IV. Cardinal et applications entre ensembles finis

IV.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 16.15 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Démonstration

- $E = \bigcup\limits_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$ forme une partition de E car $\asymp$: $(x, x') \in E^2 \mapsto x \asymp x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence (laissé en exercice).
  Donc $\operatorname{Card} E = \sum\limits_{y \in f(E)} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) \geqslant \sum\limits_{y \in f(E)} 1 = \operatorname{Card} f(E)$ d'après la proposition 16.12
  avec égalité si et seulement si $\forall y \in f(E), \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si f injective.
- Si f est surjective alors $F = f(E)$ donc $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$ d'après le point précédent.
- Supposons f injective. Alors d'après le premier point, $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$ d'après la proposition 16.10.
- Si f est bijective, elle est injective et surjective, donc $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ donc $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Théorème 16.16 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles ***finis***, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors
(f injective) $\Leftrightarrow$ (f surjective) $\Leftrightarrow$ (f bijective).

Démonstration

- Si f est bijective, elle est par définition injective et surjective. Il suffit donc de démontrer que si f est surjective alors elle est injective et réciproquement.
- Supposons f injective. Alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F$ donc $f(E) = F$ d'après la proposition 16.10. Donc f est surjective.
- Supposons f surjective. Alors $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ donc f est injective d'après le théorème précédent.

Important !

Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

Méthode

Le théorème 16.15 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une ***bijection*** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.
En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par
« ***Il y a autant de...*** »

Ex. 16.7 (Cor.) Combien un n-gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

IV.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet

Méthode

On appelle ***principe des tiroirs ou principe de Dirichlet*** le principe selon lequel
« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »
Ce principe est la contraposée du théorème 16.15 :
E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$ alors f n'est pas injective.
En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de l'énoncé.

Ex. 16.8 (Cor.) Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

IV.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème 16.17

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} \mathcal{F}(E, F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration

Numérotons les éléments x_i de E avec $i \in [\![1; n]\!]$.
Définir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, ***c'est donner, pour chaque*** $x_i \in E$, ***la valeur de*** $u(x_i) \in F$.
Autrement dit, choisir une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$, c'est :

- choisir $u(x_1) \in F$: il y a $\operatorname{Card} F = p$ choix possibles ;
- ***PUIS*** choisir $u(x_2) \in F$: il y a p choix possibles ;

  ...
- ***PUIS*** choisir $u(x_n) \in F$: il y a $\operatorname{Card} F = p$ choix possibles.

Donc $\operatorname{Card}\mathcal{F}(E,F) = p^n = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}E}$.

Remarque

En notant $n = \operatorname{Card}E$, ***il y a donc autant*** d'applications dans $\mathcal{F}(E,F)$ que de n-uplets dans F^n.
C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E,F)$ est aussi noté F^E.

IV.4. Cardinal de l'ensemble des parties

Théorème 16.18

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

D'après la propriété 16.4, $\Phi : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto \Phi(A) = \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(E,\{0;1\})$ est bijective donc $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E,\{0;1\}) = \operatorname{Card}\{0;1\}^{\operatorname{Card}E} = 2^n$.
Autrement dit, ***choisir une partie*** A ***de*** E***, c'est choisir une application*** u ***de*** E ***dans*** $\{0;1\}$ ***telle que*** $u(x)=1$ ***si*** $x\in A$ ***et*** $u(x)=0$ ***si*** $x\notin A$***.***
Il y a donc autant de parties de E ***que d'applications de*** E ***dans*** $\{0;1\}$***.***
Donc $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = \operatorname{Card}\mathcal{F}(E,\{0;1\}) = \operatorname{Card}\{0;1\}^{\operatorname{Card}E} = 2^n$.

V. Listes

V.1. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble

Définition 16.19

Soit E un ensemble et p un entier.
p-liste d'éléments de E, ***p-uplet d'éléments de*** E et ***famille de*** p ***éléments de*** E sont des synonymes.
On appelle ***p-liste d'éléments distincts*** de E tout p-uplet $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de E vérifiant $\forall(i;j)\in[\![1;n]\!]^2, i\neq j \Rightarrow x_i\neq x_j$.
Plus simplement, ce sont les listes ***de*** p ***éléments de*** E***, sans répétition possible d'un même élément***.

Théorème 16.20

Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

•Si $p > n$, le principe de Dirichlet nous permet d'affirmer qu'au moins deux éléments de la liste seront égaux : $A_n^p = 0$.

•Si $p \leq n$, on fait une démonstration par ***récurrence finie*** sur p.

Initialisation : si $p = 0$, la liste vide convient donc $A_n^0 = 1$.

Si $p = 1$, toute liste de 1 élément de E convient donc $A_n^1 = n$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang p ***strictement inférieur à*** n et démontrons-la au rang $p+1 \leq n$. On a donc $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Il y a autant de façons de choisir une liste à $p+1$ éléments distincts que de façons de choisir ses p premiers éléments puis le $p+1^{\text{ème}}$distinct des p premiers.

Donc $A_n^{p+1} = A_n^p \times (n-p) = \dfrac{n! \times (n-p)}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p-1)!} = \dfrac{n!}{[n-(p+1)]!}$.

Conclusion : la propriété est initialisée en $p = 0$ et héréditaire tant que $p+1 \leq n$, elle est donc vraie pour tout $p \in [\![0; n]\!]$.

V.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 16.21

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \operatorname{Card} E > 0$ et $p = \operatorname{Card} F > 0$. Alors le nombre d'injections de $F \to E$ est A_n^p.

Démonstration

Il suffit de remarquer que définir une injection c'est donner la liste de ses images ***distinctes*** (puisqu'il s'agit d'une injection). Il y a donc autant d'injections de F dans E que de $\operatorname{Card} F$-listes d'éléments distincts de E.

V.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Théorème 16.22

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Les deux ensembles ont même cardinal donc toute injection est bijective. Donc le nombre de bijections est égale au nombre d'injections et vaut

$A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{1} = n!$.

Définition 16.23

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées ***permutations*** de E. Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

Notation

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.
L'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathfrak{S}_n$.
Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E, et sous chaque élément, son image.

Ex. 16.9 (Cor.) Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

VI. Combinaisons

VI.1. Définition

Définition 16.24

Sous-ensemble, partie, combinaison sont des synonymes. Plus précisément :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle ***combinaison*** de E tout sous-ensemble de E.
De même, on appelle ***combinaison de*** p ***éléments*** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p.

VI.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 16.25

Pour $\operatorname{Card} E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, il y a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E.

Démonstration

Si $p = 0$, le seul sous-ensemble de E à 0 élément est $\emptyset$ et $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.
Sinon, choisir une injection de $[\![1; p]\!]$ dans E consiste à choisir son image $A \subset E$ ***PUIS*** à choisir une bijection de $[\![1; p]\!]$ dans A.
On applique alors le principe multiplicatif :
• il y a $p!$ bijections de $[\![1; p]\!]$ dans A ;

•il y a $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ combinaisons A de p éléments de E ;

•il y a donc $p! \times \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = A_n^p$ injections de $[\![1;p]\!]$ dans E.

Donc $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons de p éléments de E.

Propriété 16.26

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1;n]\!], \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

On partitionne l'ensemble des combinaisons de p éléments de E en celles comprenant un élément $x_0 \in E$ fixé, et celles ne comprenant pas x_0. On utilise alors la proposition 16.12.

Corollaire 16.27

$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Il suffit de remarquer que la relation $\asymp$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \asymp B \Leftrightarrow \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$ est une relation d'équivalence. Elle partitionne donc $\mathcal{P}(E)$ comme réunion des combinaisons de p éléments avec $p \in [\![0;n]\!]$.

Ex. 16.10 (Cor.) On appelle ***partition d'un entier*** n ***strictement positif*** toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$.
Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.
Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 16.11 Dénombrement des mains de poker
Dénombrer l'ensemble de toutes les mains de 5 cartes choisies parmi 52, l'ensemble des mains comportant une unique paire, comportant deux paires, comportant un brelan, etc...On rappelle que :

- une ***quinte flush*** est constituée de 5 cartes de la même couleur dont les hauteurs se suivent. Remarque : l'As est considéré ***à la fois*** comme la plus petite et la plus grande hauteur de carte.
- un ***carré*** est constitué de 4 cartes de même hauteur et d'une cinquième carte quelconque.
- un ***full*** est constitué de 3 cartes de même hauteur et de 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première).
- une ***couleur*** est constituée de 5 cartes de même hauteur ***dont les hauteurs ne se suivant pas***.

- une ***suite*** est constituée de 5 cartes dont les hauteurs se suivent ***mais ne sont pas de la même couleur***.
- un ***brelan*** est constitué de 3 cartes de même hauteur, et de deux autres cartes ***qui ne forment ni carré ni full***.
- une ***double-paire*** est constituée de 2 cartes de même hauteur, 2 autres cartes de même hauteur (différente de la première) et d'une cinquième carte de hauteur différente.
- une ***paire*** est constituée de 2 cartes de même hauteur, et de trois autres cartes quelconques ***qui ne forment aucune des mains ci-dessus***.

Maths - Chapitre 17

Dérivabilité

I. Programme officiel

Dérivabilité

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Dérivabilité a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	$\rightleftharpoons$ I : méthode de Newton.
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Propriétés des fonctions dérivables	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométriques et cinématiques.
Inégalité des accroissements finis.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à ce stade ; elle n'appelle aucun développement supplémentaire. Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes. Théorème de la limite de la dérivée.	
c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Définition et opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Formule de Leibniz.	

II. Dérivabilité en un point

II.1. Introduction

Ce chapitre a de multiples objectifs :

- faire une synthèse sur la construction de la notion de dérivée et l'obtention de ses propriétés opératoires notamment : nous démontrerons les différentes formules (somme, produit, composée, etc.) pour calculer une dérivée en un point puis nous en tirerons les conséquences concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ;
- établir un lien entre la notion de dérivée qui est à priori locale (valable au voisinage d'un point) et d'autres notions (croissance d'une fonction, etc...) qui sont des notions globales (valables sur un intervalle) : c'est par exemple le cas du théorème donnant le sens de variation d'une fonction lorsque sa dérivée est de signe constant sur un intervalle ;
- faire une synthèse des différents outils du programme de classes préparatoires permettant l'étude des ***suites récurrentes*** : nous verrons en effet qu'on peut déduire de la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction f des conséquences concernant le comportement d'une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par commodité, on utilisera la notation suivante.

Définition 17.1 (Intérieur d'un intervalle)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. ***L'intérieur*** de I est l'intervalle obtenu en privant I de ses bornes. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I. Un point est dit ***intérieur à*** I si c'est un point de $\mathring{I}$.

Ex. 17.1 Soit a et b deux réels avec $a < b$. Pour $I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou encore $I =]a, b[$, on a toujours $\mathring{I} =]a, b[$. Pour $I = [a, +\infty[$ on a $\mathring{I} =]a, +\infty[$.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On désigne par I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant une infinité de points.
De plus on notera $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

II.2. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 17.2

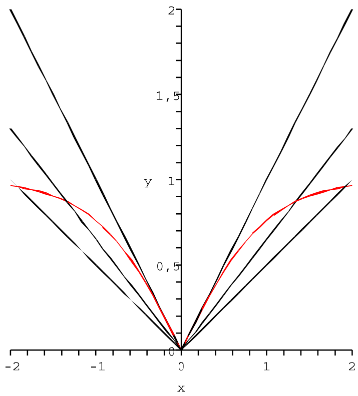
On appelle ***taux d'accroissement*** ou ***taux de variation*** de f en $a \in I$ la fonction

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{lll} I\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

Géométriquement, le taux d'accroissement représente la pente de la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.

Définition 17.3 (Nombre dérivé)

On dit que f est dérivable en a si τ_a possède une limite finie lorsque x tend vers a. La limite est alors appelée ***nombre dérivé*** de f en a.
On dit que f est dérivable à gauche en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x < a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à gauche*** de f en a.
On dit que f est dérivable à droite en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x > a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à droite*** de f en a.



Notation

On note $f'(a)$ le nombre dérivé, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite.

Proposition 17.4

f est dérivable en $a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \end{cases}$ **et** $f'_g(a) = f'_d(a)$

II.3. Nombre dérivé, développement limité et tangente

Théorème 17.5

f est dérivable en a si et seulement si ***au voisinage de*** $x \to a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 9 proposition 9.13.

Corollaire 17.6

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ si f est dérivable en a ;
$x = a$ si le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ en a.

Remarque

Interprétation cinématique

Dans le cas où la variable représente le temps, le taux d'accroissement représente une ***vitesse moyenne***. La dérivée s'interprète alors comme une ***vitesse instantanée***.

Théorème 17.7 (Dérivable implique continue)

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Supposons f dérivable en a. Alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$ donc $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ ce qui est la définition de la continuité de f en a.

Important ! Continue n'implique pas dérivable

La réciproque est fausse. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Si $x < 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Si $x > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$. Ces limites étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Ex. 17.2 (Cor.) Soit $a \in \mathring{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

II.4. Théorèmes opératoires

Proposition 17.8 (Opérations pour la dérivée en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en un point a de I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
- Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration

- Soit $x \neq a$, $\dfrac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a)}{x-a} = \alpha\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \beta\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Puisque f et g sont dérivables en a, le théorème opératoire sur les combinaisons linéaires de limites permet d'affirmer que $\alpha f + \beta g$ est aussi dérivable en a et que $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.
- Soit $x \neq a$, $\dfrac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Les fonctions f et g sont dérivables donc continues en a, ainsi $\lim\limits_{a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)\right) = f'(a)g(a)$ et de

même $\lim_a f(a)\left(\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f(a)g'(a)$.
Par suite, fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- Comme g est continue en a et $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas sur un voisinage de a. Pour tout x dans un tel voisinage avec $x \neq a$, on a $\dfrac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = -\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)g(x)g(a)}$. Or $\lim_a -\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)g(x)g(a)} = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Il suffit d'écrire $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$, puis d'utiliser les deux résultats précédents.

Proposition 17.9 (Composition de fonctions dérivables en un point)

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux applications et a un point de I. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Démonstration

Soit $\psi : I \to \mathbb{K}$ définie par $\psi(x) = \frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{f(x)-f(a)}$ si $f(x) \neq f(a)$ et $\psi(x) = g'(f(a))$ si $f(x) = f(a)$. Par construction on a $\lim_{x\to a}\psi(x) = g'(f(a))$. Par ailleurs, pour tout $x \neq a$ dans I, on a l'égalité $\frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} = (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})\psi(x)$. La fonction f étant dérivable en a, il vient $\lim_{x\to a}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a} = f'(a)g'(f(a))$. On a ainsi prouvé que $g \circ f$ est dérivable en a et que $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Remarque

La démonstration qui consisterait à écrire que pour $x \neq a$,

$$\frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\left(\frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{f(x)-f(a)}\right)$$

puis à dire que la première parenthèse tend vers $f'(a)$ et la deuxième vers $g'(f(a))$ est naturelle, mais fausse. Il est possible que $f(x) - f(a)$ s'annule sur tout voisinage de a pour des valeurs différentes de a. Par exemple, $f : x \to x^2 \sin\frac{1}{x}$ s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0. La fonction auxiliaire ψ évite ce problème.

Théorème 17.10 (Dérivée de la bijection réciproque en un point)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue, b un point de J et $a = f^{-1}(b)$. On suppose f dérivable en a. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration

Soit $y \in J$ avec $y \neq b$, $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \dfrac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}}$. D'après le théorème 14.39, f^{-1} est continue sur J. Par suite, $\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Ainsi, si $f'(a) \neq 0$, on a, d'après le théorème de composition des limites, $\lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}} = \frac{1}{f'(a)}$; f^{-1} est bien dérivable en b. En revanche, si $f'(a) = 0$, f^{-1} étant strictement monotone, on a $\lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}} = \pm\infty$.

II.5. Sens de variation et dérivée

Proposition 17.11 (Croissante implique dérivée positive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un point de I.

- Si f est dérivable à gauche en a, on a $f'_g(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable à droite en a, on a $f'_d(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable en a, on a $f'(a) \geqslant 0$.

Démonstration

Pour $x \in I$ avec $x \neq a$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. En passant à la limite à gauche, à droite ou pour $x \neq a$, on obtient les trois points du théorème.

Définition 17.12 (Point anguleux)

Si f est ***continue en*** a, ***dérivable à gauche et à droite*** en a avec $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, le point $A(a, f(a))$ s'appelle un ***point anguleux***.

Remarque

En un point anguleux $A(a, f(a))$, on définit
une demi-tangente à gauche d'équation $y = f(a) + f'_g(a) \times (x-a)$ et
une demi-tangente à droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a) \times (x-a)$.