ depende da **magnitude de** $\hat{\beta}_1$

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



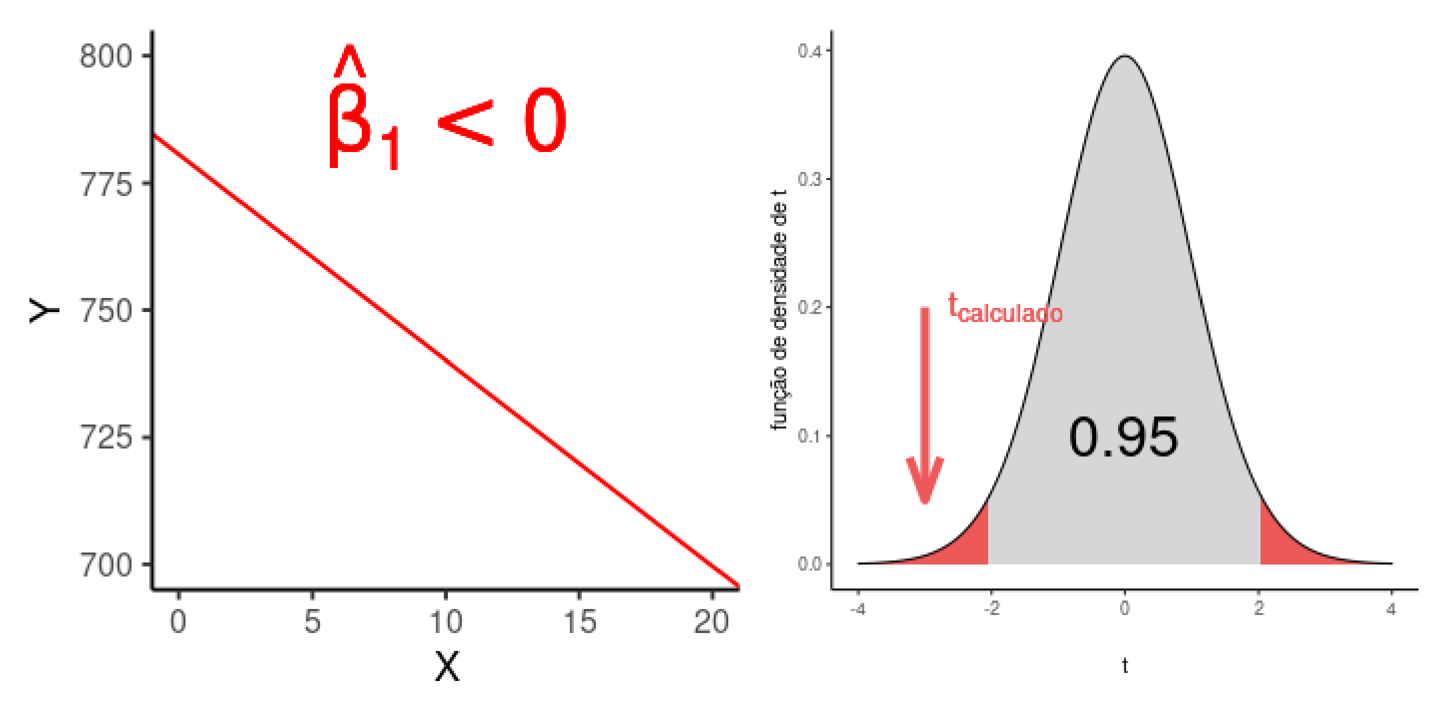
$t_{calculado}$ depende da **magnitude de** $\hat{\beta}_1$

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



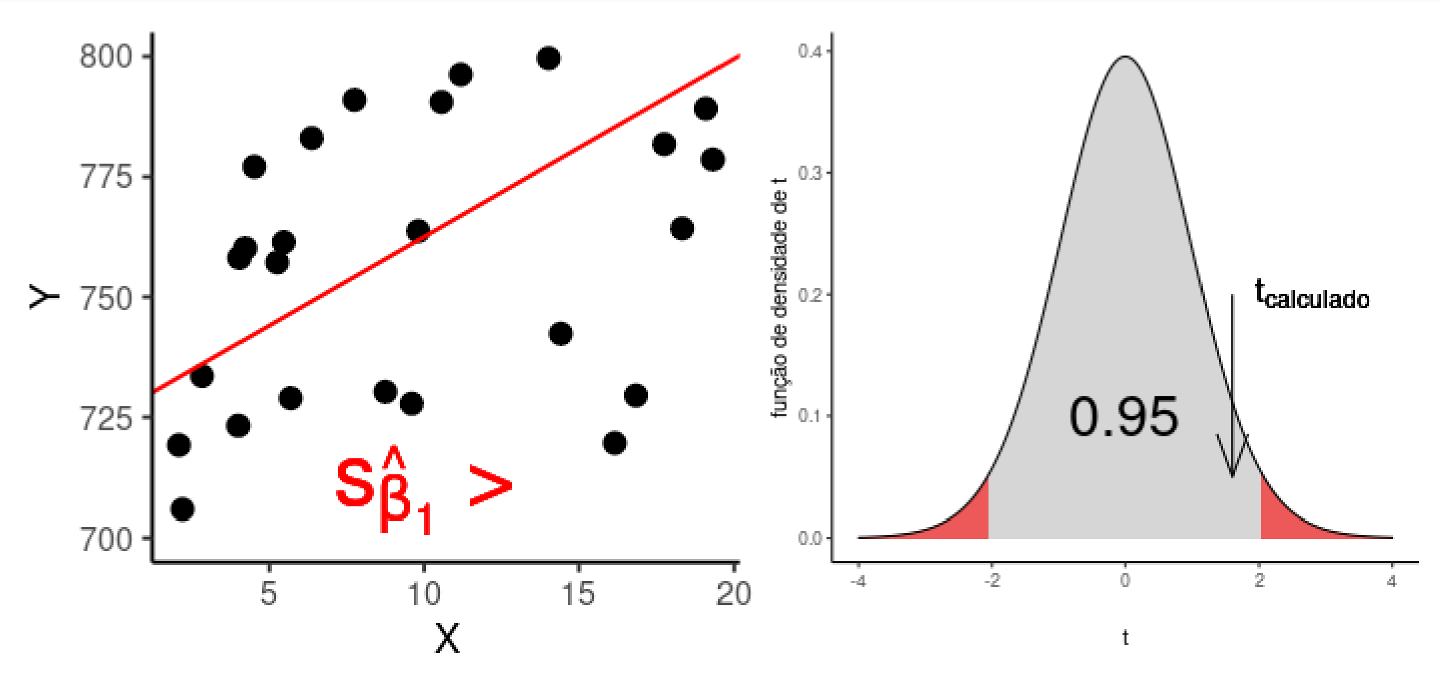
$t_{calculado}$ depende da **magnitude de** $\hat{\beta}_1$

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



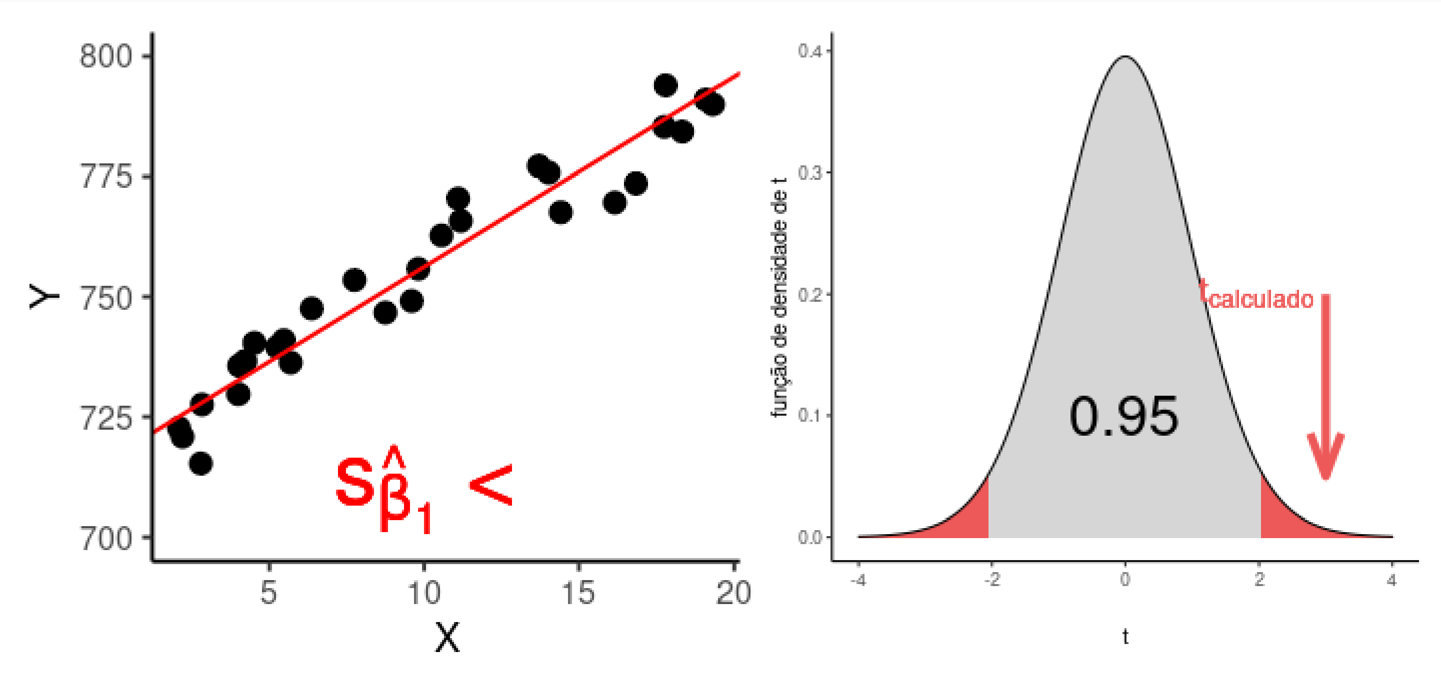
$t_{calculado}$ depende da **variância residual** - $s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{s^2}{SQ_X}}$

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



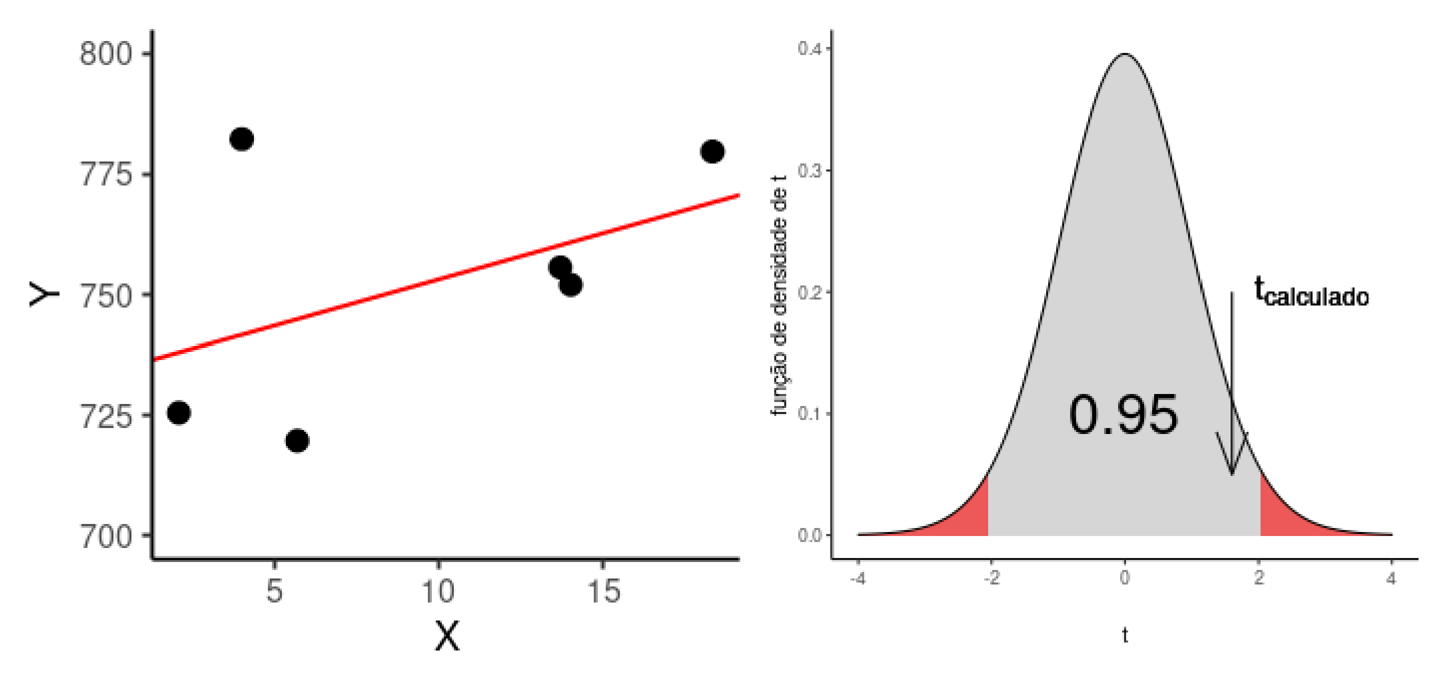
$t_{calculado}$ depende da **variância residual** - $s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{s^2}{SQ_X}}$

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



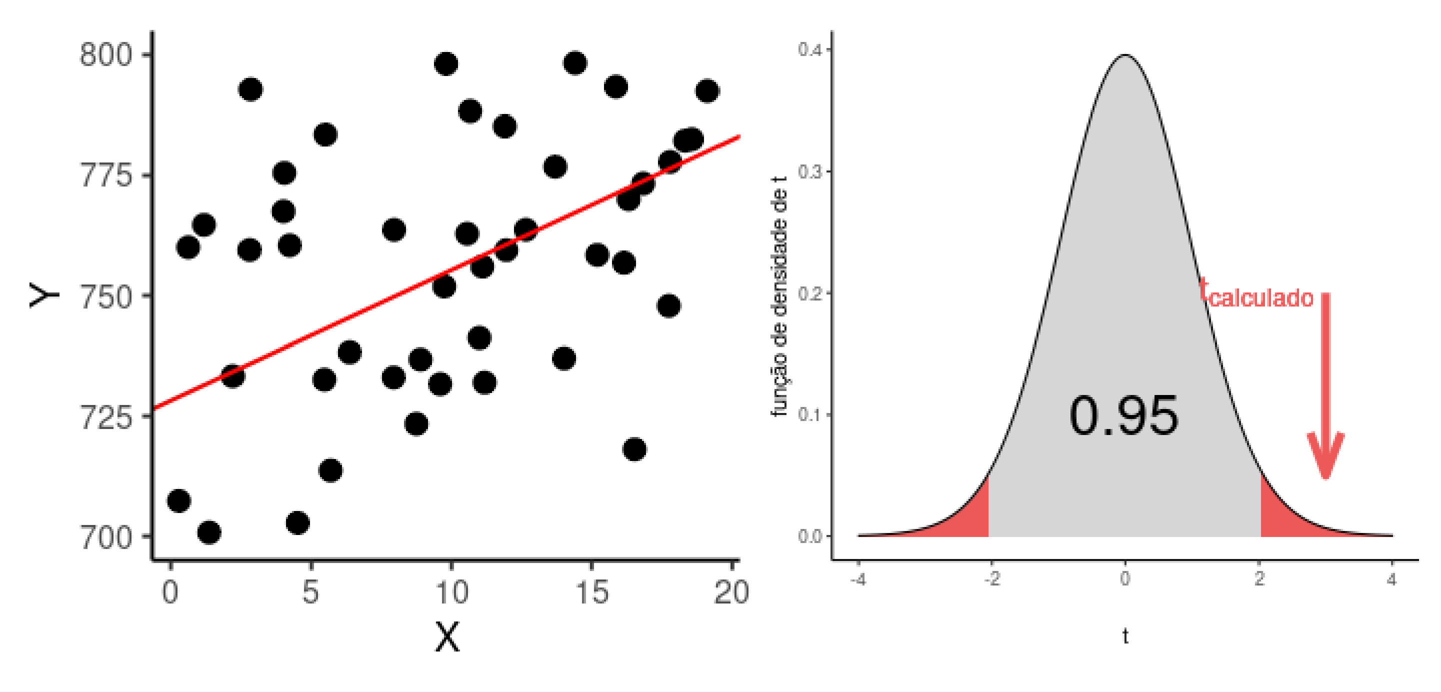
$t_{calculado}$ depende do **tamanho da amostra** - n

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



$t_{calculado}$ depende do **tamanho da amostra** - n

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$$



7. Teste de hipóteses

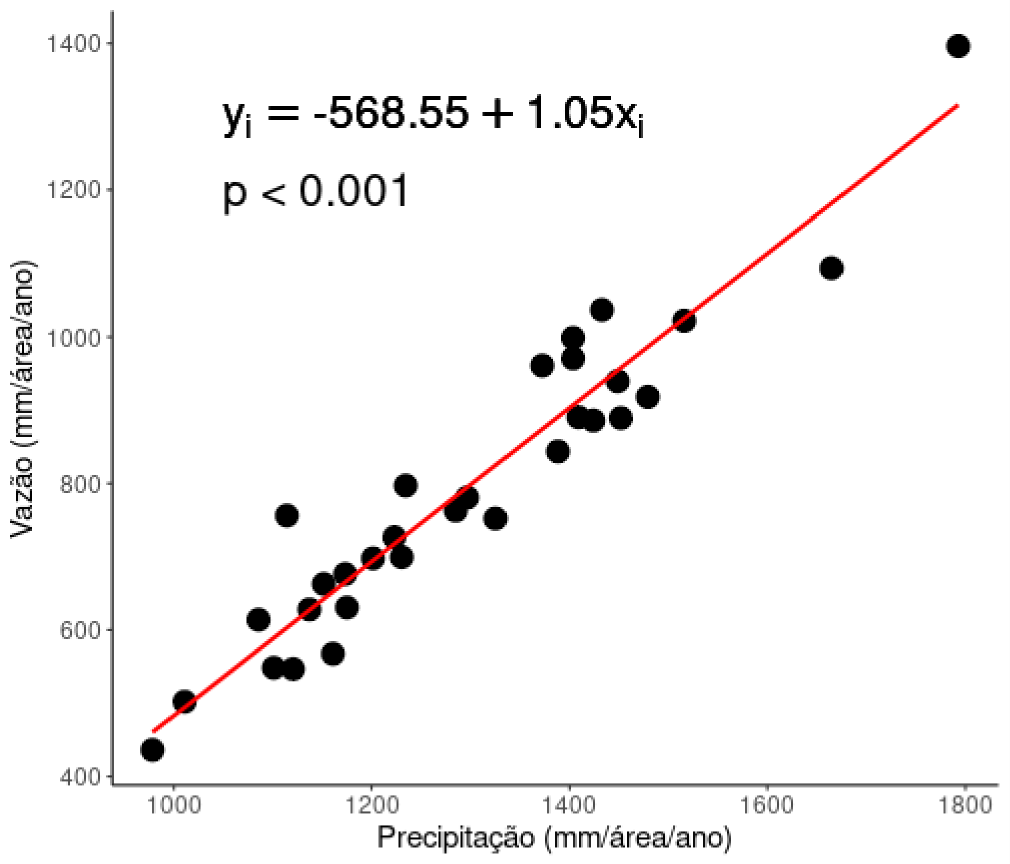
Na figura ao lado, os coeficientes de regressão foram estimados pelo MMQ em $\hat{\beta}_0 = -568.55$ e $\hat{\beta}_1 = 1.05$.

O valor de t foi:

$$t_{calculado} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = \frac{1.05 - 0}{0.06} = 17.451$$

O valor de $p < 0.001$ associado a este resultado, se interpretado ao nível de significância $\alpha = 0,05$, é dito estatísticamente significativo, o que nos leva a **rejeitar** H_0
.

A conclusão é de que **existe** uma relação crescente entre a Precipitação e a Vazão na bacia hidrográfica.



8. Intervalo de confiança para $\hat{Y}$

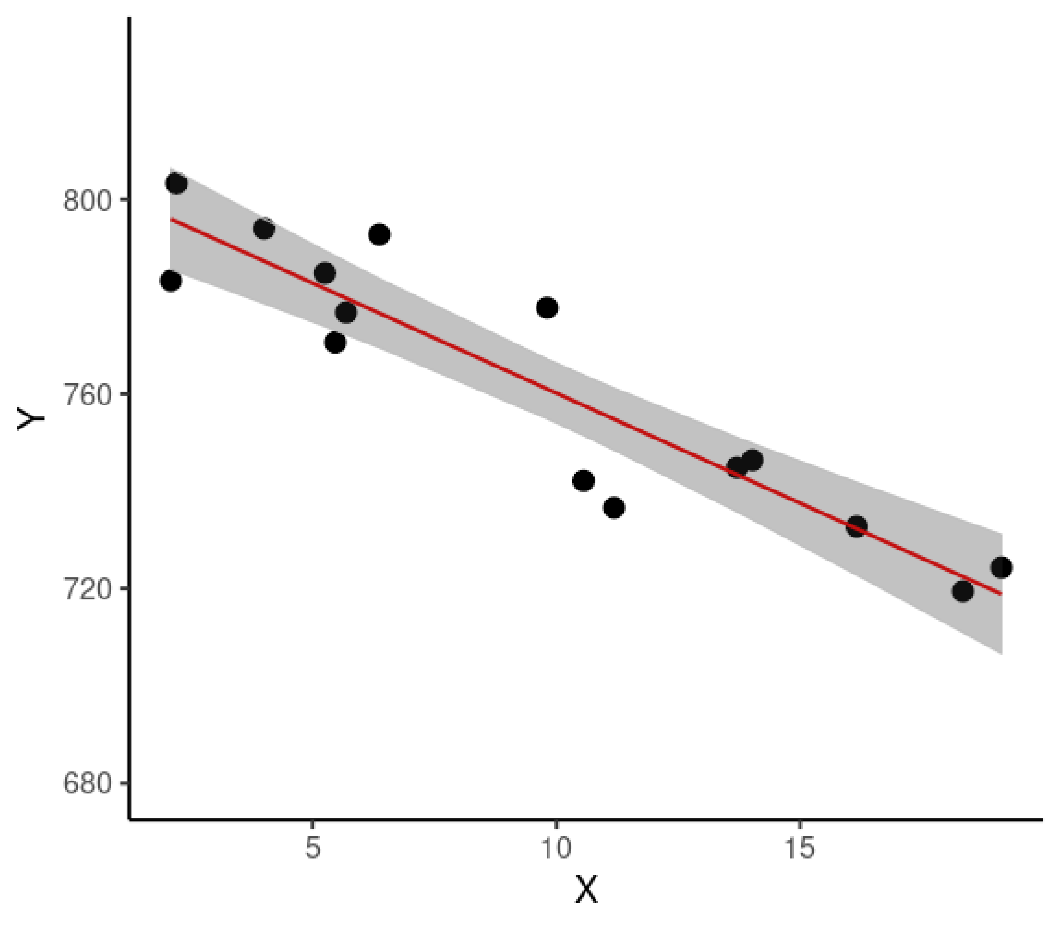
Cada repetição do experimento com amostra de tamanho n irá resultar em diferentes valores de $\hat{Y}$ e consequentemente diferentes **retas de regressão**. O erro padrão de $\hat{Y}$ é dado por:

$$s_{\hat{Y}|X} = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \overline{X})^2}{SQ_X} \right)}$$

O intervalo de confiância de $\hat{Y}$ é dado por:

$$\hat{Y} \pm t_{(\alpha, n-2)} s_{\hat{Y}|X}$$

A confiança para $\hat{Y}$ aumenta ao redor de $\overline{X}$ e diminui nos extremos da distribuição de X_i



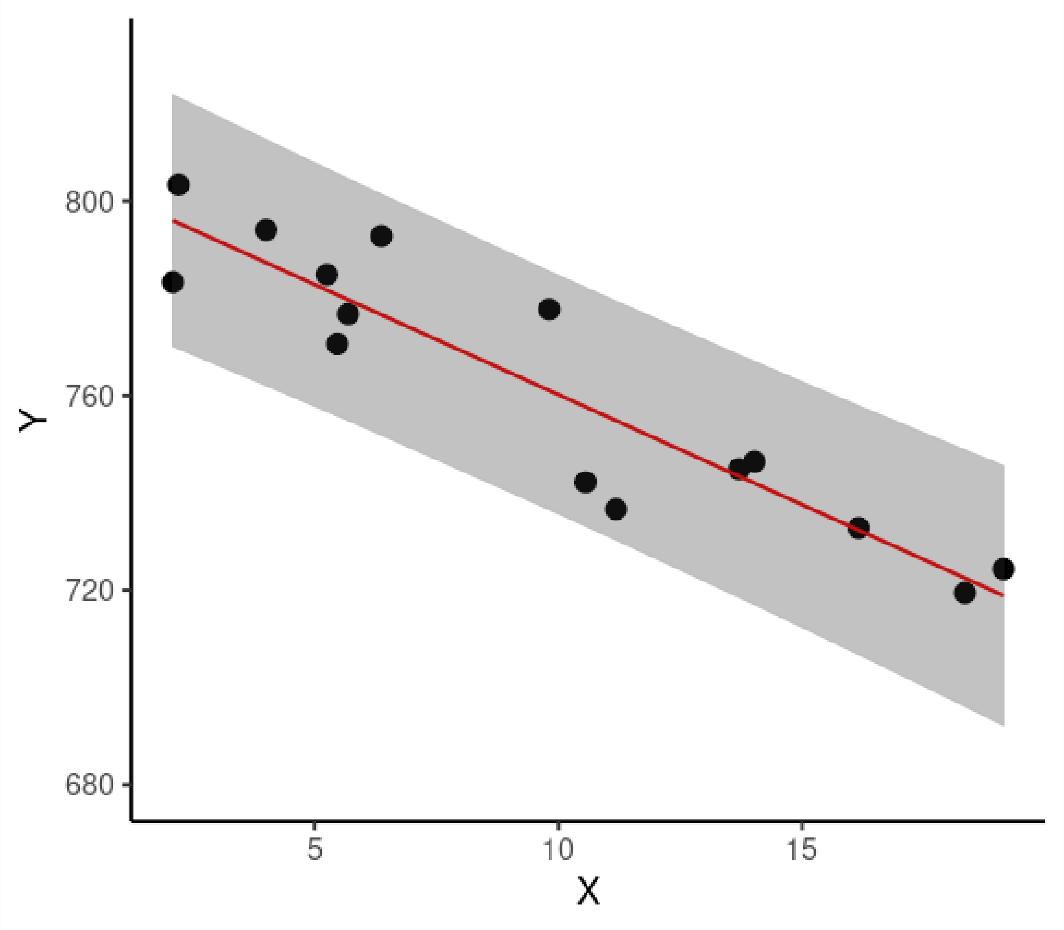
8. Intervalo de predição para Y^*

Tendo um modelo de regressão ajustado, o que esperar para Y se obtivermos **um novo dado** em X^*? O erro padrão de Y^* é dado por:

$$s_{Y^*|X^*} = \sqrt{s^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \overline{X})^2}{SQ_X} \right)}$$

O intervalo de **predição** de Y^* é dado por:

$$Y^* \pm t_{(\alpha, n-2)} s_{Y^*|X^*}$$

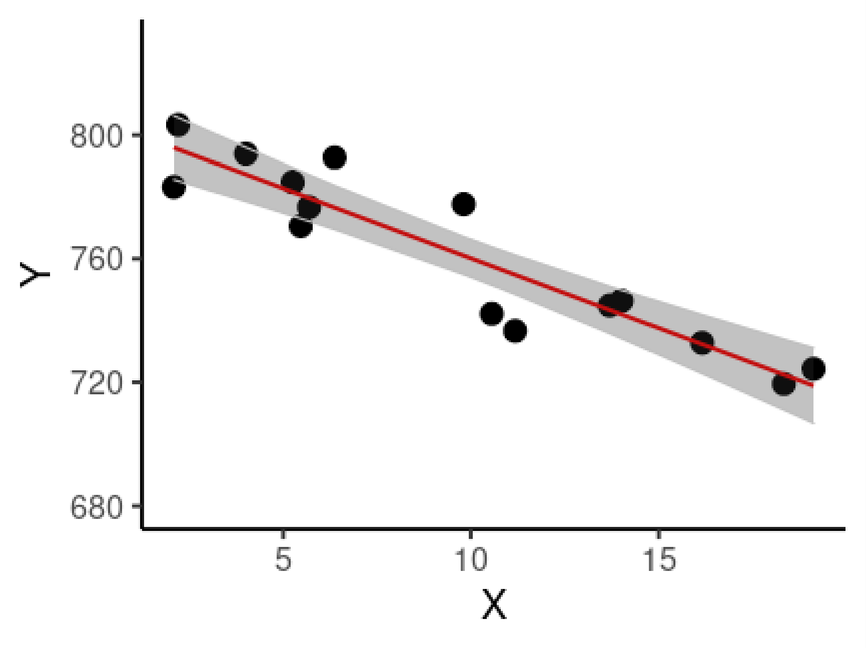


8. Intervalo de confiança *vs* intervalo de predição

Intervalo de confiança de $\hat{Y}$

$$s_{\hat{Y}|X} = \sqrt{s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \overline{X})^2}{SQ_X}\right)}$$

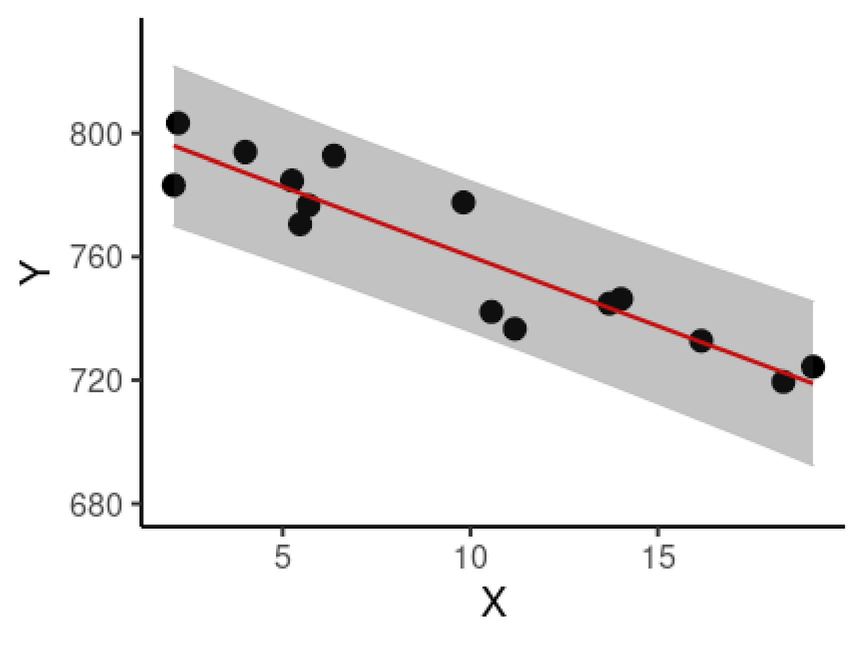
$$\hat{Y} \pm t_{(\alpha,n-2)} s_{\hat{Y}|X}$$



Intervalo de predição de Y_i^*

$$s_{Y^*|X^*} = \sqrt{s^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \overline{X})^2}{SQ_X}\right)}$$

$$Y^* \pm t_{(\alpha,n-2)} s_{Y^*|X^*}$$



8. Intervalos de confiança para $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$

Para $X_i = 0$, $\hat{Y} = \hat{\beta}_0$ de modo que:

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{SQ_X}\right)}$$

O intervalo de confiância de $\hat{\beta}_0$ é dado por:

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{(\alpha,n-2)}\, s_{\hat{\beta}_0}$$

Para $\hat{\beta}_1$ temos:

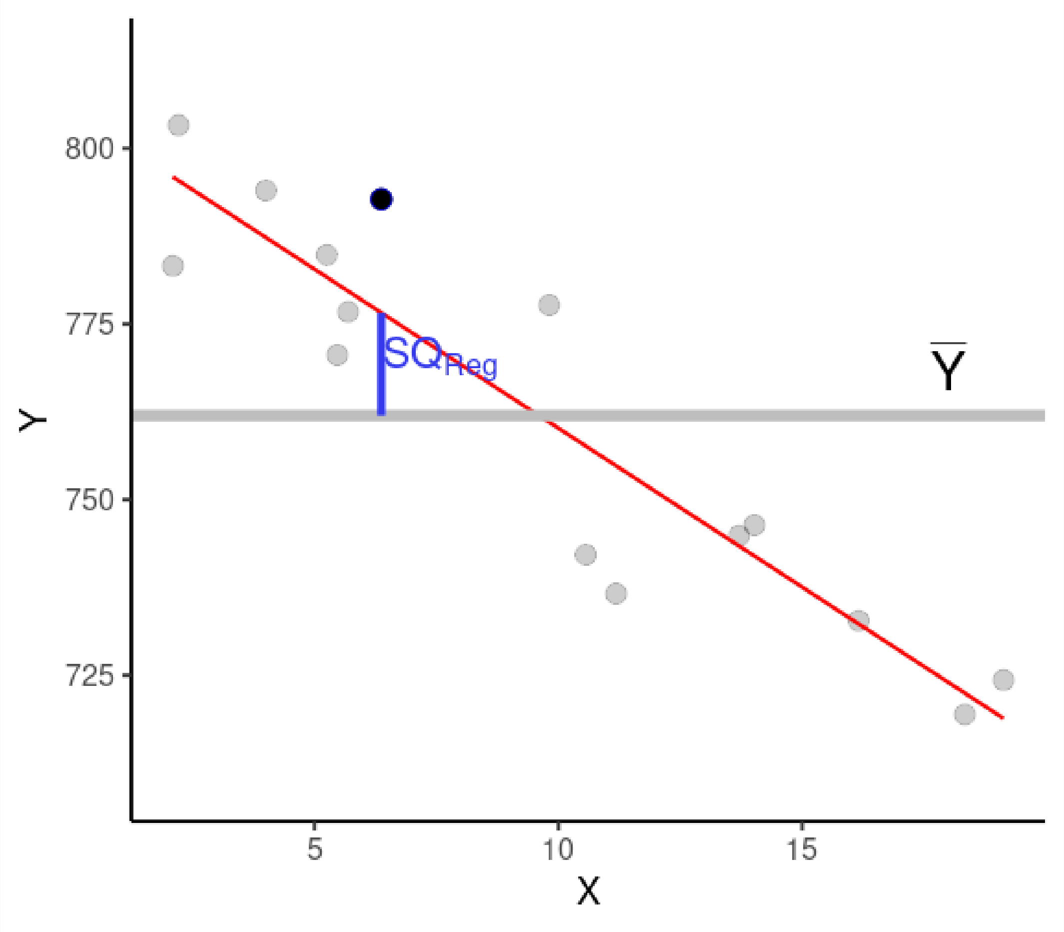
$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\left(\frac{s^2}{SQ_X}\right)}$$

O intervalo de confiância de $\hat{\beta}_1$ é dado por:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{(\alpha,n-2)}\, s_{\hat{\beta}_1}$$

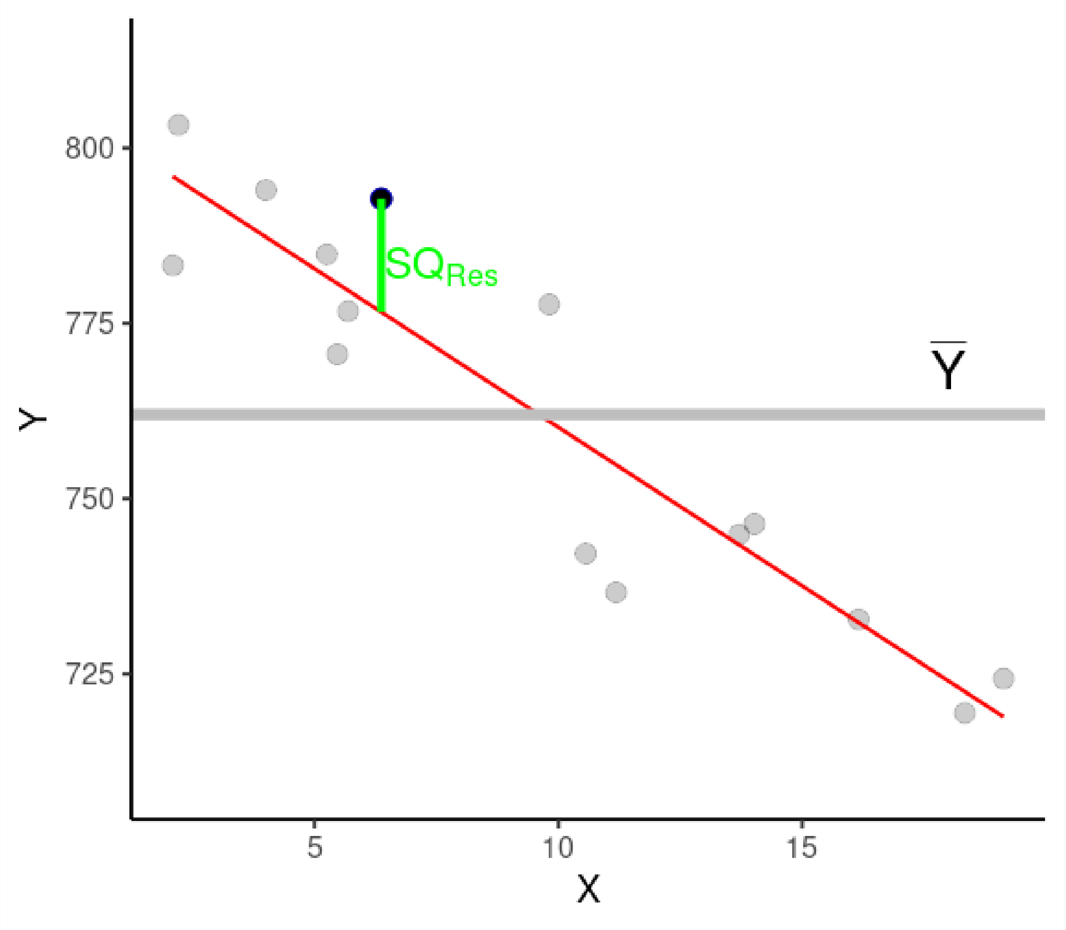
Somatório dos Quadrados da Regressão - SQ_{Reg}

$$SQ_{Reg} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$$



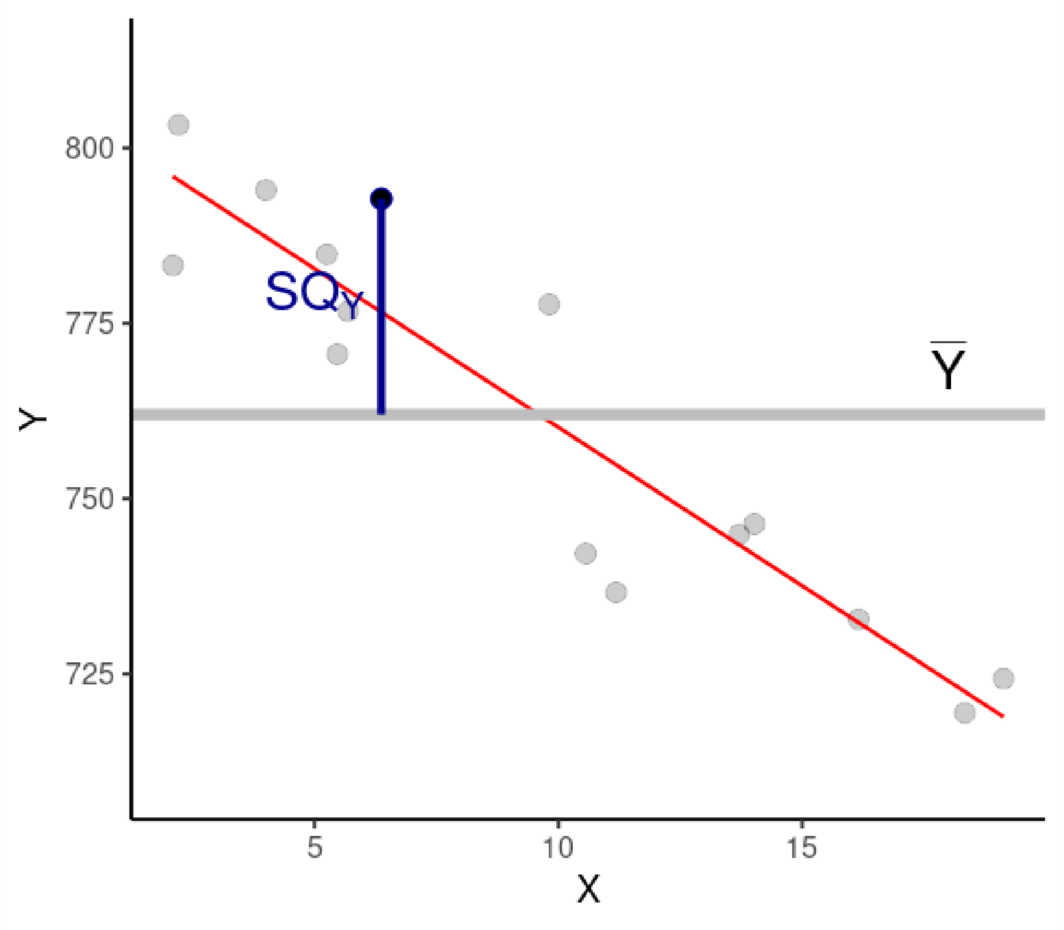
Somatório dos Quadrados do Resíduo - SQ_{Res}

$$SQ_{Res} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

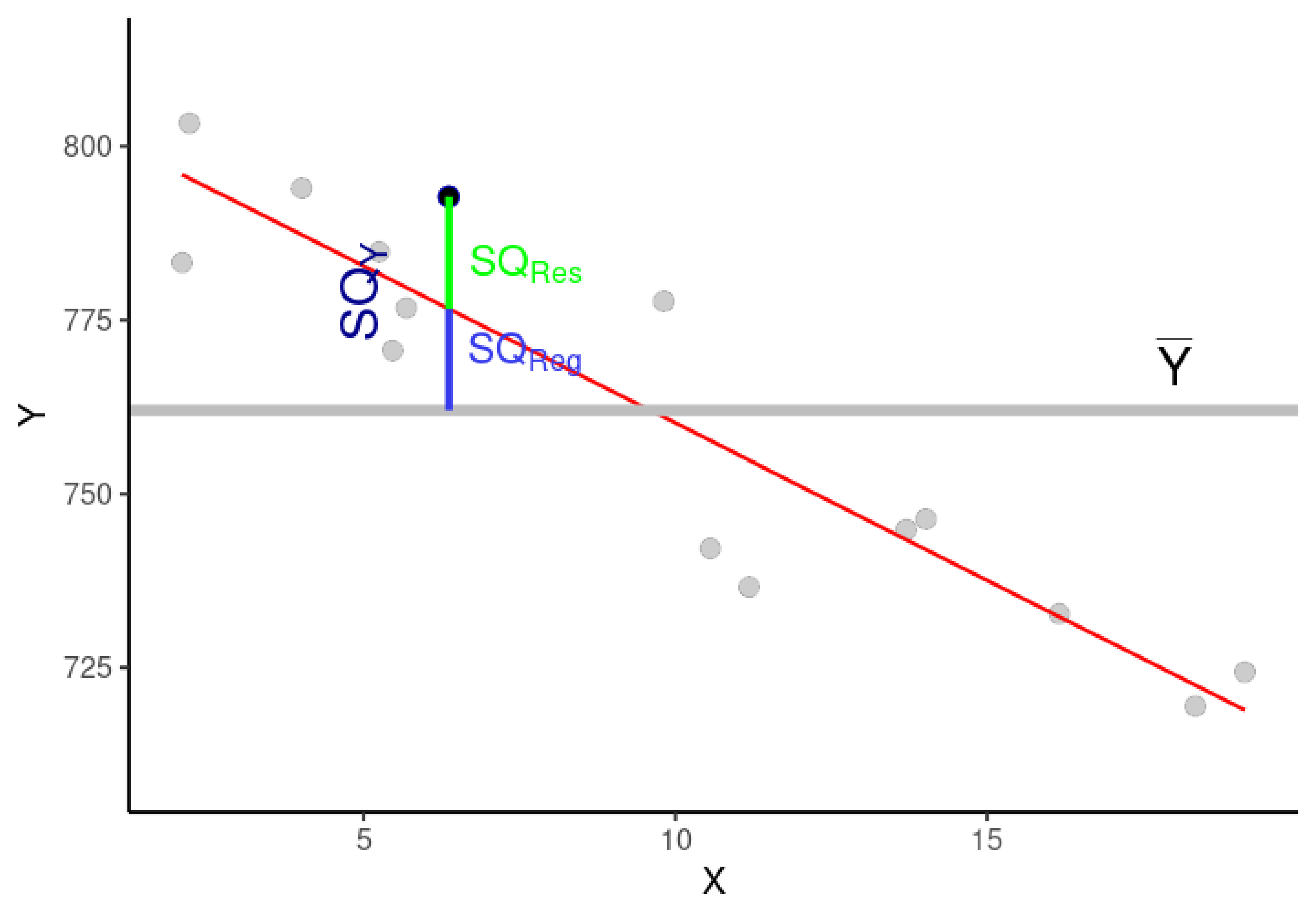


Somatório dos Quadrados de Y - SQ_Y

$$SQ_Y = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

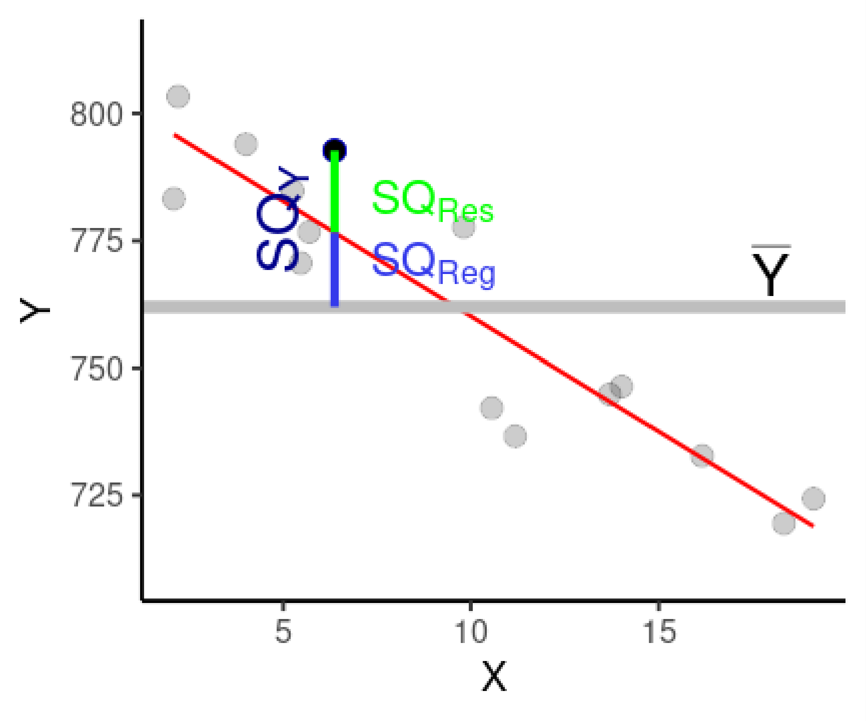


$$SQ_Y = SQ_{Reg} + SQ_{Res}$$



O Coeficiente de Determinação

$$R^2 = \frac{SQ_{Reg}}{SQ_Y} = \frac{SQ_{Reg}}{SQ_{Reg} + SQ_{Res}}$$



R^2 estima a proporção da variação em Y que pode ser atribuída ao modelo de regressão linear.

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

> Numericamente, o R^2 é igual ao coeficiente de correlação linear de Pearson elevado ao quadrado.

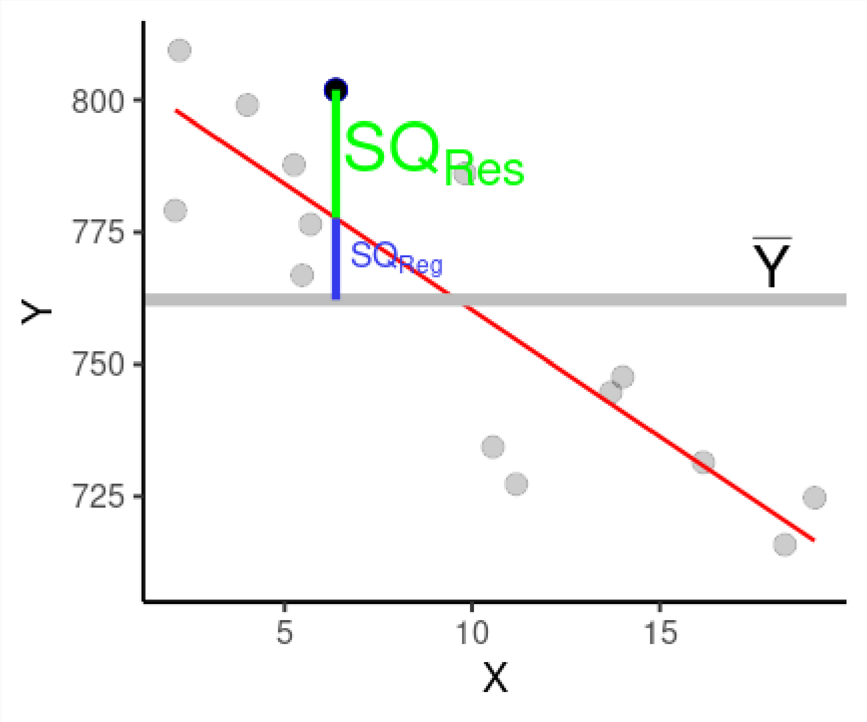
A Análise de Variância da Regressão

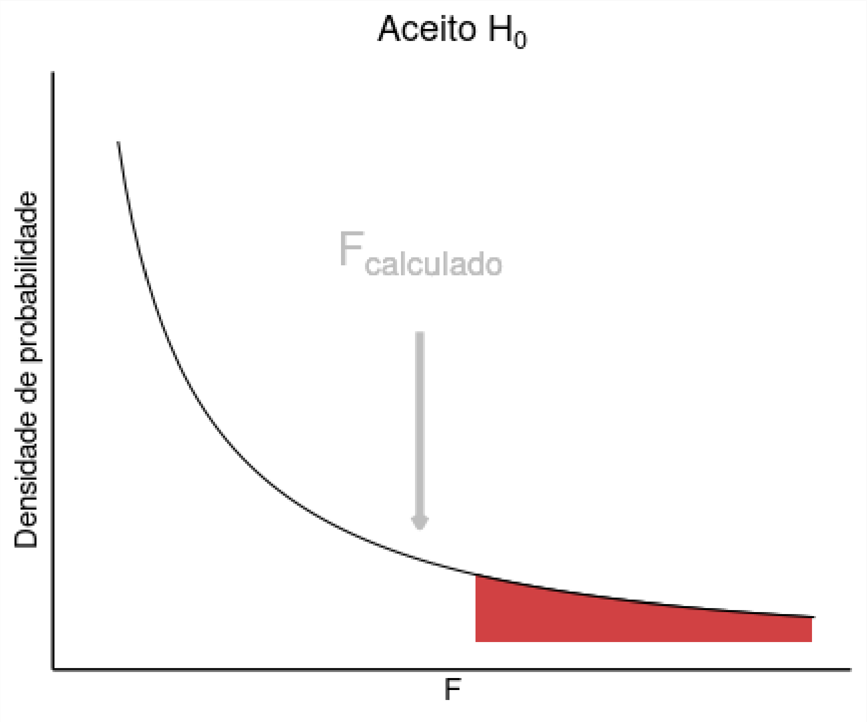
	gl	SQ	QM	F	p
X	1	9294.914	9294.914	77.49312	8e-07
Resíduo	13	1559.285	119.945	NA	NA

- gl: graus de liberdade
- SQ: soma dos quadrados
- QM: quadrado médio
- F: estatística F
- p: valor de probabilidade na distribuição F

A Análise de Variância da Regressão

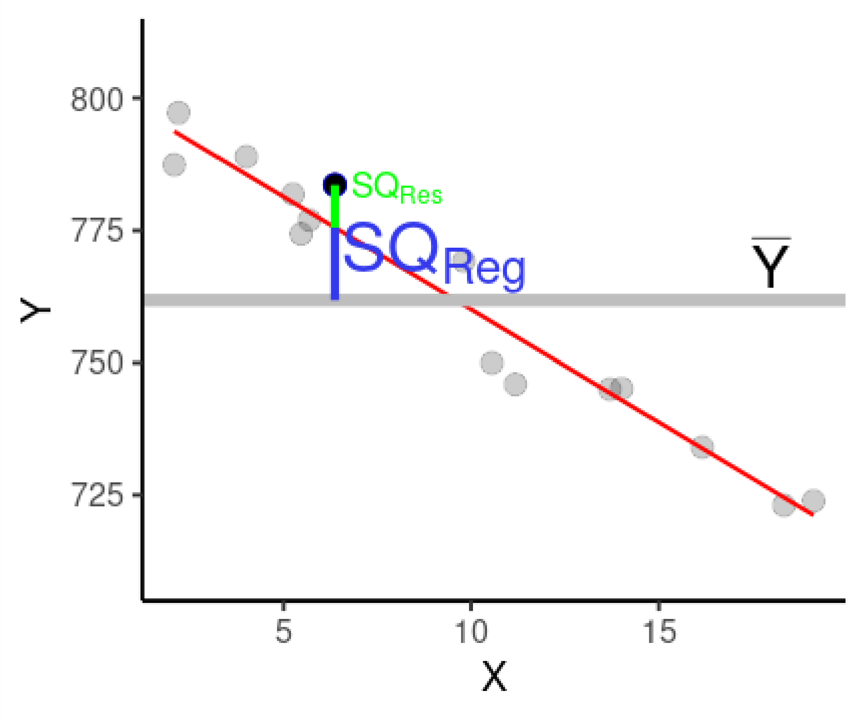
$$F_{calculado} = \frac{QM_{Reg}}{QM_{Res}}$$

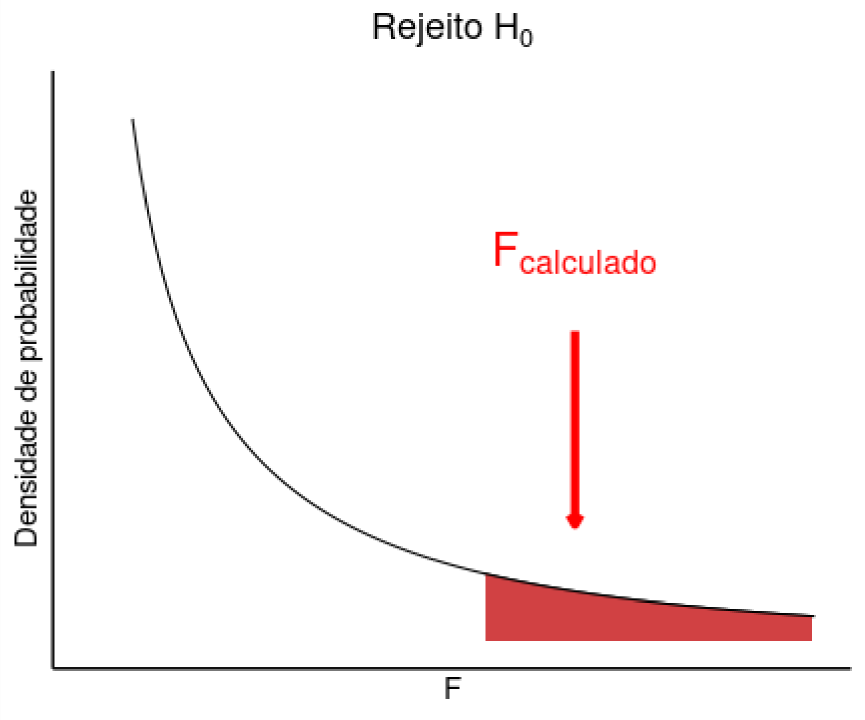




A Análise de Variância da Regressão

$$F_{calculado} = \frac{QM_{Reg}}{QM_{Res}}$$

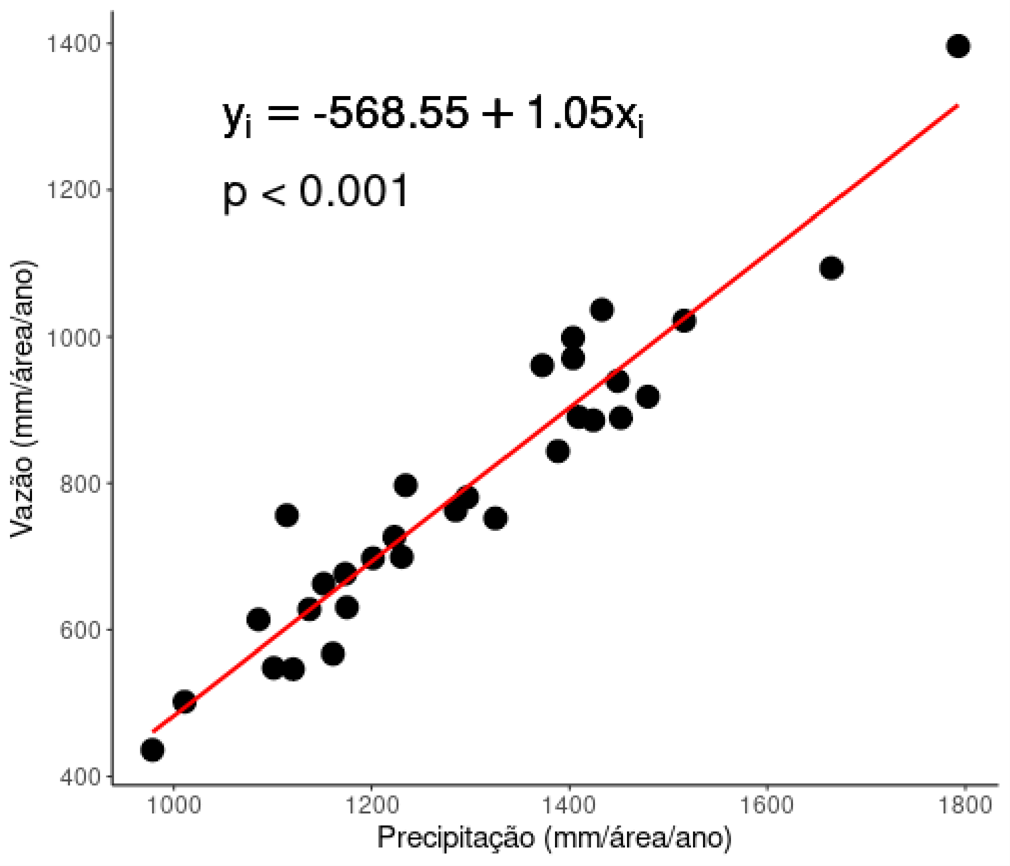




10. Os comandos em R

```
m_regressao = lm(Flow ~ Precipitation , data = st_ref)
summary(m_regressao)
```

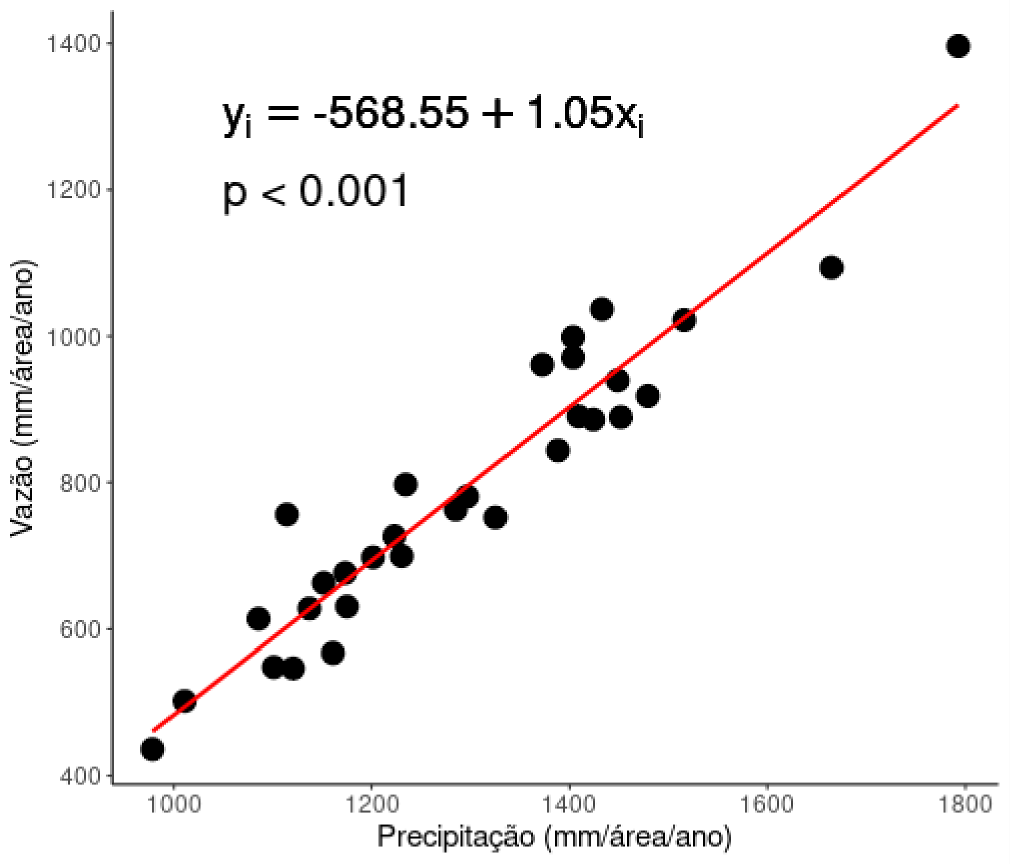
```
##
## Call:
## lm(formula = Flow ~ Precipitation, data = st_ref)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -87.86 -41.68 -14.03  30.64 153.09
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -568.54529   78.88794  -7.207  6.2e-08 ***
## Precipitation   1.05130    0.06024  17.451  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 61.51 on 29 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9131,	Adjusted R-squared:  0.9101
## F-statistic: 304.5 on 1 and 29 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



10. Os comandos em R

```
anova(m_regressao)
```

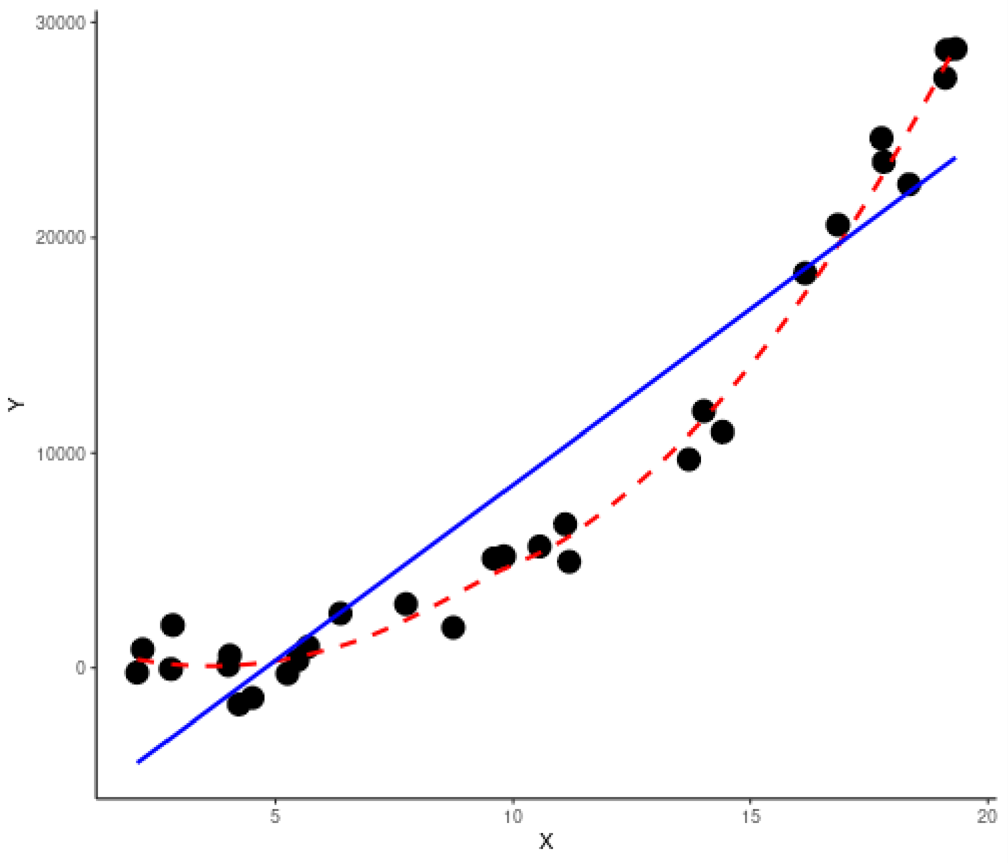
```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Flow
##                Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## Precipitation  1 1152275 1152275  304.53 < 2.2e-16 ***
## Residuals     29  109730    3784
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



11. Pressupostos do modelo

Ao realizar uma regressão linear simples, devemos assumir/testar alguns pressupostos.

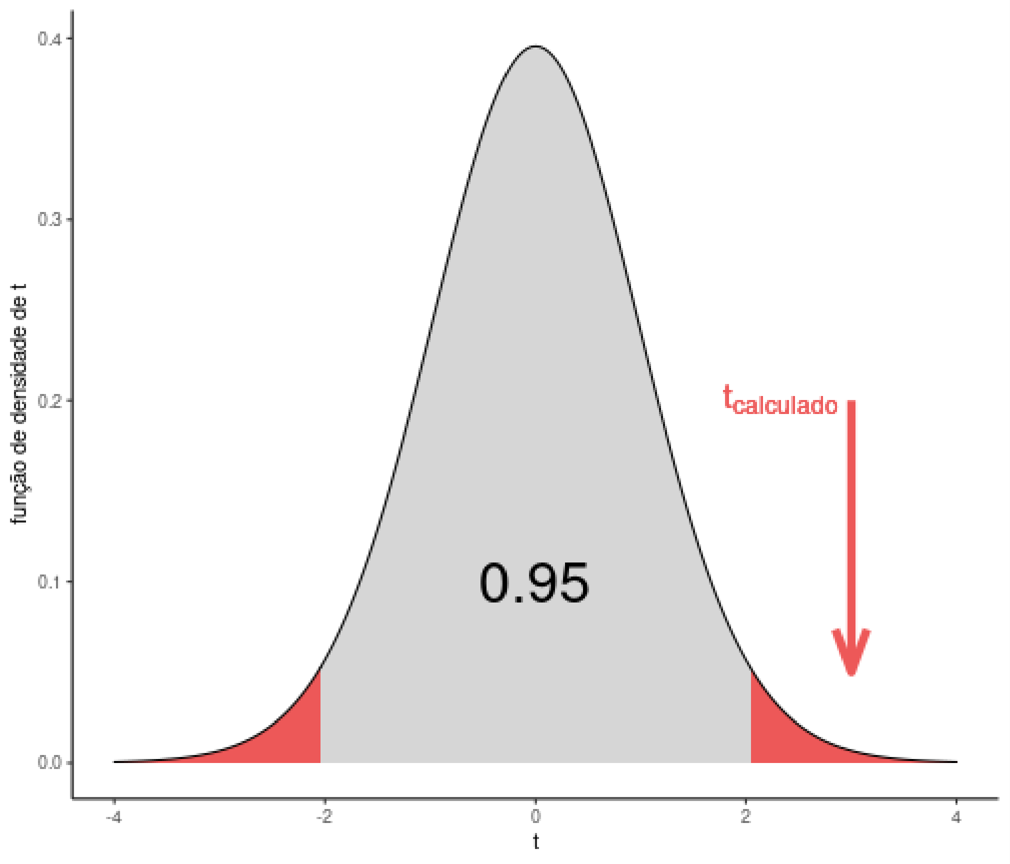
1. O modelo linear descreve adequadamente a relação funcional entre Y e X;
2. Cada par de observação (y_i, x_i) é independente dos demais;
3. A variável X é medida sem erros;
4. Os resíduos têm distribuição normal;
5. A variância residual σ^2 é constante ao longo de X.



11. Pressupostos do modelo

Ao realizar uma regressão linear simples, devemos assumir/testar alguns pressupostos.

1. O modelo linear descreve adequadamente a relação funcional entre Y e X;
2. Cada par de observação (y_i, x_i) é independente dos demais;
3. A variável X é medida sem erros;
4. Os resíduos têm distribuição normal;
5. A variância residual σ^2 é constante ao longo de X.

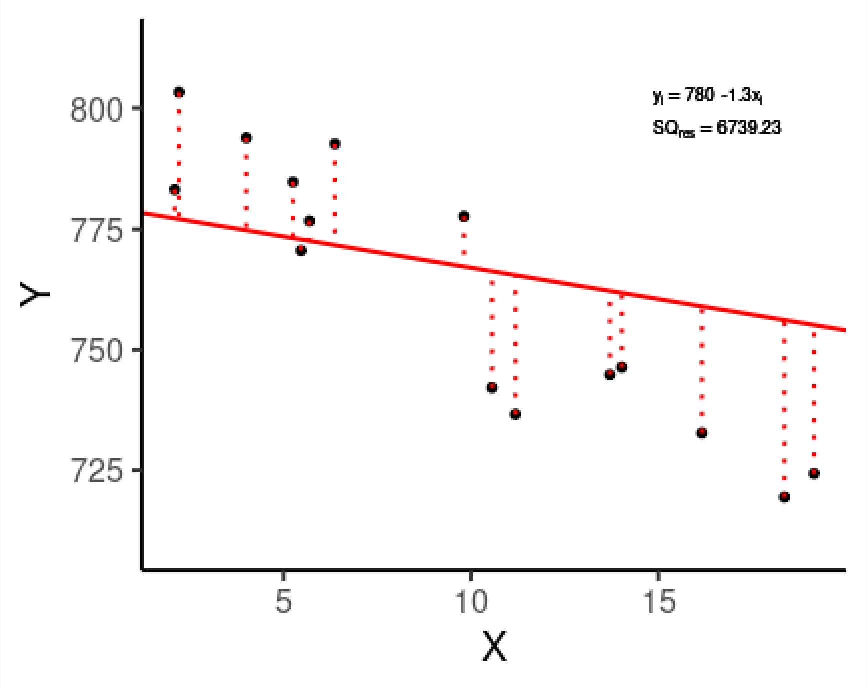


Ao realizar uma regressão linear simples, devemos assumir/testar alguns pressupostos.

1. O modelo linear descreve adequadamente a relação funcional entre Y e X;
2. Cada par de observação (y_i, x_i) é independente dos demais;
3. A variável X é medida sem erros;
4. Os resíduos têm distribuição normal;
5. A variância residual σ^2 é constante ao longo de X.

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

$$E(Y|x_i) = \mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

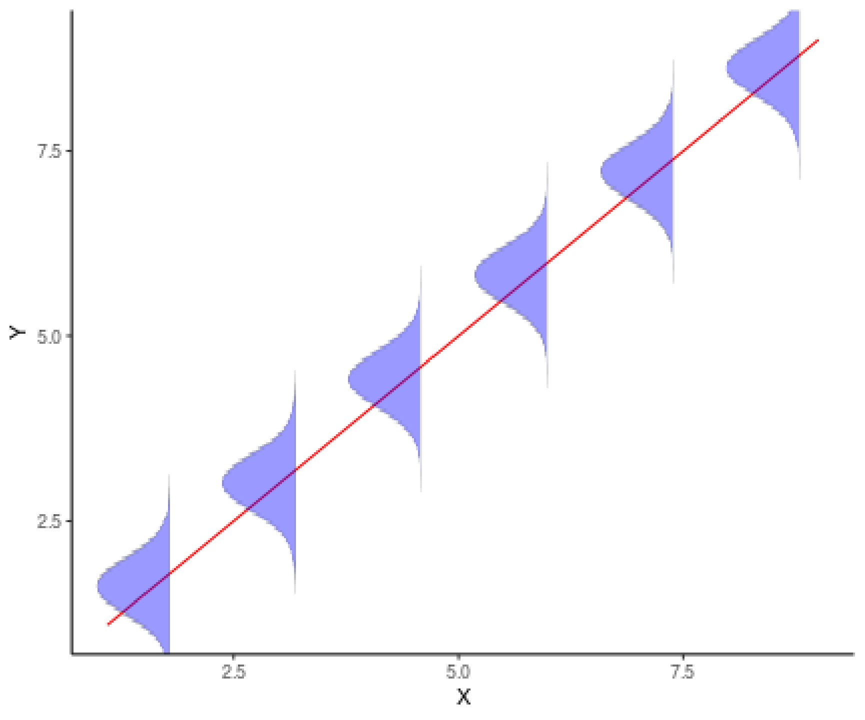


11. Pressupostos do modelo

Ao realizar uma regressão linear simples, devemos assumir/testar alguns pressupostos.

1. O modelo linear descreve adequadamente a relação funcional entre Y e X;
2. Cada par de observação (y_i, x_i) é independente dos demais;
3. A variável X é medida sem erros;
4. Os resíduos têm distribuição normal;
5. A variância residual σ^2 é constante ao longo de X.

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

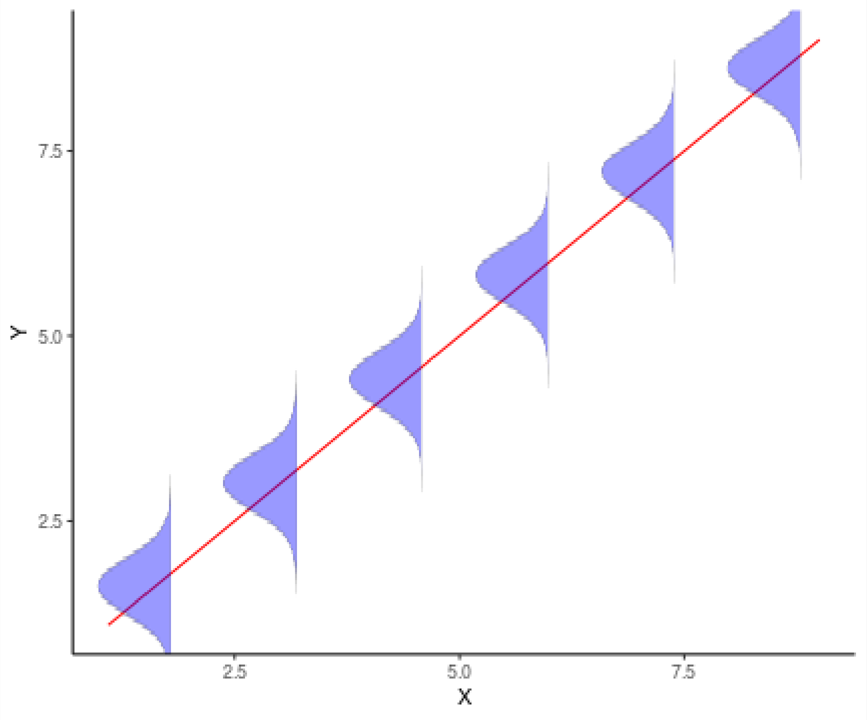


11. Pressupostos do modelo

Ao realizar uma regressão linear simples, devemos assumir/testar alguns pressupostos.

1. O modelo linear descreve adequadamente a relação funcional entre Y e X;
2. Cada par de observação (y_i, x_i) é independente dos demais;
3. A variável X é medida sem erros;
4. Os resíduos têm distribuição normal;
5. A variância residual σ^2 é constante ao longo de X.

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$



Um modelo de regressão linear **NÃO** precisa ser uma linha reta

> O que define um modelo estatístico como linear é a posição dos seus parâmetros com relação a(s) variável(is) preditora(s). Os parametros a serem estimados devem estar na **MESMA LINHA** da variável dependente.
>
> Os métodos discutidos para regressão linear simples também também se aplicam aos modelos de regressão múltipla e aos modelos polinomiais.

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$: Regressão Linear Simples

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip} \epsilon_i$: Regressão Linear Múltipla

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 \epsilon_i$: Regressão Polinomial

---

12. Transformações lineares

Outros modelos podem ser *linearizados* por meio de uma **função de ligação** do tipo:

$$\eta = g(\beta_i X_i)$$

Modelos Lineares Generalizados

$\eta = \beta_0 + \beta_1 X_i$

$Y \sim \mathcal{N}(\mu = \beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$: Modelo Normal (ex. Regressão Linear Simples)

$\eta = log(\beta_0 X_i^{\beta_1}) = log(\beta_0) + \beta_1 log(X_i)$

$Y \sim \mathcal{P}ois(\lambda = e^{\eta})$: Modelo de Poisson (ex. variáveis de contagem)

$\eta = logit(\eta) = log\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)$

$Y \sim \mathcal{B}inon(n = 1, p = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_i}})$: Modelo Binomial ou Regressão Logística (ex. variáveis categóricas binárias)