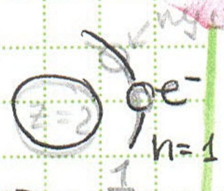
Задачи по атомке 2015.

1

I – задачи под номером 1 из разных вариантов

1) Найти разницу ионизаций водородоподобных ионов двух изотопов гелия $_3He^+$ и $_4He^+$.

Ионизация: $I = -E_n$; $Z_{He} = 2$



$$E_n = (-Z^2 Ry/n^2)\cdot\left(1 - \frac{m_{e^-}}{M_я}\right)$$ ← изотопический сдвиг.

заряд ядра, Ридберг, масса электрона

$$\Delta I = \left|E_{_3He^+} - E_{_4He^+}\right| = \left|\frac{Z^2 Ry}{n^2}\left[1 - \frac{m_{e^-}}{3m_p} - 1 + \frac{m_{e^-}}{4m_p}\right]\right| =$$

квантовое число уровня, масса протона

$$= \frac{2^2\cdot Ry}{1^2}\left[\frac{-4m_{e^-} + 3m_{e^-}}{12m_p}\right] = \frac{4Ry}{12}\,\frac{m_e}{m_p} = \boxed{\frac{Ry}{3}\,\frac{m_e}{m_p}}$$

$Ry = 13{,}595$ эВ; $\frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1836} \approx 5.4\cdot10^{-4}$

$$\boxed{\Delta I \approx 24{,}48\cdot10^{-4}\ эВ}$$

Нашел ошибку? Знаешь правильное решение? Пиши DR4587@yandex.ru

I ② Оценить количество квантов равновесного эл-маг излучения с энергией $\hbar\omega > \hbar\omega_0 = 1\,эВ$ в единице объема при $T = 300\,°K$

$$\frac{\hbar\omega_0}{kT} \approx \frac{1\,эВ}{8.6\cdot 10^{-5}\,эВ/к \cdot 300к} \approx \boxed{38{,}5 \gg 1} \Rightarrow$$ можно использ. формулу Вина

Ф. Вина $\rho_\omega = \dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\, e^{-\hbar\omega/kT}$

Тогда $n_0(T) = \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \rho_\omega/\hbar\omega \, d\omega =$

$$= \int\limits_{\omega_0}^{\infty} \overbrace{\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\, e^{-\hbar\omega/kT}}^{\gamma} d\omega$$

(*) Интеграл берется по частям: два раза

$$\int u v' dx = uv - \int v u' dx$$

$$\gamma = \int \underbrace{-\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{kT}{\hbar}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{-\hbar}{kT}\, e^{-\hbar\omega/kT}}_{v'} d\omega = -\frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3 \hbar}\cdot e^{-\hbar\omega/kT} -$$

$$-\underbrace{\int e^{-\hbar\omega/kT} \cdot \frac{2\omega kT}{\pi^2 c^3 \hbar}\, d\omega}$$ теперь этот интеграл берем по частям

$$\int \underbrace{\frac{2\omega}{\pi^2 c^3}\frac{kT}{\hbar}\cdot\frac{(-kT)}{\hbar}}_{u_2} \underbrace{\left(-\frac{\hbar}{kT}\right) e^{-\hbar\omega/kT}}_{v_2'} d\omega = -\frac{2\omega}{\pi^2 c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^2 e^{-\hbar\omega/kT} -$$

$$-\underbrace{\int -\overbrace{\frac{2}{c^3}\left(\frac{kT}{\pi\hbar}\right)^2}^{A} e^{\overbrace{-\hbar\omega/kT}^{=\alpha}} d\omega} ; = -\frac{2}{c^3}\left(\frac{kT}{\pi\hbar}\right)^2 \left(-\frac{kT}{\hbar}\right) e^{-\hbar\omega/kT}$$

Интеграл: $A \int e^{+\alpha\omega} d\omega$

Акуратно собираем это:

$$\left[-\omega^2\left(\frac{kT}{\pi^2 c^3\hbar}\right)e^{-\hbar\omega/kT}+\left(+\frac{2}{\pi^2c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^2\omega e^{-\hbar\omega/kT}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3e^{-\hbar\omega/kT}\right)\right]=\gamma(\omega)$$

Т.О. $n_0(T)=\gamma\Big|_{\omega_0}^{\infty}$ Так $\gamma(\infty)\to 0$ то

$n_0(T)\approx-\gamma(\omega_0)$; $\omega_0 = 1\,эВ/\hbar$

$\hbar = 6{,}6\cdot10^{-16}$ эВ·с ; $T=300\,K$ $k=8{,}6\cdot10^{-5}$ эВ/К

Арифметика: $\frac{kT}{\hbar}=4\cdot10^{13}\,\frac{1}{c}$ $\frac{1}{\pi^2c^3}=\cancel{3{,}4\cdot10^{-12}}$ $3{,}7\cdot10^{-33}$ $\left[\frac{1}{см/с}\right]^3$

ошибка

Арифметич. расчеты неправильные

$\to\gamma(\omega_0)=-2{,}3\cdot10^{30}\cdot120\cdot e^{+38{,}7})+(6{,}8\cdot16\cdot10^{14}e^{+38{,}7}\cdot1{,}5\cdot10^{15}$

$+(6{,}8\cdot10^{-12}\cdot5{,}9\cdot10^{40})e^{+38{,}7}=$ $e^{38{,}7}\approx6{,}4\cdot10^{16}$

$=e^{38{,}7}\left[-2{,}8\cdot10^{32}+10^{31}+4\cdot10^{29}\right]\approx$

$\approx-2{,}7\cdot10^{32}\cdot6{,}4\cdot10^{16}\approx-1{,}7\cdot10^{49}$ см$^{-3}$

$\boxed{\cancel{n_0(T)\approx1{,}7\cdot10^{49}\text{ см}^{-3}}}$ Ответ (неверный)

$\boxed{n_0(T)\approx1{,}88\cdot10^{28}\text{ см}^{-3}}$ ← пересчитанный

3) Оценить число квантов черного излучения в единице объема при $T = 1$ эВ в диапазоне частот $\hbar\omega < \hbar\omega_0 = 0,1$ эВ. $\Rightarrow \omega_0 = \frac{0,1 \text{ эВ}}{\hbar}$

$$\frac{\hbar\omega_0}{T} = \frac{0,1 \text{ эВ}}{1 \text{ эВ}} = 0,1 \ll 1$$ т.е используем ф-лу Рэлея-Джинса

Тогда: $n_0(T) = \int\limits_0^{\omega_0} \rho_\omega / \hbar\omega \, d\omega$ $\boxed{\rho_\omega(T) \approx \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT}$

$$n_0(T) = \int\limits_0^{\omega_0} \frac{\omega}{\pi^2 c^3} \frac{kT}{\hbar} d\omega = \frac{\omega_0^2}{2} \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{kT}{\hbar}$$

$\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16}$ эВ·с

$$\approx \frac{0,1^2}{2} \underbrace{\boxed{\frac{1}{\pi^2 c^3}}}_{\approx 3,7 \cdot 10^{-33} \frac{c^3}{\text{см}^3}} \hbar^{-3} \underbrace{kT}_{T = 1 \text{ эВ}} \approx 5 \cdot 10^{-3} \; 3,7 \cdot 10^{-33} \cdot [6.6 \cdot 10^{-16}]^{-3}$$

$$\approx 3.4 \cdot 10^{45} \cdot 1,7 \cdot 10^{-35} \approx \boxed{5,78 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{см}^{-3}}}$$

Ответ

I

4 Исходя из формулы Планка для равновесного эл-маг излучения ρ_ω, получить зависимость объемной плотности энергии излучения от температуры. (т.е закон Стефана-Больцмана)

$$U(T) = \int_0^\infty \rho_\omega(T)\, d\omega; \qquad \underbrace{\rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\,\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}}_{\text{ф-ла Планка.}}$$

$$U(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3\, d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}, \text{ пусть } \frac{\hbar\omega}{kT} = x$$

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{\hbar}{kT} \qquad d\omega = \frac{kT}{\hbar}\, dx \Rightarrow$$

$$U(T) = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\underbrace{\overbrace{\int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}}^{=\pi^4/15}}_{} =$$

этот интеграл написан в конце задачника в разделе справочные данные

ответ

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{15}\,\frac{k^4\, T^4}{c^3\hbar^3}}$$ – что соответствует закону

Стефана-Больцмана $U(T) = \alpha T^4\ \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$

где $\alpha = \dfrac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} \approx 7{,}57\cdot 10^{-15}\ \dfrac{\text{эрг}}{\text{см}^3 K^4}$

5) Оценить число фотонов равновесного эл-маг излучения в единице объема при температуре 300 K и 3000 K.

Ф-ла Планка $\rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$; $\omega\in[0,\infty)$

$$n(T) = \int_0^\infty \frac{\rho_\omega}{\hbar\omega}\,d\omega = \int_0^\infty \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\,d\omega =$$

Пусть $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$ $\quad \frac{dx}{d\omega} = \frac{\hbar}{kT}$ $\quad d\omega = \frac{kT}{\hbar}dx$

$$= \frac{k^3T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^x-1}}_{\text{см. справ. данные } \approx 2,405} \approx \frac{2,4\, k^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3}T^3 =$$

$$\approx 19,93\, T^3 \approx 20\, T^3 \text{ см}^{-3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n(T=300) &= 20\cdot 2,7\cdot 10^7 = 5,4\cdot 10^8 \text{ см}^{-3} \\ n(T=3000) &= 20\cdot 2,7\cdot 10^{10} = 5,4\cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}\end{aligned}}$$

I

⑥ Исходя из формулы Планка для спектральной плотности энергии равновесного эл-маг излучения ρ_ω, получить связь между частотой, соотв-ей максиму ф-ии ρ_ω и температурой.

(т.е Закон смещения Вина $\hbar\omega_{max} = 2,822\, kT$)

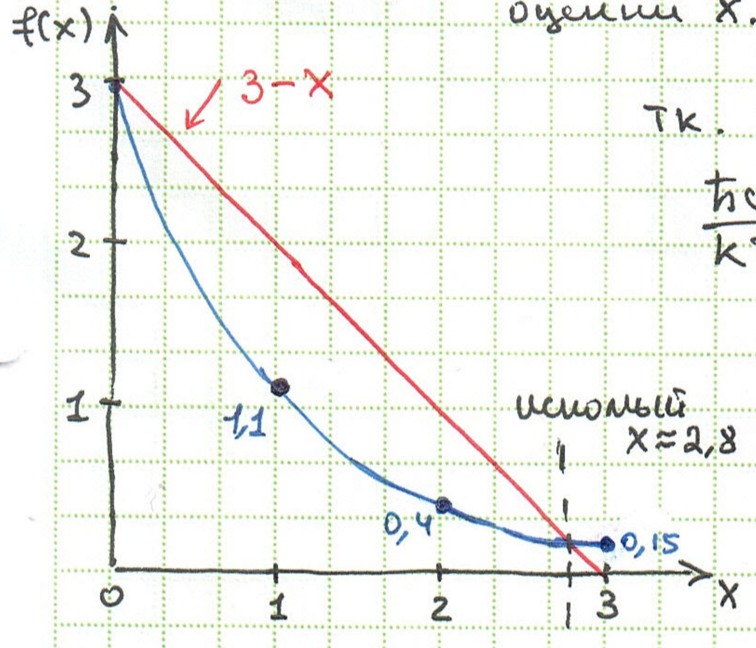
$$\rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}; \quad \frac{d\rho_\omega}{d\omega} = 0 \text{ – условие максима}$$

$$\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{3\omega^2}{e^{\hbar\omega/kT}-1} - \frac{\hbar\omega^3}{kT}\frac{e^{\hbar\omega/kT}}{[e^{\hbar\omega/kT}-1]^2}\right) = 0$$

при $\hbar\omega/kT = x$ имеем:

$$3 - x\frac{e^x}{e^x-1} = 0; \quad (3-x)e^x - 3 = 0; \Rightarrow$$

(*) $3 - x = 3e^{-x}$ – построим их графики для оценки x.



Т.к. $x \approx 2,8$ то

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = 2,8$$

$$\boxed{\hbar\omega_{max} = 2,8\, kT}$$

Закон смещения Вина.

(*) Или корень x_0 ур-ия $3 - x = 3e^{-x}$ ищем подбором $x_0 = 3 + \delta$, $\delta \ll 1 \Rightarrow x_0 = 2,8$

7) Исходя из ф-лы Планка для спектральной плотности эл-маг излучения ρ_ω с температурой T, получить распределение по энергиям в «красной» и «фиолетовой» частях спектра.

При каких условиях справедливы соответ-ие распределения?

«фиолетовая» $\lambda_\phi < 3500\,\mathring{A}$; $\omega_\phi > 5.4\cdot 10^{15}$ Гц

усл. выс. частот $\frac{\hbar\omega}{k} \gg T \Rightarrow \frac{\hbar\omega}{k} \approx 41000 \gg T$ $\quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

т.е при $\boxed{T \ll 41000\,K}$ справедлива ф-ла Вина

$$\rho_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT}; \quad u(T) = \int_{\omega_\phi}^{\infty} \rho_\omega \, d\omega =$$

$$= \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_{x_\phi}^{\infty} \underbrace{x^3 e^{-x} dx}_{\text{по частям}} \quad x_\phi = \frac{\hbar\omega_\phi}{kT} \Leftarrow \frac{\hbar\omega}{kT} = x$$

$\int u v' dx = uv - \int v u' dx$

$$\int \underbrace{-x^3}_{u} \underbrace{-e^{-x}}_{v'} dx = -x^3 e^{-x} - 3\int \overbrace{x^2}^{u} \overbrace{(-e^{-x})}^{v'} dx = -x^3 e^{-x} -$$

$$-3\left(x^2 e^{-x} + 2\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{(-e^{-x})}^{v'} dx \right) = -x^3 e^{-x} - 3\left(x^2 e^{-x} + \right.$$

$$\left. + 2\left[x e^{-x} - \int e^{-x} dx \right] \right) = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} -$$

$$- 6 x e^{-x} - 6 e^{-x} dx = \gamma(x)$$

$$u_k(T) = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \gamma(x) \Big|_{x_\phi = \frac{\hbar\omega_\phi}{kT}}^{\infty} = \overbrace{\frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}}^{= 7\cdot 10^{-4} T^4} \left(-\gamma\left(\underbrace{\frac{\hbar\omega_\phi}{kT}}_{= \frac{41000}{T}} \right) \right) =$$

$$= \boxed{7\cdot 10^{-4} T^4 \left(-\gamma\left(\frac{4\cdot 10^4}{T} \right) \right)}$$

I ⑦ продолжение

«красная» ? $\lambda_k > 7500 \text{Å}$ $\omega_k < 2{,}5\cdot10^{15}$ Гц

$$\frac{\hbar\omega_k}{kT} \approx \frac{19000}{T} \gg 1 \quad \text{при} \quad \boxed{T \ll 19000K}$$

справедлива ф-ла Вина, т.е. $U_k(T) = 7\cdot10^{-4}T^4$

$$U_k(T) = \frac{k^4T^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^{x_k} x^3 e^{-x}dx = \frac{k^4T^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\left(-\gamma(x)\Big|_0^{x_k}\right) =$$

$$= 7\cdot10^{-4}\,T^4\left(+\gamma(x)\Big|_{x=0} - \gamma(x)\Big|_{x=x_k=\frac{\hbar\omega_k}{kT}=\frac{19000}{T}}\right) =$$

$$= \boxed{7\cdot10^{-4}\,T^4\left(\gamma(0)-\gamma\left(\frac{19000}{T}\right)\right)}$$

⊛ Если считать что $\boxed{T \gg 19000K}$ то справедлива ф-ла Рэлея Джинса: $\rho_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}kT$

$$U_k(T) = \frac{kT}{\pi^2c^3}\,\frac{\omega^3}{3}\Big|_0^{\omega_k} \approx \boxed{T\cdot10^{-37}\cdot(2{,}5\cdot10^{15})^3}$$

8 Найти заряд ядра водородоподобного иона Z, резонансный переход в котором $(n=2 \to n'=1)$ характеризуется энергией достаточной для вырывания единственного электрона из Li^{2+} и сообщения ему кинетической энергии $E_k = 3Ry$ $(Ry = 13,6$ эВ$)$

$$E_k = \hbar\omega - E_{вых}; \qquad \hbar\omega_{mn} = E_m - E_n$$

$$\hbar\omega_{mn} = Ry\, Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \to m$$

$$E_{n_{Li}} = -\frac{Z^2 Ry}{n^2} = -9Ry \qquad Li \; e^- \quad Z=3 \;\; n=1$$

$$\hbar\omega_1 = 3Ry + 9Ry = 12Ry$$

$$\hbar\omega = Ry\, Z^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)$$

$$12Ry = Z^2 \frac{3Ry}{4} \Rightarrow 16 = Z^2 \Rightarrow \boxed{Z=4}$$

I

(9) Водородоподобный ион He^+ находится в основном состоянии. Найти кинетическую энергию единственного электрона в этом ионе после поглощения фотона с длиной волны соответствующей α-линии серии Лаймана в водородоподобном ионе бериллия Be^+.

постоянная Ридберга $R = 1{,}1 \cdot 10^5$ см$^{-1}$

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda} = Z_{Be}^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}_{\text{Ф-ла Бальмера}}$$

He^+ $\}e^-$ $n=1$

$Z = 2$

$n = 1$ – серия Лаймана

$m = 2$ – α линия

Be^+ $\}e^- e^-$ $\}e^-$

$Z = 4$ $n=1$ $n=2$

$$\frac{1}{\lambda} = 16 \cdot 1{,}1 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = \frac{16 \cdot 1{,}1 \cdot 3}{4} \cdot 10^5 =$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{13{,}2} 10^{-5} \text{см} = 756 \text{ нм}$$

$$T = \hbar\omega - E_{вых} = \frac{\hbar 2\pi c}{\lambda} - \frac{Z_{He}^2 Ry}{\underset{1=}{n^2}} \Rightarrow$$

$$T = 165 - 4 \cdot 13{,}6 = 165 - 54 = \boxed{111 \text{ эВ}}$$

Ответ

1 Найдите разность величин волн де Бройля, вычисленным по релятивистким и нерелятивистким формулам для электрона с кинетической энергией равной удвоенной энергии покоя.

Соотношение де Бройля $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ $\Rightarrow$

$\lambda = \frac{h}{p}$ $\quad \vec{p} = m\vec{v} / \sqrt{1-(v/c)^2}$; $\quad \vec{p} = m\vec{v}$

длина волны де Бройля   релятив.   нерелятив

$T = \frac{p^2}{2m}$; $\quad E_n = mc^2$; $\quad p = \sqrt{\frac{T}{c^2}(T+2mc^2)}$

нерелят   релят

$$\Delta\lambda = h\left(\frac{1}{p_p} - \frac{1}{p_H}\right) = h\left(\frac{1}{\sqrt{T2m}} - \frac{c}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}\right)$$

учитывая что $T = 2mc^2$ $\Rightarrow$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{\sqrt{4m^2c^2}} - \frac{hc}{\sqrt{4m^2c^4+4m^2c^4}} = \boxed{\frac{h}{2mc}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

2) Определить минимальную длину волны де Бройля электрона отдачи, возникающего при комптоновском рассеянии на нем γ-кванта с $\hbar\omega_0 = 1$ МэВ. До рассеяния электрон покоился.

$$T = \frac{\hbar\omega_0}{1 + \dfrac{mc^2}{\hbar\omega_0(1-\cos\theta)}} = \frac{1\text{ МэВ}}{1 + \dfrac{1}{2(1-\cos\theta)}}$$

$mc^2 = 0.51\ \frac{\text{МэВ}}{c^2}$

$$T = \frac{1\text{ МэВ}\cdot 2(1-\cos\theta)}{2(1-\cos\theta)+1} = \frac{3-\cos\theta}{4-\cos\theta}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T^2 + \underbrace{2mc^2}_{1\text{ МэВ}!}T}} = \frac{hc}{\sqrt{\dfrac{3-\cos\theta}{4-\cos\theta}\left(\dfrac{7-2\cos\theta}{4-\cos\theta}\right)}} =$$

$$= \frac{hc\ (4-\cos\theta)}{\sqrt{21 - 6\cos\theta - 7\cos\theta + 2\cos^2\theta}} = \frac{\hbar c\,(4-\cos\theta)}{\sqrt{21 - 13\cos\theta + 2\cos^2\theta}} =$$

$$= \frac{\hbar c\,(4-\cos\theta)}{\sqrt{\sqrt{21}^2 - 13\cos\theta + \sqrt{2}^2\cos^2\theta}} =$$

$h = 4.14\cdot 10^{-21}\ \frac{\text{МэВ}}{c}$

$\sqrt{21}\cdot\sqrt{2}\cdot 2 = \sqrt{168}\ ;\ 13^2 = 169 \Rightarrow$

$$\lambda \approx \frac{hc\ (4-\cos\theta)}{\sqrt{21} - \sqrt{2}\cos\theta} = \frac{4hc - \overbrace{hc}^{=1{,}2\cdot 10^{-10}}\cos\theta}{\sqrt{21} - \sqrt{2}\cos\theta} \Rightarrow$$

λ_{max} при $\cos\theta = 1$

$$\Rightarrow \lambda_{max} \approx \frac{3\cdot 1{,}2\cdot 10^{-10}}{\underset{\approx 4{,}6}{\sqrt{21}} - \underset{\approx 1{,}4}{\sqrt{2}}} = \boxed{1{,}2\cdot 10^{-10}\ \text{см}}$$

II

② примечание

Можно проще: (но по-моему так малость не корректно)

Из $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T^2 + \underbrace{2mc^2}_{1\,\text{МэВ}} T}} \Rightarrow$ что

λ. максимальна при $T \to 0$

а $T \to 0$ $\left[T = \frac{1\,\text{МэВ}}{1 + \frac{1}{2(1-\cos\theta)}} \right]$ при $\cos\theta \to 1$

т.е. $\lambda_{max} = \frac{hc\,(4-\cos\theta)}{\sqrt{21 - 13\cos\theta - 2\cos^2\theta}}\Big|_{\cos\theta = 1} =$

$= \frac{3hc}{\sqrt{10}} \approx hc = \boxed{1{,}2 \cdot 10^{-10}\,\text{см.} = 1{,}2\,\text{пм}}$

II

3 Определить де Бройлевские длины волн электрона и протона при энергии $E = 10$ МэВ.

кинетическая энергия.

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad p = \frac{1}{c}\sqrt{E(E+2mc^2)}$$

Электрон: $m_e c^2 \approx 0{,}5$ МэВ $\Rightarrow$ $p_e \approx \frac{E}{c}$

$$\boxed{\lambda_e = \frac{hc}{E} = 1.2\cdot 10^{-11} \text{ см}}$$

Протон: $m_p c^2 \approx 1$ ГэВ $\Rightarrow$ $p_p = \frac{1}{c}\sqrt{2 m_p c^2 E}$

$$\boxed{\lambda_p = \frac{hc}{\sqrt{2\cdot 10\cdot 1000}} = \frac{1.2\cdot 10^{-10}}{\sqrt{2}\cdot 10^{2}} = 0{,}9\cdot 10^{-12} \text{ см}}$$

4 Исходя из соотношения неопределенностей оценить минимальную энергию гармонического осциллятора (энергию нулевых колебаний)

т.е. $\Delta p \sim p$ $\quad \Delta x \sim x$ $\quad$ соотнош. неопр-ей $xp \sim \hbar$

$$E = T + U; \quad T = \frac{p^2}{2m} \quad U = \frac{kx^2}{2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}; \quad p = \frac{\hbar}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2};$$ Энергия минимальна

когда $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$; $\quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{-\hbar^2}{mx^3} + m\omega^2 x = 0$

$$m\omega^2 x = \frac{\hbar^2}{mx^3} \qquad m^2\omega^2 x^4 = \hbar^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$ ← амплитуда нулевых колебаний

$$E(x_0) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\omega\hbar}{2} = \hbar\omega;$$

$$\boxed{E \approx \hbar\omega}$$

5. Определить кинетическую энергию электрона и протона если де Бройлевская длина волны каждого равна $\lambda_D = 10^{-13}$ см

$$\lambda_D = \frac{h}{p} \qquad p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2mc^2)}$$

Электрон: $m_e c^2 \approx 0{,}5$ МэВ

$$\lambda_D = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}} \; ; \quad \sqrt{T^2 + \underbrace{2mc^2}_{1\,МэВ} T} = \frac{\overbrace{hc}^{1.2\cdot10^{-10}}}{\lambda_D} \approx 1.2\cdot10^3$$

$$\Rightarrow 1\,МэВ \cdot T \ll T^2 \Rightarrow \boxed{T_{e^-} \approx 1.2\cdot10^3\,МэВ}$$

Протон: $m_p c^2 \approx 1$ ГэВ ; $\sqrt{T^2 + \underbrace{2m_pc^2}_{1000\,МэВ} T} = 1.2\cdot10^3$

$$T^2 + 2m_pc^2\,T - 1{,}4\cdot10^6 = 0$$

$$T = \frac{-2m_pc^2 \pm \sqrt{(2m_pc^2)^2 + 4\cdot1.4\cdot10^6}}{2} = \frac{-2000 \pm \sqrt{4\cdot10^6 + 5.6\cdot10^6}}{2} =$$

$$= \frac{-2000 \pm \sqrt{9.6\;10^6}}{2} = \frac{-2000 + 3000}{2} = \boxed{500\,МэВ}$$

6 Исходя из соотношения неопределенностей оценить энергию основного состояния водородоподобного иона с зарядом ядра Z.

радиус иона

$$\Delta x \sim R \qquad \Delta p \sim p \quad \Rightarrow \quad p \sim \hbar / R$$

(*) $L = pR = n\hbar;\ n = 1$

$$E = \underbrace{-\frac{Ze^2}{R}}_{U} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{T} = -\frac{Ze^2}{R} + \frac{\hbar^2}{2mR^2};$$

Усл. равновесия на круговой орбите: $\overbrace{\frac{p^2}{mR}}^{\text{центробежная сила}} = \underbrace{\frac{Ze^2}{R^2}}_{\text{з. Кулона}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{mR} = Ze^2 \qquad R = \frac{\hbar^2}{Ze^2 m}$$

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{\hbar^2} + \frac{Z^2 e^2 m}{2\hbar^2} = \boxed{-\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2}}$$

(*) $E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{Ry Z^2}{n^2}$

II Не понимаю этой задачи, написала всё что смогла придумать/найти по теме.

7) Исходя из соотношения неопределенностей оценить минимально возможную область локализации частицы с массой m, находящуюся в потенциале. $V = \frac{kx^2}{2}$.

$$\Delta x \, \Delta p \sim \hbar; \quad \Delta p \sim p \sim \hbar / \Delta x$$

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2};$$

$$V(x_0 + \Delta x) = \frac{kx_0^2}{2} + \Delta x \, k x_0 + \Delta x^2 k;$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} + \frac{kx_0^2}{2} + \Delta x \, k x_0 + \Delta x^2 k$$

$$\frac{d\Delta E}{d\Delta x} = 0 = -\frac{\hbar^2}{m\Delta x^3} + kx_0 + 2\Delta x \, k = 0$$

$$x_0 = \frac{\hbar^2}{km\Delta x^3} - 2\Delta x \approx \frac{\hbar^2}{km\Delta x^3}$$

С др. стороны: $\frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} \leq \frac{kx_0^2}{2} \Rightarrow \min x_0$

$$\frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} \approx \frac{k \, \hbar^2}{k \, 2m \, \Delta x^3} \cdot \frac{\hbar^2}{km\Delta x^3}$$

$$\Delta x^4 \approx \frac{\hbar^2}{km}; \quad \Delta x = \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{km}};$$

$$x_{0\,min} = \frac{\hbar^2 \sqrt[4]{km}^3}{km \sqrt{\hbar}^3}$$

III

1) Конфигурация атома имеет вид $1s^2 2s^2 2p^4$ для основного состояния найти величину эфективного магнитного момента $|\vec{M}_{eff}|$, определить магнитные свойства такого атома в слабом магнитном поле.

фактор Ланде   магнетон Бора $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$

$$|\vec{M}_{eff}| \equiv \langle \mu_J \rangle = g\, \mu_B \sqrt{J(J+1)}$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Конфигурации $1s^2 2s^2 2p^4$ соответств. осн. терм

$^3P_2$ т.е. $S = 1$ $L = 1$ $J = 2$

$$g = 1 + \frac{\cancel{2}\cdot 3 + \cancel{1}\cdot\cancel{2} - \cancel{1}\cdot\cancel{2}}{2\cdot 2\cdot \cancel{2}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\langle \vec{\mu}_J \rangle = \frac{7}{4}\, \mu_B \sqrt{2\cdot 2} = \frac{7}{2}\, \mu_B$$

$$\mu_B = 927\cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс} = 5,79 \text{ эВ/Гс}$$

$$\boxed{\langle \vec{\mu}_J \rangle = 3,2\cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}}$$

① продолжение

Если поместить атом в слабое магнитное поле, слабое на столько, чтобы взаимодействие моментов μ_L и μ_S между собой было <u>значительно больше</u> их взаимодействия с магнитным полем.

В таком случае атом будет вести себя как магнитный диполь с моментом равным $\vec{\mu}_L$

Проекция магнитного момента атома μ_{J_H} на направление внешнего маг. поле $\vec{H}$:

$$\mu_{J_H} = \mu_B g\, m_J = \langle \mu_J \rangle m_J / \sqrt{J(J+1)};$$

$$m_J = J, J-1, \ldots, -J;$$

В данном случае $^3P_2$ $J=2 \Rightarrow m_J = -2; -1, 0, 1, 2.$

Т.Е количество возможных ориентаций относительно направления маг. поля $2J+1$.

(Терм $^3P_2$ расщепится на $2J+1=5$ уровней)

2 В модели Бора определить радиусы орбит, уровни энергии и потенциал ионизации водородоподобного иона лития.

Условие равновесия на круговой орбите:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2};$$ Определение момента импульса: $L \equiv mvr$

$$mv^2 = Ze^2; \Rightarrow Lv = Ze^2 \Rightarrow v = Ze^2/L$$

$$r = \frac{L}{mv} = \frac{L^2}{mZe^2}; \quad E = \underbrace{-\frac{Ze^2}{r}}_{U} + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{T} = -\frac{Z^2e^4m}{2L^2}$$

При переходе на соседнюю орбиту энергия атома изменяется на $\hbar\omega$: $\Delta E = \hbar\omega = \frac{Z^2me^4}{L^3}\Delta L$

$$\omega = v/r \Rightarrow \hbar\frac{v}{r} = \frac{Z^2me^4}{L^3}\Delta L$$

$$\hbar\frac{Ze^2\cdot mZe^2}{L\cdot L^2} = \frac{Z^2me^4}{L^3}\Delta L \Rightarrow \Delta L = \hbar \Rightarrow$$

$\Rightarrow L = n\hbar + const$, n – целое $0 \le const \le \hbar$

В модели Бора $const = 0 \Rightarrow L = n\hbar \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{Z^2e^4m}{2\hbar^2n^2} = -Ry\, Z^2/n^2;$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mZe^2}; \quad I = E_\infty - E_n = -E_n;$$

Для водородоподобного иона ${}_3Li^{++}$ $Z=3$

$$I = -E_n; \quad E_{n=1} = 9\cdot Ry; \quad r_1 = \frac{\hbar^2}{m9e^2};$$

3 В рамках модели Бора определить радиусы орбит, уровни энергий и потенциал ионизации водородоподобного иона Бериллия.

см решение 2 на стр 22.

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2 n^2} = -Ry\,\frac{Z^2}{n^2}$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mZe^2}; \quad I = -E_n \qquad Ry \approx 13.6 \text{ эВ}$$

Для ${}_4Be^{+++}$ $\quad Z = 4$, $n = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} E &= -16\,Ry \approx -217 \text{ эВ} \\ I &= 16\,Ry \approx 217 \text{ эВ} \end{aligned}}$

$$\boxed{r = \frac{\hbar^2}{m4e^2} = \frac{a_0}{4}}$$

$a_0 \approx 5.29 \cdot 10^{-9}$ см

4 В рамках модели атома Бора определить величину изотопического сдвига потенциалов ионизации трех изотопов водорода.

^1H $\quad$ ^2H дейтерий $\quad$ ^3H тритий $\qquad I \approx Ry\,(1 - m/M)$ (*)

$$I_2 - I_1 \approx Ry\left(\frac{m_e}{m_p} - \frac{m_e}{2m_p}\right) = \boxed{Ry\,\frac{m}{2m_p} \approx 2.7\cdot10^{-4}\,Ry}$$

$$I_3 - I_1 \approx Ry\left(\frac{m_e}{m_p} - \frac{m_e}{3m_p}\right) = \boxed{Ry\,\frac{2m_e}{3m_p} \approx 3.6\cdot10^{-4}\,Ry}$$

(*) $\frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1800} \approx 5{,}4\cdot10^{-4}$

(*) см стр 1 номер 1 – подробное решение аналогичной задачи.

(5) Мюонный атом водорода представляет из себя систему, состоящую из протона и отрицательно заряженного мюона ($m_\mu = 207 m_e$). $Z=1$ $n=1$

В рамках модели Бора определить радиусы разрешенных орбит, скорости на них, а также энергии стационарных состояний системы.

Определить длину волны резонансной линии. + см (2) на (22)

Условие равновесия на круговой орбите:

$$\frac{m_\mu v^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}\ ; \quad n\hbar = m_\mu v r \Rightarrow \boxed{r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{Z m_\mu e^2} = \frac{a_0}{207}}$$

$$\boxed{v_n = \frac{Ze^2}{n\hbar} = \frac{e^2}{\hbar}}\ ; \quad \boxed{E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_\mu}{2\hbar^2 n^2} = -Ry\,207\ ;}$$

$$\boxed{I = Ry \cdot 207;} \qquad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}\ ; \quad \hbar\omega_{mn} = \Delta E_{mn}$$

$$\omega_{mn} = \frac{207 Ry Z^2}{\hbar}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\ ; \quad (m \to n)$$

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{207 Ry}{\hbar 2\pi c} Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\ ;$$ Резонанс. линия $2 \to 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Ry\,207}{\hbar\, 2\pi c}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\hbar\, 2\pi c}{207\, Ry}\,\frac{4}{3}}$$

III

6 Атом позитрония представляет собой систему состоящую из электрона e^- и позитрона e^+. $Z=1$ $n=1$

В рамках модели Бора определить радиусы разрешённых орбит, а так же энергии стационарных состояний системы.

Определить длину волны резонансной линии.

Т.к. массы e^- и e^+ равны, то следует учитывать конечность массы ядра для этого вместо $m=m_e$ следует использовать приведённую массу $m = \dfrac{m_{e^-} m_{e^+}}{m_{e^-} + m_{e^+}}$ $\Rightarrow$ т.к $m_{e^+} = m_{e^-}$

$m = \dfrac{m_e}{2}$; [См. задачу 2 на стр 22]

$$\begin{cases} \dfrac{m v^2}{r} = \dfrac{Z e^2}{r^2} \\ n\hbar = m v r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_n = \dfrac{2\hbar^2 n^2}{Z m_e e^2} = 2 a_0} \quad \boxed{v_n = \dfrac{Z e^2}{n\hbar} = \dfrac{e^2}{\hbar}}$$

$$\boxed{E_n = -\dfrac{Z^2 e^4 m_e}{4\hbar^2 n^2} = -Ry/2} \quad \boxed{I = Ry/2}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \qquad \hbar\omega_{mn} = \Delta E \qquad \frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{Ry\, Z^2}{4\hbar\pi c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad m \to n$$

$$2 \to 1: \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{Ry}{4\pi c\hbar}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{8\hbar\pi c}{3 Ry}}$$

чего?

(7) Сколько длин волн де Бройля укладывается на длине пятой ($n=5$) орбиты электрона в водородоподобном ионе с зарядом Z.

* Длина окружности стационарной орбиты должна быть равна целому числу волн де-Бройля:

λ де Бройля для электрона: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_n}$;

$$v_n = \frac{Ze^2}{n\hbar}; \quad r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{m_e Z e^2} = \frac{n^2 a_0}{Z}$$ ← Вывод этих формул см задача (2) на стр (22)

$$\lambda_n = \frac{h n \hbar}{m_e Z e^2} = \frac{2\pi \hbar^2 n}{m_e Z e^2};$$

$l_n = 2\pi r_n$; – длина орбиты

$$\boxed{N = \frac{l_n}{\lambda_n} = \frac{2\pi n^2 \hbar^2}{m_e Z e^2} \cdot \frac{m_e Z e^2}{2\pi \hbar^2 n} = n = 5}$$

III Это решение верно для любых n, l, m, только при $l=0$ $L_x = L_y = L_z = 0$

⑧ Стационарное состояние электрона в атоме H характеризуется волновой функцией с квантовыми числами $n=3$ $l=2$ $m=-2$. Какие физ. величины принимают в этом состоянии точные значения и чему они равны?

l – орбитальное кв.ч.
m – магнитное квант. ч.
n – радиальное кв. число

$$\Psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

СЗ L^2 и L_z являются решениями уравнений

$$\hat{L}^2 Y_{lm} = L^2 Y_{lm} \qquad \hat{L}_z Y_{lm} = L_z Y_{lm}$$

Они имеют следующие дискретные решения: ⊛

s p d f g … состояния

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \qquad l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n-1$$

$$L_z = \hbar m \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots \pm l$$

При $l=0$: $L_z = L_x = L_y = 0$ $L = 0$

СЗ E $\left(\hat{E} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + U(r);\ U(r) = -\frac{Ze^2}{r}\right)$

$$E_n = -\frac{Z^2\, Ry}{n^2} = -\frac{Ry}{n^2}$$

Т.е. при $n=3$, $l=2$, $m=-2$: $\boxed{L^2 = 6\hbar^2;\quad L_z = -2\hbar^2;\quad E = -Ry/9}$

⊛ далее приведены элементарные примеры по нахождению СЗ и СФ операторов физ. величин (для понимания)

III

***8.1** Определить СЗ и СФ операторов $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$, $\hat{L}_z = -\hbar i \frac{d}{d\varphi}$

$\hat{P}_x$: Решим задачу $\hat{p}\,\psi_p(x) = \underbrace{\overset{\text{СЗ}}{p}\,\psi_p(x)}_{\text{СФ}}$:

$$-i\hbar \frac{d\psi_p(x)}{dx} = p\,\psi_p(x); \quad \int \frac{d\psi_p(x)}{\psi_p(x)} = \int \frac{i\,p\,dx}{\hbar};$$

$*$ $-i = \frac{1}{i}$

$$\ln \psi_p(x) = i p x/\hbar + C; \quad \psi_p(x) = \underbrace{C}_{\text{нормировочная константа}} \cdot e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

т.к. условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ (дискретный спектр)

неприменимо, то используется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x)\,\psi^*_{p'}(x)\,dx = \delta(p-p') \quad \text{– непрерывный спектр}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{ix(p-p')/\hbar} dx = \delta(p-p')$$; зная свойство

δ-функции: $\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega$ и сделав замену

$\omega = x/\hbar$ $\quad d\omega = \frac{dx}{\hbar}$ $\quad$ получим: $C^2 2\pi\hbar\,\delta(p-p') = \delta(p-p')$

$\Rightarrow C^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$; Следовательно СФ:

$$\boxed{\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}}$$

Спектр СЗ p оператора $\hat{P}_x$ непрерывный.

$\hat{L}_z$: $\hat{L}_z \psi_L(\varphi) = L_z \psi_L(\varphi) \Rightarrow \psi_L = C \cdot e^{iL_z\varphi/\hbar}$

т.к L_z периодическая с периодом 2π то

$$\psi_L(\varphi + 2\pi) = \psi_L(\varphi) \Rightarrow e^{iL_z\varphi/\hbar} = e^{iL_z\varphi/\hbar}\, e^{iL_z 2\pi \overset{\text{целое}}{m}/\hbar} \Rightarrow$$

спектр L_z дискретн.

$$\underbrace{\Rightarrow e^{iL_z 2\pi m/\hbar} = 1 \quad \boxed{e^{i2\pi \cdot \overset{\text{натуральное}}{n}} = 1}\ \text{свойство}} \rightarrow \boxed{L_z = m\hbar}\ \text{СЗ}$$

8.1 продолжение

Теперь найдем СФ: условие нормировки: (дискретн)

$$\int_0^{2\pi} |\Psi_L(\varphi)|^2 d\varphi = 1 \quad \text{т.к } L_z = m\hbar \text{ имеем}$$

$$\int_0^{2\pi} \left| C e^{i m\hbar\varphi/\hbar} \right|^2 d\varphi = 1. \qquad \int_0^{2\pi} C^2 d\varphi = 1$$

$$\boxed{|\alpha e^{i\beta}| = \alpha}$$

$$C^2 \cdot 2\pi = 1 \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

СФ: $$\boxed{\Psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}}$$

СЗ. операторов физ. величин — являются измеряемыми значениями этих величин.

(+) Если операторы физ. величин комутируют т.е $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ то эти эти величины можно одновременно измерить: $[\hat{L}^2, L_z] = 0$

$[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0 \qquad [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \qquad [\hat{P}_i \; \hat{X}_j] = i\hbar \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{символ кронекера}}$

$[\hat{L}_i \; \hat{L}_j] \neq 0$ (только при $L_x = L_y = L_z = 0$ $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = 0$)

$[\hat{X}_j \; \hat{H}] \neq 0$; $[\hat{H}, \hat{P}] \neq 0$ (Если $\hat{H} = \frac{P^2}{2m}$ то $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$)

$[\hat{H} \; \hat{P}_j] \neq 0$ (Если $\hat{H} = \frac{P^2}{2m}$ то $[\hat{H} \hat{P}_j] = 0$)

$Z=1$

1) Для электрона в атоме водорода в стационарном состоянии с максимально возможной z-проекцией орбитального момента импульса L_z, волновая функция имеет вид $\psi = N r \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\} \sin\theta\, e^{i\varphi}$. Найдите наиболее вероятное удаление электрона от ядра в этом состоянии и величину орбитального момента $|\vec{L}|$ в единицах $\hbar$.

$\underbrace{2}_{n}\underbrace{p}_{\ell}$ состояние $\Rightarrow$ $n=2$ $\ell=1$

$\left.\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ s & p & d \end{matrix}\right\}\ell$

максимально возможному $L_z = m\hbar$. соответствует m_{max}, тк $m = -\ell, -(\ell-1), \dots 0 \dots, \ell-1, \ell$ то

$m_{max} = \ell \Rightarrow m = 1$.

* Если бы была дана только волновая ф-ция то квантовые числа можно было бы найти из общего вида:

$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\varphi) = R_{n\ell}(r)\, Y(\theta,\varphi)$, где в общем виде

$R_{n\ell}(r) = r^\ell \exp\left\{-\frac{Zr}{n a_0}\right\}(b_0 + b_1 r + \dots + b_{n_r} r^{n_r})$

$n_r = n-(\ell+1)$ – число узлов радиальной волн.ф-ции $R_{n\ell}(r)$,

$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \Theta_{\ell m}(\theta)\, \Phi_m(\varphi)$, $\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

$\Theta_{\ell m}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^{|m|}(\cos\theta)$, где

$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell$ – присоединённые полиномы Лежандра

причем $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ называется сферической ф-цией.

① продолжение

Сопоставляя общий вид и заданную по условию задачи волновую функцию приходим к выводу что $n=2$ $\ell=1$ $n_r=0$ $\left(R\ (r)=B_0\, r \exp\left\{-\frac{Zr}{2a_0}\right\}\right)$

и $m=1$ $\left(\Phi_1(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\varphi}\right)$ $Z=1$

Наиболее вероятное удаление электрона в заданом состоянии n, ℓ определяется как условие максима функции $r^2 R_{n\ell}^2(r)$, определяющей радиальное распределение плотности вероятности.

Т.о. имеем
$$\frac{d\left(r^2\cdot B_0\, r \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\}\right)}{dr}=0$$

$$3B_0 \exp\left\{-\frac{r}{2a_0}\right\}r^2-\frac{B_0}{2a_0}\exp\left\{\frac{-r}{2a_0}\right\}r^3=0$$

$$3-\frac{r}{2a_0}=0 \Rightarrow \boxed{r_{н.в}=6a_0}$$

Величина орбитального момента является

СЗ уравнения: $\hat{L}^2\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=L^2\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$,

т.е. $L^2=\hbar^2\ell(\ell+1) \underset{\ell=1}{\Longrightarrow} L^2=\hbar^2\cdot 2$

$$\boxed{|L|=\sqrt{2}\,\hbar}$$

IV

② Частица в прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме $a \times b$ $(a \gg b)$.
Через соотношение неопределенностей оценить минимально возможную энергию частицы.
Сравнить результаты с точными квантово-механическими расчетами.

Чтобы оценить состояние с минимом энергии следует положить что $p \approx \Delta p$.

Яма двумерная $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ $\quad \Delta r = \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y$

$\Delta p \Delta r \approx \hbar \quad \Delta x \approx a \quad \Delta y \approx b$ т.к. $a \gg b$

то $\Delta x \gg \Delta y$. Полагаем что внутри потенциальной ямы потенциальная энергия равна нулю.

$$E = K + U = K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m\Delta r^2} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2};$$

Точные квантово-механические расчеты дают:

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{n_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b^2}\right)^2\right)$$ при $n_1 = 1 = n_2$ имеем

минимальную энергию: $E_{11} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$

при $a \gg b$ имеем $E_{11} \approx \frac{\pi^2\hbar}{2mb^2}$;

? Сравнивая E и E_{11} делаем вывод что они различаются на порядок. $\left(\frac{1}{a^2} \ll \frac{\pi^2}{b^2}\right)$

IV

*2. Частица в прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме $a \times в$. (квантово-механические расчеты)

$\Psi(x, y) = \Psi_1(x)\, \Psi_2(y)$; Подстав Ψ в ур-ие Шред-ра:

$$\Delta \Psi(x, y) + \frac{2m_0}{\hbar^2} E\, \psi(x, y) = 0;$$

$$\psi_2(y) \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} + \psi_1(x) \frac{d^2 \psi_2(y)}{dy^2} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} E\, \psi_1(x)\, \psi_2(y)$$

$$\frac{1}{\psi_1(x)} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2(y)} \frac{d^2 \psi_2(y)}{dy^2} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} E \quad (*)$$

$$\frac{1}{\psi_1(x)} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} E_1 \qquad \frac{1}{\psi_2(y)} \frac{d^2 \psi_2(y)}{dy^2} = -\frac{2m_0}{\hbar^2} E_2$$

их решения:
$$\psi_{1, n_1}(x) = \sqrt{\frac{2}{a_1}} \sin \frac{\pi n_1 x}{a_1} \qquad n_1 = 1, 2, 3 \ldots$$
$$\psi_{2, n_2}(y) = \sqrt{\frac{2}{a_2}} \sin \frac{\pi n_2 x}{a_2} \qquad n_2 = 1, 2, 3 \ldots$$

Т.о.
$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{a_1 a_2}} \sin \frac{\pi n_1 x}{a_1} \sin \frac{\pi n_2 x}{a_2}; \qquad 0 < x < a_1, \quad 0 < y < a_2$$

а энергия (*) определяется выражением:

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0} \left[\left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2 \right] \qquad n_1, n_2 = 1, 2, 3 \ldots$$

3) Воспользовавшись соотношением неопределенностей, оценить при каких условиях частица массы m может удерживаться в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме глубиной V_0 и радиусом R.

$$E = K + V; \quad V = -V_0; \quad \Delta x \approx R \quad \Delta p \approx p$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar, \quad (E = 0.) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{p^2}{2m} - V_0 \qquad \boxed{\frac{2mV_0R^2}{\hbar^2} \geq 1}$$

(4) Потенциал ионизации атома Li ($Z=3$) равен 5.39 эВ. Определить квантовый дефект основного состояния.

Для атомов щелочных металлов (без учета тонкой структуры) верна ф-ла:

$$(*)\quad E_{nl} = -\frac{(Z-a_{nl})^2}{n^2} Ry = -\frac{Ry}{(n-\Delta_l)^2} \quad \text{где}$$

Δ_l - квантовый дефект; a_{nl} - константа экранирования для энергии ур-ня (без учета тонкой структуры)

$$I = -E_{nl} = 5.39 \text{ эВ} \qquad Ry = 13.6 \text{ эВ}$$

энергия осн. сост.

$$\frac{Ry}{(n-\Delta_l)^2} = I; \qquad \Delta_l = n - \sqrt{Ry/I}$$

Основное состояние — состояние с наименьшей энергией для Li ($1s^2 2s^1$) это $2s^1$ ($n=2$ $l=s$)

$$\Delta_s = 2 - \sqrt{\frac{13.6}{5.39}} = 2 - \sqrt{2.5} = 2 - 1{,}6 = 0{,}4$$

$$\boxed{\Delta_s = 2 - \sqrt{Ry/I} = 0{,}41}$$

(*) Эта формула приближённо верна для атомов в которых последняя оболочка содержит лишь один электрон; т.е для атомов

$_5B$ $1s^2 2s^2 2p^1$ $\qquad$ $_{13}Al$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$

и т.д.

(5) Потенциал ионизации атома Na $(Z=11)$ равен 5.14 эВ. Определить квантовый дефект основного состояния.

Na – щелочной металл. т.е

$$E_{nl} = -\frac{Ry}{(n-\Delta_l)^2}; \quad I = -E_{nl} \Rightarrow$$

$$\Delta_l = n - \sqrt{Ry/I}. \quad Ry = 13.6 \text{ эВ}$$

Na : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. осн. сост.: $3s^1$

$Z=11$ $(n=3 \quad l=s)$

$$\boxed{\Delta_s = 3 - \sqrt{\frac{13.6}{5.14}} = 1.37}$$

⑥ Потенциал ионизации атома K (Z = 19) равен 4.34 эВ. Определить квантовый эфект основного состояния.

Калий K (Z = 19) – щелочной металл

т.е $E_{nl} = -\dfrac{Ry}{(n-\Delta_l)^2}$ $\quad I = -E_{nl} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta_l = n - \sqrt{\dfrac{Ry}{I}}$ $\quad Ry = 13.6$ эВ

K: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$
(Z = 19)

(3d - незаполнена)

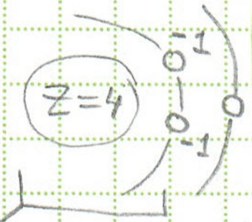
т.е основное состояние $4s^1$ ($n=4$ $l=s$)

$$\boxed{\Delta_s = 4 - \sqrt{\frac{13.6}{4.34}} = 2.23}$$

6*. Потенциал ионизации иона Be^+ составляет $I = 18.21$ эВ. Определить квантовый дефект основного состояния.

Be^+ – литиеподобный ион, причем внешний электрон движется в поле атомного остова (ядро + электроны внутренних оболочек) причем суммарный заряд атомного остова $Z^* = 2$.

В таком случае:



$$E_{nl} = -\frac{(Z^*)^2 Ry}{(n-\Delta_l)^2}; \quad E_{nl} = -I$$

$$Z^* = 4 - 2 = 2$$

$$\Delta_l = n - Z^* \sqrt{Ry/I}$$

Основное состояние Be^+ $2s^1 \Rightarrow n = 2$, $l = s$

$$\Delta_s = 2 - 2\sqrt{\frac{13.6}{18.21}} = 0{,}27$$

7 Квантовые дефекты s и p уровней в атоме Li (z = 3) равны $\Delta_s = 0{,}412$ и $\Delta_p = 0{,}041$ соответственно. Определить длину волны резонансной линии.

Li - щелочной металл: $E_{nl} = \frac{-R_y}{(n-\Delta_l)^2}$

$\hbar\omega = E_{nl_2} - E_{ml_1}$; $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

Резонансная линия – спектральная линия атома для которой частота испускаемого света равна частоте поглощаемого света в основном состоянии.

Для атома Li : $1s^2 2s^1 2p\ 3s\ 3p$ это переход $3p \to 2s$

$$\frac{\hbar\, 2\pi c}{\lambda} = E_{2s} - E_{3p}; \quad \frac{\hbar\, 2\pi c}{\lambda} = -\frac{R_y}{(2-\Delta_s)^2} + \frac{R_y}{(3-\Delta_p)^2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\hbar\, 2\pi c / R_y}{\frac{1}{(3-\Delta_p)^2} - \frac{1}{(2-\Delta_s)^2}} \approx 3{,}200 \cdot 10^{-7}\,\text{м} \approx 3200\ \text{Å}}$$

(*) Резонансные линии щелочных металлов наблюдаются в видимой части спектра.

IV

(8) Для электрона в атоме водорода в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n=3$ и всеми возможными l и m нарисовать радиальную часть волновой ф-ии $R_{nl}(r)$ и радиальную плотность вероятности ρ_{nl} как функций r.

Общий вид радиальной волновой ф-ии:

$$R_{nl} = r^l \exp\left\{-\frac{Zr}{na_0}\right\}\left(b_0 + b_1 r + \dots + b_{n_r} r^{n_r}\right)$$ где

$n_r = n-(l+1)$ – число узлов радиальной волн. ф-ии.

$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $m = 0, \pm 1 \dots \pm l$; ← не оказывает влияния на $R_{nl}(r)$

$\rho_{nl} = r^2 \cdot R_{nl}(r)$; т.к $n=3$ то $l = \overset{s}{0}, \overset{p}{1}, \overset{d}{2}$.

3s

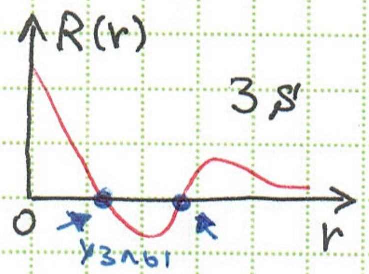
$R_{3s} = e^{-r/3a_0}(b_0 + b_1 r + b_2 r^2)$; $[n_r = 2]$

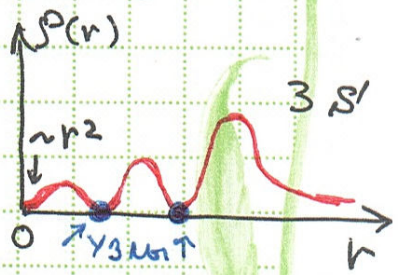
$R_{3s}(0) = b_0$ ⇒

$R_{3s}(\infty) = 0$

$\rho_{3s}(\infty) = 0$

$\rho_{3s} = r^2 R_{3s}$; $\rho_{3s} \geq 0$; $\rho_{3s}(0) = 0$ $\rho_{3s}(r \to 0) \sim r^2$



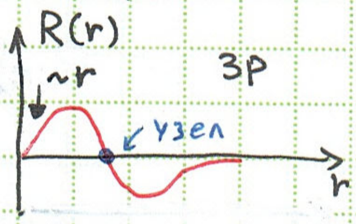


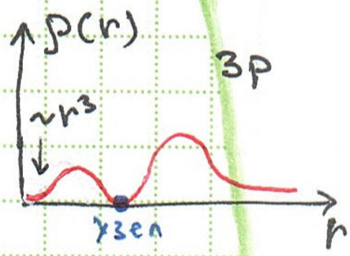
3p

$R_{3p} = r e^{-r/3a_0}(b_0 + b_1 r)$;

$R_{3p}(0) = 0$; $R_{3p}(r \to 0) \sim r$;

$n_r = 1$; $\rho_{3p}(r \to 0) \sim r^3$; $\rho_{3p}(0) = 0$;



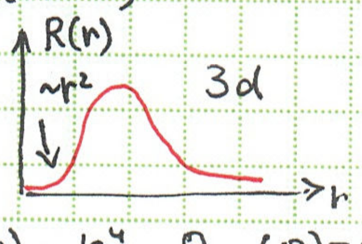


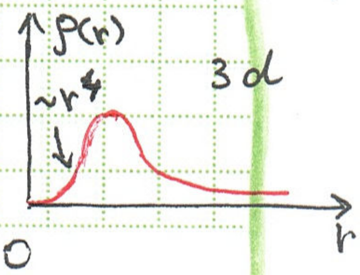
3d

$R_{3d} = r^2 e^{-r/3a_0}(b_0)$;

$R_{3d}(0) = 0$; $R_{3d}(r \to 0) \sim r^2$

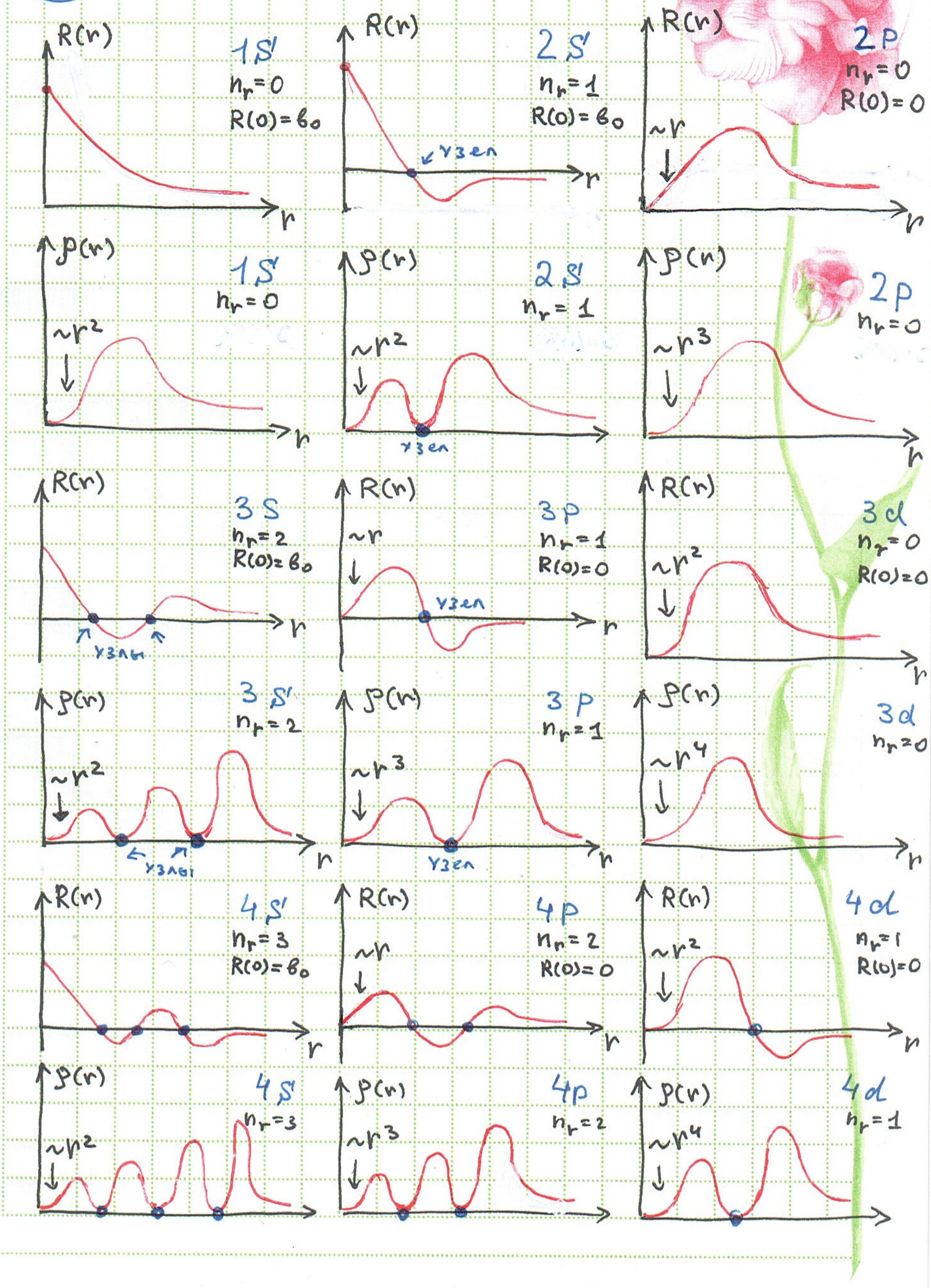
$\rho_{3d} = r^2 R_{3d}$; $n_r = 0$; $\rho_{3d}(r \to 0) \sim r^4$ $\rho_{3d}(0) = 0$





* причём всегда $R(r\to\infty)=0$ $\rho(r\to\infty)=0$
$\rho(0)=0$ $\rho(r)\geq 0$

*8 Графики $R_{n\ell}(r)$ и $\rho_{n\ell}(r)=r^2R_{n\ell}(r)$



и так далее

V

1) На сколько пучков расщепится в опыте Штерна-Герлаха (в слабом поле) пучки атомов находящихся в состоянии $^3F_1$ и $^3D_1$

Если g-фактор равен нулю расщепления в слабом поле нет.

В слабом магнитном поле, если g-фактор отличен от нуля, число компонент определяется числом возможных значений проекций вектора $\vec{J}$ на направление градиента магнитного поля. т.е $N = 2J+1$ (в состоянии $^{2S+1}L_J$)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

для $^3F_1$: $S = 1$ $J = 1$ $L = F = 3$

$$g = 1 + \frac{2 + 2 - 4\cdot 3}{4} = 1 - 2 = -1$$

$$\boxed{N_1 = 2J + 1 = 3}$$

для $^3D_1$ $S = 1$ $J = 1$ $L = D = 2$

$$g = 1 + \frac{2 + 2 - 2\cdot 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{N_2 = 2J + 1 = 3}$$

(*) В сильном магнитном неоднородном поле число компонент расщепления определяется числом возможных значений суммы $M_L + 2M_S$

Например: для $^2P_{1/2}$ в слабом поле две компоненты, а в сильном $M_L = 0, \pm 1$ $M_S = 0, \pm\frac{1}{2}$

$M_L + 2M_S = 0, \pm 1 \pm 2$ т.е пять компонент.

2) Волновая функция основного состояния атома водорода имеет вид $\psi(r) = A\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$, A – нормировочная константа, a_0 – боровский радиус. Найти среднее значение потенциальной энергии электрона в этом состоянии.

Среднее значение величины A в состоянии $\psi(\vec{r},t)$:

$\langle A\rangle = \int_V \psi^*(\vec{r},t)\,\hat{A}\,\psi(\vec{r},t)\,dV$; Условие нормировки:

$\int_V |\psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1$; $dV = 4\pi r^2 dr$, $r \in [0,\infty)$

Из условия нормировки найдем A:

$$\int_0^\infty A^2 e^{-2r/a_0} r^2 4\pi\, dr = 1, \text{ пусть } \frac{2r}{a_0} = x;\ \frac{dx}{dr} = \frac{2}{a_0}$$

$$\frac{4\pi A^2 a_0^2}{2^2}\int_0^\infty \left(\frac{2r}{a_0}\right)^2 e^{-2r/a_0} dr = 1;\quad \frac{\pi A^2 a_0^3}{2}\underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{(-x)} dx}_{} = 1$$

см. справ. данные в конце задачника $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ $n > 0$ – целое

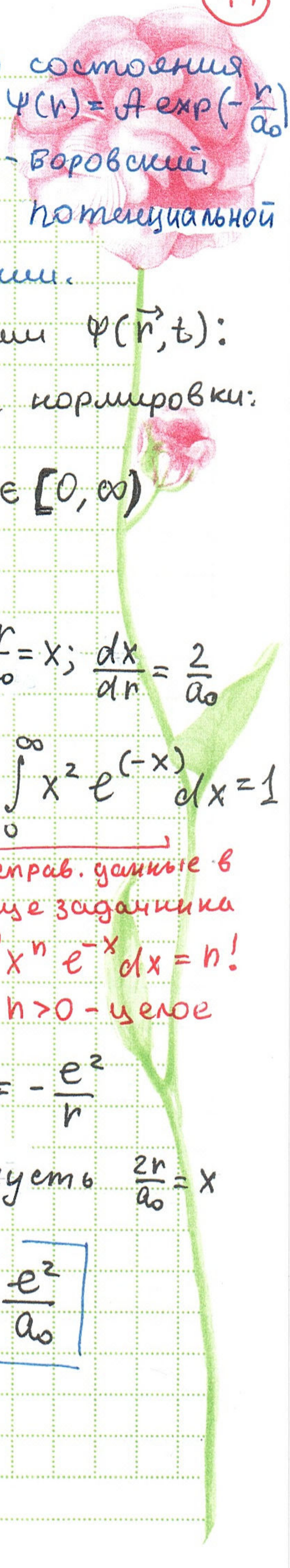
$$\frac{\pi A^2 a_0^3}{2}\cdot 2! = 1 \Rightarrow \boxed{A^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}}$$

$$\langle U\rangle = \int_0^\infty \psi^* \hat{U}\psi\, 4\pi r^2 dr;\quad \hat{U} = U(r,t)$$

В атоме водорода $U(\vec{r},t) = -\frac{\overset{z=1}{z} e^2}{r} = -\frac{e^2}{r}$

т.о. $\langle U\rangle = -\frac{4\pi A^2 e^2}{2/a_0}\int_0^\infty \frac{2r}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} dr$, пусть $\frac{2r}{a_0} = x$

$$\langle U\rangle = -\frac{\pi e^2 a_0^2}{\pi a_0^3}\overbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx}^{=1!=1} = \boxed{-\frac{e^2}{a_0}}$$



③ В функции основного состояния атома Н

$\psi(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$, a_0 – Боровский радиус.

Найти $\langle \frac{1}{r} \rangle$.

Из условия нормировки найдем A:

$$\int_V |\psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1 \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

т.е. $$\int_0^\infty A^2 e^{-2r/a_0} r^2 4\pi dr = 1$$

[подробное решение см на стр 44

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}.$$ Т.к. $\hat{r} = r$ то

$$\langle \frac{1}{r} \rangle = \int_0^\infty \psi^* \frac{1}{r} \psi \, 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty A^2 e^{-2r/a_0} \cdot r \, 4\pi dr =$$

$$= A^2 4\pi \frac{a_0}{2} \int_0^\infty \frac{2r}{a_0} e^{-2r/a_0} dr; \quad \frac{2r}{a_0} = x \quad dx = \frac{2}{a_0} dr$$

$$\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{4\pi a_0}{\pi a_0^3 2} \cdot \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx}_{= 1!}$$

см. справ. данные в конце задачника

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\boxed{\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{1}{a_0}}$$

(4) В сферической системе коо-т волновая функция электрона имеет вид:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r,\theta)\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\cos^2\varphi \text{, причем}$$

$$\int r^2 |R(r,\theta)|^2 dr \sin\theta \, d\theta = 1.$$

Какие значения Z проэкции момента импульса (L_z) и с какой вероятностью могут быть измерены в этом состоянии? Определить среднее значение и дисперсию величины L_z.

(*) На стр (48) подробно разобрана более простая аналогичная задача. (*4)

Представим $\psi(r,\theta,\varphi)$ в виде:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r,\theta)\left[\sum C_m \psi_m(\varphi)\right] \quad \text{где}$$

$\psi_m(\varphi)$ – СФ оператора $\hat{L}_z$ причем СЗ $\hat{L}_z = m\hbar$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}; \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \Rightarrow$$

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r,\theta)\left[\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{e^{i\varphi\cdot 0}}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{4}{3\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{e^{i\varphi 2}}{\sqrt{2\pi}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{4}{3\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{e^{-i\varphi 2}}{\sqrt{2\pi}}\right] = R(r,\theta)\left[\underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}}_{C_0}\psi_0 + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{6}}}_{C_{+2}}\psi_{+2} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{6}}}_{C_{-2}}\psi_{-2}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_z &= 0\cdot\hbar = 0 & W_0 &= |C_0|^2 = \frac{2}{3} \\ L_z &= +2\hbar & W_{+2} &= |C_{+2}|^2 = 1/6 \\ L_z &= -2\hbar & W_{-2} &= |C_{-2}|^2 = 1/6 \end{aligned}}$$

Теперь определим среднее значение и дисперсию L_z:

V

4 продолжение

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\langle L_z \rangle = \int \psi^* \hat{L}_z \psi \, dV \qquad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\hat{L}_z \psi = R(r,\theta) \cdot \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \left(-2\cos\varphi \sin\varphi\right) \cdot (-i\hbar)$$

$$\langle L_z \rangle = \overbrace{\int |R(r,\theta)|^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta}^{\text{по условию равно 1.}} \int_0^{2\pi} -\frac{i4\hbar}{3\pi}(-2)\cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$\boxed{\langle L_z \rangle = 0}$$

Дисперсия: $D_{L_z} = \langle (L_z - \langle L_z \rangle)^2 \rangle = \langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2$

Найдем $\langle L_z^2 \rangle$: $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

$$\hat{L}_z^2 \psi = R(r,\theta) \sqrt{\frac{4}{3\pi}} (-\hbar^2)\left(-2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\right)$$

$$\langle L_z^2 \rangle = \overbrace{\int |R(r,\theta)|^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta}^{\text{по условию равно 1}} \int_0^{2\pi} \frac{4\cdot 2\hbar^2}{3\pi} \overbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}^{=1} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$\langle L_z^2 \rangle = \frac{4\cdot 2\,\hbar^2}{3\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{8}{3}\hbar^2$$

$$\boxed{D_{L_z} = \langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2 = \frac{8}{3}\hbar^2}$$

V

*4) Волновая функция состояния некоторой квантовой системы, как функция полярного угла имеет вид (B – нормировочная константа)

а) $\psi(\varphi) = B\cos\varphi$ б) $\psi(\varphi) = B\sin^2 3\varphi$

Какие значения z-проекции момента количества движения L_z могут быть измерены в этом состоянии? Каковы вероятности их измерения и среднее значение L_z?

Необходимо представить ф-ию в виде линейной суперпозиции СФ оператора $\hat{L}_z$:

$$\psi(\varphi) = \sum C_m \psi_m(\varphi) = \sum C_m \frac{\exp\{i m\varphi\}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Используя формулы:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

т.е для а) $\psi(\varphi) = B\frac{e^{i\varphi}}{2} + B\frac{e^{-i\varphi}}{2}$

Из усл. нормировки $\int_0^{2\pi} B^2\cos^2\varphi\, d\varphi = 1 \Rightarrow B^2 = \frac{1}{\pi}$

т.к СФ $\hat{L}_z$ имеет вид $\boxed{\psi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}}$ то

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\varphi\cdot 1}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{i\varphi\cdot(-1)}}{\sqrt{2\pi}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{C_{+1}}\psi_{+1}(\varphi) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{C_{-1}}\psi_{-1}(\varphi)$$

СЗ $\hat{L}_z$: $L_z = m\hbar$ ⇒ в случае а) могут быть измерены значение с $m=+1$ и $m=-1$ т.е. $L_z = \pm\hbar$; вероятность измерения состояния с m определяется $W_m = |C_m|^2$ т.е вероятность измерить $\boxed{L_z = +\hbar : W_{+1} = |C_{+1}|^2 = \frac{1}{2}}$, а для $\boxed{L_z = -\hbar \quad W_{-1} = |C_{-1}|^2 = \frac{1}{2}}$.

4* продолжение

$$\langle L_z \rangle = \int_0^{2\pi} \Psi^* \hat{L}_z \Psi \, d\varphi ; \qquad \Psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\varphi$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \hat{L}_z \Psi = -\frac{i\hbar}{\sqrt{\pi}} \cdot (-\sin\varphi)$$

$$\boxed{\langle L_z \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{i\hbar}{\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0}$$

для случая б) $\Psi(\varphi) = B \sin^2 3\varphi = B \dfrac{(1-\cos 6\varphi)}{2}$

Из условия нормировки $\int_0 B^2 \sin^4 3\varphi \, d\varphi = 1 \Rightarrow$

$$B^2 = \frac{4}{3\pi}; \quad B = \frac{2}{\sqrt{\pi 3}},$$

$$\Psi(\varphi) = \frac{1 - \cos 6\varphi}{\sqrt{3\pi}} = \frac{1 - \frac{e^{i\varphi 6}}{2} - \frac{e^{-i\varphi 6}}{2}}{\sqrt{3\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3\pi}} \frac{e^{i\varphi 0}}{\sqrt{2\pi}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{3\pi}} \cdot \frac{e^{i\varphi 6}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{3\pi}} \frac{e^{-i\varphi 6}}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \Psi_{+6} - \frac{1}{\sqrt{6}} \Psi_{-6}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} L_z = 0 \cdot \hbar & W_0 = \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = 2/3 \\ L_z = +6\hbar & W_{+6} = \left|-\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 = 1/6 \\ L_z = -6\hbar & W_{-6} = \left|-\frac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 = 1/6 \end{array}}$$

$$\langle L_z \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{i\hbar 4}{3\pi} \cdot \sin^2 3\varphi \cdot 6\cos 3\varphi \cdot \sin 3\varphi \, d\varphi =$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle L_z \rangle = 0}$$

(*) тут скорее всего имелось в виду $\int r^2 |R(r)|^2 dr = 1$. 50

V

(5) В сферической системе координат волновая функция электрона имеет вид:
$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\sin\theta\cos\varphi$, причем
(*) $\int r^2 |R(r,\theta)|^2 dr = 1$. Какие значения z-проекции момента количества движения (L_z) и с какой вероятностью могут быть измерены в этом состоянии? Определить среднее значение и дисперсию величины L_z.

(*) Эта задача аналогична (4) и (*4) со стр. (46) и (48).

$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) \Rightarrow \Phi(\varphi) = B\cos\varphi$, где

B – нормировочная константа. Задача по нахождению L_z для такой $\Phi(\varphi)$ была рассмотрена в (*4) а) на стр (48). $\Rightarrow B^2 = 1/\pi$

$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\left[\sum C_m \psi_m(\varphi)\right]$, где

$\psi_m(\varphi)$ – СФ $\hat{L}_z$; $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1}\right]$

$\boxed{L_z = \pm\hbar;\ W_{\pm 1} = 1/2}$ Причем $\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{4}{3}}\sin\theta$.

$$\langle L_z\rangle = \underbrace{\int |R(r)|^2 r^2 dr}_{=1} \int_0^{\pi} |\Theta(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\hbar}{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}_{=0}$$

$\boxed{\langle L_z\rangle = 1 \int_0^{\pi} \frac{4}{3}\sin^3\theta\, d\theta \cdot 0 = 0}$; $D_{L_z} = \langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle$

$\langle L_z^2\rangle = \int \psi^* \hat{L}_z^2 \psi\, dV \quad dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad \hat{L}_z^2\psi = R(r)\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\sin\theta\,(-\cos\varphi)(-\hbar^2)$

$$\langle L_z^2\rangle = \underbrace{\int |R(r)|^2 r^2 dr}_{=1} \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta}_{4/3} \sqrt{\frac{4}{3\pi}}\,\hbar^2 \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi}_{=\pi} =$$

$= \frac{4}{3\pi}\hbar^2\cdot\pi\frac{4}{3} = \frac{16}{9}\hbar^2$; $\boxed{D_{L_z} = \frac{16}{9}\hbar^2}$

V

(*) скорее всего имелось в виду $\int r^2 |R(r)|^2 dr = 1$

6 В сферической системе коо-т волновая ф-ия электрона имеет вид $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\sqrt{\frac{4}{3\pi}}\sin\theta\sin\varphi$ причем (*) $\int r^2 |R(r,\theta)|^2 dr = 1$. Какие значения z-проекции момента количества движения (L_z) и с какой вероятностью могут быть измерены в этом состоянии? Определить среднее значение и дисперсию величины L_z.

(*) аналогично 4 *4 5 на стр 46 48 50.

$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) \Rightarrow \Phi(\varphi) = B\sin\varphi$, где

B – нормировочная константа. Усл. нормировки:

$$\int_0^{2\pi} B^2 \sin^2\varphi \, d\varphi = 1 \Rightarrow B^2 = 1/\pi; \quad \Theta = \sqrt{\frac{4}{3}}\sin\theta$$

$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\left[\sum C_m \psi_m(\varphi)\right]$, где $\psi_m(\varphi)$ СФ $\hat{L}_z$

$$\psi_m(\varphi) = \frac{e^{i\varphi m}}{\sqrt{2\pi}}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} \Rightarrow \psi(r,\theta,\varphi) =$$

$$= R(r)\,\Theta(\theta)\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\right] = R(r)\,\Theta(\theta)\Big[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{C_{+1}}\psi_{+1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{C_{-1}}\psi_{-1}\Big]$$

$$L_z = m\hbar \Rightarrow \boxed{L_z = \pm 1 \quad W_{\pm 1} = |C_{\pm 1}|^2 = 1/2}$$

$$\langle L_z\rangle = \int_V \psi^* \hat{L}_z \psi \, dV; \quad dV = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\theta \in [0,\pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad r \in [0,\infty)$$

$$\langle L_z\rangle = \underbrace{\int |R(r)|^2 r^2 dr}_{1=} \int_0^{\pi} |\Theta(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta \overbrace{\int_0^{2\pi} -\frac{\hbar^2}{\pi}\cos\varphi \, d\varphi}^{=0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle L_z\rangle = 0}; \quad D_{L_z} = \langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle^2;$$

$$\langle L_z^2\rangle = \int |R(r)|^2 r^2 dr \int_0^{\pi} \frac{4}{3}\sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\hbar^2}{\pi}\sin^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\hbar^2}{\pi}\cdot 1 \cdot \frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{16}{9}\hbar^2 \quad \boxed{D_{L_z} = \frac{16}{9}\hbar^2}$$

V

Не решена. :(

(7) Частица описывается волновой ф-цией $\psi(x,y,z) = A(x,y)\cos(kz)$. Какие значения z-проекции момента импульса и с какой вероятностью могут быть измерены?

?

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$\hat{L}_z \psi_{сф} = L_z \psi_{сф}$ $\longrightarrow$ найти СФ L_z

в декарт. коо-тах у меня не получилось.

Попытки перейти к сферическим ничего не дают $\Rightarrow$?

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi)\cos(kr\cos\theta)$$

8) На сколько энергетических подуровней расщепятся в слабом поле уровни энергии атома в состоянии $^4D_{1/2}$ и $^2P_{1/2}$.

+ см 1 на стр 43 (теория)

$^4D_{1/2}$:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

т.к. $^{2S+1}L_J \Rightarrow J = \frac{1}{2} \quad L = 2 \quad S = \frac{3}{2}$

$g = 0 \Rightarrow$ Состояние $^4D_{1/2}$ $\boxed{\text{не расщепится}}$

$^2P_{1/2}$: $J = \frac{1}{2} \quad L = 1 \quad S = \frac{1}{2} \Rightarrow g = \frac{3}{2}$

$N = 2J + 1 \Rightarrow \boxed{N = 2}$

Состояние $^2P_{1/2}$ расщепится на два подуровня.

1 Написать вид волновой функции стационарного состояния свободной частицы в одномерном случае, в котором x-проекция импульса p_x принимает точные значения.

Иначе говоря, требуется найти СФ (собственные функции) оператора $\hat{P}_x$ в одномерном случае.

Эта задача была подробно решена на стр 29 (*8.1)

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}; \qquad \hat{P}_x \Psi(x) = P_x \Psi(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Psi(x) = C e^{iP_x x/\hbar}$; Из условия нормировки

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p_x}(x)\, \Psi^*_{p'_x}(x)\, dx = \delta(p-p')$ найдем $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$.

$$\boxed{\Psi_{p_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ip_x x/\hbar}}$$

② Частица находится в бесконечно глубокой *прямоугольной потенциальной яме шириной α в ОСНОВНОМ состоянии. Записать выражение для волновой функции частицы $\psi(x,t)$ в произвольный момент времени.

* в квант. мех. такую яму называют одномерной, но в лекции 5 (Попов) используется именно такое обозначение

Если в начальный момент времени система находится в одном из собственных состояний гамильтониана φ_n то $\psi(\vec{r},t) = \varphi_n(\vec{r}) \exp\{-iE_n t/\hbar\}$

В данном случае $\boxed{\psi(x,t) = \varphi_n(x) \exp\{-iE_n t/\hbar\}}$

где φ_n – СФ $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$, а E_n – СЗ $\hat{H}$

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \alpha/2 \\ \infty, & |x| > \alpha/2 \end{cases} \qquad -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi = E\varphi$$

при $|x| > \frac{\alpha}{2}$ $\varphi \equiv 0$, а при $|x| \leq \frac{\alpha}{2}$ имеем

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = E\varphi, \text{ пусть } k^2 = 2mE/\hbar^2 \quad 1^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\varphi''(x) + k^2\varphi = 0$ его ОР $\varphi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

т.к $\varphi(\pm\frac{\alpha}{2}) = 0$: $\begin{cases} A\sin\frac{k\alpha}{2} + B\cos\frac{k\alpha}{2} = 0 \\ -A\sin\frac{k\alpha}{2} + B\cos\frac{k\alpha}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$k_n = \frac{n\pi}{\alpha}$; $n = 0, 1, 2$ $\quad B/A = \pm tg(\pi n/2)$

следует что $A = 0$ $B \neq 0$ для нечетных n и наоборот для чётных. Т.Е в итоге имеем

$$\boxed{\varphi_n(x) = \begin{cases} B_n \cos\frac{\pi n x}{\alpha}; & n = 1, 3, 5 \\ A_n \sin\frac{\pi n x}{\alpha}; & n = 2, 4, 6 \end{cases}}$$

где A_n и B_n определяются из условия нормировки

$$A_n = B_n = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$

Причем энергия $\boxed{E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\alpha^2} n^2}$, $n = 1, 2, 3$

из 1^*

② продолжение

Основное состояние — состояние с наименьшей энергией. Т.к. для данной частицы наименьшей будет $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\alpha^2} 1^2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$

$$\Psi(x,t) = \varphi_1(x) \exp\{-iE_1 t/\hbar\}$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cos\frac{\pi x}{\alpha} \qquad E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\alpha^2}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cos\frac{\pi x}{\alpha} \exp\{-i\pi^2\hbar t/2m\alpha^2\}}$$

⊛ В случае если система находится в „произвольном" состоянии то:

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_m C_m \varphi_m(\vec{r}) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_m t\right\}$$

где $C_m = \int\limits_V \Psi(\vec{r},0)\varphi^*_m(\vec{r})\, dV$

$dV = 4\pi r^2 dr \qquad dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$

3 Частица находится в основном состоянии линейного квантового гармонического осцилятора. Записать выражение для волновой ф-ии частицы $\Psi(x,t)$ в произвольный момент времени.

Для квантового гармонического осцилятора

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2 \ldots \quad \varphi_n(x) = N_n H_n\left(\frac{x}{a}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$N_n = \left(2^n n!\, a\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} \quad a = \sqrt{\hbar/m\omega}$$ $H_n(\xi)$ – полином Эрмита

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right); \quad H_0(\xi) = 1$$

Основное состояние – состояние с наименьшей энергией. Т.Е для линейного квантового гармонического осцилятора: $n = 0$.

$$\Psi(x,t) = \varphi_0(x)\, e^{-iE_0 t/\hbar},$$

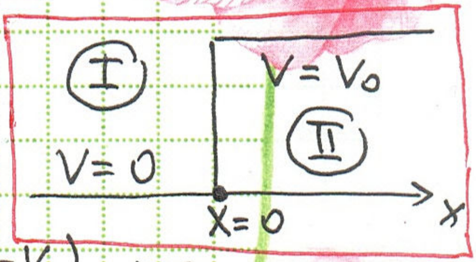
$$\varphi_0 = \sqrt{2a\sqrt{\pi}}^{\,-1} \cdot 1 \cdot e^{-1/2\left(\frac{x}{a}\right)^2}; \quad E_0 = \hbar\omega/2$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{\exp\{-i\hbar\omega t/2\hbar\} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\}}{\sqrt{2a\sqrt{\pi}}}}$$

(4) Поток частиц с энергией E рассеивается на прямоугольной потенциальной ступеньке высотой V_0. Определить вероятность прохождения и отражения при $E > V_0$ и $E < V_0$;

Ур-ие Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$



Пусть $k_1^2 = 2mE/\hbar$; $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$, то при $E > V_0$ $k_1^2 > 0$, $k_2^2 > 0$ следовательно решения ур-ия Шредингера в соо-ющих обл-ях

$$\text{I}: \psi''(x) + k_1^2\psi(x) = 0; \quad \text{II}: \psi''(x) + k_2^2\psi(x) = 0$$

ОР I: $\psi_I(x) = \bar{A}\sin(k_1 x) + \bar{B}\cos(k_1 x)$ учитывая что в области I присутствует падающая и отраженная волны, а в II только прошедшая волна:

$$\psi_I = \underbrace{A_I e^{ik_1 x}}_{\psi\,\text{падающ.}} + \underbrace{B_I e^{-ik_1 x}}_{\psi\,\text{отраж}}; \quad \psi_{II} = A_{II} e^{ik_2 x};$$

Из условия непрерывности волновой ф-ии и её первой производной в точке разрыва потенциала $x=0$ получаем

$$\begin{cases} \psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) \\ \psi'_I(x=0) = \psi'_{II}(x=0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_I + B_I = A_{II} \\ ik_1(A_I - B_I) = ik_2 A_{II} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{II} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A_I; \quad B_I = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}A_I$$

Коэффициэнт прохождения $T = \frac{|j_{прош}|}{|j_{пад}|}$, где j - ток вероятности пад/прош волны.

$$j = \frac{\hbar i}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

④ продолжение $\Psi_{пад} = A_I e^{ik_1x}$

$$j_{пад} = \frac{\hbar i}{2m}\left(A_I e^{-ik_1x}\cdot(+ik_1)A_I e^{ikx} - A_I e^{ikx} A_I(-ik)e^{-ikx}\right)$$

$$j_{пад} = \frac{A_I^2\hbar k_1}{m};\quad \Psi_{прош} = A_{II}e^{ik_2x} \Rightarrow$$

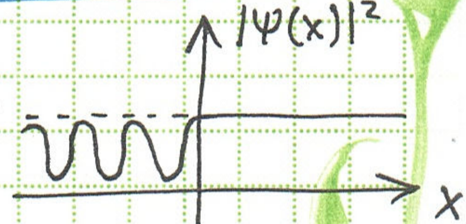
$$j_{прош} = \frac{A_{II}^2\hbar k_2}{m} \Rightarrow T = \frac{|j_{прош}|}{|j_{пад}|} = \frac{k_2|A_{II}|^2}{k_1|A_I|^2}$$

$$\boxed{T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\sqrt{1-V_0/E}}{\left(1+\sqrt{1-V_0/E}\right)^2}} \qquad \boxed{T+R=1}$$

Коэф. отражения $R = \frac{|j_{отр}|}{|j_{пад}|}$; $\Psi_{отр} = B_I e^{-ik_1x}$

$$j_{отраж} = \frac{B_I^2\hbar k_1}{m};\quad \boxed{R = \frac{|B_I|^2}{|A_I|^2} = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} = \left(\frac{1-\sqrt{1-V_0/E}}{1+\sqrt{1-V_0/E}}\right)^2}$$

Причем, график зав-ти $|\Psi(x)|^2$ будет иметь следующий вид:



Теперь рассмотрим «подбарьерный» случай $E < V_0$

Т. Е $k_1^2 > 0$ $k_2^2 < 0$, следовательно

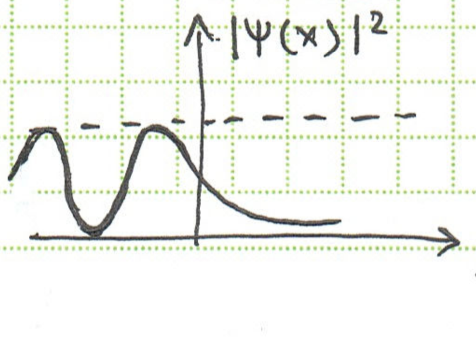
$$I:\ \Psi''(x) + k_1^2\Psi(x) = 0 \qquad II:\ \Psi''(x) - k_2^2\Psi(x) = 0$$

$$\Psi_I = \underbrace{A_I e^{ik_1x}}_{\Psi_{пад}} + \underbrace{B_I e^{-ik_1x}}_{\Psi_{отр}};\quad \Psi_{II} = \underbrace{A_{II}e^{-k_2x}}_{\Psi_{прош}}$$ ← веществ. ф-ия

$$\Rightarrow j_{прош} = \frac{\hbar i}{2m}\left(\Psi_{II}\nabla\Psi_{II} - \Psi_{II}\nabla\Psi_{II}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{T=0}$$

т.к $T+R=1 \Rightarrow \boxed{R=1}$

График $|\Psi(x)|^2$ имеет вид ↗



⑤ Определить среднее и наиболее вероятное удаление электрона от ядра в основном состоянии водородоподобного иона с зарядом Z.

В основном состоянии водородоподобного иона 1S радиальная волновая ф-ия имеет вид

$$R_{1s} = b_0 \exp\left\{-\frac{Zr}{a_0}\right\}$$ b_0 – нормировочная константа

Усл. нормировки: $\int_0^\infty |R_{1s}|^2 r^2 dr = 1$ т.к. сферич. коо-ты

$$\frac{b_0^2 a_0^2}{Z^2 2^2}\int_0^\infty \frac{Z^2 2^2}{a_0^2} r^2 e^{-Zr2/a_0} dr = 1; \quad \frac{Z2r}{a_0} = x \quad dr = \frac{a_0\,dx}{2Z}$$

см. справ. данные $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

$$\frac{b_0^2 a_0^3}{Z^3 2^3}\underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx}_{=2!=2} = 1; \quad b_0^2 = \frac{Z^3 2^2}{a_0^3}$$

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty R_{1s}(r)\cdot \hat{r}\cdot R_{1s}^*(r)\, r^2 dr =$$

$$= \int_0^\infty b_0^2 r^3 e^{-2Zr/a_0} dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{Z^3 2^3}{a_0^3} r^3 e^{-2Zr/a_0} dr =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a_0}{2Z}\underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx}_{=3!=6} = \frac{6}{4}\frac{a_0}{Z} = \boxed{\frac{3}{2}\frac{a_0}{Z}}$$

Наиболее вероятное удаление электрона от ядра определяем как условие максима ф-ии $r^2 R_{1s}^2(r)$, определяющей радиальное распределение плотности вероятности.

$$d\left(r^2 e^{-2rZ/a_0}\, 4Z^3/a_0^3\right)/dr = 0$$

$$8r(Z^3/a_0^3)e^{-2rZ/a_0} = 8r^2(Z^4/a_0^4)e^{-2rZ/a_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{н.в} = a_0/Z}$$

(6) Частица m находится в нижнем возбужденном состоянии в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме. (*)

+ см (2) со стр 55 ← аналогичная задача (подробно)

Возбужденное состояние — состояние, энергия которого превышает наименьшее возможное значение энергии.

т.к $E_n = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2m\alpha^2} n^2$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ $\Rightarrow$ нижнему возбужденному состоянию соо-ет $n = 2$, т.е.

$$\psi(x,t) = \varphi_2(x) \exp\{-i E_2 t/\hbar\}$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\frac{2\pi x}{\alpha}; \quad E_2 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\alpha^2}$$

$$\boxed{\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\frac{2\pi x}{\alpha} \exp\left\{-\frac{i\,2\pi^2\hbar\, t}{m\alpha^2}\right\}}$$

(*) Я предполагаю что по условию нам задана величина α (т.е. $V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \alpha/2 \\ \infty, & |x| > \alpha/2 \end{cases}$) потому что даже в предположении $V(x) = 0$ получается непрерывный спектр энергии, что противоречит первоначальному условию задачи.

7 Нарисовать вид волновой ф-ии стационарного состояния свободной частицы, в одномерном случае, не являющейся собственной функцией для оператора $\hat{p}_x$. Чему равно среднее значение p_x в этом случае.

Собственные функции и собственные значения $\hat{p}_x$ были рассмотрены в *8.1 на стр 29:

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip_x x/\hbar};$$ Спектр СЗ $\cdot \hat{p}_x$ непрерывный

Стационарные состояния $\equiv$ состояния с точно определённым значением энергии т.е это СФ оператора $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$; Для свободной частицы $V(\vec{r}) = 0$; Найдем СФ и СЗ $\hat{H}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E}{dx^2} = E\psi_E;$$ Пусть $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$

$$\psi''_E(x) + k^2\psi_E(x) = 0 \Rightarrow \psi_E = \begin{cases} \exp(ikx) \\ \exp(-ikx) \end{cases}$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m};\quad (k^2 > 0)$$ Спектр СЗ энергии непрерывный.

Найденные ф-ии ψ_E являются СФ оператора $\hat{p}_x$ соответствующими СЗ $p = \pm\hbar k$. т.е существуют два разных состояния соответствующих одному и тому же значению энергии E (такие состояния называются вырожденными), что позволяет представить ψ_E в виде $\psi_E = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$ 1*
(это состояние также дает значение энергии E)

Причем может быть представлен набор базисных состояний

$$\psi_E = \begin{cases} \sin(kx) \\ \cos(kx) \end{cases}$$ 2*; При этом 1* и 2* уже не являются состоянием с точно определённым значением импульса. $(A \neq 0; B \neq 0)$

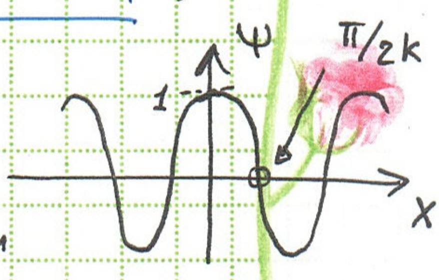
VI

7 продолжение

в итоге имеем что $\Psi_E = \begin{cases} \sin(kx) \\ \cos(kx) \end{cases}$

является СФ для $\hat{H}$ и не является СФ для $\hat{P}_x$ что и требовалось найти.

Возьмем например $\boxed{\psi = \cos(kx)}$, её график



В этом состоянии энергия определена точно и равна

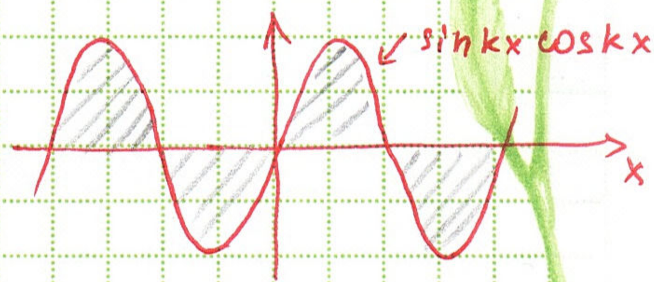
$E_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$; Теперь вычислим

среднее значение импульса: в этом состоянии

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) \cdot (+i\hbar k)(-\sin kx)\, dx =$$

$$= -i\hbar k \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\cos(kx) \sin(kx)}\, dx \Rightarrow \boxed{\langle P \rangle = 0}$$

Интеграл от этой ф-ии в симметричных пределах дает 0. (это очевидно если построить график этой ф-ии)



① Для состояний электрона в атоме водорода с главным квантовым числом $n=1$ и $n=2$ изобразить схематическую картину энергетических уровней, с учетом тонкой структуры. Показать разрешённые переходы. [Я рассмотрю еще и $n=3$]

* Эти правила действительны только для водорода.

Тонкая структура – расщепление уровня по числу возможных значений квантового числа j (s-уровни не расщепляются т.к имеют единственное значение $j=s=1/2$)!

Это расщепление имеет малый масштаб $\approx \alpha^2 E$.

α – постоянная тонкой структуры $\alpha = 1/137$

$\boxed{j = l \pm 1/2}$; $l = \overset{0}{s}\ \overset{1}{p}\ \overset{2}{d}\ \overset{3}{f}$ и т.д. ; $n\, l_j$ обозначение

Правила отбора (переходы удовлетворяющие им – разрешённые)

Δn – произвольно; $\Delta l = \pm 1$; $\Delta j = 0, \pm 1$;

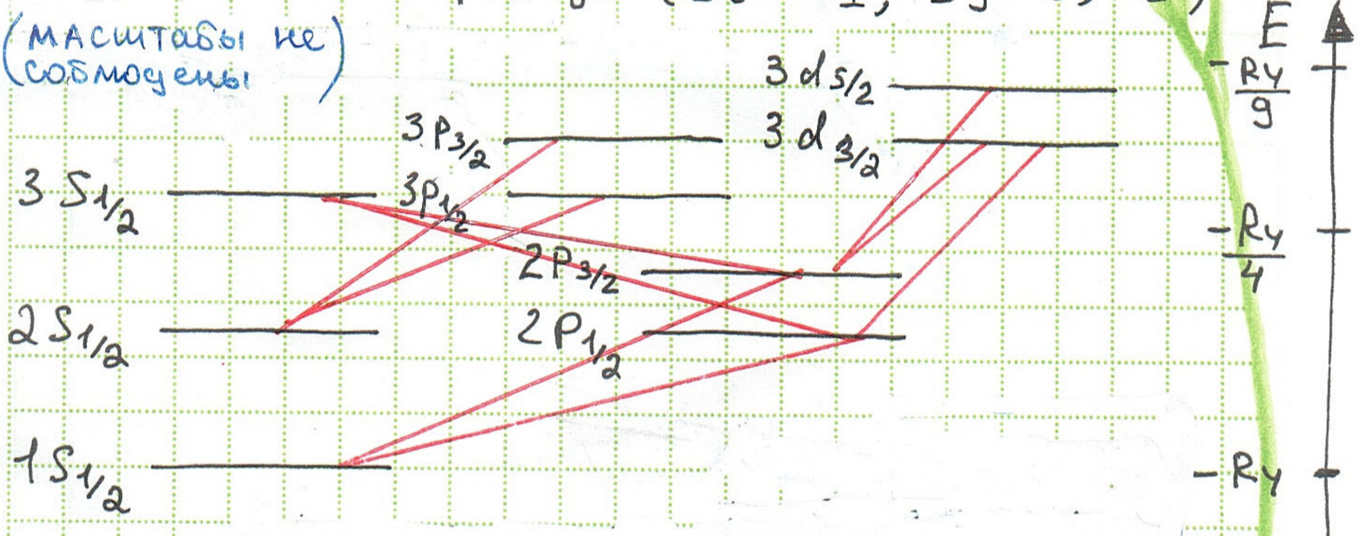
$n=1$: $1s \Rightarrow l=0$ $j = 0 + 1/2 = 1/2$ ← не расщепляется

$n=2$: $2s \Rightarrow l=0 \Rightarrow j=\frac{1}{2}$; $2p \Rightarrow l=1$ $j = 1 \pm \frac{1}{2}$; $j = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$

$n=3$: $3s \Rightarrow j=\frac{1}{2}$; $3p \Rightarrow j = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$; $3d \Rightarrow l=2$ $j = 2 \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow j = \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$; Теперь нарисуем всё это и покажем разрешенные переходы ($\Delta l = \pm 1$; $\Delta j = 0, \pm 1$)

(масштабы не соблюдены)



Уровни с одинаковыми значениями n и j имеют одинаковую энергию (без учета Лэмбовского сдвига)

2) Пучок атомов He в низшем метастабильном состоянии пролетает область слабого неоднородного магнитного поля. На сколько компонент произойдет расщепление.

Метастабильное состояние - возбуждённое состояние атомных систем, которые могут существовать длительное время. (Они запрещены правилами отбора и следовательно маловероятны или невозможны)

Низшее метастабильное состояние He: $1s^1 2s^1$

В слабом поле (см стр 43 № 1) количество компонент: $N = 2J+1$;

В $1s^1 2s^1$: $L = 0$; $S = 1$; $J = L + S = 1$

Расщепление произойдет на $\boxed{N = 3}$ компоненты

3) Сколько компонент имеет сверхтонкая структура основного состояния атомов водорода и дейтерия (спин протона $\frac{1}{2}$; спин дейтрона 1)

В результате сверхтонкого взаимодействия уровень расщепляется на несколько компонент число которых определяется числом возможных значений полного механического момента атома

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$$

${}_1H$ (водород) $1s^1$ $\vec{S} = 1/2$ $\vec{L} = 0$ $\vec{J} = \frac{1}{2}$

для ${}_2H$ (дейтрона) $\vec{J} = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{{}_1H} &= \vec{\tfrac{1}{2}} + \vec{\tfrac{1}{2}} = 0;\ 1 \\ \vec{F}_{{}_2H} &= \vec{\tfrac{1}{2}} + \vec{1} = \tfrac{1}{2};\ \tfrac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

число возможных значений равно 2

Сверх-тонкая структура ${}_1H$ и ${}_2H$ имеет две компоненты.

4) Определить все возможные термы и состояния в pd двухэлектронной конфигурации. Какой из термов является основным?

$l_1 = p = 1 \quad l_2 = d = 2 \quad \vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = 1; 2; 3$

спин электронов $\rightarrow S_{1,2} = \frac{1}{2}; \quad \vec{S} = \sum_1 \vec{S}_i = 0; 1$

правило суммирования
$|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, |j_1 + j_2|$

Общий вид терма ^{2S+1}L где $2S+1$ – мультиплетность

имеем термы: $\boxed{^1P \quad ^1D \quad ^1F \quad ^3P \quad ^3D \quad ^3F}$ термы

(или короче $^{1,3}PDF$) Теперь рассмотрим какие состояния J им соответствуют.

$^1P: \; S = 0, \; L = 1 \quad \vec{J} = \vec{S} + \vec{L} = 1$

$^1D: \; S = 0, \; L = 2 \quad \vec{J} = 2; \quad ^1F: \; S = 0, \; L = 3; \; \vec{J} = 3$

$^3P: \; S = 1 \quad L = 1 \quad \vec{J} = 0, 1, 2$

$^3D: \; S = 1 \quad L = 2 \quad \vec{J} = 1, 2, 3$

$^3F: \; S = 1 \quad L = 3 \quad \vec{J} = 2, 3, 4.$

состояния

Т.о. имеем (12 состояний) $\boxed{^1P_1 \quad ^1D_2 \quad ^1F_3 \quad ^3P_{0,1,2} \quad ^3D_{1,2,3} \quad ^3F_{2,3,4}}$

Основной терм определяется по правилам Хунда:

1) Среди термов принадлежащих одной конфигурации, наименьшую энергию имеет терм с наибольшим S

2) Среди термов с одинаковым S – терм с наибольшим L.

Т.е. $\boxed{\text{основной терм: } ^3F}$

5 Определить все возможные термы и состояния в sf двухэлектронной конфигурации. Какой из термов является основным?

Аналогично 4 на стр 67 ← подробно

$l_1 = s = 0 \quad l_2 = f = 3 \quad s_{1,2} \ \frac{1}{2}$

$\vec{L} = 3; \quad \vec{S} = 0, 1$ т.е. $\boxed{\text{термы} \quad {}^{1,3}F}$

${}^1F \quad S = 0 \quad L = 3 \quad J = 3$

${}^3F \quad S = 1 \quad L = 3 \quad J = 2, 3, 4$

$\boxed{4 \text{ состояния: } \quad {}^1F_3 \quad {}^3F_{2,3,4}}$

По правилам Хунда $\boxed{\text{основной терм: } \quad {}^3F}$

6) Определить все возможные термы и состояния в конфигурации двух неэквивалентных p-электронов. Какой из термов является основным?

$p^2: \ l_1 = 1 \quad l_2 = 1 \quad s = \pm 1/2 \quad \vec{L} = 0, 1, 2$

$\vec{S} = 0, 1$ т.е. термы: $\boxed{{}^{1,3}S, P, D}$

В случае эквивалентных электронов пришлось бы исключить термы для которых $L + S$ – нечётное

Рассмотрим соот-ющие этим термам состояния.

$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$

${}^1S: \ \vec{S} = 0 \ \vec{L} = 0 \ J = 0; \ {}^1P: \ J = 1$

${}^1D: \ J = 2; \quad {}^3S: \ S = 1 \ L = 0 \ J = 1$

${}^3P: \ \vec{S} = 1 \ \vec{L} = 1 \quad J = 0, 1, 2; \quad {}^3D \ S = 1 \ L = 2$

$J = 1, 2, 3$

т.е имеем 10 состояний: $\boxed{{}^1S_0 \ {}^1P_1 \ {}^1D_2 \ {}^3S_1 \ {}^3P_{0,1,2} \ {}^3D_{1,2,3}}$

Основной терм: ${}^3D$

7) Нарисовать радиальную волновую ф-ию и радиальное распределение плотности вероятности обнаружить e^- на расстоянии r от ядра в $2p$ состоянии водородоподобного иона с зарядом Z.

$$R_{nl}(r) = r^{l} \exp\left\{-\frac{Zr}{na_0}\right\}\left(b_0 + b_1 r + \dots + b_{n_r} r^{n_r}\right)$$

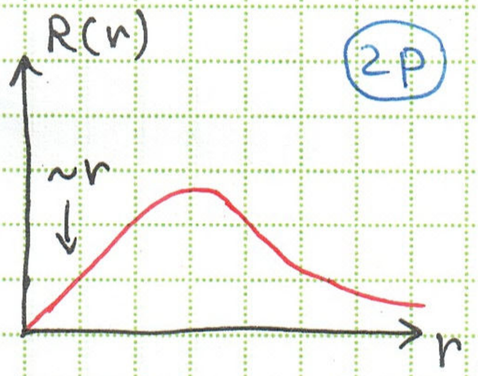
$n_r = n-(l+1)$ – число узлов радиальной ф-ии

в $2p$ состоянии $n=2$ $l=1$ $\Rightarrow$ $n_r = 2$

$$R_{2p}(r) = r\, e^{-Zr/a_0}\left(b_0 + b_1 r + b_2 r^2\right)$$ ← радиальная волновая ф-ия.

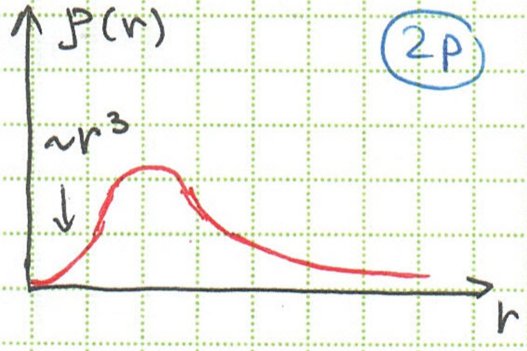
$$\rho = r^2 R_{2p}(r)$$

Метод построения графиков и сами графики были приведены в заданах 8 и *8 на страницах 41 и 42 соответственно.



2p $n_r = 0$ $R(0)=0$ $R(\infty)\to 0$

$R(r\to 0) \sim r$ $R(0)=0$



2p

$\rho(r) \geq 0$ $\rho(\infty) \to 0$

$\rho(0) = 0$ $\rho(r\to 0) \sim r^3$

(От задачи с просто атомом водорода эти графики отличаются лишь скоростью убывания экспоненты, ТЕ чем больше Z тем меньше „горбики" и тем быстрее графики стремятся к нулю.)

(8) Изобразить картину тонкого расщипления для терма с наименьшей энергией атома Берилия $(Z=4)$ (т.е. основной терм)

$4\,Be: 1s^2\,2s^2$ для такой конфигурации можно записать термы $^1S_0$ $^3S_1$ но терм $^3S_1$ – не реализуется т.к. $L+S$ – нечётное (эквивалентные электроны), следовательно основным и единственным термом будет $^1S_0$

Число подуровней на которые расщепляется уровень энергии с L и S при $S \leq L$ равно мультиплетности $2S+1$, при $S > L$ оно равно $2L+1$.

Для $^1S_0$ $S=0$ $L=0$ $\Rightarrow N=1$; – $\boxed{\text{терм нерасщеплен.}}$

Z=5 (*) Например для $B\,(Z=5)$ $1s^2 2s^2 2p^1$

основной терм $^2P_{\frac{1}{2};\frac{3}{2}}$ т.к. число электронов k

$k > 2l+1$ то имеем нормальный мультиплет $A > 0$

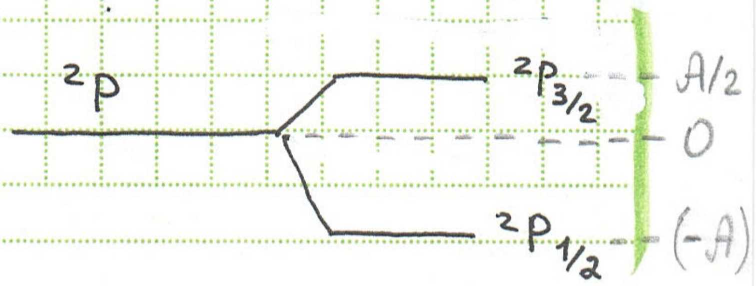
(Если $k < 2l+1$ – обращённый мультиплет $A<0$, если $k = 2l+1$ – терм нерасщиплён $A=0$)

Для $^2P_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$ $S=\frac{1}{2}$ $L=1$ $S<L \Rightarrow N=2$

$\boxed{^2P \text{ – нормальный дуплет}}$ $\Delta E_J = \frac{A}{2}\left(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right)$

$\Delta E_{\frac{1}{2}} = \frac{A}{2}\cdot(-2) = -A$

$\Delta E_{\frac{3}{2}} = \frac{A}{2}\cdot 1 = \frac{A}{2}$



9 Изобразить картину тонкого расщепления для терма с наименьшей энергией атома азота $Z = 7$.

просто так

^7N: $1s^2\,2s^2\,2p^3$; Наибольшее значение спина трёх электронов $S = 3/2$; при этом проекции орбитальных моментов всех трёх электронов должны быть различными $m_\ell = -1, 0, +1$. Единственное значение проекции суммарного орбитального момента есть $M_L = 0 \Rightarrow L = 0$ и терм $^4S_{3/2}$ ($m_\ell = -\ell \ldots 0 \ldots +\ell$; $M_L = \Sigma m_\ell$)

А вообще $2p^3$ заполнена на половину $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ тонкого расщепления нет. (см 8 на 71)

\+ Основные термы атомов первых 20 элементов.

$_1H$ $1s^1$ $^2S_{1/2}$

$_2He$ $1s^2$ $^1S_0$

$_3Li$ $1s^2 2s^1$ $^2S_{1/2}$

$_4Be$ $1s^2 2s^2$ $^1S_0$

$_5B$ $1s^2 2s^2 p^1$ $^2P_{1/2}$

$_6C$ $1s^2 2s^2 2p^2$ $^3P_0$

$_7N$ $1s^2 2s^2 2p^3$ $^4S_{3/2}$

$_8O$ $1s^2 2s^2 2p^4$ $^3P_2$

$_9F$ $1s^2 2s^2 2p^5$ $^2P_{3/2}$

$_{10}Ne$ $1s^2 2s^2 2p^6$ $^1S_0$

$_{11}Na$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ $^2S_{1/2}$

$_{12}Mg$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ $^1S_0$

$_{13}Al$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$ $^2P_{1/2}$

и так будет повторятся

до $_{18}Ar$ $3s^2 3p^6$ $^1S_0$

$_{19}K$ $3s^2 3p^6 \_ 4s^1$ $^2S_{1/2}$

$_{20}Ca$ $3s^2 3p^6 \_ 4s^2$ $^1S_0$

$_{21}Sc$ $3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$ $^2D_{3/2}$?

10) Найдите «расстояние» (в энергетических единицах) между двумя верхними энергетическими подуровнями, возникающими в слабом магнитном поле для состояния $^3S_1$.
Величина магнитного поля H, задана так что $e\hbar H/2mc = 10^{-5}$ эВ где m – масса покоя e^-

$\frac{e\hbar}{2mc} = \mu_0$ – магнетон Бора $\quad \Delta E = \mu_0 g H M_J$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$ – фактор Ланде

$M_J = -J, -J+1, \ldots, J+1, J$; для $^3S_1$ $L=0$; $S=1$; $J=1$.

$\Rightarrow M_J = -1, 0, +1$; $\quad g = 1 + 1 = 2$

двумя верхними уровнями будут $M_J = 0$ и $M_J = 1$

$$(\Delta E_1 - \Delta E_0) = \mu_0 H \cdot g\,(1-0) = \boxed{2\mu_0 H = 2\cdot 10^{-5}\text{ эВ}}$$

(11) Найдите «расстояние» в энергитических единицах) между двумя верхними энергитическими подуровнями возникающими в слабом магнитном поле, для состояния $^1S_0$

Величина магнитного поля H задана так, что $\mu_0 H = 10^{-5}$ эВ

$$\Delta E = \mu_0 g H M_J \qquad g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$$

$M_J = -J, J+1, \dots, +J$ для $^1S_0$ $\boxed{J=0}$ $L=0$ $S=0$

$$g = 1 + \frac{(J+1)+(J+1)-(J+1)}{2(J+1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$\boxed{M_J = 0}$ $\Rightarrow$ только одна компонента терма $^1S_0$

① Компоненты сверхтонкой структуры некоторого атома характеризуются значениями $F = 1, 2, 3, 4$. Какие моменты спина ядра I возможны в этом случае?

В рез-те сверхтонкого взаимодействия уровень расщепляется на несколько компонент, число которых определяется числом возможны полного механического момента $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$

$\vec{F} = 1, 2, 3, 4$ т.е. $1 = |J - I|$; $4 = J + I$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ раскрываем модуль $\begin{cases} +1 = J - I \\ 4 = J + I \end{cases}$ | $\begin{cases} -1 = J - I \\ 4 = J + I \end{cases}$

$-3 = -2I$ | $-5 = -2I$

$\boxed{I = \frac{3}{2}}$ | $\boxed{I = \frac{5}{2}}$

2) Спин ядра атома фтора ^{19}F $(z = 9)$ $I = \frac{1}{2}$.
Сколько компонент имеет сверхтонкая структура его основного состояния?

$_9F : 1s^2\ 2s^2\ 2p^5$ осн. сост. $^2P_{3/2}$ т.е. $J = \frac{3}{2}$
(см табл на 72)

$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} = 1, 2$ т.е.

сверхтонкая структура имеет две компоненты

③ Нарисовать картину зеемановского расщепления перехода $^1F_3 \to {}^1D_2$ в слабом магнитном поле. Определить число наблюдаемых линий и величину расщепления.

Если фактор Ланде равен нулю, то расщепления нет. $g = 1 + \dfrac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$, при $g = 1$ – простой эф-т Зеемана.

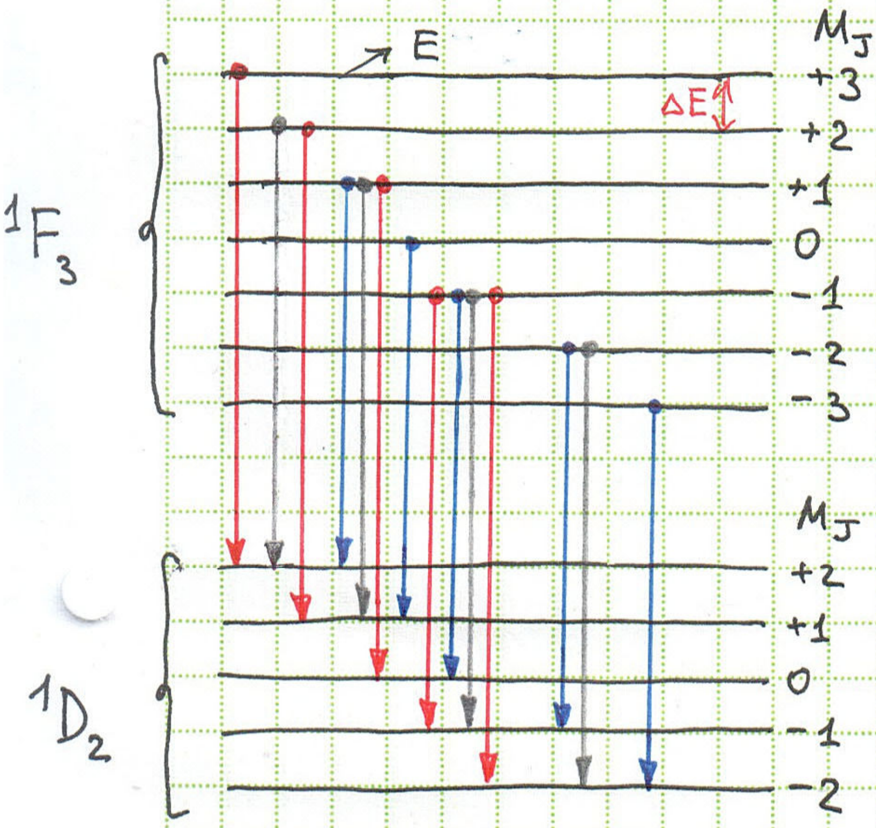
$^1F_3$: $S=0$ $L=3$. $J=3 \Rightarrow g = 1 \neq 0$

$^1D_2$: $S=0$ $L=2$ $J=2 \Rightarrow g = 1 \neq 0$

кол-во компонент расщепления (в слаб. поле) определяется числом $M_J = -J, \dots 0 \dots J$ т.е. $N = 2J+1$.

$N(^1F_3) = 7$ $N(^1D_2) = 5$.

Величина расщепления $\Delta E = g \mu_0 H = \mu_0 H$
магнетон Бора



$\Delta \omega = \dfrac{\mu_0 H}{\hbar}(g_2 M_{J_2} - g_1 M_{J_1})$

$E = E_0 + M_J \Delta E$, E_0 – в отсутств. маг. поля.

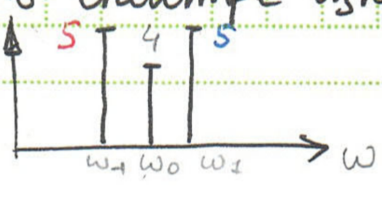
Компоненты линии удовлетворяют условиям
$\Delta M_J = 0$ π-компонента
$\Delta M_J = \pm 1$ σ-компонента
причем $0 \to 0$ запрещена правилами отбора

Линия $^1F_3 \to {}^1D_2$ расщепится на 14 компонент (по числу стрелочек)

Как видно, у нас: $\Delta M_J = 1$ – 5 компонент;
$\Delta M_J = 0$ – 4 компоненты
$\Delta M_J = -1$ – 5 компонент.

Энергия и частота компоненты линии $^1F_3 \to {}^1D_2$ $E_{J_2 J_1} = \hbar\omega \sim \Delta M_J$

Следовательно в спектре излучения будут всего три линии:



(4) Укажите переходы, образующие тонкую структуру головной линии серии Лаймана. в спектре атома ^1H. Определить величину тонкого расщепления.

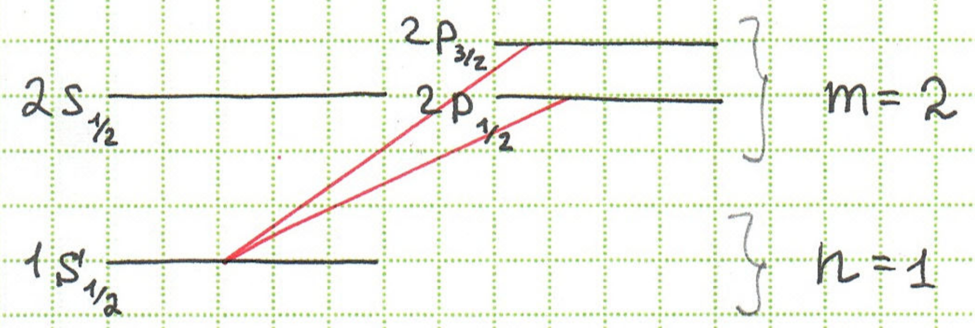
Тонкая структура атома водорода ^1H рассмотрена в задаче (1) на стр (64) (до $n=3$)

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

$(m \to m)$

$n=1$ серия Лаймана

$m=2$ – головная линия серии Лаймана.



Т.е тонкую структуру серии Лаймана составляют переходы $\boxed{2P_{3/2} \to 1S_{1/2}}$ $\boxed{2P_{1/2} \to 1S_{1/2}}$

Величина тонкого расщепления:

$$\Delta E_{j_1 j_2} = Ry\,\frac{\alpha^2 Z^4}{n^3}\,\frac{1}{l(l+1)}$$ для $n=2$, $l=1=P$

$$\boxed{\Delta E_{2P_{3/2},\,2P_{1/2}} = Ry\,\frac{\alpha^2\,1}{2^3}\,\frac{1}{2} \approx 3.33\,Ry\cdot 10^{-6}}$$

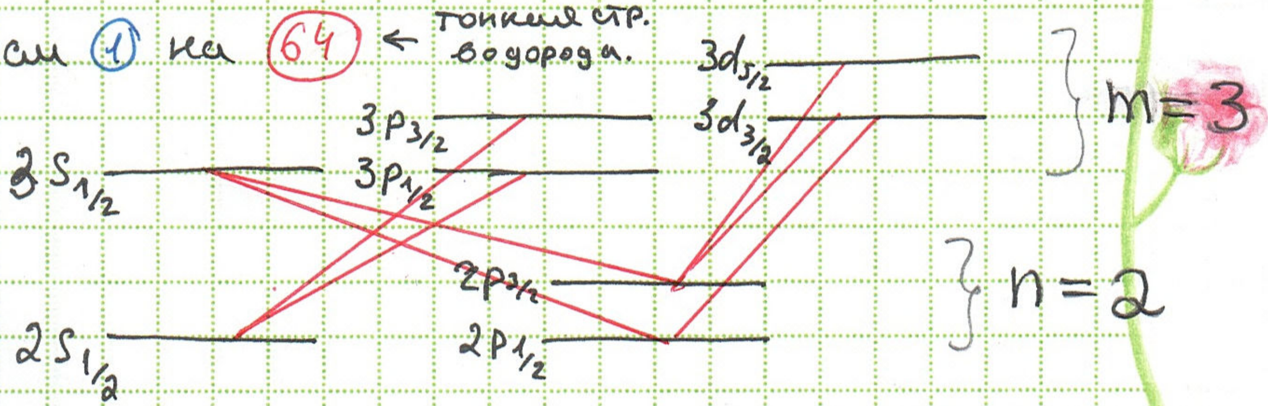
$\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

5 Укажите переходы образующие тонкую структуру головной линии серии Бальмера в спектре атома водорода.

Аналогично 4 на 78

$n = 2$ – серия Бальмера $m = 3$ – головная линия серии Бальмера.

см 1 на 64 ← тонкая стр. водорода.



Т.е это переходы: $3S_{1/2} \to 2P_{3/2}$; $3S_{1/2} \to 2P_{1/2}$; $3P_{3/2} \to 2S_{1/2}$; $3P_{1/2} \to 2S_{1/2}$; $3d_{5/2} \to 2P_{3/2}$; $3d_{3/2} \to 2P_{3/2}$; $3d_{3/2} \to 2P_{1/2}$

⑥ Сколько компонент имеет сверхтонкая структура основного состояния атома водорода? Оцените величину расщепления.

В результате сверхтонкого взаимодействия уровень расщепляется на несколько компонент число которых определяется числом возможных значений полного механического момента атома $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ (I - спин. ядра)

Основное состояние ^1H: $^2S_{1/2}$; спин протона $I = 1/2$

$\vec{F} = \vec{\frac{1}{2}} + \vec{\frac{1}{2}} = 0, 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{две компоненты сверхтонкой структуры.}}$

Величина расщепления $\Delta E_{F, F-1} = B \cdot F$

где $B > 0$. т. о. $\boxed{\Delta E_{1,0} = B}$

7) У каких элементов ($Z = 1 - 10$) при электромагнитном переходе из возбуждённого состояния в основное будет наблюдаться нормальный эффект Зеемана?

Фактор Ланде $g = 1$

Нормальный эффект Зеемана наблюдается при переходах между:

- синглетными термами ($S=0$, $J=L$)
- уровнями $L=0$ и $J=S$
- уровнями $J=1$ и $J=0$

глядя на таблицу в 9 на 72 делаем вывод, что этим условием удовлетворяют лишь атомы с основным термом ${}^1S_0$ т.е.

$$\boxed{{}_2He \quad {}_4Be \quad {}_{10}Ne}$$

(8) Компоненты тонкой структуры многоэлектронного атома характеризуются значением квантового числа $J = 1, 2, 3$. Найдите все возможные термы, дающие такую картину тонкого расщепления.

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ т.е. $|L - S| = 1$ $\quad L + S = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ раскрываем модуль

$$\begin{cases} L - S = 1 \\ L + S = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} L - S = -1 \\ L + S = 3 \end{cases}$$

$2L = 4$ $\qquad$ $2L = 2 \quad L = 1$

$L = 2$ $\qquad$ $S = 3 - L = 2$

$S = 3 - L = 1$

$L = 2 = D \quad S = 1$ соо-ет терм ^3D

$L = 1 = P \quad S = 2$ соо-ет терм ^5P

1) Исходя из соотношения неопределённостей оценить потенциал ионизации основного состояния водородоподобного иона с зарядом ядра Z.

для основного сост. (с миним. энергией)

$$\underset{\text{радиус иона}}{\Delta x \sim R} \qquad \Delta p \sim p \quad \Rightarrow \quad p \sim \hbar / R$$

$$E = \underbrace{-\frac{Ze^2}{R}}_{U} + \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{T} \qquad \underline{I = -E_1}$$

энергия основного сост.

для водородоподобн. иона

Условие равновесия на круговой орбите:

$$\underbrace{\frac{p^2}{mR}}_{\text{центробежная сила}} = \overbrace{\frac{Ze^2}{R}}^{\text{закон Кулона}} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{mR} = Ze^2 \qquad R = \frac{\hbar^2}{Ze^2 m}$$

$$\underline{I} = -\underline{E} = -\left(-\frac{Ze^2(Ze^2 m)}{\hbar^2} + \frac{\hbar^2(Z^2 e^4 m^2)}{2m\hbar^4}\right) =$$

$$\Rightarrow \boxed{I = +\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} = Ry\, Z^2}$$

② Сколько спектральных линий будет наблюдаться в слабом магнитном поле при переходе

$nsnp\ ^3P_1 \to npn'p\ ^3P_1$?

+ см ③ на стр 77

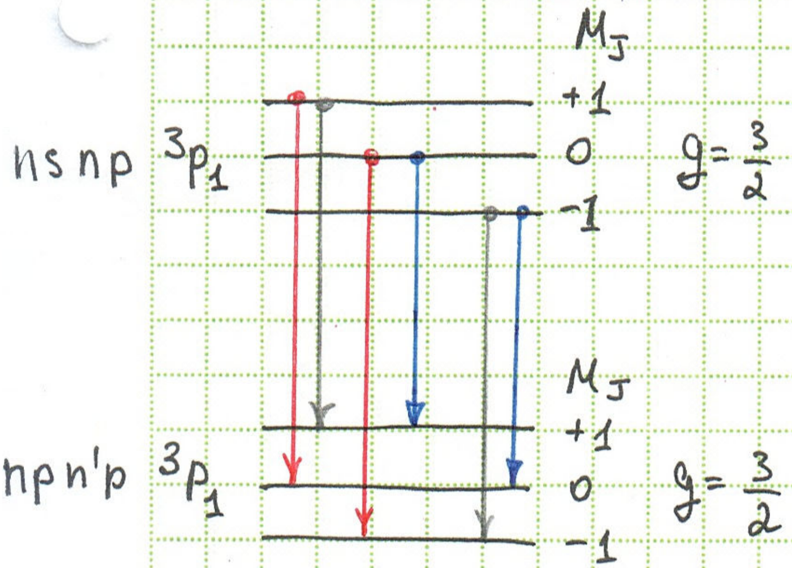
(Эффект Зеемана)

Фактор Ланде: $g = 1 + \dfrac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$

$^3P_1$: $S=1$, $J=1$, $L=1$ $\Rightarrow$ $g = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow$

расщепление есть. на $N = 2J+1$

$N = 2\cdot 1 + 1 = 3.$



компоненты удовлетворяют усл:

$\Delta M_J = 0, \pm 1.$

причём $0 \to 0$ запрещен.

$\Delta M_J = 0$ 2 компоненты

$\Delta M_J = 1$ 2 компоненты

$\Delta M_J = -1$ 2 компоненты

т.к. E и ω спектральной линии:

$E = \hbar\omega = \mu_0 H (g_1 M_{J_1} - g_2 M_{J_2})$ при $g_1 = g_2 = g \Rightarrow$

$E = \hbar\omega = \mu_0 H g \Delta M_J. \Rightarrow$ число спектральных линий определяется числом возможных ΔM_J т.е. в спектре наблюдаются только **три линии**.

③ В возбуждённом состоянии атома углерода один из электронов из $2p$ подоболочки находится в состоянии с главным квантовым числом $n=3$. Записать все возможные электронные конфигурации и соответствующие им термы.

Осн. сост. ат. углерода: $_6C$ $1s^2 2s^2 2p^2$ $^3P_{1/2}$

Возможные конфигурации по усл. задачи:

$$\left.\begin{array}{l} 1s^2 2s^2 2p^1 3s^1 \\ 1s^2 2s^2 2p^1 3p^1 \\ 1s^2 2s^2 2p^1 3d^1 \end{array}\right\}$$ электроны не эквивалентные

$l_1 = p = 1.$

$S = 0, 1$

все термы реализуются.

Как искать термы для этих состояний см. 4 на 67

для $2p\,3s^1$: $l_2 = s = 0$ $L = 1$ термы: $^{1,3}P$

для $2p\,3p$: $l_2 = p = 1$ $L = 0, 1, 2$ термы $^{1,3}S, P, D$

для $2p\,3d$: $l_2 = d = 2$ $L = 1, 2, 3$ термы: $^{1,3}P, D, F$

4 На сколько компонент расщепится пучок атомов фосфора ($Z=15$), находящимся в основном состоянии, в эксперименте Штерна–Герлаха в случае слабого и сильного магн. поля.

В сильном поле LS взаимодействием пренебречь

сильное поле разрывает LS связь.

$^{15}P: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$ осн. терм: $^4S_{3/2}$

(см. табл. на 72)

См № 1 стр 43 ← теория; Фактор Ланде

$^4S_{3/2}$: $S=\frac{3}{2}$; $L=0$; $J=\frac{3}{2}$; $g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}$

$g(^4S_{3/2}) = 2$ → расщепление в слабом поле на $N_{сл.} = 2J+1$ компоненту.

$\boxed{N_{слаб} = 2\cdot\frac{3}{2}+1 = 4}$ компоненты

В случае сильного поля $N_{сильн}$ определяется числом возможных компонент суммы $M_L + 2M_S$

$M_L = 0$ $M_S = 0, \pm\frac{1}{2}; \pm 1; \pm\frac{3}{2}$

$M_L + 2M_S = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3;$ ⇒ $\boxed{N_{сил.} = 7 \text{ компонент.}}$

5) На сколько компонент расщепится пучок атомов серы ($Z = 16$), находящийся в основном состоянии, в эксперименте Штерна-Герлаха в случае слабого и сильного маг. полей. В сильном поле LS взаимодействием пренебречь.

+ см 1 на 43 и 4 на 86; + табл. осн. сост. на стр 72

$^{16}S \; 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 \; : \; {}^3P_2$ – осн. терм. $S = 1$, $P = 1$, $J = 2$

$$g = 1 + \frac{J(1+J)+S(S+1) \quad L(L+1)}{2J(J+1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{N_{слаб} = 2J + 1 = 5}$ компонент.

В сильном поле: $N_{сил.}$ соот-ет числу возм. комп. суммы $M_L + 2M_S$; $M_L = 0, \pm 1$

$M_S = 0; \pm\frac{1}{2}; \pm 1;$

т.е. $M_L + 2M_S = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$ $\boxed{N_{сил.} = 7}$ компон.

IX

6 На сколько компонент расщепится пучок атомов кремния. $Z = 14$, находящийся в основном состоянии, в эксперименте Штерна-Герлаха в случае слабого и сильного магнитного поля? В сильном поле LS взаимодействием пренебречь.

+ см 1 на 43 и 4 на 86; + таблица осн. сост на стр 72

$^{14}Si \quad 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2 \qquad {}^3P_0 \quad J = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{расщепления в слабом поле не будет.}}$

* (При $J=0$ в слабом поле ВСЕГДА нет расщепления)

В сильном поле:

$M_L = 0, \pm 1 \qquad M_S = 0; \pm \frac{1}{2}; \pm 1$

$M_L + 2M_S = 0, \pm 1; \pm 2; \pm 3 \Rightarrow \boxed{N_{сил} = 7}$

7 В каких элементах 10–20 расщепится на два уровня за счет спин-орбитального взаимодействия? (неполное условие)

Следствием спин-орбитального взаимодействия является возникновение тонкой структуры атома. Видимо её и надо рассматривать.

+ (см. таблицу на стр 72)

Число подуровней на которые расщепится уровень энергии с L и S при $L \leq S$ равно $2S+1$

а при $L > S$ $2L+1$;

т.е. для расщепление на 2 уровня либо

$$\begin{cases} 2S+1=2 \\ L \leq S \end{cases}, \text{ либо } \begin{cases} 2L+1=2 \\ L > S \end{cases} \Rightarrow$$

$S = 1/2$ $(L \leq S)$ т.е. терм ^2S

или $L = 1/2$ → невозможно. Глядя на таблицу осн. сост. 72 находим что основному терму

^2S соответствуют $\boxed{{}_{11}Na\ {}^2S_{1/2} \text{ и } {}_{19}K\ {}^2S_{1/2}}$

8) Исходя из соотношения неопределённостей оценить удаление электрона от ядра в основном состоянии водородоподобного иона с Z.

радиус иона

$\Delta x \sim R$ $\quad$ $\underbrace{\Delta p \sim p}_{\text{для осн. сост с}}$ $\quad$ $\underset{\text{энергией}}{p \sim \dfrac{\hbar}{R}}$

ненужно

$$E = -\frac{Ze^2}{R} + \frac{p^2}{2m};$$

Условие стационарного существования орбиты: $\underbrace{\dfrac{p^2}{mR}}_{\text{центробежная сила}} = \overbrace{\dfrac{Ze^2}{R}}^{\text{з-н Кулона}}$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{mR} = Ze^2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{\hbar^2}{Ze^2 m}}$$

IX не решено :(

(9) Шесть невзаимодействующих частиц, каждая из которых характеризуется квантовым числом спина $s = 1/2$, занимают стационарные состояния двумерного гармонического осциллятора с частотой ω, так чтобы величина их суммарной полной энергии была минимальна. Чему равно значение суммарной энергии? Релятивистские поправки и поправки более высокого порядка не учитывать.

Уровни энергии двухмерного гармонич. осцил. $E_n = \hbar\omega(n+1)$

$n = 0, 1, 2 \ldots$

?

Найдите отношение вероятностей обнаружить электрон на уровне с номером $n = 4$ в интервале коо-т $[0, \frac{b}{2}]$ для бесконечно глубокой потенциальной ямы шириной b и $2b$.

Волновая ф-ия частицы в одномерной потенциальной яме:

$$\varphi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cos \frac{\pi n x}{\alpha} & n = 1, 3, 5 \ldots \\ \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin \frac{\pi n x}{\alpha} & n = 2, 4, 6 \ldots \end{cases}$$

Т.к для $n = 4$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin \frac{4\pi x}{\alpha}$$

α - ширина ямы

Вероятность обнаружить частицу в интервале коо-т $[0; b/2]$:

$$P(\alpha) = \int_0^{b/2} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{b/2} \sin^2 \frac{4\pi x}{\alpha} dx =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left(\frac{b}{4} - \underbrace{\frac{\alpha \sin\left[\frac{4\pi b}{\alpha}\right]}{16\pi}}_{=0 \text{ при } \alpha = b;\ \alpha = 2b} \right)$$

$$\boxed{\frac{P(b)}{P(2b)} = \frac{2/4}{1/4} = 2.}$$

11 Найти отношение вероятностей обнаружить электрон на уровне с номером $n=$ в интервале коо-т $[0; b/3]$ для бесконечно глубокой ямы шириной b; $2b$.

(аналогично 10 на 92) для $n = 3$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{3\pi x}{a}$$

равно 0 при $a=b$, $a=2b$

$$P(a) = \int_0^{b/3} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{12}\left(2b + \frac{a \sin\left(\frac{2b\pi}{a}\right)}{\pi}\right)$$

$$\boxed{\frac{P(b)}{P(2b)} = \frac{2/b \cdot b/6}{2/2b \cdot b/6} = 2}$$