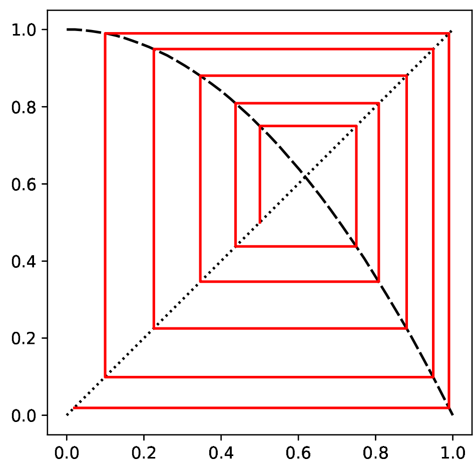
Cor. 6.6 : Soit $f : x \in [0;1] \mapsto 1-x^2$.
f est définie, continue et dérivable sur $[0;1]$ et
$f'(x) = -2x$ donc f est strictement décroissante sur $[0;1]$.
Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0;1]) = [0;1]$.
De plus, $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0;1]$, donc la suite u est bien définie d'une part, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$ d'autre part.
La suite u est donc bornée.

f étant strictement décroissante on étudie les sous-suites extraites de rang pair et impair et pour cela, on étudie $h = f \circ f$.
$\forall x \in [0;1], h(x) = 1 - \left(1-x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4$.
$h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1-x^2\right) = 4xf(x) \geqslant 0$ puisque $x \in [0;1]$ est positif et $f(x) \in [0;1]$ aussi.
Donc $h = f \circ f$ est croissante, donc les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
$s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$s_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
$s_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256} > \frac{192}{256} = \frac{3}{4}$.
Finalement, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers un point fixe de h (car h est continue).

Cherchons les points fixes de h :
$h(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$ avec 1 pour racine évidente du second facteur.
Donc $h(x) = x \Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1) = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$ ce qui conduit donc aux 4 points fixes $\left\{0; 1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
La dernière racine n'est pas dans l'intervalle $[0;1]$ donc ne peut pas être limite des deux suites extraites.
De même $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$ ne peut être limite des deux suites extraites.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = 0$ (décroissante, bornée par 0 et $u_0 = \frac{1}{2}$, la seule limite possible est 0)
et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = 1$ (croissante, bornée par $u_1 = \frac{3}{4}$ et 1, la seule limite possible est 1).

Les deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, donc s diverge.

Bonus : représentation graphique de la suite



Cor. 6.7 :

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$. f est la composée d'une fonction continue décroissante et d'une fonction continue croissante donc est continue décroissante sur son ensemble de définition. De plus $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0;1]) = [0;1]$.
   $f(f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-x} = x^2 \Leftrightarrow (1-x)^2(1+x)^2 = 1-x \Leftrightarrow (x=1)\,\textbf{ou}\,(x - x^2 - x^3 = 0)$
   Donc $f(f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow (x=1)\,\textbf{ou}\,(x=0)\,\textbf{ou}\,(x^2+x-1=0)$. Cette dernière équation a pour solution $l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0;1]$ l'autre solution étant négative.
   Or $f \circ f - \mathrm{id}$ est continue donc de signe constant sur $[0;l]$ et $[l;1]$.
   Effectuons un développement limité en l :
   $f(f(x)) - x = \sqrt{1-\sqrt{1-x}} - x = \sqrt{1-\sqrt{l^2+l-x}} - x = \sqrt{1 - l\sqrt{1-\frac{h}{l^2}}} - h - l$ en posant $h = x - l$.
   D'où $f(f(x)) - x \underset{h\to 0}{=} \sqrt{1 - l + \frac{h}{2l} + o(h)} - h - l = l\sqrt{1 + \frac{h}{2l^3} + o(h)} - h - l = \dfrac{1-4l^2}{4l^2}h + o(h)$.
   Or $1 - 4l^2 = l^2 + l - 4l^2 = l(1-3l) = l\left(l^2 - 2l\right) = l^2\left(-1-l^2\right) < 0$.
   Donc sur un voisinage de l, $f(f(x)) - x$ est du signe de $l - x$ et comme elle est de signe constant sur $[0;l]$ et $[l;1]$, on a :
   $f(f(x)) > x \Leftrightarrow 0 < x < l$ et $f(f(x)) < x \Leftrightarrow l < x < 1$.
   On en déduit donc que les suites extraites de u de rangs pairs et impairs sont monotones, soit strictement croissante et majorée par l si leur premier terme est dans $]0;l[$, soit strictement décroissante et minorée par l si leur premier terme est dans $]l;1[$.

La suite u converge donc vers $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ pour toute valeur de $u_0 = a \in]0;1[$ et pour $a \in \{0;1\}$ elle est périodique de période 2 et divergente.

2. On distingue alors trois cas en définissant la suite v par $v = u - l$:
   - si $a = l$, u est une suite constante égale à l et $v = 0$;
   - si $l < a < 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n v_n > 0$ et
     $\ln\left((-1)^{n+1} v_{n+1}\right) - \ln\left((-1)^n v_n\right) = -\ln\left(\sqrt{l^2 - v_n} + l\right) \overset{n\infty}{\to} -\ln(l+l) = -\ln(2l)$

     On en déduit donc en utilisant le lemme de Cesaro que $v_n \overset{n\infty}{\sim} \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}-1}\right)^n$;
   - de même, si $0 < a < l$, $v_n \overset{n\infty}{\sim} -\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}-1}\right)^n$.