Maths - Chapitre 22

Produit scalaire et espace euclidien

Tout comme la notion de vecteur, la notion de produit scalaire arrive tardivement en mathématiques, au tournant des XIXème et XXème siècles.

Cependant, nombre de théorèmes de ce chapitre ont une interprétation géométrique simple et étaient connus bien avant l'apparition du produit scalaire. En effet, comme pour les espaces vectoriels, il faut comprendre d'emblée que le principal changement par rapport à la géométrie traditionnelle concerne la nature des objets qui sont considérés comme fondamentaux :

- les notions de ***vecteurs et de scalaires***, ainsi que les ***opérations*** entre eux, sont les objets fondamentaux de la théorie des ***espaces vectoriels***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : points, droites, plans, parallélisme.
- Les notions de ***produit scalaire et de norme*** sont les notions fondamentales de la théorie des ***espaces euclidiens***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : ***distance, angle et orthogonalité***.

Le principal avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est qu'il se généralise à des objets qui sortaient jusque-là du cadre de la géométrie traditionnelle. Comme nous l'avons vu, $(\mathcal{F}(I,\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes aussi, de même que l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. L'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, l'ensemble des n-uplet, etc... munis des opérations habituelles en sont d'autres exemples.

Comme nous allons le voir, si l'on parvient à définir sur ces espaces vectoriels des produits scalaires, les notions géométriques de distance, d'angle ou d'orthogonalité pourront elle-même y être définies et généralisées.

Dans tout ce qui suit, $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I. Programme officiel

Produit scalaire et espaces euclidiens

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens.	Notations $< x, y >$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$. ⇆ PC, SI : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire.	Les étudiants doivent savoir développer $\\|u \pm v\\|^2$.
Inégalité de Cauchy-Schwartz et cas d'égalité.	Cas particuliers des exemples de référence.
Séparation, homogénéité, inégalité triangulaire (avec cas d'égalité).	
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, orthonormales/orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions de la norme et du produit scalaire dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace V de dimension finie. Projecteur orthogonal P_V.	Les étudiants doivent savoir déterminer $P_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de V ou en résolvant le système linéaire découlant de $u_i \perp (x - P_V(x))$ pour tous les vecteurs u_i d'une famille génératrice de V.

Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$,

$$\|P_V(x)\| \leqslant \|x\|$$

$P_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V réalisant le minimum de

$$\{\|x-y\|, y \in V\}$$

La distance de x à V, notée $d(x,V)$, est définie comme étant égale à la valeur de ce minimum.

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie.
En dimension finie, dimension de $V^\perp$.

II. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

II.1. Produit scalaire

Définition 22.1 (Produit scalaire)

On dit qu'une application $s : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire lorsqu'il vérifie les propriétés suivantes :

1) ***Symétrie*** : $\forall u, v \in E, s(u,v) = s(v,u)$.
2) ***Bilinéarité*** : $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   - $s(\lambda u + \mu v, w) = \lambda s(u,w) + \mu s(v,w)$;
   - $s(w, \lambda u + \mu v) = \lambda s(w,u) + \mu s(w,v)$.
3) ***Définition*** : $\forall u \in E, s(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
4) ***Positivité*** : $\forall u \in E, s(u,u) \geqslant 0$.

En résumé, un produit scalaire sur E est donc une ***forme bilinéaire symétrique définie positive***.

Notation

Plusieurs notations sont utilisée pour un produit scalaire :

$$s(u,v) = (u|v) = \langle u, v\rangle = u \cdot v$$

La notation utilisée dans ce chapitre sera le plus souvent $(u|v)$.

Remarques

- Un produit scalaire étant ***symétrique***, il suffit, après avoir démontré cette symétrie, de vérifier qu'il est linéaire à droite ou à gauche pour démontrer qu'il est bilinéaire.
  En pratique, on vérifiera donc d'abord la symétrie avant de vérifier la linéarité (à droite ou à gauche) dans les exercices visant à exhiber un produit scalaire sur un

espace vectoriel donné.

- Il arrive que l'on définisse plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel. Cette possibilité ne sera que peu utilisée dans ce chapitre mais sera très utilisée en seconde année pour démontrer par exemple une propriété fondamentale des matrices symétriques réelles.

Ex. 22.1 (Cor.) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (i; j)$ et $\mathcal{B}' = (i'; j')$ deux bases de E.

1) Pour $(u, v) \in E^2$, on note $u = x_1 i + y_1 j$, $v = x_2 i + y_2 j$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$.
Montrer que l'application qui à tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$ associe $(u|v) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer qu'il en est de même de l'application $\langle u, v\rangle = x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2$, $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}'$.
3) Que valent $(i|j)$ et $\langle i', j'\rangle$?
4) On donne $i' = 2i + j$ et $j' = i - 2j$.
Calculer $(i'|i')$, $(i'|j')$ et $(j'|j')$ puis exprimer pour $u, v \in E$ $\langle u, v\rangle$ en fonction de $(u|v)$.

II.2. Espaces préhibertiens réels et espaces euclidiens

Définition 22.2 (Espace préhilbertien réel)

On appelle ***espace préhilbertien réel*** tout $\mathbb{R}$-***espace vectoriel muni d'un produit scalaire***.

Définition 22.3 (Espace euclidien)

On appelle ***espace euclidien*** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** muni d'un produit scalaire.

II.3. Exemples de référence

a) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Définition 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ associe

$$(u|v) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Ex. 22.2 (Cor.) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est bien un produit scalaire.

b) Produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$

Ex. 22.3 (Cor.) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et h une fonction continue et strictement positive sur $[a;b]$.
Montrer que l'application qui à deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ associe

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Définition 22.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ l'application qui à tout couple $(u,v) \in \left(\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})\right)^2$ associe

$$(u|v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 22.4 (Cor.) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on donne les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$.

1) Calculer pour $i, j \in [\![0;3]\!]$, $(P_i|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_i(t)P_j(t)\mathrm{d}t$.
2) En déduire les coordonnées de $Q = X^3 + X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés ***polynômes de Legendre***.

III. Norme associée à un produit scalaire

III.1. Définition

Définition 22.6 (Norme sur un espace préhilbertien réel)

On appelle ***norme associée à un produit scalaire*** $(\cdot|\cdot)$ sur un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien E l'application définie par

$$N : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & N(u) = \sqrt{(u|u)} \end{cases}$$

Notation

La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

Ex. 22.5 (Cor.) Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

1) Écrire $\|u \pm v\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$ et $(u|v)$.
2) En déduire trois expressions de $(u|v)$ ne faisant intervenir que $\|u \pm v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Remarques

- La positivité du produit scalaire garantit l'existence de la norme.
- La définition du produit scalaire implique que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

III.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 22.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a

$$|(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

De plus, il n'y a égalité que si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration

Considérons la fonction $f : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|u + \lambda v\|^2$.
$f(\lambda) = \|u\|^2 + 2\lambda\,(u|v) + \lambda^2 \|v\|^2 \geqslant 0$ quel que soit la valeur de λ (puisque le carré d'une norme est toujours positif).
Le discriminant de ce polynôme du second degré en λ est donc négatif.
$\Delta = 4\,(u|v)^2 - 4\,\|u\|^2\,\|v\|^2 \leqslant 0$.
D'où l'on tire l'inégalité annoncée.
De plus, si $f(\lambda) = 0$, alors $\Delta = 0$ (l'équation possède une solution) et, ou bien $\|v\| = 0$ et u et v sont colinéaires, ou bien $\|v\| \neq 0$ et $f(\lambda_0) = 0$ pour $\lambda_0 = \dfrac{-\,(u|v)}{\|v\|^2}$.
On a donc $u + \lambda_0 v = 0$ donc u et v sont encore colinéaires.

Ex. 22.6 (Cor.) Écrire la définition de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$.

III.3. Propriétés de la norme

Propriété 22.8

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a :

- ***Séparation*** : $\|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- ***Homogénéité*** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda|.\,\|u\|$;
- ***Inégalité triangulaire*** : $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démonstration

Les deux premières propriétés sont évidentes. Démontrons l'inégalité triangulaire.
$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u|v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.
L'inégalité portant sur des carrés de nombres positifs et la fonction carrée étant bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'inégalité triangulaire.

Ex. 22.7 (Cor.)

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et d'une norme associée notée $\|.\|$.
   Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$$

   Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ le produit scalaire $(x_i|x_j)$.
2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
   Montrer que A est inversible et en déduire que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

III.4. Complément : angle géométrique entre deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$-\|u\|\,\|v\| \leqslant (u|v) \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

Si u et v sont deux vecteurs non nuls, on a donc

$$-1 \leqslant \frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1$$

Ceci permet de donner une définition de l'***angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls*** :

Définition 22.9 (Angle géométrique de deux vecteurs non nuls)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v d'un espace préhilbertien réel, on appelle ***angle géométrique formé par les vecteurs u et v*** le nombre

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right) \in [0;\pi]$$

Ceci parachève l'objectif que l'on se donnait en introduction du chapitre : nous avons construit toutes les notions élémentaires de la géométrie traditionnelle à l'aide des notions de vecteurs et de produit scalaire.
Ces dernières notions deviennent les notions fondamentales sur lesquelles peut être construite la géométrie traditionnelle.
L'avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est double :

- d'une part, il exhibe les ***propriétés algébriques*** (c'est-à-dire opératoires) nécessaires à la construction d'une géométrie ;
- d'autre part, il permet en conséquence de généraliser les notions géométriques à des espaces qui jusque-là sortaient de ce cadre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, etc...