Nombres réels et suites numériques

I. L'ensemble $\mathbb{R}$

Ex. 8.1 Pour les ensembles suivants, donner lorsqu'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

$A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$C = \left\{\frac{x^2-3x+6}{x-2}, x \in [3;7]\right\}$ $\quad D = \mathbb{Q} \cap [0;\pi]$

$(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$:

$E = \left\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad F = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$G = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Ex. 8.2 (Cor.) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, x \leq \alpha$.
Montrer que $\sup A \leq \alpha$.
Que peut-on dire si $\forall x \in A, x < \alpha$?

Ex. 8.3 (Cor.) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \left\{k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Montrer que E_n admet une borne inférieure et que $\inf E_n = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \left(k + \dfrac{n}{k}\right)$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.
  Cas d'égalité : $\inf E_n = \sqrt{4n}$?

Ex. 8.4 On note $\mathcal{A} = \left\{p + q\sqrt{2}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\} \subset \mathbb{R}$, et $\mathcal{A}_+^* = \{x \in \mathcal{A}, x > 0\}$.

a. Montrer que $\mathcal{A}_+^*$ possède une borne inférieure.
b. Calculer $\inf \mathcal{A}_+^*$.
c. Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra tenter d'adapter les deux premières questions à l'ensemble $\mathcal{A}_a = \{x \in \mathcal{A}, x > a\}$ où a est un réel quelconque.

Ex. 8.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire la valeur de $\left\lfloor \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{100} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$.

II. Introduction aux suites

Ex. 8.6 Étudier la monotonie des suites définies par :
$u_n = \frac{1}{1+n^2}$ $\quad v_n = \frac{n!}{2^n}$ $\quad w_n = \frac{n^3}{5^n}$ $\quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1+(-1)^n}}$

Ex. 8.7

a. Montrer que pour tous réels x et y, on a :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
b. Montrer que pour tout réel x on a : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
c. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = n - u_n \end{cases}$.
Calculer u_n en fonction de n (on demande une formule explicite).

Ex. 8.8 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, u_0 \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?
b. Étudier alors sa monotonie.
c. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 8.9 (Cor.) Soient $a \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par $u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} + a\right), u_0 \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?

b. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 8.10 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$.

Étudier la suite u, préciser notamment sa limite si elle existe.

Ex. 8.11 Soient a, b deux constantes réelles, u une suite réelle vérifiant $u_{n+2}+u_{n+1}+u_n = 0$ et v une suite réelle vérifiant $v_{n+2}+av_{n+1}+bv_n = 0$.

a. Montrer sans calculer son terme général que u est périodique de période 3.

b. Calculer le terme général u_n en fonction de n et retrouver le résultat précédent.

c. On suppose que la suite v est **non nulle** et périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe un nombre complexe $Z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant à la fois l'équation caractéristique (E_c) : $Z^2 + aZ + b = 0$ et l'équation $Z^p - 1 = 0$.
Indication : on envisagera plusieurs cas possibles suivant la nature des solutions de (E_c).

d. Exhiber une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui soit périodique de plus petite période 5.

Indication : en posant $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, on pourra commencer par montrer que
$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + \phi X + 1)\left(X^2 - \frac{X}{\phi} + 1\right)$.

Ex. 8.12 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres } 1}$

III. Limite d'une suite réelle

Ex. 8.13 Étudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + 2\sin\left(n^2\right)$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} 2n + (-1)^n n$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, a \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{2\sqrt{n} - (-1)^n}$

Ex. 8.14

a. Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p(p+1)}$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^2}$ est finie et en donner un encadrement d'amplitude 1.

Ex. 8.15 (Cor.)

a. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} = +\infty$.

Ex. 8.16 Montrer que la suite u définie par $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{4}$, $u_0 \in \mathbb{R}$ est croissante quelle que soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 la suite est-elle majorée ?
Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis donner sa valeur.

Ex. 8.17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + ... + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

Ex. 8.18 Montrer en utilisant des suites extraites que $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Faire de même pour $\left(\cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ puis pour $\left(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 8.19 On considère les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.
Montrer que u et v convergent vers une même limite.

Ex. 8.20 Soit u définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

b. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Ex. 8.21 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

a. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.

b. Étudier cette suite dans les cas où $z_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$.

c. Montrer que $z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \notin \mathbb{R}$.

d. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}$. Étudier la convergence de (z_n).
[Indication : écrire les termes de la suite sous forme exponentielle.]

IV. Révisions

Ex. 8.22 Donner une formule explicite pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ou $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ en envisageant successivement les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

a. $y' = y - 1$ et $u_{n+1} = u_n - 1$

b. $y'' = -y' + y$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$.

Ex. 8.23 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer $S_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ et $T_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (-1)^i \binom{j}{i}$.

En déduire la valeur de $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{j}{i}$ et $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{j}{i}$.

Ex. 8.24 En remarquant que $\forall x \in [0;1], x^2 \leqslant x$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geqslant \frac{n}{4}$$

Corrections

Cor. 8.2 : Par définition, α est un majorant de A. Donc A, non vide et majoré, possède une borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants, en particulier inférieure ou égale à α. Si $\forall x \in A, x < \alpha$, on a encore $\sup A \leq \alpha$. Le même raisonnement que précédemment reste valable.
Attention cependant, il est possible que $\sup A = \alpha$. L'inégalité stricte n'est donc pas vérifiée pour la borne supérieure. Par exemple, si $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, on a $\forall x \in A, x < 1$, mais $\sup A = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

Cor. 8.3 :

- E_n est minoré par 0 et admet donc une borne inférieure. De plus, si $k \geq n+1$, alors $k + \frac{n}{k} > k \geq n+1$. Or pour $k = n$, on a $k + \frac{n}{k} = n+1$. Donc la borne inférieure est atteinte pour $k \leq n$, c'est-à-dire :
  $\inf E_n = \inf_{1\leq k\leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$.
- Étudions la fonction $f(x) = x + \frac{n}{x}$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$.
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{x^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Donc f passe par un minimum en $x = \sqrt{n}$, valeur pour laquelle $f(x) = f\left(\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n}$.
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.
  Pour qu'il y ait égalité, dans la mesure où $\inf E_n = \inf_{1\leq k\leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$ est la borne inférieure d'un ensemble fini et qu'elle est donc atteinte, il faut que le minimum de la fonction f soit atteint c'est-à-dire que n soit un carré.

Cor. 8.9 :

a. On distingue deux cas :
   - Si $a \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + a > 0$, donc la suite u est définie pour toute valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.
   - Sinon, $a < 0$ donc $-a > 0$. Soit $f :]\ln(-a); +\infty[\mapsto \ln(e^x + a)$. f est bien définie car

$\forall x > \ln(-a), e^x > e^{\ln(-a)} = -a \Rightarrow \forall x > \ln(-a), e^x + a > 0$.
Étudions f : c'est une fonction dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonctions dérivables et
$\forall x \in]\ln(-a);+\infty[, f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+a} > 0$. Donc f est strictement croissante, continue (car dérivable) donc bijective de $]\ln(-a);+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (car $f(x) \underset{x\to\ln(-a)^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).
Notamment, il existe des valeurs de $u_0 \in]\ln(-a);+\infty[$ pour lesquelles u n'est pas définie puisque $\forall u_1 < \ln(-a), \exists u_0 \in]\ln(-a);+\infty[, u_1 = f(u_0)$, le terme u_2 n'étant alors pas défini.
L'étude de l'existence de la suite u apparaît donc compliquée au premier abord.

On s'en remet à la méthode du cours et on étudie le signe de $g : x \in]\ln(-a);+\infty[\mapsto \ln(e^x+a) - x = \ln\left(\dfrac{e^x+a}{e^x}\right)$.
Comme $a < 0$, $\forall x \in]\ln(-a);+\infty[, e^x + a < e^x$ donc $g < 0$. La suite u, si elle est définie, est donc strictement décroissante.
Montrons par l'absurde que quelle que soit la valeur de u_0, u n'est dans ce cas pas définie.
Supposons que u soit définie et soit $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. La suite étant supposée définie, on a $U \subset]\ln(-a);+\infty[$, en particulier U est minorée, non vide, donc possède une borne inférieur $\mu = \inf U$.
Or $g < 0$ et f bijective, strictement croissante de $]\ln(-a);+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc :

- ⋆ d'une part, $f(\mu) < \mu$ et $\forall y \in]f(\mu);\mu[, \exists x > \mu, y = f(x)$;
- ⋆ d'autre part, d'après le lemme fondamental 8.12, il existe $u_n \in U$ vérifiant $\mu \leqslant u_n < x$.

On en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) < f(x) < \mu$ ce qui est absurde puisque μ est la borne inférieure de U donc minore la suite u.

En résumé, la suite u est définie si et seulement si $a \geqslant 0$, et ceci quelle que soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.

b. On suppose donc $a \geqslant 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$. On distingue à nouveau deux cas :
- si $a = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n}) = u_n$. La suite est donc constante (donc bornée) quelle que soit $u_0 \in \mathbb{R}$.
- si $a > 0$, une étude similaire à celle de la question précédente montre que
  - ⋆ g est strictement positive sur $\mathbb{R}$;
  - ⋆ u est par conséquent strictement croissante donc minorée par son premier terme ;
  - ⋆ que l'hypothèse de l'existence d'un majorant pour u conduit à une absurdité.

En résumé, la suite u est bornée si et seulement si $a = 0$, auquel cas la suite est constante et égale à u_0 quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}$.

Cor. 8.15 :

a. Lemme : $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
En effet, en définissant la fonction $f : x \in]-1;+\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$ qui est dérivable et continue sur son intervalle de définition, on a :
$\forall x \in]-1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$.
Donc f est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle passe donc par un maximum en 0 qui vaut $f(0) = \ln(1) = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.
Or $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqslant \dfrac{1}{p}$ (qui appartient bien à $]-1;+\infty[$).
De même $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) = -\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = -\ln\left(\frac{p+1-1}{p+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{-1}{p+1}\right)$.
Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(p+1) - \ln(p) \geqslant -\dfrac{-1}{p+1}$ (car $\dfrac{-1}{p+1} \in]-1;+\infty[$).

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
En utilisant le théorème des gendarmes on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

c. D'après la première question, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{p=1}^{n} \ln(p+1) - \ln(p) = \ln(n+1)$ (télescopage).
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty$.