

# Inferência Estatística e Teste de Hipóteses

## O modelo da distribuição normal

---

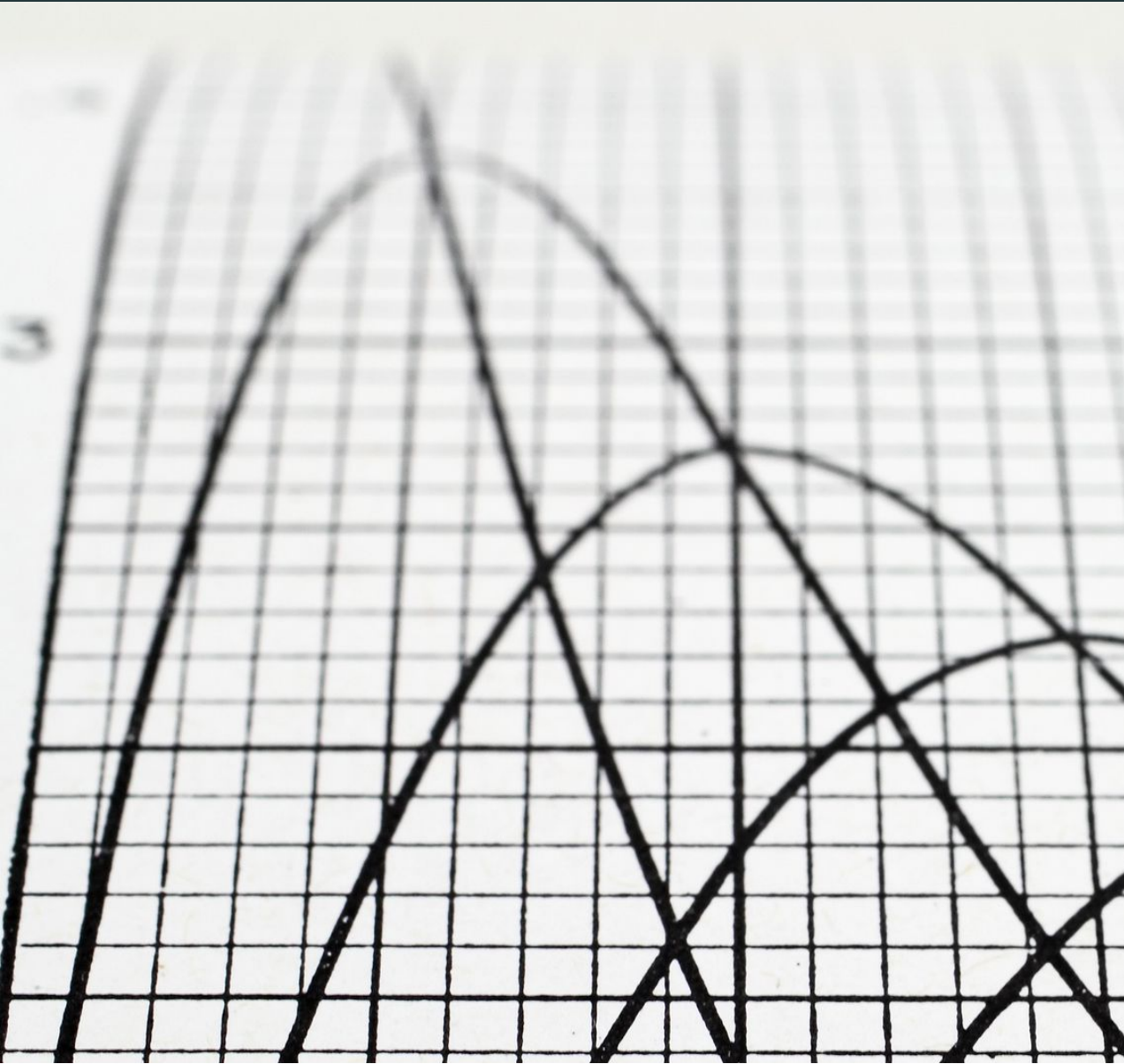
Fabio Cop ([fabiocopf@gmail.com](mailto:fabiocopf@gmail.com))

Instituto do Mar - UNIFESP

Última atualização em 25 de abril de 2022



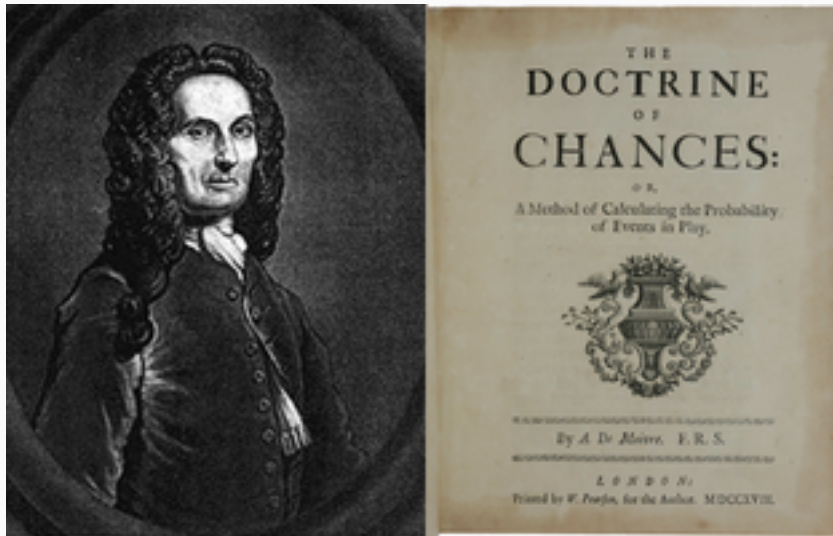
# O modelo da distribuição normal



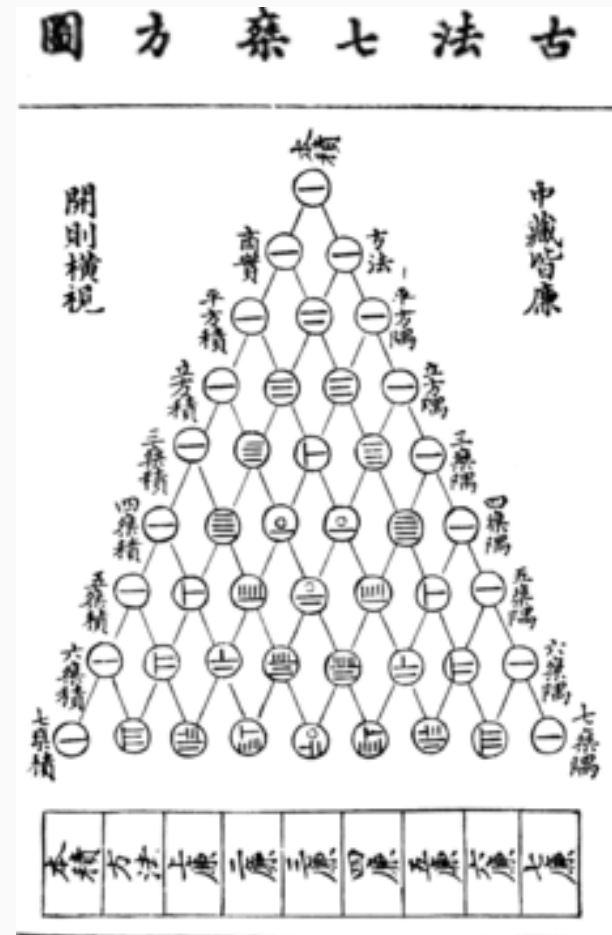
- 
1. Um pouco de história
  2. A importância do modelo normal em estatística
  3. O modelo normal de probabilidades
  4. Entendendo a função normal de densidade de probabilidade
  5. Cálculo de probabilidade com a função normal de densidade
  6. A distribuição normal padronizada
  7. Probabilidades em uma distribuição normal padronizada
-

# 1. Um pouco de história

Alguns atribuem a proposição deste modelo a **Abraham de Moivre**, um matemático Francês que chegou a a distribuição normal como uma aproximação a **distribuição binomial** em seu livro **The Doctrine of Chances** em 1718.



Abraham de Moivre (1667 - 1754)



Triângulo de Yang Hui's de 1261

# 1. Um pouco de história

A distribuição normal também é conhecida como **distribuição gaussiana**. **Carl Friedrich Gauss** lidou com este modelo para lidar com a distribuição dos erros de observação de um fenômeno no contexto do **Método dos Mínimos Quadrados** em 1823.



# 1. Um pouco de história

**Pierre-Simon Laplace** fez contribuições importantes ao modelo e aplicação da distribuição normal. Calcular a integral  $\int e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$  em 1782, o que permitiu a **padronização de uma distribuição normal** e, em 1810, apresentou o **Teorema Central do Limite** no contexto da agregação de várias observações independentes, o que foi fundamental para o desenvolvimento da estatística experimental ao longo do século *XX*.



Pierre-Simon Laplace (1748 - 1827)

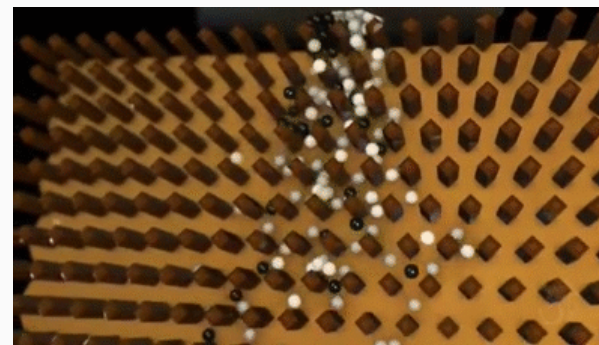
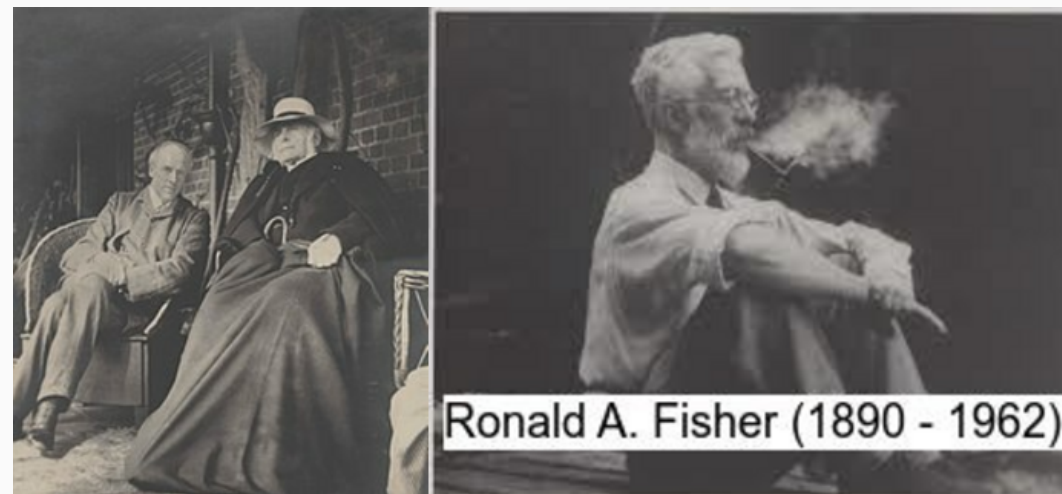


# 1. Um pouco de história

Até o final do início do século (XX) a curva era conhecida pelo termo **modelo de Gauss-Laplace**, quando começou a ser referida como **distribuição normal** por **Karl Pearson** e vários outros autores. Pearson foi também o primeiro a escrever o modelo em termos de seu **desvio padrão**  $\sigma$ . Logo em seguida, em 1915 **Ronald Fisher** adicionou o parâmetro de posição ( $m$ ), isto é a média, expressando o modelo como fazemos atualmente.

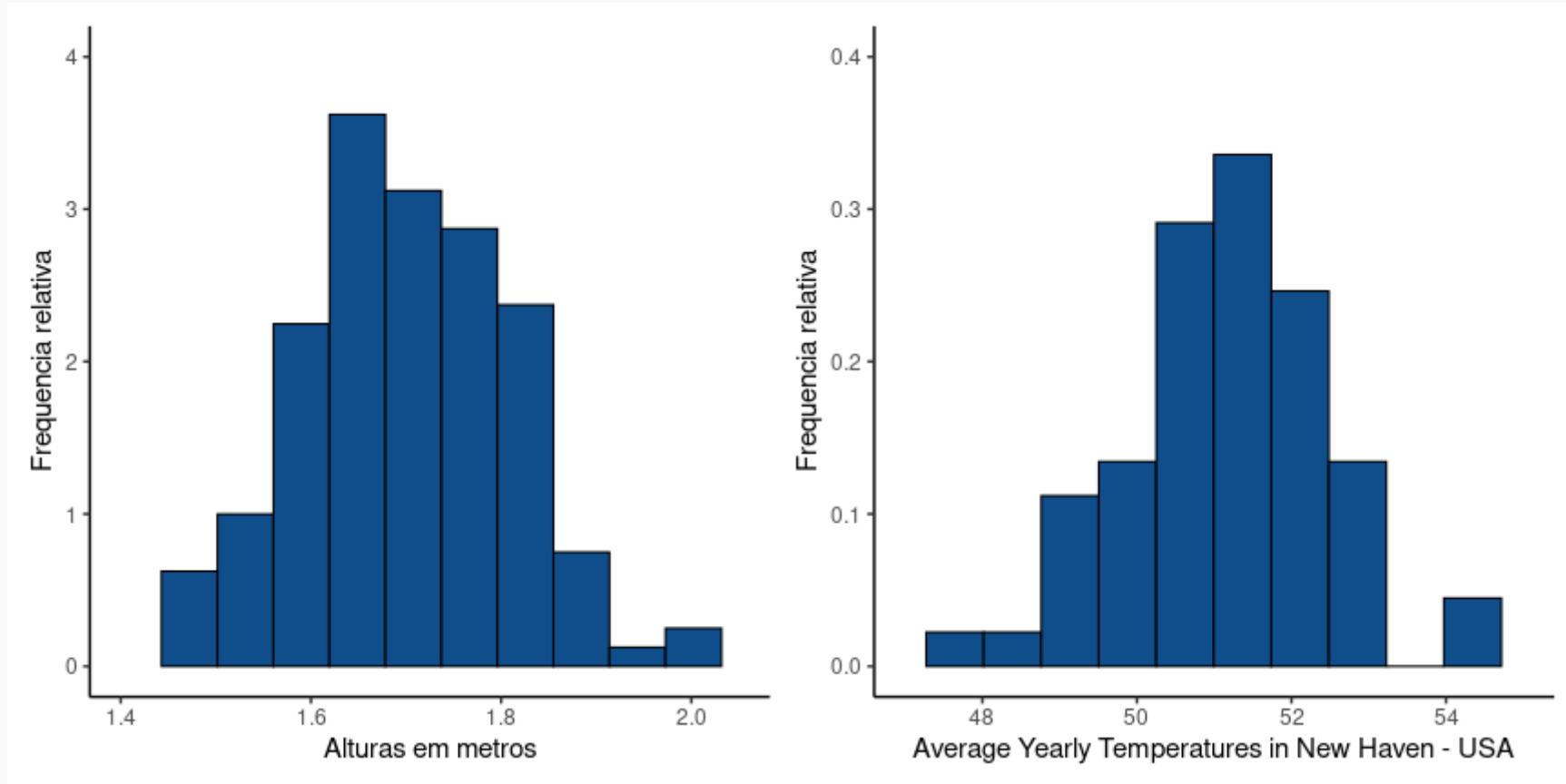
$$df = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Finalmente, a **distribuição normal padrão**, com média (0) e desvio padrão (1) começou a aparecer nos livros texto por volta de 1950.



## 2. A importância do modelo normal em estatística

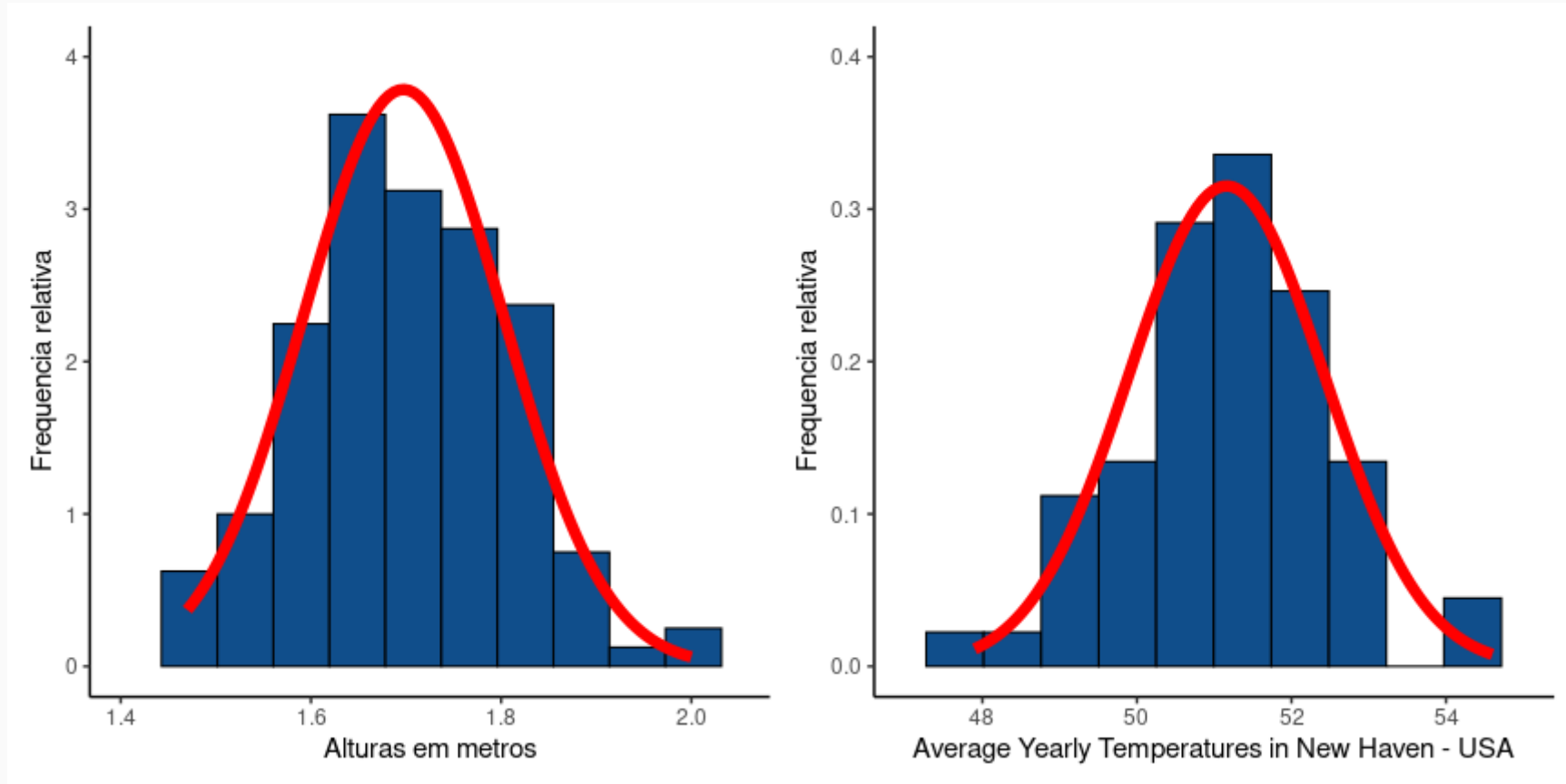
- A descrição de fenômenos e previsões com o modelo normal.





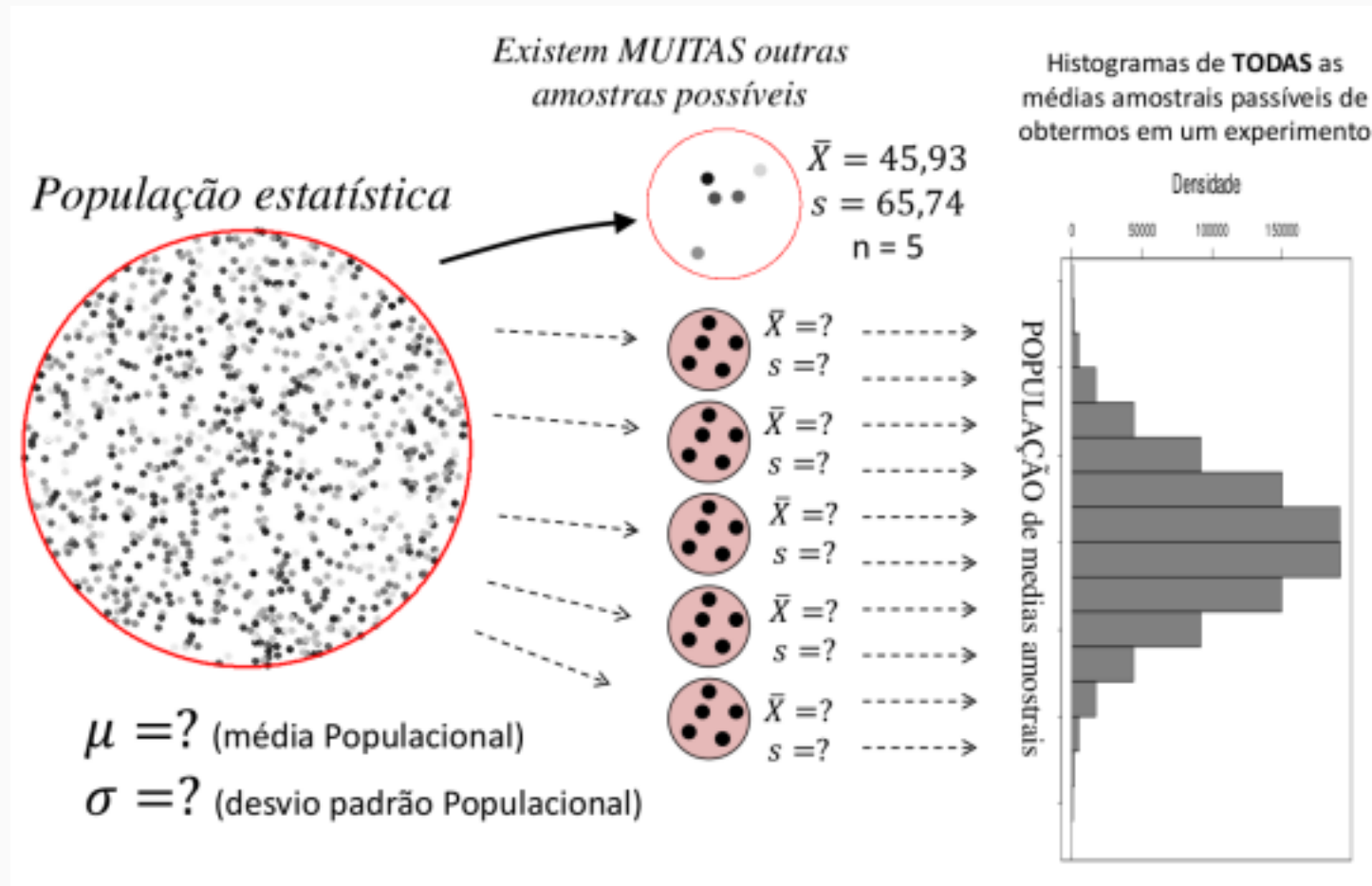
## 2. A importância do modelo normal em estatística

- A descrição de fenômenos e previsões com o modelo normal.



## 2. A importância do modelo normal em estatística

- O modelo normal com resultado do processo de amostragem



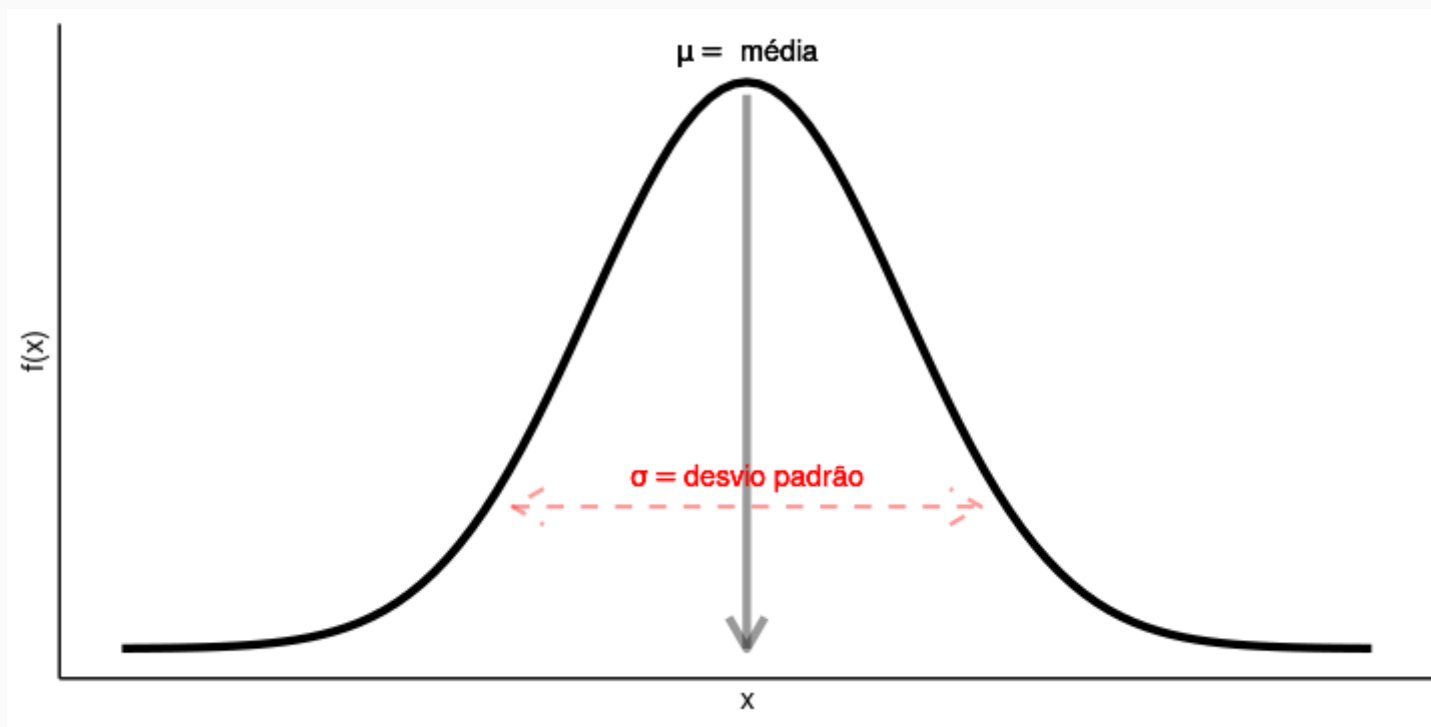
### 3. O modelo normal de probabilidades

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Lê-se:

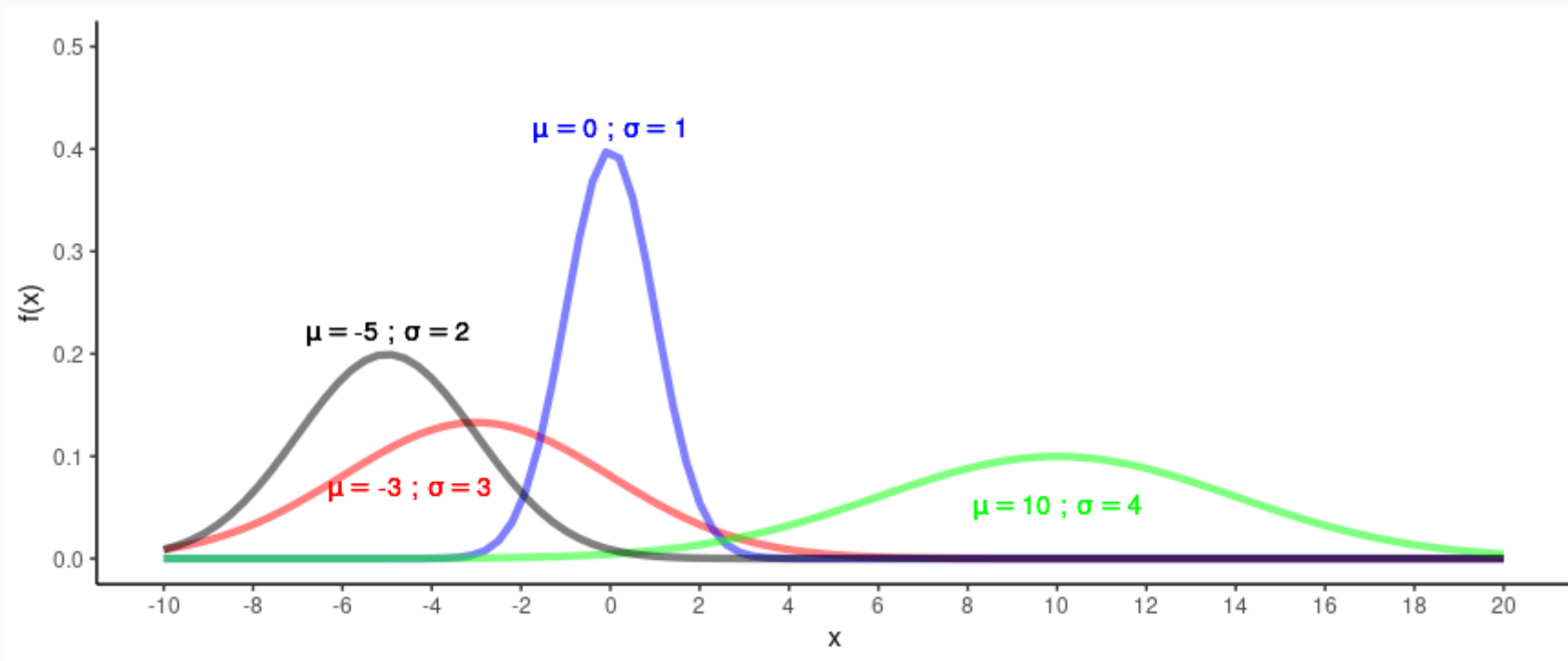
$X$  é uma variável aleatória com distribuição normal, média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ .



### 3. O modelo normal de probabilidades

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Podemos alterar o formato da distribuição normal alterando seu parâmetros de posição (média -  $\mu$ ) e de dispersão (desvio padrão -  $\sigma$ ).



## 4. Entendendo a função normal de densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Encontrando  $f(x)$  para pontos específicos.

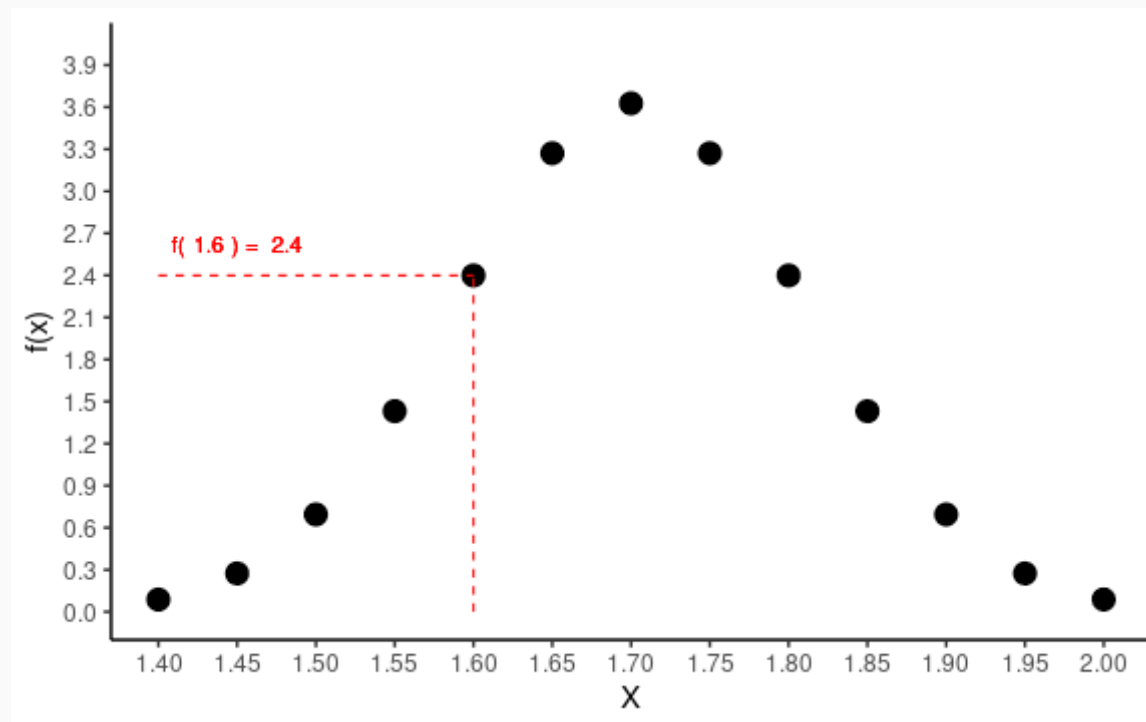
Seja:

$$\mu = 1.7; \sigma = 0.11$$

O ponto  $x = 1.6$  tem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.6-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f(x) = 2.4$$



## 4. Entendendo a função normal de densidade de probabilidade

Calculando de  $f(x)$  no R: a função `dnorm()`

Seja  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$

Para  $x = 1.5$  fazemos:

```
mu <- 1.7  
dp <- 0.11  
dnorm(1.5, mean = mu, sd = dp)
```

```
## [1] 0.6945048
```

E para múltiplos valores de  $x$ :

```
x <- c(1.4, 1.5, 1.6, 1.7)  
dnorm(x, mean = mu, sd = dp)
```

```
## [1] 0.0879777 0.6945048 2.3991470 3.6267480
```

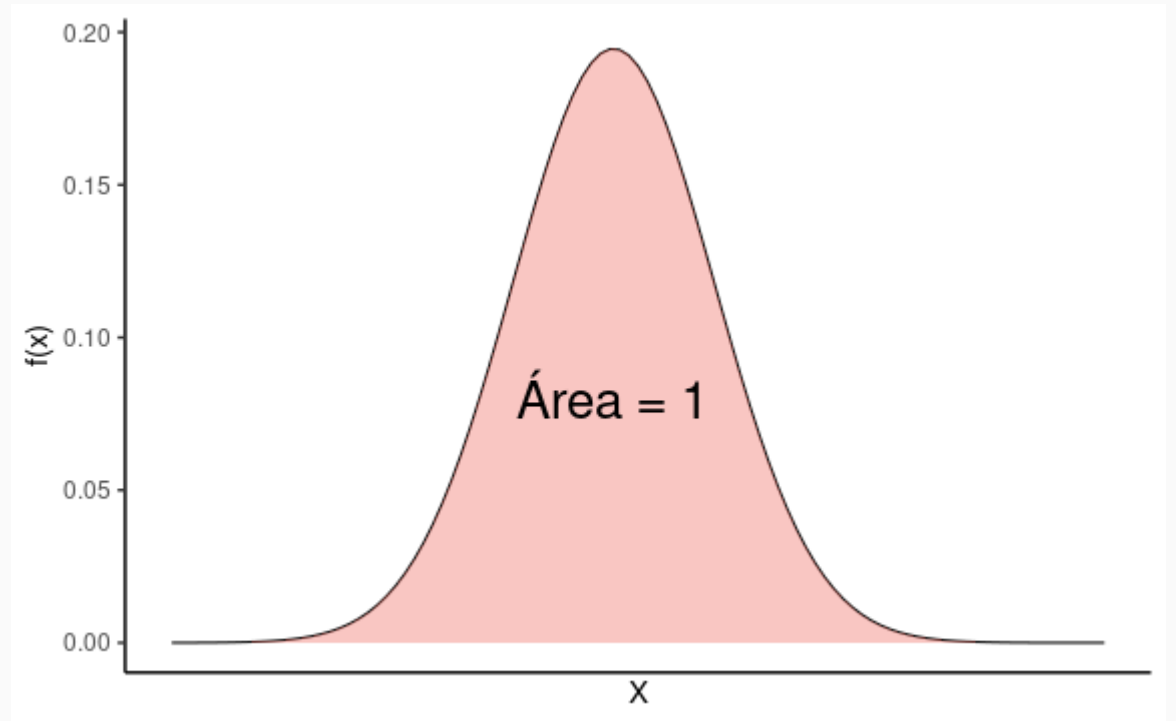


## 5. Cálculo de probabilidade com a função normal de densidade

A distribuição normal é uma função de **densidade de probabilidade**.

A **área** abaixo de  $f(x)$  entre  $-\infty$  e  $+\infty$  é igual a **1**.

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

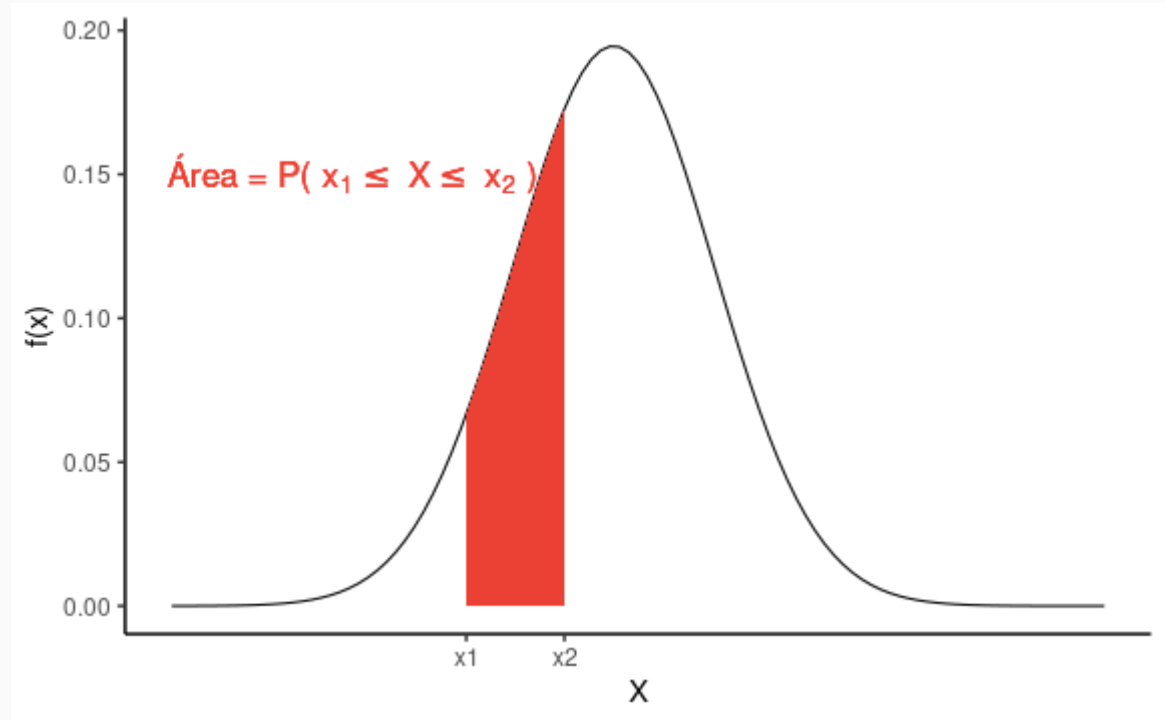


## 5. Cálculo de probabilidade com a função normal de densidade

A distribuição normal é uma função de **densidade de probabilidade**.

Utilizamos a distribuição normal para encontrar a probabilidade de uma variável aleatória  $X$  estar entre  $x_1$  e  $x_2$ , o que corresponde a encontrar a **área** abaixo de  $f(x)$ .

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$



## 5. Cálculo de probabilidade com a função normal de densidade

Calculando de  $P(X)$  no R: a função `dnorm()`

Seja  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$

$P(X < 1.5)$ :

```
mu <- 1.7
dp <- 0.11
pnorm(q = 1.5, mean = mu, sd = dp, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.03451817
```

$P(X > 1.5)$  --> `lower.tail = FALSE`:

```
mu <- 1.7
dp <- 0.11
pnorm(q = 1.5, mean = mu, sd = dp, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9654818
```

Os argumentos da função `pnorm` (veja o menu de ajuda digitando `?pnorm` no Console do R):

**q**: o valor de  $x$

**mean**: média  $\mu$  da função normal

**sd**: desvio padrão  $\sigma$  da função normal

**lower.tail**: se a função irá retornar a probabilidade abaixo (TRUE) ou acima (FALSE) de  $q$

## 5. Cálculo de probabilidade com a função normal de densidade

Calculando de  $P(X)$  no R: a função `dnorm()`

Seja  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$

$P(X < 1.5)$ :

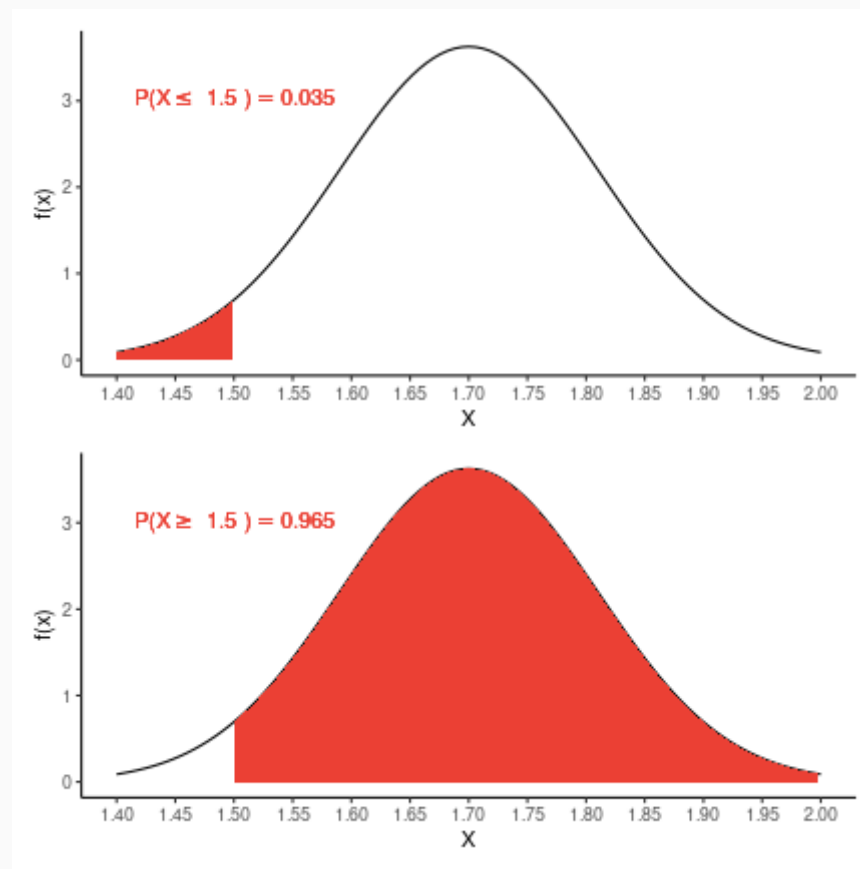
```
mu <- 1.7  
dp <- 0.11  
pnorm(q = 1.5, mean = mu, sd = dp, lower.tail = TRUE)
```

```
## [1] 0.03451817
```

$P(X > 1.5)$  --> `lower.tail = FALSE`:

```
mu <- 1.7  
dp <- 0.11  
pnorm(q = 1.5, mean = mu, sd = dp, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.9654818
```



## 5. Cálculo de probabilidade com a função normal de densidade

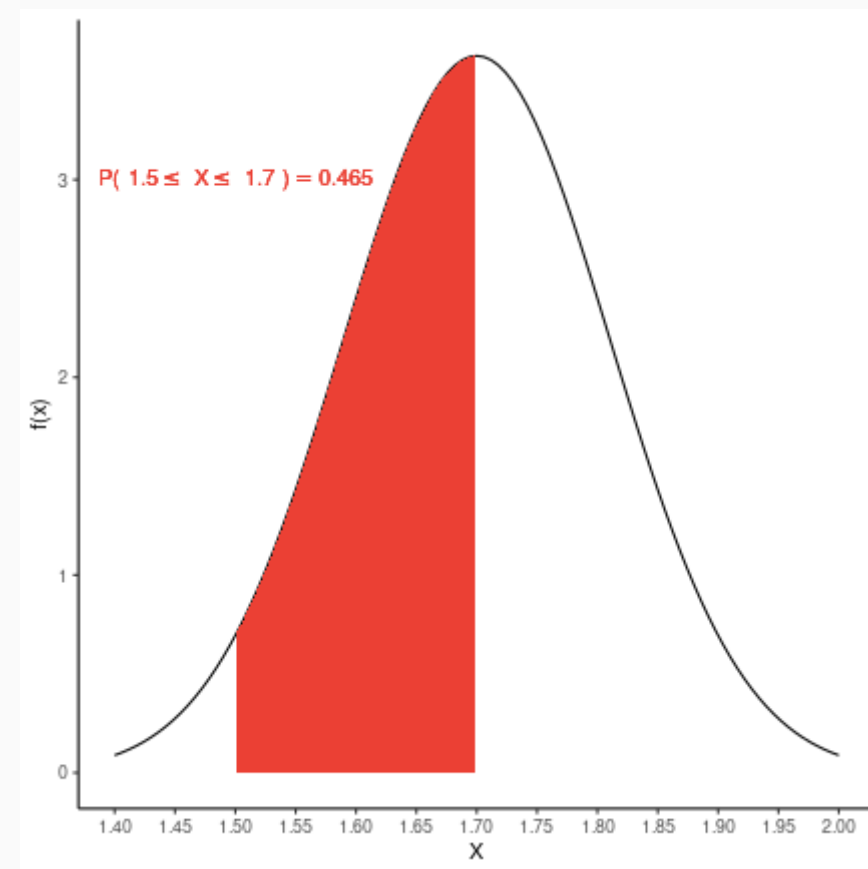
Calculando de  $P(X)$  no R: a função `dnorm()`

Seja  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$

$$P(1.5 \leq X \leq 1.7) = P(X \leq 1.7) - P(X \leq 1.5)$$

```
diff(pnorm(q = c(1.5, 1.7),  
          mean = mu,  
          sd = dp,  
          lower.tail = TRUE)  
)
```

```
## [1] 0.4654818
```

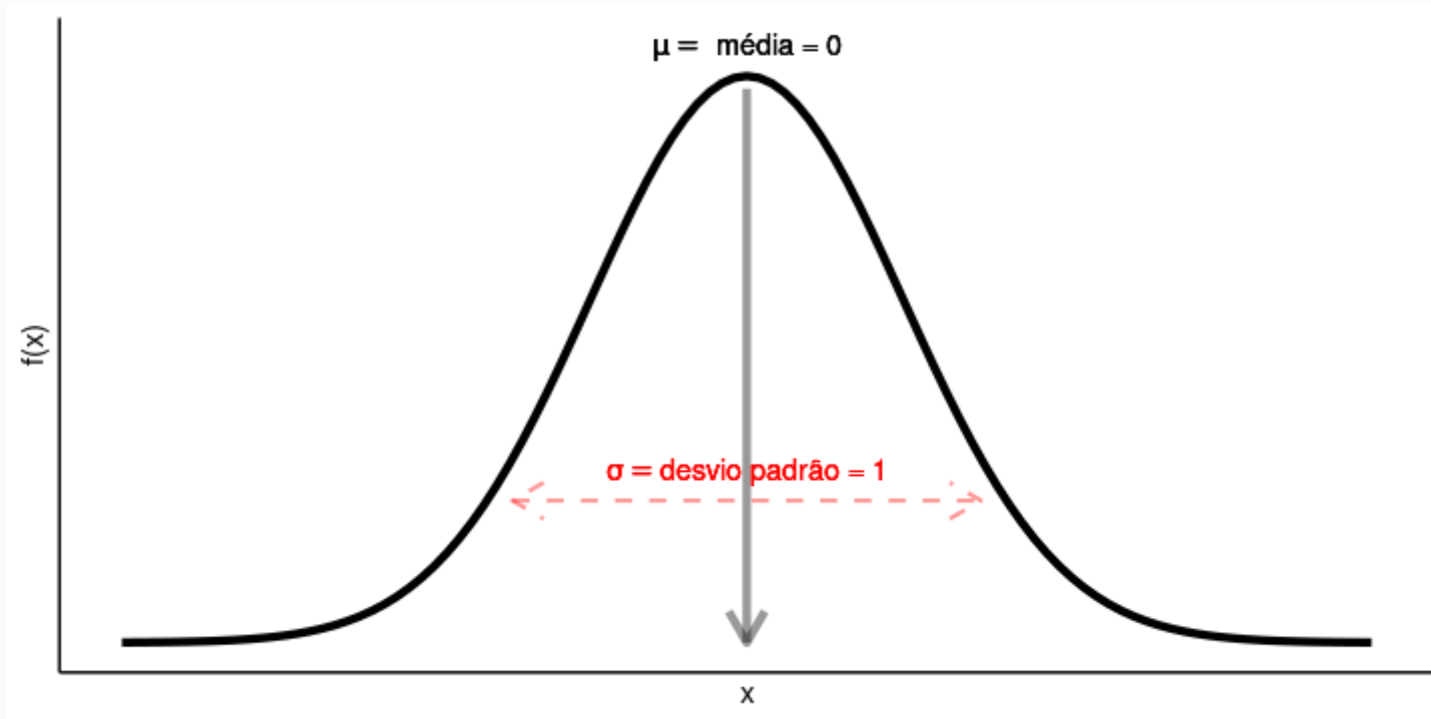


## 6. A distribuição normal padronizada

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$X$  é uma variável aleatória com distribuição normal **padronizada** se, média  $\mu = 0$  e desvio padrão  $\sigma = 1$ .





## 6. A distribuição normal padronizada: a transformação Z

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Seja  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$

A observação  $x = 1.5$  corresponde a:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{1.5 - 1.7}{0.11} = -1.82$$

Em uma distribuição normal com  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$ , a observação  $x = 1.5$  está **1.82** desvios padrões abaixo da média.

Seja  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$

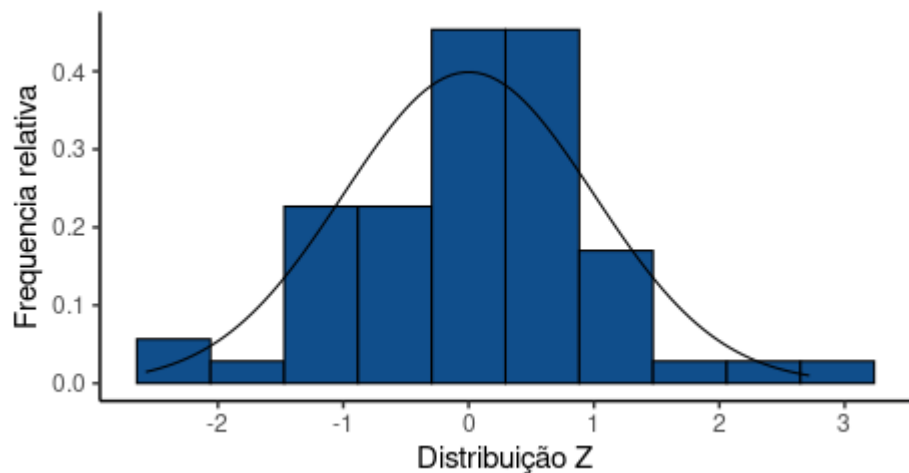
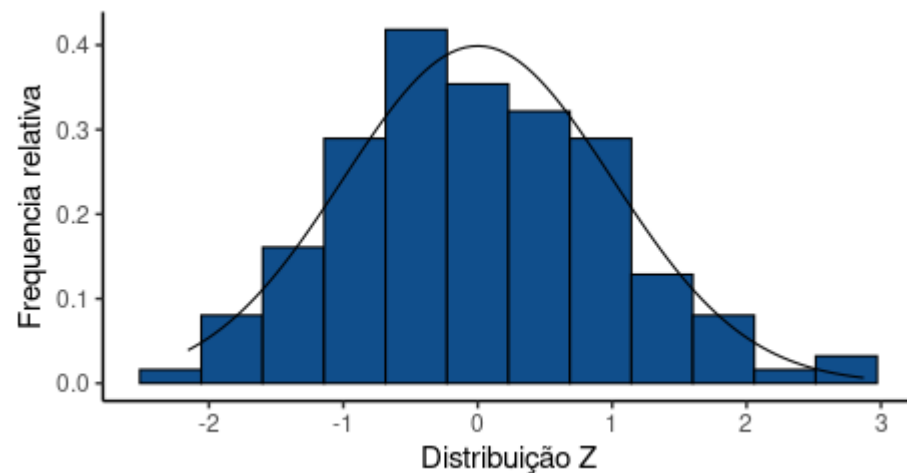
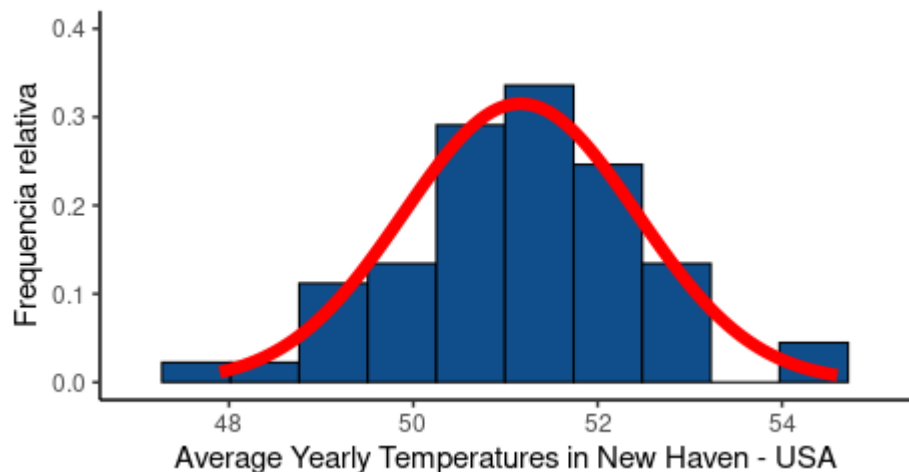
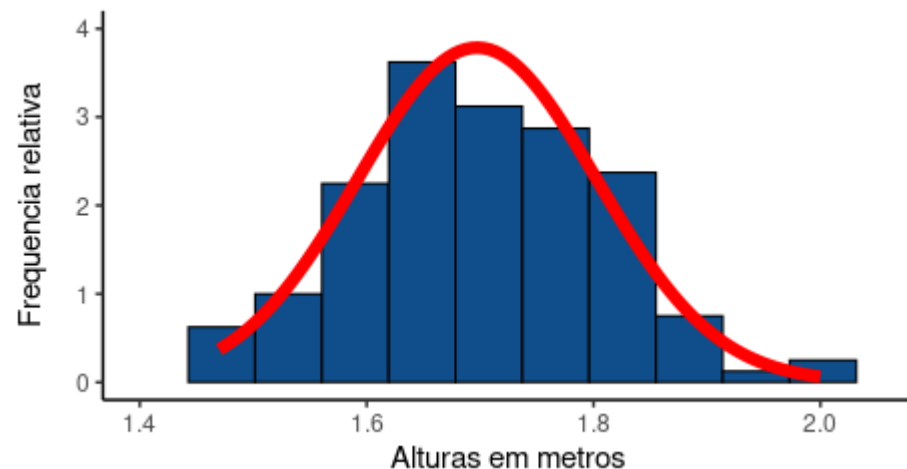
A observação  $x = 2.2$  corresponde a:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{2.2 - 1.7}{0.11} = 4.55$$

Em uma distribuição normal com  $\mu = 1.7$  e  $\sigma = 0.11$ , a observação  $x = 2.2$  está **4.55** desvios padrões acima da média.

## 6. A distribuição normal padronizada

Após a transformação  $Z$  nos exemplos sobre altura dos alunos e chuva mensal temos:



## 6. Probabilidades em uma distribuição normal padronizada

---

Limites conhecidos de probabilidade

---