Corollaire 21.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration

On le démontre par récurrence :

Initialisation : si $n = 1$

$\det(a) = a \det(1) = a$ est bien égal au produit du (seul !) coefficient diagonal de la matrice.

Comme ce cas n'est pas très parlant, on traite aussi le cas où $n = 2$.

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ par linéarité par rapport à la première colonne.

Donc $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ en effectuant l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - bC_1$ qui laisse le déterminant inchangé d'après la propriété 21.5.

Enfin, à nouveau par linéarité, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = ac \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ac$ car $\det(I_2) = 1$ par définition.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné et que $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (la démonstration est similaire pour les matrices triangulaires inférieures).

$\det(A) = a_{1,1} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = a_{1,1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ en effectuant les combinaisons linéaires $C_j \leftarrow C_j - a_{1,j}C_1$ qui laissent le déterminant inchangé.

L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Ex. 21.3 (Cor.)

1) Vrai ou faux : soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes. Alors

$$\det A = \det(C_1 - C_2 | C_2 - C_3 | ... | C_{n-1} - C_n | C_n - C_1)$$

2) Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$.

3) Calculer $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

II.3. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;

4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$;
8) $\mathrm{rg}(A) = n$;
9) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

II.4. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 21.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est libre.
Pour démontrer la propriété il suffit donc de démontrer que

1) si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est libre alors $\det(A) \neq 0$.
Supposons la famille $(C_1, ..., C_n)$ libre, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A) = n$.
Alors l'algorithme du pivot de Gauss - sur les colonnes de A - appliqué à A conduit à une matrice diagonale possédant n pivots.
C'est-à-dire à une matrice diagonale dont aucun coefficient diagonal n'est nul.
Or les opérations élémentaires utilisées lors de l'algorithme du pivot de Gauss sont du type :
   - $C_i \leftrightarrow C_j$ qui revient à multiplier le déterminant par -1 ;
   - $C_i \leftarrow \lambda C_i + \mu C_j$ qui revient à multiplier le déterminant par $\lambda \neq 0$.

   Le déterminant de A est donc non nul (puisque produit de scalaires non nuls).
2) si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est liée alors $\det(A) = 0$.
Supposons la famille $(C_1, ..., C_n)$ liée. L'un des vecteurs colonnes est donc combinaison linéaire des autres vecteurs, par exemple $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i$.
Donc $\det(A) = \det\left(C_1 | ... | C_{n-1} | \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i C_i\right) = \det\left(C_1 | ... | C_{n-1} | 0_{n,1}\right) = 0$ d'après la propriété 21.5.

Ex. 21.4

1) Calculer $\det \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$.

2) Donner les valeurs de x pour lesquelles $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

3) Dans les cas où A_x n'est pas inversible, calculer $\mathrm{Ker}(A_x)$ et $\mathrm{rg}(A_x)$.

II.5. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 21.8

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de la famille*** $\mathcal{F}$ ***dans*** $\mathcal{B}$ et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Théorème 21.9 (Caractérisation des bases)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de la propriété précédente.
En effet, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si elle est libre (n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n).
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est de rang n, c'est-à-dire inversible.
Et le théorème précédent garantit que cette dernière propriété équivaut à $\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

II.6. Déterminant d'un produit de matrices

Propriété 21.10

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration

Considérons les deux applications $\phi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(AB)$ et $\psi : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)\det(B)$.
Ces deux applications sont linéaires par rapport à chacune des colonnes de la variable et antisymétriques. De plus, $\phi(I_n) = \psi(I_n) = \det(A)$.

Si A n'est pas inversible, AB non plus et $\phi = \psi$.
Sinon, par unicité du déterminant, on a encore $\phi = \psi = \det(A)\det$.

Corollaire 21.11

Quelle que soit la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $AA^{-1} = I_n$ donc $\det\left(AA^{-1}\right) = \det\left(A\right)\det\left(A^{-1}\right) = \det(I_n) = 1$.
Donc $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

II.7. Déterminant de la transposée

Propriété 21.12

Quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

Démonstration

On utilise la décomposition ER de A.
On a alors : $\det(A) = \det(ER) = \det(E)\det(R)$ et $\det\left({}^tA\right) = \det\left({}^tER\right) = \det\left({}^tR\right)\det\left({}^tE\right)$.
Si R n'est pas inversible, alors $\det\left({}^tA\right) = \det(A) = 0$.
Si R est inversible, alors c'est une matrice diagonale donc $R = {}^tR$ et $\det(R) = \det\left({}^tR\right)$.
Il suffit alors de vérifier que le déterminant des matrices d'opérations élémentaires est égal au déterminant de leur transposée (laissé en exercice).

Corollaire 21.13

Les théorèmes et propriétés du déterminant énoncées sur les colonnes de sa variable sont aussi valables pour les lignes de sa variable.

II.8. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en ôtant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.
Autrement dit, $A_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2\\ k\neq i, l\neq j}}$.

Propriété 21.14 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Quel que soit $i \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

De même, quel que soit $j \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

Démonstration hors programme

Ex. 21.5 Calculer le déterminant de la matrice $M_n(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$.

Donnons à titre d'exemple l'application de cette formule au calcul des matrices d'ordre 3 :

Méthode : Techniques de calcul du déterminant

1) Développement par rapport à la première colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$. . . . .

2) Développement par rapport à la deuxième colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$. . . . .

3) Développement par rapport à la troisième colonne :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$. . . . .

4) Développement par rapport aux lignes :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$. . . . .

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} =$. . . . .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5) En pratique on mémorise le développement suivant une ligne ou une colonne en retenant le schéma
$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \ddots & \\ + & - & + & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{vmatrix}$$

Méthode : Calcul pratique du déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque, les propriétés précédentes sont ***généralement*** utilisées selon l'une des deux méthodes suivantes :

1) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener, à l'aide de la propriété précédente, au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre inférieur (souvent $n-1$) et on fait une récurrence :

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \lambda \det(A_{n-1})$$

2) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire qui est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Une des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes que l'on rencontre souvent est d'effectuer la somme des lignes (ou des colonnes) dans l'une des lignes (respectivement colonne) de la matrice de départ :

$$\det\left(C_1|C_2|\ldots|C_{n-1}|C_n\right) = \det\left(C_1|C_2|\ldots|C_{n-1}|\sum_{j=1}^{n} C_j\right)$$

Ex. 21.6 Soit $A(X) = \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $D(X) = \det A(X)$ est un polynôme, donner son degré.
Calculer $D(X)$.