b) Produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$

Ex. 22.3 (Cor.) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et h une fonction continue et strictement positive sur $[a;b]$.
Montrer que l'application qui à deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ associe

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Définition 22.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ l'application qui à tout couple $(u,v) \in \left(\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})\right)^2$ associe

$$(u|v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 22.4 (Cor.) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on donne les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$.

1) Calculer pour $i, j \in [\![0;3]\!]$, $(P_i|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t)\mathrm{d}t$.
2) En déduire les coordonnées de $Q = X^3 + X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés ***polynômes de Legendre***.

III. Norme associée à un produit scalaire

III.1. Définition

Définition 22.6 (Norme sur un espace préhilbertien réel)

On appelle ***norme associée à un produit scalaire*** $(\cdot|\cdot)$ sur un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien E l'application définie par

$$N : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & N(u) = \sqrt{(u|u)} \end{array} \right.$$

Notation

La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

Ex. 22.5 (Cor.) Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

1) Écrire $\|u \pm v\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$ et $(u|v)$.
2) En déduire trois expressions de $(u|v)$ ne faisant intervenir que $\|u \pm v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Remarques

- La positivité du produit scalaire garantit l'existence de la norme.
- La définition du produit scalaire implique que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

III.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 22.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a

$$|(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

De plus, il n'y a égalité que si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration

Considérons la fonction $f : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|u + \lambda v\|^2$.
$f(\lambda) = \|u\|^2 + 2\lambda\,(u|v) + \lambda^2 \|v\|^2 \geqslant 0$ quel que soit la valeur de λ (puisque le carré d'une norme est toujours positif).
Le discriminant de ce polynôme du second degré en λ est donc négatif.
$\Delta = 4\,(u|v)^2 - 4\,\|u\|^2 \|v\|^2 \leqslant 0$.
D'où l'on tire l'inégalité annoncée.
De plus, si $f(\lambda) = 0$, alors $\Delta = 0$ (l'équation possède une solution) et, ou bien $\|v\| = 0$ et u et v sont colinéaires, ou bien $\|v\| \neq 0$ et $f(\lambda_0) = 0$ pour $\lambda_0 = \dfrac{-\,(u|v)}{\|v\|^2}$.
On a donc $u + \lambda_0 v = 0$ donc u et v sont encore colinéaires.

Ex. 22.6 (Cor.) Écrire la définition de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.

III.3. Propriétés de la norme

Propriété 22.8

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a :

- ***Séparation*** : $\|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- ***Homogénéité*** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| . \|u\|$;
- ***Inégalité triangulaire*** : $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démonstration

Les deux premières propriétés sont évidentes. Démontrons l'inégalité triangulaire.
$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u|v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.
L'inégalité portant sur des carrés de nombres positifs et la fonction carrée étant bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'inégalité triangulaire.

Ex. 22.7 (Cor.)

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et d'une norme associée notée $\|.\|$.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$$

Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ le produit scalaire $(x_i|x_j)$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
Montrer que A est inversible et en déduire que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

III.4. Complément : angle géométrique entre deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$-\|u\|\,\|v\| \leqslant (u|v) \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

Si u et v sont deux vecteurs non nuls, on a donc

$$-1 \leqslant \frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1$$

Ceci permet de donner une définition de l'***angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls*** :

Définition 22.9 (Angle géométrique de deux vecteurs non nuls)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v d'un espace préhilbertien réel, on appelle ***angle géométrique formé par les vecteurs u et v*** le nombre

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right) \in [0;\pi]$$

Ceci parachève l'objectif que l'on se donnait en introduction du chapitre : nous avons construit toutes les notions élémentaires de la géométrie traditionnelle à l'aide des notions de vecteurs et de produit scalaire.
Ces dernières notions deviennent les notions fondamentales sur lesquelles peut être construite la géométrie traditionnelle.
L'avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est double :

- d'une part, il exhibe les ***propriétés algébriques*** (c'est-à-dire opératoires) nécessaires à la construction d'une géométrie ;
- d'autre part, il permet en conséquence de généraliser les notions géométriques à des espaces qui jusque-là sortaient de ce cadre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, etc...