

VI. Correction des exercices

Cor. 20.3 : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée au segment $[0; 1]$,

$$\left| e^1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \exp^{(k)}(0) \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \text{ car la fonction exp est majorée par } e \text{ sur } [0; 1].$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \exp^{(k)}(0) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

Cor. 20.4 : C'est encore l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction \exp sur le segment $[0; x]$ ou $[x; 0]$ suivant le signe de x . On en déduit comme dans l'exercice précédent que $\sum \frac{x^n}{n!}$

converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$.

Cor. 20.5 : La suite $u_n = \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ est 7-périodique, donc la suite extraite $\left(\sin\left((7n+1)\frac{2\pi}{7}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$. Donc,

Ou bien la suite u ne possède pas de limite,

Ou bien sa limite vaut $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$.

Dans les deux cas la série $\sum_{n \geq 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ **diverge grossièrement** puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Cor. 20.6 : Pour tout $n > 1$, $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x}$.

Donc $\ln(n+1) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$: la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

Cor. 20.7 : Soit $S_n(x) = \sum nx^n$ et $G_n(x) = \sum x^n$. G est une série géométrique et pour tout $x \neq 1$

$$S_n(x) = xG'_n(x) = x \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

En substituant x par $\frac{1}{2}$, on en déduit que $\sum \frac{n}{2^n}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

Pour la seconde, par linéarité, on obtient immédiatement la convergence de la série en substituant x par $\frac{j}{2}$ (où $j = \frac{2i\pi}{3}$) puis sa somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n} = \operatorname{Re} \left(\frac{j}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{j}{2}\right)^2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{8j \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^2}{49} \right) = \frac{-13}{49}.$$

Cor. 20.8 : On décompose $\frac{1}{x(x+1)}$ en éléments simples : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ d'où l'on déduit que la série proposée est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Cor. 20.9 : Pour tout entier $n > 1$, $0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ (E_1).

Or, d'après l'exercice 20.8, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)n}$ converge vers 1 en croissant (puisque l'on somme des termes positifs).

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est aussi une série croissante (puisque son terme général est positif) qui converge **si et seulement si elle est majorée** (par théorème de convergence monotone).

En utilisant l'encadrement (E_1), on a donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)n} \leq 1 + 1$$

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente et l'encadrement (E_1) permet d'affirmer que

$$1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

Cor. 20.10 :

- Si $r < 0$, en posant $p = -r$, $\frac{1}{n^r} = n^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la série est grossièrement divergente. De plus $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^p$ est croissante, le théorème précédent s'applique donc pour $-f$ qui est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} f(t) dt &\geq \sum_{k=1}^n f(k) \geq f(1) + \int_1^n f(t) dt \\ \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{1+p} - 1}{1+p} &\geq \sum_{k=1}^n k^p \geq 1 + \frac{n^{1+p} - 1}{1+p} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^p &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{1+p}}{1+p} \end{aligned}$$

- Si $r = 0$, $S_n = n$ diverge et... est équivalente à n en $+\infty$!
- Si $0 < r < 1$, la démonstration du premier s'adapte. Cette fois-ci, la série ne diverge pas grossièrement et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^r}$ est décroissante. On en déduit que

$$\frac{(n+1)^{1-r} - 1}{1-r} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} \leq 1 + \frac{n^{1-r} - 1}{1-r}$$

$$\text{et finalement que } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{1-r}}{1-r}.$$

- Si $r = 1$, on a vu que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$.
- Enfin, si $r > 1$, la même démonstration prouve que $S = \sum \frac{1}{n^r}$ converge. Cependant la détermination de la limite de cette somme est ardue et en fait on ne sait en général toujours pas la calculer, sauf pour les entiers r pairs.

Cor. 20.11 : La suite x est strictement positive, son logarithme est donc défini. Pour montrer que la suite x converge, il suffit donc d'après la proposition 20.12 de montrer que la série $\sum (\ln x_{n+1} - \ln x_n)$ converge. Or

$$\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 3 on obtient donc :

$$\ln x_{n+1} - \ln x_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série des $\frac{1}{n^2}$ étant convergente d'après l'exercice 20.10, la série $\sum (\ln x_{n+1} - \ln x_n)$ l'est aussi, donc la suite x tend vers un réel λ supérieur ou égal à 1 (par passage à l'exponentielle).

On en déduit que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 20.12 :

- S est à termes positifs et $\frac{1}{\sqrt{n^3-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc S est convergente.
- $-T$ est à termes positifs et $-\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc T est divergente.
- U est à termes positifs et $\frac{1}{n + \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc U est divergente.
- V est à termes positifs et à partir d'un certain rang $\ln n < n$ donc, à partir de ce rang, $\frac{1}{\sqrt{n \ln n}} > \frac{1}{n}$ qui est divergente. Donc V est divergente.
- W est à termes positifs et à partir d'un certain rang $e^n > n^5$ donc, à partir de ce rang, $n^3 e^{-n} < \frac{1}{n^2}$. Donc W est convergente.

Cor. 20.13 :

- 1) Posons $u_n = \frac{n^n}{(2n)!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{(2n)!}{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2(2n+1)}.$$
Or $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 + 1/n)) = \exp\left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
Donc, il existe un rang, à partir duquel, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$.
Donc la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

- 2) On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{1}{n!} \times \prod_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \geq \frac{1}{n!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Donc $S \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n!} = \exp(1/2)$.
De même, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{1}{n!} \times \prod_{k=1}^n \frac{n}{n+k} \leq \frac{1}{n!}$.
Donc $S \leq e$.

Cor. 20.14 :

- 1) La série $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divergente, donc S n'est pas absolument convergente.

2) On introduit la série $T(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.

$$T'_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

$$\text{Or } T_n(0) = 0 \text{ donc } S_n = T(1) = \int_0^1 T'_n(t) dt = \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

Il suffit donc de montrer que le reste intégral tend vers 0.

$$\text{Or } 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement S est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Cor. 20.15 : Soit $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ les séries extraites de S de rangs pairs et impairs. $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{-1}{2(2n+1)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- $S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2(2n+2)+1} + \frac{-1}{2(2n+1)+1} + S_{2n} = S_{2n} + \frac{4n+3-4n-5}{(4n+3)(4n+5)}$
donc la série $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante;
- On démontre de même que la série $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Les deux séries extraites sont donc adjacentes, donc convergentes et ont même somme.

Comme il s'agit des séries extraites de rangs pairs et impairs, la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est elle aussi convergente.

Pour obtenir la valeur de la limite, on utilise $\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$:

$$\text{on a donc } \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx \text{ car } \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

$$\text{c'est-à-dire } \left| \frac{\pi}{4} - S_n \right| \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Cor. 20.16 :

- 1) Si $|z| < 1$, alors $n^4 |z|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 < n^2 |z|^2 < \frac{1}{n^2}$. La série est alors absolument convergente.

Si $|z| \geq 1$, $n^2 |z|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, la série n'est donc pas absolument convergente puisque la série des modules est grossièrement divergente.

- 2) On note $T(z)$ la série géométrique $\sum z^n$.

$$T_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^n z^k. \text{ Or}$$

$$z T'_n(z) = \sum_{k=0}^n k z^k \text{ et } z^2 T''_n(z) + z T'_n(z) = z (z T'_n(z))' = \sum_{k=0}^n k^2 z^k = S_n(z).$$

En utilisant l'expression $T_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ et le fait que $z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n = \frac{z(1-z) + 2z^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}.$$

Cor. 20.17 : $a = 0,999\dots = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$ et

$$b = 0,142857\dots = \frac{142857}{10^6} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^6}} = \frac{1}{7}.$$

Cor. 20.18 :

- Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ un rationnel. L'algorithme de la division de p par q donne les chiffres du développement décimal de r .

Or les restes obtenus à chaque étape vérifient $R_n \in \llbracket 0; q-1 \rrbracket$ et sont les dividendes de l'étape suivante. Comme ils sont en nombre fini, il existe deux rangs distincts n_1 et n_2 tels que $R_{n_1} = R_{n_2}$. Et à partir de ces rangs, l'algorithme donnera une suite de restes identiques, donc des chiffres identiques dans le développement décimal, qui de ce fait est périodique.

- Réciproquement, soit $r \in \mathbb{R}$ un réel dont le développement décimal $r = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est périodique à partir d'un certain rang p de période $P \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} r &= \sum_{k=k_0}^{p-1} a_k 10^{-k} + \sum_{k=p}^{p+P-1} a_k \left[\sum_{i=0}^{+\infty} 10^{-k+iP} \right] \\ \text{Alors} \quad &= \sum_{k=k_0}^{p-1} a_k 10^{-k} + \sum_{k=p}^{p+P-1} a_k \left[10^{-k} \times \frac{1}{1 - 10^{-P}} \right] \\ &= \sum_{k=k_0}^{p-1} a_k 10^{-k} + \frac{10^P}{10^P - 1} \sum_{k=p}^{p+P-1} a_k 10^{-k} \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre que r est un nombre rationnel.

Cor. 20.19 :

- 1) On obtient immédiatement $W_0 = W'_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = W'_1 = 1$.
- 2) On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ dans l'une des deux intégrales :

$$W_n = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du = W'_n.$$

- 3) Pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \sin(x) dx \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx \\ &= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \end{aligned}$$

Donc pour $n \geq 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.