IV.5. Théorèmes de Pythagore

Théorème 22.17 (Théorème de Pythagore : 1ère version)

Soient u et v deux vecteurs de E.
$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Démonstration

Sens direct : supposons $u \perp v$. Alors
$\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,(u|v) = \|u\|^2 + \|v\|^2$ car $(u|v) = 0$.
Réciproque : supposons que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
Alors $2\,(u|v) = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ donc $u \perp v$.

Théorème 22.18 (Théorème de Pythagore : 2ème version)

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Démonstration

Supposons que $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ soit une famille orthogonale.

Alors $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (u_i|u_j)$.

Or tous les produits scalaires sont nuls car la famille est orthogonale.

Donc $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

NB : dans le cas où $n \geqslant 3$, la réciproque de cette propriété est fausse !

Important ! Réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore n'est valable que dans le cas de la somme de deux vecteurs. Dans le cas de trois vecteurs ou plus, on peut trouver des contre-exemples.

Ex. 22.9 (Cor.) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on donne les trois vecteurs $u = (1;2)$, $v = (0;2)$ et $w = (0;-1)$.
Que valent $\|u+v+w\|^2$ et $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$?
La famille (u,v,w) est-elle orthogonale ?
Donner un exemple d'une famille de quatre vecteurs qui vérifie l'identité de Pythagore mais qui n'est pas orthogonale.

IV.6. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 22.19

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E.

Quel que soit le vecteur v de E, $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E, $v \in E$ et $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$.
Soit $w \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$.
$(v'|w) = (v|w) - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\,(u_i|w)$ par linéarité.
Donc $(v'|w) = \left(v \middle| w - \sum_{i=1}^{n} (u_i|w)\, u_i \right)$.
Nous allons montrer que $w' = w - \sum_{i=1}^{n} (u_i|w)\, u_i = 0_E$.
En effet, $w \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$ donc $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.
Or, $\forall j \in [\![1;n]\!]\,, (w|u_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(u_i|u_j) = \lambda_j$ car la famille est orthonormée.
Donc $w = \sum_{i=1}^{n} (w|u_i)\, u_i$, donc $w' = 0_E$.
Ceci prouve que $(v'|w) = 0$ donc que v' est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

Méthode : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le théorème précédent permet de construire à partir d'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ libre de vecteurs non nuls de E une nouvelle famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ orthonormale.
L'algorithme qui en découle est appelé ***procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*** et se décompose comme suit :

- ***Initialisation*** : $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ est un vecteur unitaire et forme donc (à lui seul) une famille orthonormale.
- ***Propagation et hérédité*** : pour i allant de 2 à n, on suppose que la famille $\mathcal{F}'_{i-1} = (v_k)_{k\in[\![1;i-1]\!]}$ est orthonormale
  - ⋆ calculer $u'_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_k|u_i)\, v_k$. D'après le théorème précédent u'_i est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. De plus u'_i est non nul car $\mathcal{F}$ est libre (par l'absurde si l'on n'est pas convaincu).
  - ⋆ Le vecteur $v_i = \dfrac{u'_i}{\|u'_i\|}$ est donc unitaire et orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. La

famille $\mathcal{F}'_i = (v_k)_{k \in [\![1;i]\!]}$ est donc orthonormale.

- ***Conclusion*** : à l'arrêt de l'algorithme, la famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ obtenue est orthonormale.

Ex. 22.10 (Cor.)

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2) Même question pour $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
3) Trouver une base orthonormale de E dans les deux cas précédents.

V. Orthogonalité en dimension finie

Dans cette section, $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.

Il s'agit donc d'un espace euclidien.

V.1. Bases orthonormées

Définition 22.20 (Base orthonormée)

On appelle ***base orthonormée*** ou ***base orthonormale*** d'un espace euclidien F toute famille libre, génératrice et orthonormale de F.

Théorème 22.21 (Existence de bases orthonormées)

Tout espace euclidien F possède au moins une base orthonormée.

Démonstration

F étant de dimension finie, il possède une base $\mathcal{B}$. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une famille $\mathcal{B}'$ orthonormale de même cardinal. Or d'après la propriété 22.16, cette famille est libre, de cardinal égal à la dimension de E, donc c'est une base.

V.2. Coordonnées en base orthonormée

Propriété 22.22 (Propriété fondamentale des espaces euclidiens)

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).

Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ la coordonnée suivant u_i de tout vecteur v de F est

$$x_i = (u_i|v)$$

Démonstration

$\mathcal{B}$ étant une base de F, tout vecteur v se décompose de manière unique sous la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

où $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$(v|u_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \middle| u_k \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (u_i|u_k) = x_k$ car la base est orthonormée.

V.3. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 22.23

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).

Alors quels que soient les vecteurs $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $w = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ on a

- $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
- $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Démonstration

$(v|w) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (u_i|u_j)$.

La base étant orthonormée, $(u_i|u_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(u_i|u_j) = 1$ si $i = j$.

Donc $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

En utilisant ce résultat pour $w = v$, on obtient immédiatement que

$\|v\|^2 = (v|v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

V.4. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 22.24

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

Quel que soit le vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $v = p_F(u) \in F$ tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F.

Analyse : supposons qu'il existe un vecteur v satisfaisant aux hypothèses du théorème et décomposons v dans $\mathcal{B}$: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $(u|v_i) = (u - v + v|v_i) = (v|v_i) = x_i$.

Si v existe, il est donc unique et $v = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i$.

Synthèse : soit $w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ un vecteur quelconque de F.

$$(u - v|w) = \left(u - \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, y_i - \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, y_i = 0.$$

Conclusion : le vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i$ est l'unique vecteur de F tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Définition 22.25 (Projection orthogonale sur un espace euclidien)

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

On appelle ***projection orthogonale*** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Autrement dit, la projection orthogonale sur F est l'application p_F qui à tout vecteur u de E associe l'unique vecteur v de F tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Corollaire 22.26

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^{\perp}$.

V.5. Remarque importante

Les théorèmes de la sous-section précédente ne sont valables que pour un sous-espace vectoriel F de ***dimension finie***. L'exercice suivant donne un contre-exemple dans le cas où F est de dimension infinie.

Ex. 22.11

1) Montrer qu'une application continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, qui s'annule sur tout intervalle ouvert non vide $I \subset [0;1]$, est l'application nulle.

   Indication : pour une application $f \in \mathcal{F}(E, F)$, ***s'annuler*** et ***être nulle*** ont des significations (très) différentes...

2) Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $F = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.

   a) Montrer que $F^{\perp} = \{x \in [0;1] \mapsto 0\}$.

   b) En déduire que si $f \in E \backslash F$, il n'existe pas de fonction $g \in F$ telle que $f - g \in F^{\perp}$.

   c) Que vaut $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$?

V.6. Propriétés

Propriété 22.27

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
La projection orthogonale p_F sur F est un projecteur, autrement dit $p_F \circ p_F = p_F$.

Démonstration

La démonstration du théorème 22.24 montre que $\forall u \in E, p_F(u) = v = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i$ où (v_i) est une base orthonormée quelconque de F.
Il suffit de montrer que $p_F(v) = v$.
Or $p_F(v) = \sum_{i=1}^{n} (v|v_i)\, v_i = v$ puisque la base est orthonormée (on retrouve les coordonnées de v en base orthonormée).

Propriété 22.28 (Inégalité de Bessel)

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$,

$$\|p_F(u)\| \leqslant \|u\|$$

Démonstration

Par définition du projeté orthogonal, $p_F(u)$ est l'unique vecteur de F tel que $u - p_F(u) \in F^{\perp}$.
Donc $\|u\|^2 = \|u - v + v\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v\|^2$ car les vecteurs $u - v$ et v sont orthogonaux.
Donc $\|v\|^2 \leqslant \|u\|^2$ ce qu'il fallait démontrer.

Propriété 22.29

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$, $v = p_F(u)$ est l'unique vecteur de F vérifiant

$$\|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\|$$

Démonstration

Il suffit de montrer que pour tout vecteur $w \in F$ distinct de v, $\|u - v\| < \|u - w\|$.
Soit w un tel vecteur.
$\|u - w\|^2 = \|u - v + v - w\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v - w\|^2 + 2\,(u - v|v - w) = \|u - v\|^2 + \|v - w\|^2 > \|u - v\|^2$ car d'une part $u - v \in F^{\perp}$ et $v - w \in F$ et d'autre part $\|v - w\| > 0$ $(v \neq w)$.

V.7. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace euclidien

Théorème 22.30

Soient E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Alors $F^{\perp}$ et F sont supplémentaires.

Démonstration

- Soit $u \in F \cap F^{\perp}$.
  $u \in F$ et $u \in F^{\perp}$ donc $u \perp u$: $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$.
  Donc $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.
- Soit $u \in E$. Le projeté orthogonal $v = p_F(u)$ appartient à F et $u - v$ appartient à $F^{\perp}$.
  Donc $u = v + (u - v)$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^{\perp}$.
  Donc $E = F + F^{\perp}$.

Finalement, $E = F \oplus F^{\perp}$: F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Théorème 22.31

Soient E un espace ***euclidien*** de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors $\dim F^{\perp} = n - p$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Démonstration

On suppose que E est un espace ***euclidien*** de dimension n. D'après le théorème précédent, F (de dimension p) et $F^{\perp}$ sont supplémentaires : donc $\dim F^{\perp} = n - p$.
De plus, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - (n - p) = p$ et $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ (car par définition, tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $F^{\perp}$).
Donc F est un sous-espace vectoriel de $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, de même dimension que lui : $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

VI. Correction des exercices

Cor. 22.1 :

1) ***Symétrie*** : $(u|v) = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = (v|u)$.
   Linéarité à gauche :
   $(\lambda u + \mu v|w) = (\lambda x_1 + \mu x_2)\, x_3 + (\lambda y_1 + \mu y_2)\, y_3 = \lambda\,(x_1x_3 + y_1y_3) + \mu\,(x_2x_3 + y_2y_3)$.
   Donc $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda\,(u|w) + \mu\,(v|w)$.
   Par symétrie, l'application est aussi linéaire à droite donc bilinéaire.
   Définition : soit $u = xi + yj$ tel que $(u|u) = 0$. On a donc $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \,\textbf{et}\, y = 0) \Leftrightarrow u = 0$.
   Positivité : soit $u = xi + yj$. $(u|u) = x^2 + y^2 \geqslant 0$.
   L'application donnée est donc bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.
2) La démonstration de la question précédente reste valable si l'on décompose les vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$ puisqu'aucune supposition n'a été faite sur la base $\mathcal{B}$.
3) $(i|j) = (i + 0j|0i + j) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. De même, $\langle i', j' \rangle = 0$.