Semaine 21

Proba confinées :-)

Sujet 1 : Deberge

.

Ex. 21.1 Pour se rendre au travail, un automobiliste dispose de deux itinéraires A et B. Le premier jour, il prend l'itinéraire A, puis, chaque jour, il prend le même itinéraire que la veille s'il n'y a pas eu d'embouteillage, et change d'itinéraire s'il y a eu des embouteillages.
La probabilité que l'automobiliste se trouve dans un embouteillage en prenant l'itinéraire A est notée a, celle correspondant à l'itinéraire B est notée b. On suppose que les événements successifs sont indépendants. On note p_n la probabilité que l'automobiliste emprunte l'itinéraire A le n-ième jour où il se rend au travail.

1) Calculer p_1, p_2 et p_3.
2) Calculer p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Sujet 2 : Souvignet

.

Ex. 21.2 Dans une urne se trouve deux boules, une noire notée N, une rouge notée R. On tire dans l'urne une boule, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne. On continue ainsi jusqu'à obtenir un mot donné sur des tirages consécutifs.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot NR en deux lancers ? en trois lancers ?
2) Soit k un entier supérieur à 2. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot NR en k lancers ?
3) Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir NR en moins de n lancers est supérieure à $3/4$?
4) Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir RR en moins de n lancers est supérieure à $3/4$?
   On modifie l'expérience aléatoire de la façon suivante : on arrête les tirages dès que l'un des deux mots NR ou RR est advenu sur des tirages successifs.
   On note E l'événement : « les tirages se sont arrêtés sur le mot NR ».
5) Quelle est la probabilité de E sachant que le premier tirage est un N ?
6) Quelle est la probabilité de E sachant que le premier tirage est un R ?
7) Quelle est la probabilité de E ?

Sujet 3 : Boyer

.

Ex. 21.3 ***Centrale 2015 Python***

1) Construire à l'aide de Python le tableau `bin` tel que pour tout $(i,j) \in [\![0;12]\!]^2$, `bin[i,j]` vaut $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ si $i \geqslant j$ et 0 sinon.

2) On pose pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ est bien définie.

3) Donner les valeurs exactes de A_0 et A_1.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A_{n+1} en fonction de $A_0, ..., A_n$.

5) S'en servir pour calculer les valeurs exactes de A_n pour $n \in [\![2;12]\!]$.

6) On étudie la série $f_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{A_p x^p}{p!}$.

   Montrer que $A_n \leqslant n!e$ pour tout entier n. En déduire que le rayon de convergence R de la série est supérieur à 1.

7) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A_p x^p}{p!}$ la somme de la série pour $x \in]-R;R[$.

   Représenter graphiquement à l'aide de Python f sur un intervalle bien choisi.

8) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène.

9) Donner une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Sujet 4 : Exos supplémentaires