Maths - Chapitre 23

Variables aléatoires

Lors d'une expérience aléatoire, il est fréquent que l'on souhaite étudier une ***variable dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire***. De telles variables sont appelées ***variables aléatoires***. L'objet de ce chapitre est d'en décrire leurs principales utilisations et propriétés. Il va de soi que le chapitre 19 sur les probabilités est un pré-requis au présent chapitre, ainsi que le chapitre 16 sur le dénombrement.

Les variables aléatoires peuvent prendre des valeurs diverses, notamment des valeurs non numériques. Par exemple, on peut imaginer un dé ***bien équilibré*** à 6 faces dont une des faces est rouge, deux autres bleues et les trois dernières jaunes. ***L'hypothèse d'équiprobabilité*** (dé bien équilibré) s'écrit - en supposant qu'on a attribué un numéro à chaque face - sur l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ des résultats possibles pour chaque événement élémentaire :

$$\forall i \in [\![1; 6]\!], \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

La notion de variable aléatoire permet alors de définir de façon simple et efficace ***les événements que l'on cherche à étudier***. Sur l'exemple précédent, on peut par exemple définir la variable aléatoire C donnant la couleur obtenue lors du jet de dé de la façon suivante :

> La variable aléatoire C est la ***fonction*** qui à chaque événement élémentaire associe la couleur de la face obtenue :
> $$C : \begin{cases} \Omega = [\![1; 6]\!] & \rightarrow & \{rouge; bleu; jaune\} \\ \omega = 1 & \mapsto & rouge \\ \omega \in \{2; 3\} & \mapsto & bleu \\ \omega \geqslant 4 & \mapsto & jaune \end{cases}$$

Une autre numérotation des faces du dé conduirait ***à une autre variable aléatoire modélisant la même expérience***.

Les ***événements sont***, on le rappelle, ***des parties de l'univers*** Ω. L'événement « la face est jaune » est par exemple la partie $E = \{4; 5; 6\} \subset \Omega$. Autrement dit, $E = C^{-1}(jaune)$: les événements correspondant à des valeurs données d'une variable aléatoire ***sont les images réciproques de ces valeurs par la variable aléatoire***.

Une première partie du chapitre consistera à définir de la façon la plus générale possible les notions que nous venons d'entrevoir. Nous y étudierons notamment certaines situations conduisant à des variables aléatoires dont les propriétés sont fréquemment observées.

Dans une seconde partie, nous étudierons le cas particulier de situations conduisant à la définition de deux variables aléatoires distinctes (ou plus).

Enfin, nous préciserons le cas particulier et cependant très important des ***variables aléatoires à valeurs réelles***, c'est-à-dire celles dont les valeurs sont des nombres réels.

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini. On rappelle qu'un événement E est ***une partie de*** Ω, c'est-à-dire $E \subset \Omega$ ou encore $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ et que $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans

$[0;1]$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour deux événements ***incompatibles*** A et B - c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$ -, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

I. Programme officiel

Variable aléatoire sur un univers fini

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notations $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(X \leqslant x)$.
Loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X.	L'application $\mathbb{P}_X$ est entièrement définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	
b) Lois usuelles	
Loi uniforme.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ où $E = X(\Omega)$.
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.	Notation $\mathcal{B}(p)$. Interprétation : succès/échec d'une expérience.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0;1]$.	Notation $\mathcal{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remises dans un modèle d'urne.
c) Couples de variables aléatoires	
Couples de variables aléatoires.	
Loi conjointe, lois marginales.	La loi conjointe de X et de Y est la loi de $(X;Y)$. Les lois marginales de $(X;Y)$ sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couples de variables aléatoires indépendantes.	
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}\big((X;Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.	

Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une famille (finie) de n variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.	
Si X et Y sont indépendantes et si f est une application définie sur $X(\Omega)$, g une application définie sur $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.
e) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire X.	Interprétation en terme de moyenne pondérée.
Relation $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$.	
Espérance d'une variable aléatoire réelle constante, de l'indicatrice d'une partie de Ω, d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, une loi de Bernoulli, une loi binomiale.	
Propriétés de l'espérance : linéarité, croissance.	Application au calcul de $\mathbb{E}(X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Théorème de transfert : $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
f) Variance et écart-type	
Variance, écart-type.	Interprétation comme indicateur de dispersion.
Relation $\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Relation $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	

II. Variables aléatoires

II.1. Définitions

Définition 23.1

Soit U un ensemble. On appelle ***variable aléatoire*** toute application de Ω dans U. Lorsque U est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.

Notation

Soit $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire. Soit V une partie de U et u un élément de U.
On note $(X \in V)$ l'événement $X^{-1}(V)$ et $(X = u)$ l'événement $X^{-1}(\{u\})$.
Ici $X^{-1}(V)$ et $X^{-1}(\{u\})$ désignent des images réciproques.
Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $(X \leqslant u)$ l'événement $X^{-1}(\{x \in U, x \leqslant u\})$.

Exemple : dans l'exemple donné en introduction, $(C = rouge)$ désigne l'événement $\{1\}$.
$(C = jaune)$ désigne l'événement $\{4; 5; 6\}$.

Remarque

L'ensemble d'arrivée est rarement précisé. Généralement, on le notera simplement $X(\Omega)$.
Comme Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est aussi un ensemble fini dont le cardinal est inférieur au cardinal de Ω.
Notamment, on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ de sorte à ce que $\Omega = \{\omega_i, i \in [\![1; n]\!]\}$, $X(\Omega) = \{x_k, k \in [\![1; p]\!]\}$ avec $p \leqslant n$.

II.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition 23.2

Soit X une variable aléatoire de (Ω, P) dans $X(\Omega)$.
On appelle ***loi de la variable aléatoire*** X que l'on note généralement $\mathbb{P}_X$, l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{lcl} X(\Omega) & \to & [0; 1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$$

On a donc : $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x\}\right) = \displaystyle\sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\omega)$

Exemple : donner la loi de la variable aléatoire C définie en introduction.

Propriété 23.3

$\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$ est un espace probabilisé. Notamment $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration

Remarque

IMPORTANT : plusieurs expériences aléatoires, pour lesquelles on définit plusieurs variables aléatoires, peuvent conduire ***aux mêmes espaces probabilisés*** $\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$.
Par exemple, on jette une pièce de monnaie et on note X_1 la variable aléatoire qui vaut 0 si la pièce tombe sur *face* et 1 si elle tombe sur *pile*. Ou encore, on lance un dé et on note X_2 la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat est inférieur ou égal à 3 et qui vaut 1 si le résultat est supérieur ou égal à 4.

Dans les deux cas, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, $P(X=0)=P(X=1)=1/2$. Les deux expériences aléatoires et les deux variables aléatoires ont beau être différentes, ***les lois sont identiques***.
Pour cette raison, les lois des variables aléatoires seront souvent étudiées indépendamment de toute expérience aléatoire concrète.

Ex. 23.1 On lance un dé, bien équilibré, n fois d'affilée. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers.

1) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2) Le dé étant bien équilibré, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
   Expliquer comment elle se traduit pour les événements élémentaires de Ω.
3) Préciser l'ensemble image $X(\Omega)$.
4) Donner la loi de X, c'est-à-dire, pour tout $x \in X(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(X=x)$.

Ex. 23.2 Soit n un entier strictement positif, soit S une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que

- $S(\Omega) = [\![1;2n]\!]$;
- $\forall s \in [\![1;2n]\!], \mathbb{P}(S=s) = \dfrac{s}{n(2n+1)}$.

1) Pourquoi peut-on affirmer que la loi de S est bien définie ?
2) Calculer les probabilité suivantes :
   $\mathbb{P}(S \leqslant n)$ $\mathbb{P}(S > n)$ $\mathbb{P}(S \text{ est pair})$ $\mathbb{P}\left((S \leqslant n/2) \cup (S > 3n/2)\right)$
3) Pour chacune des probabilités de l'exercice précédent, donner un développement asymptotique en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

II.3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition 23.4

Soit U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire et $f : U \to V$ une fonction.
$Y = f \circ X : \Omega \to V$ est une variable aléatoire appelée ***image de la variable aléatoire** X **par la fonction** f*.
On note habituellement $f(X)$ cette variable aléatoire et $\mathbb{P}_{f(X)}$ la loi associée.

Remarque

$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f(X)=y\big) = \mathbb{P}_X\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}_X(x)$ mais aussi
$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f \circ X = y\big) = \mathbb{P}\big((f\circ X)^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{\omega \in (f\circ X)^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(\omega)$.

Ex. 23.3 (Cor.) Soit n un entier strictement positif. Une urne contient n boules noires et n boules rouges.
On tire toutes les boules, une à une, sans remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués jusqu'à obtenir la dernière boule rouge et Y le nombre de boules noires restant dans l'urne lorsque la dernière boule rouge a été tirée.

1) Que vaut Ω ?
2) Que vaut $X(\Omega)$?
3) Donner la loi de X.
4) Donner Y en fonction de X et en déduire la loi de Y.

II.4. Exemples usuels

a) Loi uniforme

Définition 23.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X ***suit la loi uniforme sur*** $[\![1;n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1;n]\!]\big)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***on tire au hasard (avec équiprobabilité) un objet numéroté parmi*** n ***objets*** : la variable aléatoire donne ***le numéro de l'objet tiré***. Les exemples classiques sont la variable aléatoire donnant la face d'un dé (bien équilibré) lancé, ou donnant le numéro d'une boule tirée dans une urne, etc...

Ex. 23.4 On lance $k \in \mathbb{N}^*$ dés bien équilibrés, et on suppose que les résultats obtenus sur les dés sont mutuellement indépendants.
On note X_k la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus sur chaque dé.

1) Quelle est la loi suivie par X_1 ?
2) Que vaut $X_k(\Omega)$?
3) Exprimer, pour $i \in [\![k+1;6k+6]\!]$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$ en fonction des $(\mathbb{P}(X_k = j))_{j \in X_k(\Omega)}$.
Indication : on pourra traiter séparément les cas $i \in [\![k+1;k+5]\!]$, $i \in [\![k+6;6k+1]\!]$ et $i \in [\![6k+2;6k+6]\!]$.
4) Donner la loi de X_2 et celle de X_3.

b) Loi de Bernoulli

Définition 23.6

Soit $p \in [0;1]$. On dit que X ***suit la loi de Bernoulli de paramètre*** p si

$$X(\Omega) = \{0;1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***la probabilité de réussir une expérience aléatoire vaut*** p : la variable aléatoire vaut 1 (VRAI) en cas de réussite, 0 (FAUX) en cas d'échec.

c) Loi binomiale

Définition 23.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$. On dit que X ***suit la loi binomiale de paramètres*** n ***et*** p si

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![0; n]\!], \mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***on effectue*** n ***fois une expérience aléatoire dont la probabilité de succès vaut*** p : la variable aléatoire donne ***le nombre de succès***. Un exemple classique est la variable aléatoire donnant le nombre de lettres A dans un mot formé de n lettres choisies dans $\{A; B\}$: dans ce cas, $p = \frac{1}{2}$ la plupart du temps. Cet exemple est par ailleurs souvent utilisé dans d'autres situations (marche aléatoire sur une droite, évolution du score de deux joueurs à un jeu de hasard, tirages avec remise dans une urne contenant deux types d'objets, etc...).

Ex. 23.5 On lance n fois d'affilée un dé bien équilibré.
Lorsque le dé tombe sur 1 ou sur 2, on considère ce lancer comme un ***échec*** - noté E.
Lorsque le dé tombe sur 6, on considère ce lancer comme un ***coup critique*** - noté C.
Sinon, on considère le lancer comme un ***lancer standard*** - noté S.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'échecs, Y la variable aléatoire comptant le nombre de coups critiques et Z la variable aléatoire comptant le nombre de lancers standards.

1) Donner la loi de X.
2) Donner la loi de Y.
3) Donner, de deux manières différentes, la loi de Z : en l'interprétant comme une variable aléatoire suivant une loi binomiale, ou en remarquant que $Z = n - X - Y$.
4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0; n]\!], 3^{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} 2^i$.

III. Variables aléatoires multiples, indépendance

III.1. Couple de variables aléatoires

Définition 23.8

Soient U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ et $Y : \Omega \to V$ deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω.

On appelle ***couple de variables aléatoires*** $(X; Y)$ la variable aléatoire

$$(X;Y) : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & U \times V \\ \omega & \mapsto & (X(\omega); Y(\omega)) \end{array} \right.$$

Par définition, un couple de variables aléatoires définies sur un même univers Ω est une variable aléatoire définie sur Ω elle aussi.

Définition 23.9 (Loi conjointe, lois marginales)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, $(X; Y)$ le couple de variables aléatoires qu'elles définissent.

On appelle ***loi conjointe de*** X ***et de*** Y la loi de $(X; Y)$.

On appelle ***lois marginale de*** $(X; Y)$ les lois de X et de Y.

Ex. 23.6

1) on lance un dé bien équilibré.
On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du lancer est pair, et qui vaut 1 si le résultat est impair.
On note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du lancer est strictement inférieur à 4, et qui vaut 1 sinon.
Remplir le tableau suivant donnant les lois de X, de Y et de $(X; Y)$.
Où trouve-t-on la loi conjointe ? Où trouve-t-on les lois marginales ?

$Y = ...$ / $X = ...$	0	1	$\mathbb{P}(X = ...)$
0			
1			
$\mathbb{P}(Y = ...)$			

2) on lance successivement deux pièces de monnaie bien équilibrées.
On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du premier lancer est "*pile*", et qui vaut 1 sinon.
On note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du second lancer est "*pile*", et qui vaut 1 sinon.
Remplir le tableau suivant donnant les lois de X, de Y et de $(X; Y)$.

$Y = ...$ / $X = ...$	0	1	$\mathbb{P}(X = ...)$
0			
1			
$\mathbb{P}(Y = ...)$			

Remarque

Comme le prouve l'exercice précédent, la donnée des lois marginales de $(X;Y)$ ne permet pas d'obtenir la loi conjointe. En effet, deux lois conjointes distinctes, peuvent se traduire par les mêmes lois marginales.

III.2. Loi conditionnelle

Définition 23.10

Soient $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires définies sur Ω
et $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.
On appelle ***loi conditionnelle de*** Y ***sachant que*** $(X = x)$ la probabilité

$$\forall i \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = i) = \mathbb{P}(Y = i | X = x) = \frac{\mathbb{P}\big((X;Y) = (x;i)\big)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

III.3. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 23.11

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont ***indépendantes*** si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}\big((X;Y) = (x;y)\big) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Propriété 23.12

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\forall A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big), \forall B \in \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big), \mathbb{P}\big((X;Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Démonstration

Propriété 23.13

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et si f et g sont deux applications respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Démonstration

III.4. Indépendance mutuelle

Définition 23.14

Soit n un entier strictement positif et $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille (finie) de variables aléatoires sur un même univers Ω.

On dit que la famille $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est formée de ***variables aléatoires mutuellement indépendantes*** lorsque

$$\forall (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque

On pourrait, comme pour la notion d'indépendance mutuelle d'événements (voir section VI.2. du chapitre 19) définir aussi une notion d'***indépendance deux à deux*** pour une famille de variables aléatoires.

On montrerait alors, comme dans le cas des événements, que l'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

Ex. 23.7 (Cor.) Donner un exemple d'expérience aléatoire, où trois variables aléatoires X, Y, Z sont deux à deux indépendantes mais non mutuellement indépendantes.

Propriété 23.15

Si $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors

$$\forall (A_1, ..., A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}\left(X_i(\Omega)\right), \text{ les événements } (X_i \in A_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \text{ sont mutuellement indépendants.}$$

Démonstration

Propriété 23.16

Si $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, alors

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Démonstration

IV. Espérance, variance, écart-type

IV.1. Espérance

Définition 23.17

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle ***espérance de*** X et on note $\mathbb{E}(X)$ le nombre réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque

L'espérance est une ***moyenne***, plus précisément la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par sa probabilité d'apparition.
En cela, l'espérance donne la valeur moyenne prise par la variable aléatoire lorsqu'on effectue un grand nombre d'expérience aléatoire.

Ex. 23.8 Pour chacune des lois ci-dessous, définies dans les précédents exercices, calculer son espérance :
23.4 : $\forall i \in [\![1;6]\!], \mathbb{P}(X_1 = i) = \dfrac{1}{6}$.
23.4 : $\forall i \in [\![2;12]\!], \mathbb{P}(X_2 = i) = \dfrac{\min(i-1;13-i)}{36}$.
23.5 : $\forall k \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.
23.1 : $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \binom{n}{i}\dfrac{5^{n-i}}{6^n}$.
23.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{\binom{2n-i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.
23.6 : $\forall i \in [\![0;1]\!], \forall j \in [\![0;1]\!], \mathbb{P}((X;Y) = (i;j)) = \dfrac{3+(-1)^{i+j+1}}{12}$ en travaillant dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

Propriété 23.18

Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

Démonstration

Ex. 23.9 Calculer à nouveau l'espérance, en utilisant la seconde expression de l'espérance :
23.4 : $\Omega = [\![1;6]\!]^2$, $X((i;j)) = i + j$, $\mathbb{P}((i;j)) = \dfrac{1}{36}$.

IV.2. Exemples

Proposition 23.19

Si X est une variable aléatoire constante, égale à x, alors $\mathbb{E}(X) = x$.

Démonstration

Proposition 23.20

Soit $A \subset \Omega$ et $X = \mathbb{1}_A$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration

IV.3. Propriétés de l'espérance

Propriété 23.21 (Linéarité)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Propriété 23.22 (Croissance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose de plus que $X \geqslant Y$, c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant Y(\omega)$.
Alors

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Propriété 23.23 (Produit de variables aléatoires indépendantes)

Si X et Y sont ***deux variables aléatoires indépendantes*** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Remarque

La propriété précédente est fausse si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
Sa réciproque est fausse.

Ex. 23.10 Donner un exemple de couple de variables aléatoires $(X;Y)$ telles que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Donner un exemple de couple de variables aléatoires ***non indépendantes*** $(U;V)$ telles que $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$.

Ex. 23.11 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $a = \min(X(\Omega))$ et $b = \max(X(\Omega))$.
Justifier l'existence de a et b.
Montrer que $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.

IV.4. Théorème de transfert

Théorème 23.24

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration

Par définition, $\mathbb{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{y \in f \circ X(\Omega)} y\mathbb{P}(f(X) = y)$.
Soit $y \in f \circ X(\Omega)$.
$(f(X) = y) = \displaystyle\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} (X = x)$ et cette réunion est disjointe.
Donc $y\mathbb{P}(f(X) = y) = y \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$.
En injectant dans la définition de l'espérance, on a :
$\mathbb{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{y \in f \circ X(\Omega)} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$

IV.5. Variance et écart-type

Définition 23.25

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle ***variance de*** X, et on note $\mathbf{V}(X)$, l'espérance du carré de la différence entre X et son espérance. Autrement dit :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$$

On appelle ***écart-type de*** X, et on note $\sigma(X)$ ou σ_X, la racine carrée de la variance de X :

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Propriété 23.26

Avec les hypothèses de la définition précédente :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration

Propriété 23.27

Avec les hypothèses de la définition précédente, quels que soient les réels a et b :

$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

Démonstration

Ex. 23.12 Pour chacune des lois ci-dessous, calculer sa variance :

23.4 : $\forall i \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X_1 = i) = \dfrac{1}{n}$.

23.4 : $X_2 = A + B$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

23.5 et 23.1 : $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}$.

23.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2n-i-1 \\ n-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}$.

IV.6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Lemme 23.28 (Inégalité de Markov)

Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ ***à valeurs positives***.
Autrement dit $I = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
Alors

$$\forall u > 0, \mathbb{P}(Y \geqslant u) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{u}$$

Démonstration

Soit $u > 0$ et $A = (Y \geqslant u)$ l'événement dont on souhaite calculer la probabilité.
Pour tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$:

- si $\omega \in A$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ et $Y(\omega) \geqslant u$ par définition de A.
  Donc $u\mathbb{1}_A(\omega) = u \leqslant Y(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)$.

- si $\omega \notin A$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ et $Y(\omega) \geqslant 0$ car Y est à valeurs positives.
  Donc $u\mathbb{1}_A(\omega) = 0 \leqslant Y(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)$.

Or $\Omega = A \cup \bar{A}$, donc $\forall \omega \in \Omega, u\mathbb{1}_A(\omega) \leqslant Y(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)$.
De plus, par définition, $\mathbb{1}_A \leqslant 1$ donc

$$u\mathbb{1}_A \leqslant Y\mathbb{1}_A \leqslant Y$$

Par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(u\mathbb{1}_A) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
Or $\mathbb{E}(u\mathbb{1}_A) = u\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = u\mathbb{P}(A)$.
Donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Y \geqslant u) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{u}$.

Théorème 23.29

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.
Quel que soit le réel ***strictement positif*** α, on a

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

Démonstration

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ qui est bien à valeurs positives.
On a alors, $\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha) = \mathbb{P}\left((X - E(X))^2 \geqslant \alpha^2\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{\alpha^2} = \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

Remarque

Le théorème précédent précise le rôle de l'écart-type comme indicateur de la dispersion d'une variable aléatoire : la probabilité que la distance entre la valeur d'une variable aléatoire et son espérance soit supérieure à $\alpha > 0$ est majorée par le quotient $\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Plus α est grand, plus cette probabilité est faible.
Pour $\alpha = 2\sigma$ par exemple, elle est inférieure à $\frac{1}{4}$.

V. Lois usuelles

V.1. Variable aléatoire constante

Définition : ....
Utilisation : ....
Loi : ....
Espérance : ....
Variance : ....
Écart-type : ....

V.2. Fonction indicatrice d'une partie de Ω, loi de Bernoulli

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : ....

Écart-type : ....

V.3. Loi uniforme

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : ....

Écart-type : ....

V.4. Loi binomiale

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : ....

Écart-type : ....

VI. Correction des exercices

Cor. 23.3 :

1) On peut voir l'univers des événements de plusieurs manières différentes :
   - on ne fait aucune distinction entre les boules rouges d'une part, et les boules noires d'autre part.

     Dans ce cas, un événement peut être représenté par un mot de $2n$ lettres, composé pour moitié de N, pour moitié de R.

     $\Omega_1 = \{\text{mots de } 2n \text{ lettres, composés de } n \text{ lettres } N \text{ et } n \text{ lettres } R\}$
   - on choisit au contraire de distinguer les boules rouges entre elles, et les boules noires entre elles - en imaginant par exemple qu'elles sont numérotées.

     Dans ce cas, un événement est une permutation du mot $N_1N_2...N_nR_1R_2...R_n$.

     $\Omega_2 = \mathfrak{S}_{2n}$
2) Quelle que soit la modélisation choisie pour Ω, $X(\Omega) = [\![n; 2n]\!]$.
3) On choisit la deuxième modélisation Ω_2 en faisant l'hypothèse d'équiprobabilité pour chaque tirage possible.

La probabilité d'un tirage élémentaire e est alors $\mathbb{P}(e) = \dfrac{1}{(2n)!}$.
La succession des boules rouges et noires ne change pas si l'on permute les boules rouges entre elles, ou les boules noires entre elles.
La probabilité d'un mot M de Ω_1 est donc $\mathbb{P}(M) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.
Enfin, pour tout entier $k \in [\![n; 2n]\!]$, l'événement $(X = k)$ regroupe tous les mots M de Ω_2 se terminant par 1 lettre R (une boule rouge) suivie de $n-k$ lettres N ($n-k$ boules noires).
Choisir un tel mot M, c'est donc choisir la position des $n-1$ lettres R parmi les $k-1$ premières lettres du mot M.
Donc $\mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{n \times (k-1)! \times n!}{(k-n)! \times (2n)!}$.

Remarque : on peut notamment vérifier que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \mathbb{P}(X = k)$ vaut bien 1.

En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} + \sum_{k=n+1}^{2n} \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \sum_{k=n+1}^{2n} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 \\ n \end{pmatrix} \text{ d'après la formule de Pascal} \\
&= 1 + \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \text{ par télescopage} \\
&= \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ par définition des coefficients binomiaux}
\end{aligned}$$

4) Y est le nombre de boules noires restant dans l'urne lorsque la dernière boule rouge a été tirée.
Donc $X + Y = 2n$, c'est-à-dire $Y = 2n - X$.
Notamment $Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
D'où, $\forall k \in [\![0; n]\!]\,, \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2n-k) = \begin{pmatrix} 2n-k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{n \times (2n-k-1)! \times n!}{(n-k)! \times (2n)!}$.

Cor. 23.7 : On lance deux pièces et on note
X la variable aléatoire qui vaut 1 si la première pièce donne *pile*, 0 sinon ;
Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la seconde pièce donne *pile*, 0 sinon ;
Z la variable aléatoire qui vaut 1 si les deux lancers sont identiques, 0 sinon.
On vérifie que les trois v.a. sont deux à deux indépendantes mais non mutuellement indépendantes.
Par exemple $\mathbb{P}\big((X; Y; Z) = (0; 0; 0)\big) = 0 \neq \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$.