

Correction des exercices

Cor. 19.1 :

- 1) $\Omega = \{Pile; Face\}$.
- 2) $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- 3) $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 6 \rrbracket$ c'est-à-dire

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6); \\ (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6); \\ \dots \\ (6; 1); (6; 2); (6; 3); (6; 4); (6; 5); (6; 6) \end{array} \right\}$$

Cor. 19.2 :

- 1) $A = \{2; 4; 6\}$ n'est pas un événement élémentaire.
- 2) $B = \{1; 2\}$ n'est pas un événement élémentaire.
- 3) $C = \{2\}$ est un événement élémentaire.

Cor. 19.3 :

- 1) $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$ est l'événement « le résultat du jet est impair » .
- 2) $\overline{B} = \{3; 4; 5; 6\}$ est l'événement « le résultat du jet est supérieur ou égal à 3 » .
- 3) $\overline{C} = \{1; 3; 4; 5; 6\}$ est l'événement « le résultat du jet est différent de 2 » .

Cor. 19.4 : A et $B = A \cap B = C$.

$$\text{Cor. 19.5 : } A = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1); (1; 3); (1; 5); \\ (2; 2); (2; 4); (2; 6); \\ (3; 1); (3; 3); (3; 5); \\ (4; 2); (4; 4); (4; 6); \\ (5; 1); (5; 3); (5; 5); \\ (6; 2); (6; 4); (6; 6) \end{array} \right\} \quad B = \left\{ \begin{array}{l} (2; 2); (2; 4); (2; 6); \\ (4; 2); (4; 4); (4; 6); \\ (6; 2); (6; 4); (6; 6) \end{array} \right\} \quad C = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1); (1; 3); (1; 5); \\ (3; 1); (3; 3); (3; 5); \\ (5; 1); (5; 3); (5; 5) \end{array} \right\}$$

$$4) D = \left\{ \begin{array}{l} (1; 2); (1; 4); (1; 6); \\ (2; 1); (2; 3); (2; 5); \\ (3; 2); (3; 4); (3; 6); \\ (4; 1); (4; 3); (4; 5); \\ (5; 2); (5; 4); (5; 6); \\ (6; 1); (6; 3); (6; 5) \end{array} \right\}$$

- 5) $E = A \cap B = B$.
- 6) $F = D \cap \overline{C} = D$.
- 7) $G = \overline{B} \cap \overline{C}$: « les dés ne sont ni tous les deux pairs, ni tous les deux impairs », c'est-à-dire « les dés sont de parités différentes ».
- 8) $H = G \cap A = \emptyset$ est impossible.

Cor. 19.6 : On a $G = \overline{B} \cap \overline{C}$.

- $B \cup C \cup G = B \cup C \cup \overline{B \cup C} = (B \cup C) \cup \overline{A \cup B} = \Omega$.
- $B \cap C = \emptyset$ car un dé ne peut être à la fois pair et impair.
 $B \cap G = B \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (B \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = \emptyset \cap \overline{B} = \emptyset$
 et de même $C \cap G = \emptyset$.

La famille (B, C, G) forme donc bien un système complet d'événements.

Cor. 19.7 :

$$1) P(\{6\}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}.$$

$$2) P(\text{« le résultat est pair »}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{4}{7}.$$

Cor. 19.8 : On note $S = i$ l'événement « la somme des deux dés vaut i ».

$$P(S = 2) = P(\{(1; 1)\}) = \frac{1}{36}.$$

$$P(S = 3) = P(\{(1; 2); (2; 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$P(S = 4) = P(\{(1; 3); (2; 2); (3; 1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

$$P(S = 5) = P(\{(1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \text{ etc...}$$

De manière plus générale : $P(S = i) = \sum_k P(\{(k; i - k)\}) = \frac{1}{36} \sum_k 1$ par hypothèse d'équiprobabilité, où la somme doit être effectuée de sorte à ce que

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq 6 \\ 1 \leq i - k \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq 6 \\ i - 6 \leq k \leq i - 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P(S = i) = \frac{1}{36} \sum_{k=\max(1; i-6)}^{\min(6; i-1)} 1 = \frac{\min(6; i-1) - \max(1; i-6) + 1}{36} \text{ d'où}$$

$$P(S = 6) = \frac{5 - 1 + 1}{36} = \frac{5}{36}, \quad P(S = 7) = \frac{6 - 1 + 1}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(S = 8) = \frac{6 - 2 + 1}{36} = \frac{5}{36} \text{ et } P(S = 9) = \frac{6 - 3 + 1}{36} = \frac{1}{9}.$$

Cor. 19.9 : 1^{re} méthode : on note $T = i$ l'événement « la somme des trois dés vaut i ».

$P(T = i) = \sum_j \sum_k P(\{(k; j - k; i - j)\})$ où j est la somme des deux premiers dés et où la somme doit être effectuée de sorte à ce que

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq 6 \\ 1 \leq j - k \leq 6 \\ 1 \leq i - j \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq 6 \\ j - 6 \leq k \leq j - 1 \\ i - 6 \leq j \leq i - 1 \end{cases}$$

Donc en utilisant l'hypothèse d'équiprobabilité,

$$P(T = i) = \frac{1}{216} \sum_{j=i-6}^{i-1} \sum_{k=\max(1; j-6)}^{\min(6; j-1)} 1 = \frac{1}{216} \sum_{j=i-6}^{i-1} (\min(6; j-1) - \max(1; j-6) + 1).$$

$$P(T = 9) = \frac{1}{216} \sum_{j=3}^8 (\min(6; j-1) - \max(1; j-6) + 1) = \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5}{216} = \frac{25}{216} \text{ en utilisant}$$

l'exercice 19.8. De même,

$$P(T = 10) = \frac{1}{216} \sum_{j=4}^9 (\min(6; j-1) - \max(1; j-6) + 1) = \frac{3+4+5+6+5+4}{216} = \frac{27}{216}.$$

On a donc bien $P(T = 10) > P(S = 9)$.

2^{ème} méthode : on utilise la table de décomposition de 9 et 10 comme somme de trois dés du début de chapitre en remarquant que

- si une somme fait intervenir **trois termes distincts**, elle correspond à $3! = 6$ événements élémentaires ;
- si une somme fait intervenir **deux termes distincts**, elle correspond à $\binom{3}{1} = 3$ événements élémentaires ;
- si une somme ne fait intervenir qu'un seul terme répété trois fois, elle correspond à un unique événement élémentaire.

$$\text{D'où : } P(T = 9) = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216} \text{ et } P(T = 10) = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216}.$$

Question : obtenir une formule générale donnant la probabilité que la somme de $n \in \mathbb{N}^*$ dé(s) soit égale à $i \in \llbracket n; 6n \rrbracket$.

Cor. 19.10 : Notons A_i l'événement « la somme des deux dés soit égale à i », B l'événement « l'un des deux dés au moins a donné un résultat pair », B' l'événement « le premier dé a donné un résultat pair », B'' l'événement « le deuxième dé a donné un résultat pair » et B''' l'événement « les deux dés ont donné des résultats pairs ».

Les dés étant non truqués, on se place sous l'hypothèse d'équiprobabilité. Calculons $P(B)$:

$P(B) = P(B' \cup B'') = P(B') + P(B'') - P(B' \cap B'') = P(B') + P(B'') - P(B''')$. En reprenant les résultats de l'exercice 19.5, on a donc

$$P(B') = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^6 P(\{(2i; j)\}) = \frac{1}{36} \times 3 \times 6 = \frac{1}{2}$$

$$P(B'') = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 P(\{(i; 2j)\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B''') = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } P(B) = \frac{2+2-1}{4} = \frac{3}{4}.$$

On aurait pu obtenir le même résultat plus rapidement en considérant l'événement \overline{B} .

Calculons $P(A_i \cap B)$ pour chaque valeur de $i \in \llbracket 6; 8 \rrbracket$:

$$P(A_6 \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \text{ par énumération des cas possibles.}$$

$$P(A_7 \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$P(A_8 \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{D'où } P_B(A_6) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{27}, P_B(A_7) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9} \text{ et } P_B(A_8) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{9}.$$

Cor. 19.11 : Notons F l'événement « l'élève choisi est une fille » et $CPGE$ l'événement « l'élève choisi est en classes préparatoires ». En utilisant la formule des probabilités totales on a donc :

$$P(CPGE) = P(F)P(CPGE|F) + P(\overline{F})P(CPGE|\overline{F}) = \frac{51}{100} \times \frac{12}{100} + \frac{49}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{1347}{10\,000}.$$

Donnons sur cet exemple une interprétation de la formule des probabilités totales : s'il y avait eu moitié de filles et de garçons dans l'établissement, le résultat aurait été $13,5\% = \frac{12\% + 15\%}{2}$. Or il y a légèrement plus de filles que de garçons, la probabilité est donc légèrement décalée vers le pourcentage des filles qui sont en classes préparatoires.

Autrement dit, la formule des probabilités totales n'est rien d'autre qu'une moyenne des probabilités conditionnelles coefficientée par les probabilités du système complet d'événements.

Cor. 19.12 : Notons N l'événement « la boule tirée est noire », NN l'événement « les deux premières boules tirées sont noires » et NNN l'événement « les trois boules tirées sont noires » dont on cherche à calculer la probabilité.

- 1) $P(NNN) = P(NN)P(NNN|NN) = [P(N)P(NN|N)]P(N) = P(N)^3$ puisque le tirage s'effectue avec remise.
Donc $P(NNN) = \frac{3^3}{10^3} = \frac{27}{1000}$.
- 2) À nouveau, $P(NNN) = P(N)P(NN|N)P(NNN|NN)$. Or le tirage s'effectue sans remise.
Donc $P(NNN) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$.

Cor. 19.13 : Notons $A_0 = \Omega$ et pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, A_k les événements « k boule(s) noire(s) ont été tirées lors des k premiers tirages » et B_k les événements « une boule noire est tirée lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ». On cherche à calculer A_n et on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_k = \bigcap_{i=1}^k B_i.$$

En utilisant la formule des probabilités composées, on a donc

$$P(A_n) = \prod_{k=1}^n P(A_k|A_{k-1}) = \prod_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+2-k} = \frac{1}{n+1} \text{ en reconnaissant un produit télescopique.}$$

Cor. 19.14 :
$$P(F|CPGE) = \frac{P(CPGE|F)P(F)}{P(CPGE)} = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{51}{100}}{\frac{1347}{10\,000}} = \frac{612}{1347} = \frac{204}{449}.$$

Cor. 19.15 : On teste une personne au hasard et on note A l'événement « l'individu est malade » et B l'événement « le résultat du test est positif ». On cherche $P(A|B) > \frac{99}{100}$. Or :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{a/100}{a/100 + b \times 99/100} = \frac{a}{a + 99b} \Rightarrow a > 99^2 b : \text{pour que le test soit acceptable, il est de la plus haute importance qu'il y ait très peu de faux positifs.}$$

Cor. 19.16 : On considère par exemple $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$, P uniforme, et $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 4\}$ et $C = \{1; 4\}$. On vérifie que les événements sont bien deux à deux indépendants mais $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$