III.8. Deuxième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ associée à la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$.
Soit par ailleurs $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_q)$ une famille de $q \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E associée à la matrice $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.
Alors

$$MS = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(u_1), \phi(u_2), ..., \phi(u_q)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(\phi(\mathcal{S})\big)$$

Démonstration

En vertu du théorème précédent, il s'agit simplement de la traduction du théorème 11.9 affirmant que pour si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (U_1|U_2|...|U_q) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a

$$AB = (AU_1|AU_2|...|AU_q)$$

III.9. Troisième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.12

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives q, p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_p)$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2, ..., g_n)$.
Soient $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi \circ \phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi \circ \phi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}''}\big(\psi \circ \phi(\mathcal{B})\big) \text{ par définition} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\text{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(\phi(\mathcal{B})\big) \text{ d'après le théorème précédent} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \text{ par définition} \end{aligned}$$

Ex. 18.13 (Cor.) On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$ de l'exercice 18.3.
On définit de plus $\psi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X-1)$.
Que peut-on dire de $\phi \circ \psi$? de $\psi \circ \phi$?
Donner la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi)$ puis calculer AB et BA.

III.10. Cas particuliers

1) Si ϕ et ψ sont des endomorphismes de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi \circ \phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$: le produit matriciel n'est pas commutatif car ....
....

2) Si ϕ est une forme linéaire de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(\phi) = (\dots\dots\dots\dots)$: une matrice-ligne s'interprète naturellement comme . . . .

IV. Isomorphismes et changements de bases

IV.1. Caractérisation des isomorphismes par leur matrice

Théorème 18.13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$.
$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
On a de plus dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)^{-1}$$

Démonstration

Sens direct : supposons $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective avec E et F de même dimension n rapportés aux bases données par l'énoncé.
Alors, d'après la proposition 18.12, on a
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi^{-1} \circ \phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\phi^{-1})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ d'une part et
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi^{-1} \circ \phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$ d'autre part.
De même, en écrivant la matrice de $\phi \circ \phi^{-1}$ dans $\mathcal{B}'$ on obtient
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\phi^{-1}) = I_n$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ est inversible et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right)$$

Réciproquement : supposons que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soit $B = A^{-1}$ et ψ l'application linéaire de F dans E définie par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\psi) = B$.
Alors en écrivant les produits $AB = I_n$ et $BA = I_n$ comme matrices des composées de ϕ et ψ on montre que ϕ est bijective et que $\psi = \phi^{-1}$.

IV.2. Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 18.14

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$.

Démonstration

On montre la première équivalence, la seconde se montrant de façon similaire.
Le sens direct est évident puisque A est inversible si et seulement si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$.
Réciproque : supposons que $AB = I_n$ et soient ϕ et ψ les applications linéaires canoniquement associées aux matrices A et B.

Alors l'égalité $AB = I_n$ s'écrit $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\text{id})$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Donc $\phi \circ \psi = \text{id}$ et ϕ est surjective, ψ injective.
Donc d'après le théorème 15.52, ϕ et ψ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
On conclut en utilisant le théorème précédent.

IV.3. Matrices de passage

Définition 18.15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E.
On appelle ***matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*** la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Autrement dit, ***la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$.***

Notation

On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Remarque

On a aussi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.
Notamment, toutes les matrices de passage sont ....
En effet, ...

IV.4. Propriétés des matrices de passage

Propriété 18.16 (Inverse d'une matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E. Alors :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1} \quad \text{par définition} \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)^{-1} \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(\text{Id}_E^{-1}\right) \\
&= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \\
&= P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Propriété 18.17 (Produit de deux matrices de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') \quad \text{par définition}\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')\\
&= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}
\end{aligned}$$

Ex. 18.14 (Cor.) • Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = ((1;1);(2;3))$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ car

• Dans $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique, $\mathcal{B}' = (X(X+1); X(X+2); (X+1)(X+2))$ et $\mathcal{B}'' = (1; X; 2X^2-1)$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ car

Calculer les autres matrices de passage entre les différentes bases données.

IV.5. Formules de changement de bases

Proposition 18.18 (Formule de changement de bases pour un vecteur)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$\forall u \in E, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Démonstration

On reprend les notations de l'énoncé. Soit $u \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E(u)) \quad \text{d'après la proposition 18.10}\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)
\end{aligned}$$

Ex. 18.15 (Cor.) Exprimer les coordonnées du polynôme $P = 3X^2 + 5X - 4$ dans les trois bases de l'exemple précédent.

Proposition 18.19 (Formule de changement de bases pour une application linéaire)

Soient E de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F de bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.

On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E, F), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Q^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P$$

Démonstration

On reprend les notations de l'énoncé. Alors :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F(\mathcal{C})) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(\mathcal{B}')) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ \phi \circ \mathrm{Id}_E(\mathcal{B}')) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) \end{aligned}$$

Proposition 18.20 (Formule de changement de bases pour les formes linéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P$$

Proposition 18.21 (Formule de changement de bases pour les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi)$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1} A P$$

IV.6. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$.

Méthode

En pratique, pour déterminer l'inverse d'une matrice A, on utilise l'avant-dernière propriété qui revient à résoudre un système de n équations à n inconnues : ou bien $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (I_n|B)$ et A est alors inversible et $A^{-1} = B$, ou bien le système est de rang strictement inférieur à n et A n'est pas inversible.
Une autre méthode fructueuse est l'interprétation de la matrice A comme matrice d'une ap-

plication linéaire ou comme matrice de passage.

Méthode

Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension n, il suffit de montrer que la ***matrice des coordonnées de cette famille*** dans une base donnée est une ***matrice inversible***.

Ex. 18.16 (Cor.) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 5y & + & z & = & u \\ -2x & + & y & - & z & = & v \\ 4x & - & y & + & 2z & = & w \end{array}\right.$ et en déduire l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

V. Noyau, image et rang d'une matrice

V.1. Noyau et image d'une matrice

Définition 18.22

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
On appelle ***noyau de la matrice*** A le noyau de ϕ.
On appelle ***image de la matrice*** A l'image de ϕ.

Notation

On note, comme pour les applications linéaires, $\operatorname{Ker}(A)$ le noyau de A et $\operatorname{Im}(A)$ l'image de A.

Remarque

Avec les notations de la définition, $\operatorname{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ et $\operatorname{Im}(A)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

V.2. Conservation de la dimension du noyau et de l'image par multiplication par des matrices inversibles

Proposition 18.23

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker}(MA) = \dim \operatorname{Ker}(AN)$$

et

$$\dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{Im}(MA) = \dim \operatorname{Im}(AN)$$

Démonstration

Démontrons la première égalité, les autres se démontrant de façon similaire. Soient $\phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application canoniquement associée à A et $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'automorphisme canoniquement associé à M.
On a $u \in \operatorname{Ker}(MA) \Leftrightarrow \psi(\phi(u)) = 0 \Leftrightarrow \phi(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \operatorname{Ker}(A)$ car ψ est bijective.
Donc $\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker}(MA)$.

V.3. Rang d'une matrice : rappel

Nous avons défini au chapitre 11 section V.5. le rang d'une matrice de la façon suivante :

Définition 18.24

On appelle ***rang*** d'une matrice A le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A.

Or le nombre de pivots d'une matrice échelonnée réduite par lignes est de façon évidente égale à la dimension de l'image de cette matrice. D'après la proposition précédente, c'est aussi la dimension de l'image de A puisque on passe de A à l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A en multipliant par des matrices élémentaires inversibles. Donc une définition alternative du rang d'une matrice est :

Définition 18.25

On appelle ***rang*** d'une matrice A la dimension de son image : $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$.

Remarque

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc aussi le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

V.4. Théorème du rang : version matricielle

Théorème 18.26 (Théorème du rang)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a
$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = p$$

V.5. Caractérisations des matrices inversibles

Théorème 18.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\operatorname{rg}(A) = n$;

3) $\dim \operatorname{Ker}(A) = 0$.

Démonstration

En remarquant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales pour l'application linéaire canoniquement associée à A, il s'agit d'une conséquence directe du théorème 15.52 énonçant des équivalences similaires pour les applications linéaires.

V.6. Rang et transposition

Propriété 18.28

Quelle que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$;
- $\operatorname{rg} A \leq \min(n, p)$.

Démonstration

$\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(ER) = \dim \operatorname{Im}(R)$.
$\operatorname{rg}\left({}^tA\right) = \dim \operatorname{Im}\left({}^tR\,{}^tE\right) = \operatorname{rg}\left({}^tR\right)$.
Or l'algorithme de Gauss appliqué à ${}^tR$ conduit à la matrice I_r bordée de 0, donc $\operatorname{rg} {}^tR = \operatorname{rg} R$.
On a donc bien $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$.
Concernant la deuxième propriété, elle découle directement du fait que $\operatorname{rg} A \leqslant n$ et $\operatorname{rg} {}^tA \leqslant p$ puisque $\operatorname{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $\operatorname{Im}\left({}^tA\right)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Remarque

Ce théorème permet d'affirmer que le rang d'une matrice est aussi bien égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes que de celle de ses vecteurs colonnes. Plus généralement, il autorise à faire aussi bien des opérations sur les lignes que sur les colonnes pour obtenir de façon algorithmique le rang d'une matrice.

Ex. 18.17 (Cor.) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & -9 & -6 & 0 \end{pmatrix} =$