Maths - Chapitre 20

Séries

La notion de série repose sur l'idée que pour obtenir une approximation d'un nombre (irrationnel par exemple), on peut partir d'une approximation déjà obtenue et lui ajouter un terme suffisamment petit pour obtenir une approximation plus fine. C'est une notion d'une importance fondamentale en mathématiques non seulement à cause de l'importance pratique de la notion d'approximation des nombres irrationnels, mais encore parce qu'elle est une synthèse des notions de suites, de sommes finies et -comme nous le verrons- fait aussi intervenir les notions d'intégrales ou de développements limités.
Dans tout ce qui suit, u, v et w sont des suites réelles ou complexes définies sur une partie $A \subset \mathbb{N}$ et f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Intégration

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Formule de Taylor avec reste intégral	
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	

Séries numériques

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Généralités	
Séries à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : sommes partielles, CNS de convergence, somme en cas de convergence.	
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	

Pour f continue et monotone, encadrement des sommes partielles $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique des sommes partielles.
Séries de Riemann	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$	Cas où l'inégalité n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang. Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.	
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors-programme.
Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, si de plus $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc converge.	
d) Application au développement décimal d'un nombre réel	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un élément de $[0;1[$.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal propre à partir d'un certain rang.

II. Introduction

II.1. Formules de Taylor

Théorème 20.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

On la démontre par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, la formule s'écrit $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0)$ et la formule est donc vraie au rang 0.

Hérédité : supposons la formule de Taylor avec reste intégral vraie au rang n entier donné. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+2}(I)$. L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire, pour f, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

On a alors :

$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)n!}f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)n!}f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$ en intégrant par partie.

Donc $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$, ce qu'il fallait démontrer.

Ex. 20.1 Écrire ce théorème pour $n = 0$ et $n = 1$

....

....

Théorème 20.2 (Formule de Taylor-Young)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^{n}(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

Démonstration

Pour commencer, une remarque : ce théorème n'est pas un corollaire du théorème précédent puisque ses hypothèses, plus faibles, ne permettent pas d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

On le démontre par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, il s'agit de montrer que, si f est continue, alors $f(x) = f(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(1)$.

Ceci est évident puisque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ (la fonction étant continue).

Hérédité : supposons que pour n donné, la formule de Taylor-Young soit valide.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I)$. En particulier, f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^{n}(I)$.

On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence sur f' :

$\forall x \in I, f'(x) = f'(x_0) + (x-x_0)f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0) + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$

On intègre alors cette formule :

$f(x)-f(x_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x} o_{x_0}\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t.$

Montrons que $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \underset{t\to x_0}{o}\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t = \underset{x\to x_0}{o}\Big((x-x_0)^{n+1}\Big)$.

Pour cela, écrivons que $\underset{t\to x_0}{o}\left((t-x_0)^n\right)=(t-x_0)^n\times\alpha(t)$ avec $\lim\limits_{t\to x_0}\alpha(t)=0$ (c'est la définition des « petit o ».

En revenant à la définition de la limite : soit $\epsilon>0$. Il existe $\eta>0$ tel que $|t-x_0|\leqslant\eta\Rightarrow -\epsilon\leqslant\alpha(t)\leqslant\epsilon$.

En intégrant cette relation pour $x\in[x_0-\eta;x_0+\eta]$, on obtient bien $\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x}\underset{t\to x_0}{o}\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant \epsilon\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}=\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$.

Remarque

Toutes les formules précédentes peuvent se réécrire en utilisant $h=x-x_0$ à la place de x et le signe $\sum$ à la place des pointillés.

Par exemple, la formule de Taylor avec reste intégral pour $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$ se réécrit :

$$f(x_0+h)=\sum_{p=0}^{n}\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x_0)+\int_0^h\frac{(h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+t)\mathrm{d}t$$

Réécrire la formule de Taylor-Young de cette façon :

....

II.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 20.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$.

Si $\exists M\in\mathbb{R}_+,\forall x\in I,\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leqslant M$ (autrement dit $f^{(n+1)}$ est bornée sur I), alors

$$\left|f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\cdots-\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou encore

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration

D'après la formule de Taylor avec reste intégral (voir théorème 20.1),

$\left|f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}\left|\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t$ en supposant $x\geqslant x_0$.

Or $\forall t\in I,\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant M$, donc

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right| \leqslant M\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le cas où $x < x_0$ se traite de façon similaire en échangeant les bornes d'intégration.

Ex. 20.2 Écrire ce théorème pour $n = 0$

....

....

Quel nom porte ce théorème ?...

Ex. 20.3 (Cor.) Montrer que $e = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

II.3. Définition

Définition 20.4 (Série numérique)

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes, on appelle ***série de terme général*** u_n la suite S définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La définition s'étend au cas où le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les termes de la suite S sont appelés ***sommes partielles*** de la série.

Notation

On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Définition 20.5 (Convergence/divergence d'une série)

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** si la suite S de ses sommes partielles converge.
Dans le cas contraire, on dit que la série ***diverge***.

Notation

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite S.

Définition 20.6 (Somme et restes d'une série convergente)

Lorsqu'une série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée ***somme de la série***.

La suite R définie par $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée suite des ***restes de la série***.

Ex. 20.4 (Cor.) $\sum \frac{x^n}{n!}$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$?

II.4. Propriétés

Propriété 20.7 (Linéarité de la somme)

Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent toutes les deux, alors $\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de la linéarité de la limite des suites réelles ou complexes (voir théorème 8.43).

Propriété 20.8

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Démonstration

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}$. Or la suite S converge, donc par théorème opératoire sur les limites de suites, la suite u converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$.

Méthode : Divergence grossière d'une série

La propriété précédente est utilisée pour montrer qu'une série ***diverge*** en passant par sa contraposée : si la suite u ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas que la série ***diverge grossièrement***.

Important !

La réciproque de cette propriété est fausse !

Ex. 20.5 (Cor.) Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$.

Ex. 20.6 (Cor.) Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

II.5. Série géométrique

Définition 20.9 (Série géométrique)

On appelle ***série géométrique*** toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Propriété 20.10 (Rappel)

Si u est une suite géométrique de raison r différente de 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Si u est une suite géométrique de raison 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$.

Théorème 20.11 (Convergence d'une série géométrique)

Une série géométrique converge si et seulement si son terme général est nul ou de raison r vérifiant $|r| < 1$.
De plus, si elle est non nulle et convergente, alors sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-r}$$

Démonstration

Si $u_0 = 0$, il est clair que $S = 0$ converge.
Sinon, si $r = 1$, $S_n = nu_0$ diverge vers $\pm\infty$ suivant le signe de u_0.
Enfin, dans le dernier cas, $\dfrac{S_n}{u_0} = \dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$ converge vers $\dfrac{1}{1-r}$ si et seulement si $|r| < 1$.

Méthode

Les séries géométriques ***sont d'une importance primordiale*** !
En voici deux utilisations très fréquentes :

- lorsqu'une série est de la forme $\sum f(n)r^n$, il peut être fructueux de considérer la fonction $S_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \sum f(n)x^n$ et de tenter d'exprimer S_n à l'aide de la série géométrique $\sum x^n$ puis d'évaluer S_n pour $x = r$;
- nous verrons une autre utilisation de la comparaison à des séries géométriques -notamment de la majoration d'une série à termes positifs par une série géométrique- au paragraphe III..

Ex. 20.7 (Cor.) Nature (et somme si convergence) de la série $\displaystyle\sum \frac{n}{2^n}$.

Même question pour la série $\displaystyle\sum \frac{n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n}$.

II.6. Suites et séries télescopiques

Proposition 20.12

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration

Il suffit de remarquer que a suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ est une somme télescopique qui se simplifie en $S_n = u_{n+1} - u_0$. L'équivalence annoncée est alors évidente.

Méthode : Sommation d'une série en utilisant des sommes télescopiques

Le théorème précédent paraît anodin mais est souvent utilisé pour calculer la valeur de la somme d'une série, notamment lorsque celle-ci a pour terme général une fraction rationnelle. En décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, il apparaît parfois une série télescopique dont la somme peut être calculée.
Nous verrons aussi à l'exercice 20.11 une utilisation directe de cette proposition.

Ex. 20.8 (Cor.) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Ex. 20.9 (Cor.) En utilisant l'exercice précédent, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

III. Séries à termes positifs

III.1. Définition

Définition 20.13 (Série à termes positifs)

On dit que $\sum u_n$ est ***une série à termes positifs*** ou plus simplement est ***à termes positifs*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

III.2. Théorème de convergence monotone

Théorème 20.14

Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

Démonstration

La série étant à termes positifs, $\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La suite des sommes partielles est donc croissante.

Or une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée d'après le théorème 8.51 de convergence monotone.

III.3. Comparaison entre séries et intégrales

Théorème 20.15

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

f est décroissante donc

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k; k+1], f(k) \geqslant f(t) \geqslant f(k+1)$. On a donc :

- $\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.
- De même :
  $\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = f(1) + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$.

Méthode

Nous avons déjà utilisé le théorème précédent pour déterminer la nature de la ***série harmonique*** $\sum \frac{1}{n}$.

En pratique, comme dans l'exemple 20.6, ce théorème permet dans le cas où la série est divergente d'obtenir ***non seulement la divergence de la série***, mais aussi ***un équivalent*** de $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans le cas des séries convergentes en revanche, ce théorème permet de majorer la série donc de prouver sa convergence, mais ne donne pas la valeur de sa somme.

Ex. 20.10 (Cor.) Soit $r \in \mathbb{R}$.

Déterminer suivant la valeur de r la nature de la série $S = \sum \frac{1}{n^r}$ et donner un équivalent de S_n lorsqu'elle diverge.

III.4. Séries de Riemann

Définition 20.16 (Séries de Riemann)

On appelle ***série de Riemann*** toute série de la forme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 20.17

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

La démonstration a été faite à l'exercice 20.10.

III.5. Théorèmes de comparaisons entre séries *à termes positifs*

Proposition 20.18 (Majoration/minoration)

Si u et v sont positives à partir d'un certain rang et si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang alors

- $\sum v_n$ converge$\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge$\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Démonstration

Notons $N \in \mathbb{N}$ un rang satisfaisant $\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et m le minimum de $\sum_{k=0}^{N} u_n$ et de $\sum_{k=0}^{N} v_n$. On a alors

$\forall n \geqslant N, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} v_k.$

De plus la suite $\sum u_n$ est croissante à partir du rang N, donc si $\sum v_n$ converge, elle est croissante (à partir d'un certain) et majorée donc convergente.

De même, si u diverge, $\sum u_n$ tend vers $+\infty$ et ,$\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=0}^{N} v_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k$ diverge d'après le théorème des gendarmes.

Remarque

Dans la proposition précédente, si l'inégalité est vérifiée à partir du rang 0, on peut de plus affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ en cas de convergence.

Proposition 20.19 (Nature de séries à termes *positifs équivalents*)

Si u et v sont positives et si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ donc à partir d'un certain rang, $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$. Les suites étant par ailleurs positives (à partir d'un certain rang) le théorème précédent permet d'affirmer qu'en cas de divergence de $\sum v_n$, $\frac{\sum v_n}{2}$ diverge aussi, donc $\sum u_n$ aussi.

De même, en cas de convergence de $\sum v_n$, $\dfrac{3\sum v_n}{2}$ converge aussi, donc $\sum u_n$ aussi.

III.6. Exemples

Ex. 20.11 (Cor.) Soit x la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Montrer que x_n converge et en déduire qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ex. 20.12 (Cor.) Nature des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^3-1}} \quad T = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad U = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+\ln n} \quad V = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \quad W = \sum n^3 e^{-n}$$

III.7. Complément : comparaison à une série géométrique

Proposition 20.20 (Critère de d'Alembert)

Soit $S = \sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $r \in]0;1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1$ alors S converge ;
- si à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors S diverge.

Démonstration

- Dans le premier cas, une récurrence immédiate qu'à partir de ce rang $u_{N+p} < r^p u_N$. Or $r < 1$, donc d'après 20.11, la série $\sum_{p\geqslant 0} u_N {r^N} r^p$ converge et d'après 20.18, la série S, à termes positifs, converge.
- Dans le second cas, la suite u est positive strictement croissante à partir d'un certain rang, donc elle ne tend pas vers 0. La série S diverge donc grossièrement.

Ex. 20.13 (Cor.)

1) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{(2n)!}$?

2) On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).
Montrer que $S \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ puis majorer S.