ЧАСТЬ 6

Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики

Основные уравнения и формулы

- Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$

  где h — постоянная Планка,
  p — импульс частицы.

- Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

  для координаты и импульса $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$

  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

  где Δx — неопределенность координаты частицы,
  Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на соответствующую координатную ось;

  для энергии и времени $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi} = \hbar$

  где ΔE — неопределенность энергии частицы в некотором состоянии,
  Δt — время нахождения частицы в этом состоянии.

- Плотность вероятности нахождения частицы в соответствующем месте пространства $w = |\psi|^2$

  где ψ — волновая функция частицы.

- Волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$

  где l — ширина ямы,
  x — координата частицы в яме ($0 < x < l$),
  n — квантовое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

- Энергия частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме $E_п = \frac{h^2}{8ml^2} n^2$

  где m — масса частицы.

- Сериальные формулы спектра водородоподобных атомов $\frac{1}{\lambda} = R'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$

  где λ — длина волны спектральной линии,
  R' — постоянная Ридберга,
  Z — порядковый номер элемента,
  $n = 1, 2, 3, \ldots, k = n + 1, n + 2, \ldots$

- Спектральные линии характеристического рентгеновского излучения $\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$

  где a — постоянная экранирования.

- Дефект массы ядра $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я = Zm_\text{H} + (A - Z)m_n - m_а$

  где m_p — масса протона,
  m_n — масса нейтрона,
  $\mathrm{m_H}$ —масса атома ${}^1_1\mathrm{H}$,
  $m_а$ и $m_я$ — масса атома и его ядра ${}^A_ZX$,
  Z и A — зарядовое и массовое числа.

- Энергия связи ядра $E_{св} = c^2\Delta m$

  где c — скорость света в вакууме.

- Удельная энергия связи $\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A}$

- Закон радиоактивного распада $N = N_0 \exp(-\lambda t)$

  где N_0 — начальное число радиоактивных ядер в момент времени $t = 0$,
  N — число нераспавшихся радиоактивных ядер в момент времени t,
  λ — постоянная радиоактивного распада.

- Активность радиоактивного вещества $a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$

- Энергия ядерной реакции $Q = c^2(m_1 + m_2 - \sum m_i')$

  где m_1 и m_2 — массы покоя частиц, вступающих в реакцию,
  $\sum m_i'$ — сумма масс покоя частиц, образовавшихся в результате реакции.

- Закон поглощения излучения веществом $I = I_0 \exp(-\mu x)$

  где I_0 — интенсивность излучения на входе в поглощающий слой вещества,
  I — интенсивность излучения после прохождения поглощающего слоя вещества толщиной x,
  μ — линейный коэффициент поглощения.

Примеры решения задач

1. Электронные оболочки атома. Теория Бора

1. Атом водорода испустил фотон с длиной волны $4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м. На сколько изменилась энергия электрона в атоме?

Дано: $\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: ΔE.

Решение. По теории Бора при переходе электрона из состояния с энергией E_n в состояние с энергией E_m излучается фотон с энергией, равной $h\nu = E_n - E_m = \Delta E$.

Учитывая, что $\nu = c/\lambda$, получаем

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda};\ \Delta E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}86 \cdot 10^{-7}} \simeq 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) \simeq 2{,}56\ (\text{эВ}).$$

2. Определить первый боровский радиус орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

Дано: $Z = 1$; $n = 1$.

Найти: r_1, v.

Решение. Радиус n-й орбиты в водородоподобном атоме, заряд ядра которого равен Ze, определяется по формуле

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{mZe^2} \cdot n^2 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m Z e^2} n^2,$$

где n — номер орбиты, m — масса электрона.

При $n = 1$ и $Z = 1$

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2};\ r_1 = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} \simeq 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

По второму постулату Бора момент импульса электрона на n-й орбите равен $mvr_n = n \cdot \dfrac{h}{2\pi}$.

Тогда $v = nh/2\pi m r_n$ и при $n = 1$ значение $v = h/2\pi m r_1$,

$$v = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} \simeq 2{,}2 \cdot 10^6\ (\text{м/с}).$$

3. Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую.

Дано: $m = 2$; $n = 6$; $R' = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по обобщенной формуле Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где R' — постоянная Ридберга, m и n — номера орбит, между которыми происходит переход электрона. Из этой формулы следует, что

$$\lambda = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)};\ \lambda = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)} \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

4. Определить наибольшие и наименьшие длины волн фотонов, излучаемых при переходе электронов в сериях Лаймана, Бальмера и Пашена.

Дано: $R' = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Найти: $\lambda_{1\,max}$, $\lambda_{1\,min}$, $\lambda_{2\,max}$, $\lambda_{2\,min}$, $\lambda_{3\,max}$, $\lambda_{3\,min}$.

Решение. Обобщенная формула Бальмера позволяет определять длину волны λ при всевозможных переходах электрона в атоме водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ или } \lambda = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}.$$

В серии Лаймана переход осуществляется на первую орбиту со всех остальных, т. е. $m = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots, \infty$.

Следовательно,

$$\lambda_{1\,max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7(1 - 0{,}25)} \simeq 0{,}122\ (\text{мкм});$$

$$\lambda_{1\,min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{R'} \simeq 0{,}091\ (\text{мкм}).$$

В серии Бальмера переход осуществляется на вторую орбиту со всех вышележащих , т. е. $m = 2$; $n = 3, 4, 5, \ldots, \infty$.

$$\lambda_{2\,max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7(025 - 0{,}11)} \simeq 0{,}656\ (\text{мкм});$$

$$\lambda_{2\,min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 0{,}25} \simeq 0{,}365\ (\text{мкм}).$$

В серии Пашена переход осуществляется на третью орбиту со всех вышележащих, т. е. $m = 3$; $n = 4, 5, 6, \ldots, \infty$.

$$\lambda_{3\,\max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)} \simeq 1{,}88 \text{ (мкм)};$$

$$\lambda_{3\,\min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7} \simeq 0{,}82 \text{ (мкм)}.$$

5. Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ($\lambda = 0{,}4 \div 0{,}76$ мкм)? Вычислить длины волн этих линий. Каким цветам они соответствуют?

Дано: $0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}76$ мкм; $R' = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Найти: λ.

Решение. Длины волн спектра атома водорода определяются по формуле

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots, k = n + 1; n + 2; \ldots$.

В видимой области спектра находятся первые четыре линии серии Бальмера ($n = 2$, $k = 3, 4, 5, 6$). Длины волн этих линий будут равны:

$$\lambda_1 = \frac{1}{R'}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^{-1} \simeq$$

$$\simeq 6{,}56 \cdot 10^{-7} \text{ (м) — красная линия};$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)^{-1} \simeq 4{,}86 \cdot 10^{-7} \text{ (м) — голубая линия};$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)^{-1} \simeq 4{,}34 \cdot 10^{-7} \text{ (м) — фиолетовая линия};$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right)^{-1} \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ (м) — фиолетовая линия}.$$

2. Элементы квантовой механики

6. Кинетическая энергия протона в 4 раза меньше его энергии покоя. Вычислить дебройлеровскую длину волны протона.

Дано: $E_к = \frac{E_0}{4}$; $E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля λ определяется по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1)$$

Поскольку по условию задачи

$$E_к = \frac{E_0}{4}, \qquad (2)$$

кинетическая энергия $E_к$ протона сравнима с его энергией покоя E_0, то импульс p и кинетическая энергия связаны релятивистским соотношением

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) условие (2), найдем

$$p = \frac{3}{4}\frac{E_0}{c}. \qquad (4)$$

С учетом равенства (4) выражение (1) примет вид

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{hc}{E_0}. \qquad (5)$$

Подставляя в (5) числовые значения, получим

$$\lambda = \frac{4 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-10}} \simeq 1{,}77 \cdot 10^{-15} \text{ (м)}.$$

7. Вычислить длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}75c$ (c — скорость света в вакууме).

Дано: $v = 0{,}75c$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Импульс частицы, движущейся с релятивистской скоростью v, равен $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{mv} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}75 \cdot 3 \cdot 10^8}\sqrt{1 - 0{,}75^2} \simeq 2{,}14 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

8. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Вычислить длину волны де Бройля для такого протона.

Дано: $E_к = E_0$; $E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля вычисляется по формуле $\lambda = \frac{h}{p}$. Импульс релятивистской частицы (каким является протон в условиях данной задачи, так как $E_к = E_0$) вычисляется по формуле

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)} = E_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{c}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}};\ \lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}5 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{3}} \simeq 7{,}7 \cdot 10^{-16}\ (м).$$

9. Определить кинетическую энергию протона и электрона, для которых длина волны де Бройля равна 0,06 нм.

Дано: $\lambda = 6 \cdot 10^{-11}$ м.
Найти: E_e, E_p.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Из уравнения кинетической энергии

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Найдем импульс:

$$p = \sqrt{2E_к m}.$$

Подставив его в выражение для волны де Бройля, получим:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E_к \cdot m}},$$

откуда $$E_e = \frac{h^2}{2\lambda^2 m};\ E_e = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 6^2 \cdot 10^{-22} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \simeq$$
$$\simeq 6{,}7 \cdot 10^{-17}\ (Дж) = 419\ (эВ).$$

$$E_p = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 6^2 \cdot 10^{-22} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \simeq 3{,}7 \cdot 10^{-20}\ (Дж) \simeq 0{,}23\ (эВ).$$

10. Протон обладает кинетической энергией, равной энергии покоя. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля протона, если его кинетическая энергия увеличится в 2 раза?

Дано: $E_{к1} = E_0$; $E_{к2} = 2E_0$.

Найти: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$.

Импульс $$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}.$$

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к1}(E_{к1} + 2E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{E_0(E_0 + 2E_0)}} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}};$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к2}(E_{к2} + 2E_0)}} = \frac{hc}{2\sqrt{2}E_0};\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \simeq 1{,}63.$$

Длина волны уменьшится в 1,63 раза.

11. Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы длина волны де Бройля протона равнялась его комптоновской длине волны?

Дано: $\lambda_Д = \lambda_C$.
Найти: $E_к$.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda_Д$ и комптоновская λ_C длина волны определяются по формулам:

$$\lambda_Д = \frac{h}{p},$$

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}.$$

Импульс движущегося протона

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так как $\lambda_Д = \lambda_C$, то $p = mc$ и $mc = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

откуда $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, а $v = \frac{c}{\sqrt{2}}$. $E_к = E - E_0$,

где $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ полная энергия, $E_0 = mc^2$ — энергия покоя.

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right);$$

$$E_к = E_0(\sqrt{2} - 1) = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}41 =$$
$$= 6{,}23 \cdot 10^{-11}\ (Дж) = 389\ (МэВ).$$

12. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля для случаев: U = 51 В; U = 510 кВ.

Дано: $U_1 = 51$ В; $U_2 = 5{,}1 \cdot 10^5$ В; $E_0 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Найти: λ_1, λ_2.

Решение. Длина волны де Бройля равна $\lambda = \dfrac{h}{p}$. Импульс выразим из условия, что кинетическая энергия электрона равна $E_к = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m^2v^2}{2m} = \dfrac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2E_к m}$. С другой стороны, $E_{к1} = eU_1$, где e — заряд электрона. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2eU_1 m}};$$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 1{,}72 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

Во втором случае импульс p определяем по формуле

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{E_{к2}(E_{к2} + 2E_0)},$$

где E_0 — энергия покоя электрона, $E_{к2} = eU_2$. Тогда

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к2}(E_{к2} + 2E_0)}};$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}1 \cdot 10^5(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-14})}} = $$
$$= 1{,}4 \cdot 10^{-12}\ (\text{м}).$$

13. Среднее время жизни возбужденных состояний атома составляет 10 нс. Вычислить естественную ширину спектральной линии (λ = 0,7 мкм), соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома.

Дано: $\tau = 10^{-8}$ с; $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: $\Delta\lambda_{\min}$.

Решение. При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) энергия, равная

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_k. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что неопределенность длины волны $\Delta\lambda$ излучения связана с неопределенностью энергии уровней ΔE_n и ΔE_k атома соотношением

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \Delta E_n + \Delta E_k. \qquad (2)$$

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}, \qquad (3)$$

где Δt — неопределенность времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое.

Поскольку Δt не превышает среднее время жизни τ возбужденного состояния атома, то минимальная неопределенность энергии возбужденных уровней, согласно (3), равна

$$\Delta E_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \qquad (4)$$

Из (2) с учетом (4) найдем минимальную неопределенность длины волны излучения, которая называется естественной шириной спектральной линии

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k}\right). \qquad (5)$$

Если одно из состояний, между которыми совершается переход, является основным, то

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \qquad (6)$$

поскольку для основного состояния $\tau = \infty$. Для возбужденных состояний с одинаковым временем жизни $\tau_n = \tau_k = \tau$ имеем

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) числовые значения, получим

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{(7 \cdot 10^{-7})^2}{3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} \simeq 5{,}2 \cdot 10^{-14}\ (\text{м}).$$

14. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано: $E = 10$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ Дж; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: r.

Решение. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar,$$

где Δx — неопределенность координаты, Δp_x — неопределенность импульса, $\hbar$ — постоянная Планка.

Предполагая, что $\Delta x \simeq r$ — линейному размеру атома, получим $r \simeq \dfrac{\hbar}{\Delta p}$. Импульс электрона, обладающего кинетической энергией E, равен

$$p = \sqrt{2mE}.$$

Предполагая, что по порядку величины $\Delta p \simeq p$, оценим r:

$$r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}};\ r = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}} = 0{,}62 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

15. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислить минимальную неопределенность длины волны $\lambda = 12$ мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

Дано: $\Delta t = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ с; $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м.
Найти: $\Delta\lambda$.
Решение. Энергия излучаемого фотона

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Продифференцируем E по λ:

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2},\ \text{или}\ \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geqslant \dfrac{h}{2\pi}$ выразим ΔE.

$\Delta E = \dfrac{h}{(\Delta t) \cdot 2\pi}$, здесь Δt и ΔE — неопределенности времени и энергии.

Приравняем выражения для ΔE:

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{h}{\Delta t 2\pi},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 h}{hc\Delta t 2\pi};$$

$$\Delta\lambda = \frac{1{,}2^2 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}28} \simeq 6{,}4 \cdot 10^{-16}\ (\text{м}).$$

16. Среднее время жизни π^0-мезона равно $1{,}9 \cdot 10^{-16}$ с. Какова должна быть энергетическая разрешающая способность прибора, с помощью которого можно зарегистрировать π^0-мезон?

Дано: $t = 1{,}9 \cdot 10^{-16}$ с.
Найти: $\Delta E'$.
Решение. Разрешающая способность $\Delta E'$ должна быть не меньше неопределенности энергии ΔE в условиях поставлен-

ной задачи, т. е. $\Delta E' = \Delta E$. Предполагая, что время жизни мезона t примерно равно неопределенности времени Δt в соотношении неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geqslant \dfrac{h}{2\pi}$, получим

$$\Delta E' = \frac{h}{2\pi t};\ \Delta E' = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{6{,}28 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-16}} \simeq 5{,}6 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}).$$

17. Атом испустил фотон с длиной волны 0,55 мкм. Продолжительность излучения 10 нс. Определить наименьшую погрешность, с которой может быть измерена длина волны излучения.

Дано: $\lambda = 0{,}55$ мкм; $t = 10^{-8}$ с.
Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Энергия фотона $E = \dfrac{hc}{\lambda}$,

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2}\ \text{или}\ \Delta E = -\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{(\Delta E) \cdot \lambda^2}{h \cdot c}.$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}.$$

Отсюда

$$\Delta E = \frac{h}{t 2\pi}.$$

Подставляя ΔE в формулу для $\Delta\lambda$, получим:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{t2\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{hc};$$

$$\Delta\lambda = \frac{5{,}5^2 \cdot 10^{-14}}{1 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-14}\ (\text{м}).$$

18. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, ширина которой $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м. Определить энергию, излучаемую при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй.

Дано: $l = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м; $n = 2$; $n + 1 = 3$.
Найти: ΔE.
Решение. Энергия E_n электрона (масса $= m$), находящегося на n-м энергетическом уровне в потенциальной яме шириной l,

определяется по формуле $E_n = \frac{h^2 n^2}{8ml^2}$. Энергия, излучаемая при переходе электрона с $(n+1)$-го уровня на n-й, равна

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(2n+1);$$

$$\Delta E = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 5}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^{-18}} \simeq 1{,}54 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} \simeq 1 \text{ (эВ)}.$$

19. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $l = 1$ нм. Определить наименьшую разность энергетических уровней электрона.

Дано: $l = 10^{-9}$ м.
Найти: $\Delta E_{\min}$.
Решение. Энергия электрона E_n, находящегося в потенциальной яме шириной l, на n-м энергетическом уровне определяется по формуле

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2.$$

Разность $\Delta E_{n,\,n+1}$ энергий электрона на соседних n и $(n+1)$-м уровнях равна

$$\Delta E_{n,\,n+1} = \frac{h^2}{8ml^2}(2n+1).$$

Очевидно, что ΔE будет минимальна при $n = 1$.

$$\Delta E_{\min} = \frac{6{,}63^2 \cdot 3 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-18}} \simeq 1{,}8 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} \simeq 1{,}1 \text{ (эВ)}.$$

20. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l на втором энергетическом уровне. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

Дано: l, $w_n = w_\infty$, $n = 2$.
Найти: x.
Решение. Волновая функция ψ, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l, имеет вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (1)$$

Согласно физическому смыслу волновой функции,

$$|\psi|^2 = w, \qquad (2)$$

где w — плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x.

Если частица находится на втором энергетическом уровне $(n = 2)$, то

$$w_2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \qquad (3)$$

В соответствии с принципом соответствия Бора выражение для классической плотности вероятности получается при $n \to \infty$:

$$w_\infty = \frac{1}{l}. \qquad (4)$$

Приравнивая по условию задачи выражения (3) и (4), получим

$$\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Решая уравнение (5), найдем

$$x = \left(k \pm \frac{1}{4}\right)\frac{l}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (6)$$

В пределах ямы $(0 \leqslant x \leqslant l)$ таких точек будет четыре:

$$x = \left(\frac{l}{8}, \frac{3l}{8}, \frac{5l}{8}, \frac{7l}{8}\right).$$

21. Определить ширину одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй излучается энергия 1 эВ.

Дано: $i = 3$; $n = 2$; $\Delta E = 1$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.
Найти: l.
Решение. Энергия электрона, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне, определяется по формуле $E = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2$. Разность энергий электрона ΔE на n-м и i-м уровнях $\Delta E = E_i = E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(i^2 - n^2)$, откуда

$$l = h\sqrt{\frac{i^2 - n^2}{8m \cdot \Delta E}};$$

$$l = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{9-4}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \simeq 1{,}37 \cdot 10^{-9} \text{ (м)}.$$

22. Определить, при какой ширине одномерной потенциальной ямы дискретность энергии электрона становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре 300 К.

Дано: $T = 300$ К.
Найти: l.

Решение. Энергия электрона E, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне,

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2.$$

Дискретность (разность) ΔE энергии на n-м и $(n + 1)$-м уровнях равна

$$\Delta E = \frac{h^2}{8ml^2}(2n + 1).$$

Энергия теплового движения электрона

$$W = \frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура.

Приравнивая $W = \Delta E$, выразим ширину ямы l:

$$\frac{h^2(2n+1)}{8ml^2} = \frac{3}{2}kT; \; l = h\sqrt{\frac{2n+1}{12mkT}}.$$

Наименьшая ширина ямы будет при $n = 1$:

$$l = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{3}{12 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \simeq 5{,}4 \cdot 10^{-9} \text{ (м)}.$$

23. Определить, при какой температуре дискретность энергии электрона, находящегося в одномерной потенциальной яме шириной $2 \cdot 10^{-9}$ м, становится сравнимой с энергией теплового движения.

Дано: $l = 2 \cdot 10^{-9}$ м.

Найти: T.

Решение. Энергия электрона E, находящегося в потенциальной яме на n-м энергетическом уровне, $E_n = \dfrac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2$, дискретность (разность) ΔE энергий на n-м и $(n + 1)$-м энергетических уровнях $\Delta E = \dfrac{h^2}{8ml^2}(2n + 1)$.

Энергия теплового движения электрона $W = \dfrac{3}{2}kT$. Приравнивая $\Delta E = W$, определим T:

$$\frac{h^2(2n+1)}{8ml^2} = \frac{3}{2}kT; \; T = \frac{h^2(2n+1)}{12kml^2}.$$

Очевидно, что ΔE будет минимальной при $n = 1$.

$$T = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 3}{12 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{-18}} \simeq 2188 \text{ (К)}.$$

24. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $0 < x < \dfrac{l}{4}$ на втором энергетическом уровне.

Дано: $0 < x < \dfrac{l}{4}$; $n = 2$.

Найти: w.

Решение. Волновая функция $\psi(x)$ частицы в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n x}{l}$. Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определяется интегралом квадрата модуля волновой функции

$$w = \int_0^{l/4} |\psi(x)|^2\,dx = \int_0^{l/4}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)^2 dx = \frac{2}{l}\int_0^{l/4}\sin^2\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Известно, что

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Тогда

$$\sin^2\frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n x}{l}\right).$$

$$w = \frac{1}{l}\int_0^{l/4}\left(1 - \cos\frac{2\pi n x}{l}\right)dx = \frac{1}{l}\int_0^{l/4}dx - \frac{1}{l}\int_0^{l/4}\cos 2\pi n\frac{x}{l}\,dx = \frac{1}{l}x\Big|_0^{l/4} -$$

$$- \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{l}\Big|_0^{l/4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n\frac{1}{4}}{l} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

25. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $0 < x < \dfrac{l}{2}$ на третьем энергетическом уровне.

Дано: l; $n = 3$; интервал $0 < x < \dfrac{l}{2}$.

Найти: w.

Решение. Волновая функция, описывающая поведение частицы в одномерной потенциальной яме, имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n x}{l}$. Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определяется интегралом

$$w = \int_0^{l/2}|\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^{l/2}\frac{2}{l}\cdot\sin^2\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Произведя замену

$$\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n x}{l}\right),$$

получим

$$w = \int_0^{l/2} \frac{2}{l}\cdot\frac{1}{2}\,dx - \int_0^{l/2} \frac{2}{l}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi n x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\,x\Big|_0^{l/2} - \frac{1}{l}\times$$

$$\times\frac{l}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{l}\Big|_0^{l/2} \text{ (при } n = 3);$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 3}\times$$

$$\times\sin\frac{2\cdot\pi\cdot 3\cdot l/2}{l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\cdot 3{,}14}\cdot\sin 3\pi = \frac{1}{2}.$$

3. Рентгеновское излучение. Поглощение излучения

26. Длина волны линии L_α у вольфрама равна 0,148 нм. Найти постоянную экранирования.

Дано: $\lambda = 1{,}48\cdot 10^{-10}$ м.

Найти: a.

Решение. В соответствии с законом Мозли

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (1)$$

Для вольфрама $Z = 74$.

Для L-серии $n = 2$.

Для L_α-линии $k = 3$.

Из (1) находим

$$a = Z - \left[\lambda R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (2)$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$a = 74 - \left[1{,}48\cdot 10^{-10}\cdot 1{,}097\cdot 10^7\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)\right]^{-1/2} \simeq 7{,}4.$$

27. Определить минимальную длину волны тормозного рентгеновского излучения, если к рентгеновской трубке приложены напряжения 30 кВ, 75кВ.

Дано: $U_1 = 3\cdot 10^4$ В; $U_2 = 7{,}5\cdot 10^4$ В.

Найти: λ_1, λ_2.

Решение. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра определяется по формуле $\lambda = \frac{hc}{eU}$. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^4} \simeq 4{,}1\cdot 10^{-11}(\text{м});$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 7{,}5\cdot 10^4} \simeq 1{,}66\cdot 10^{-11}\ (\text{м}).$$

28. Граничная длина волны k-серии характеристического рентгеновского излучения некоторого элемента равна 0,1284 нм. Определить этот элемент.

Дано: $\lambda = 1{,}284\cdot 10^{-10}$ м; $a = 1$; $i = 1$; $n = \infty$.

Найти: Z.

Решение. Длина волны λ рентгеновского излучения определяется законом Мозли: $\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где i и n — энергетические уровни, между которыми осуществляется переход электрона. Фотон с граничной длиной волны в k-серии излучается при переходе с уровня $n = \infty$ на уровень $i = 1$.

Тогда $$(Z - a)^2 = \frac{1}{\lambda R'\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\lambda R'};$$

$$Z - a = \sqrt{\frac{1}{\lambda R'}};\ Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R'}} + a;$$

$$Z = \sqrt{\frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\cdot 1{,}284\cdot 10^{-10}}} + 1 \simeq 26{,}6 + 1 \simeq 27.$$

Этим элементом является кобальт (Co).

29. Найти граничную длину волны k-серии рентгеновского излучения от платинового антикатода.

Дано: $Z = 78$; $a = 1$; $i = 1$; $n = \infty$.

Найти: λ.

Решение. Граничную длину волны λ в k-серии найдем по формуле Мозли: $\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

$$\lambda = \frac{1}{R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)};$$

$$\lambda = \frac{1}{1{,}097\cdot 10^7\cdot (78 - 1)^2\cdot 1} \simeq 1{,}5\cdot 10^{-11}\ (\text{м}).$$

30. При каком наименьшем напряжении на рентгеновской трубке с железным антикатодом появляются линии k-серии?

Дано: $Z = 26$; $a = 1$; $n = 1$; $k = 2$.

Найти: U.

Решение. k-линии появляются при переходе электрона со 2-го энергетического уровня на 1-й. Длину волны λ этой линии определим по формуле Мозли: $\frac{1}{\lambda} = R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\lambda = \frac{1}{R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)};$$

$$\lambda = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^{-7}(26-1)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \simeq 1{,}94 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

Линия с таким значением λ может появиться, если энергия бомбардирующего электрона $E = eU$ будет не меньше энергии кванта $E = \frac{hc}{\lambda}$. Приравнивая эти выражения, получим:

$$eU = \frac{hc}{\lambda}, \text{ откуда } U = \frac{hc}{e\lambda};$$

$$U = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-10}} = 6408\ (\text{В}).$$

31. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к рентгеновской трубке с вольфрамовым антикатодом, чтобы в спектре излучения были все линии k-серии?

Дано: $Z = 74$.

Найти: U.

Решение. Коротковолновая граница λ сплошного рентгеновского спектра связана с разностью потенциалов U соотношением

$$\lambda = \frac{hc}{eU},$$

e — заряд электрона, h — постоянная Планка, c — скорость света. Длина волны рентгеновского излучения λ определяется по формуле Мозли

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Линии k-серии образуются при переходе на 1-й энергетический уровень, т. е. $n = 1$, а $k = \infty$, и тогда

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-a)^2.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{eU}{hc};\ R'(Z-1)^2 = \frac{eU}{hc};\ U = \frac{R'(Z-1)^2 \cdot hc}{e};$$

$$U = \frac{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 73^2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \simeq 73\ (\text{кВ}).$$

32. На поверхность воды падает γ-излучение с длиной волны 0,414 пм. На какой глубине интенсивность излучения уменьшится в 2 раза?

Дано: $\lambda = 4{,}14 \cdot 10^{-13}$ м; $\frac{I_0}{I} = 2$.

Найти: x.

Решение. Согласно закону поглощения λ-излучения веществом,

$$I = I_0 \exp(-\mu x). \quad (1)$$

Решая уравнение относительно x, найдем

$$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I}. \quad (2)$$

Для определения коэффициента линейного ослабления вычислим энергию ε фотонов:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) числовые значения, получим

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}14 \cdot 10^{-13}} \simeq 4{,}8 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) = 3\ (\text{МэВ}).$$

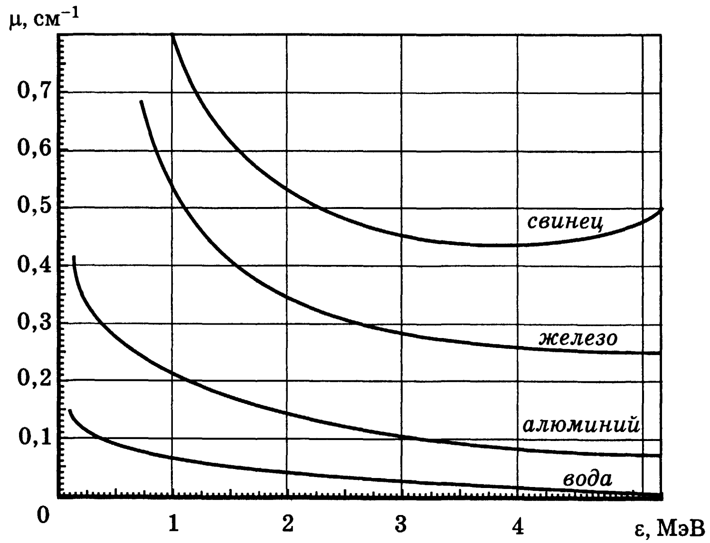


Рис. 54

По графику зависимости линейного коэффициента поглощения γ-лучей μ от их энергии ε (рис. 54) находим

$$\mu = 0{,}03\ (\text{см}^{-1}).$$

Подставляя числовые значения в выражение (2), получим

$$x = \frac{\ln 2}{0{,}03} = \frac{0{,}693}{0{,}03} = 23{,}1\ (\text{см}).$$

33. Через кварцевую пластинку толщиной 5 см пропускаются инфракрасные лучи. Угол падения равен нулю. Известно, что для инфракрасных лучей с длиной волны $\lambda_1 = 2{,}72$ мкм коэффициент линейного ослабления $k_1 = 0{,}2$ см$^{-1}$, а для лучей с $\lambda_2 = 4{,}50 - k_2 = 7{,}3$ см$^{-1}$. Определить слои половинного ослабления x_1 и x_2 соответственно для λ_1 и λ_2 и относительное изменение интенсивности этих лучей после прохождения ими кварцевой пластинки.

Дано: $k_1 = 0{,}2$ см$^{-1}$; $k_2 = 7{,}3$ см$^{-1}$; $\lambda_1 = 2{,}72$ мкм; $\lambda_2 = 4{,}50$ мкм; $x = 5$ см.

Найти: $x_1, x_2, \frac{I_0}{I_1}, \frac{I_0}{I_2}$.

Решение. Поглощение лучей света в среде определяется законом Бугера, который строго выполняется только для монохроматических лучей: $I = I_0 e^{-kx}$, где I_0 — сила света, входящего в вещество, I — сила света, прошедшего слой вещества, x — толщина слоя поглощающего вещества, k — коэффициент линейного ослабления.

При слое половинного ослабления $I = \frac{1}{2} I_0$, формула закона Бугера примет вид: $\frac{1}{2} I_0 = I_0 e^{-kx}$. Отсюда

$$e^{-kx} = 2, \text{ или } kx = \ln 2.$$

Для лучей с длиной волны λ_1 слой половинного ослабления равен

$$x_1 = \frac{\ln 2}{k_1} = \frac{0{,}693}{0{,}2} \simeq 3{,}47\ (\text{см});$$

для лучей с длиной волны λ_2 слой половинного ослабления равен

$$x_2 = \frac{\ln 2}{k_2} = \frac{0{,}693}{7{,}3} \simeq 0{,}0949\ (\text{см}) \simeq 0{,}95\ (\text{мм}).$$

Таким образом, слой половинного ослабления с длиной волны λ_2 в 3,67 раза меньше, чем для λ_1. Относительное изме-

нение силы света после прохождения слоя x для лучей λ_1 и λ_2 получим из выражения $\frac{I_0}{I} = e^{kx}$. Для лучей с λ_1:

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{k_1 x} = e^{0{,}2 \cdot 5} = e^1 = 2{,}72;$$

для лучей с λ_2:

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{k_2 x} = e^{7{,}3 \cdot 5} = e^{36{,}5} \simeq 10^{14}.$$

Таким образом, для лучей с длиной волны $\lambda_2 = 4{,}50$ мкм слой кварца толщиной 5 см практически непрозрачен, в то время как лучи с длиной волны $\lambda_1 = 2{,}72$ мкм, проходя слой кварца в 5 см, ослабляются в 2,72 раза.

34. На железный экран падает пучок γ-лучей, длина волны которых $0{,}124 \cdot 10^{-2}$ нм. Найти толщину слоя половинного ослабления γ-излучения в железе.

Дано: $\lambda = 1{,}24 \cdot 10^{-12}$ м; Fe.
Найти: $x_{1/2}$.
Решение. Энергия γ-квантов

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}24 \cdot 10^{-12}} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) = 1\ (\text{МэВ}).$$

По графику на рис. 54 находим значение коэффициента линейного поглощения $\mu = 0{,}5$ см$^{-1}$. Толщина $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления будет $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{0{,}5} \simeq 1{,}4$ (см).

35. Определить, как изменится интенсивность узкого пучка лучей при прохождении через экран, состоящий из двух плит: алюминиевой толщиной 10 см и железной — 5 см. Коэффициент линейного ослабления для Al $\mu_1 = 0{,}1$ см$^{-1}$, для Fe $\mu_2 = 0{,}3$ см$^{-1}$.

Дано: $x_1 = 10$ см, $\mu_1 = 0{,}1$ см$^{-1}$, $x_2 = 5$ см, $\mu_2 = 0{,}3$ см$^{-1}$.

Найти: $\frac{I_0}{I_2}$.

Решение. Интенсивность излучения I_1 после прохождения алюминиевой плиты $I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x_1}$. После прохождения железной плиты интенсивность

$$I_2 = I_1 e^{-\mu_2 x_2} = I_0 e^{-\mu_1 x_1} \cdot e^{-\mu_2 x_2} = I_0 e^{-(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)}.$$

Отсюда $\frac{I_0}{I_2} = e^{(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)} = e^{0{,}1 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 5} = e^{2{,}5} \simeq 12{,}2$. Интенсивность уменьшается в 12 раз.

36. Какова энергия γ-лучей, если при прохождении через слой железа толщиной 3,15 см интенсивность излучения ослабляется в 4 раза?

Дано: $\frac{I_0}{I} = 4$; $x = 3{,}15$ см; Fe.

Найти: ε.

Решение. Интенсивность излучения I после прохождения слоя железа толщиной x определяется по формуле $I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$.

$$\frac{I_0}{I} = e^{\mu x};\ \ln\frac{I_0}{I} = \mu x;\ \mu = \frac{\ln\frac{I_0}{I}}{x} = \frac{\ln 4}{3{,}15} \simeq 0{,}44\ (\text{см}^{-1}).$$

По графику на рис. 52 находим ε = 1,4 МэВ.

37. Как изменится степень ослабления γ-лучей при прохождении через свинцовый экран, если длина волны этих лучей $4{,}1 \cdot 10^{-13}$ м и $8{,}2 \cdot 10^{-13}$ м, толщина экрана 1 см?

Дано: $\lambda_1 = 4{,}1 \cdot 10^{-13}$ м; $\lambda_2 = 8{,}2 \cdot 10^{-13}$ м; $x = 1$ см.

Найти: $\frac{I_1}{I_2}$.

Решение. Энергия γ-квантов равна:

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}1 \cdot 10^{-13}} \simeq 4{,}9 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) \simeq 3\ (\text{МэВ});$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{8{,}2 \cdot 10^{-13}} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) \simeq 1{,}5\ (\text{МэВ}).$$

По графику на рис. 54 находим коэффициент линейного ослабления $\mu_1 = 0{,}45$ см$^{-1}$, $\mu_2 = 0{,}56$ см.

Закон поглощения излучения в веществе $I = I_0 e^{-\mu x}$, где I_0 и I — интенсивности падающего на слой толщиной x и прошедшего излучений. Тогда

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x};\ I_2 = I_0 e^{-\mu_2 x};\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-\mu_1 x}}{e^{-\mu_2 x}} = e^{(\mu_2 - \mu_1)x} = e^{0{,}11} = 1{,}12.$$

Интенсивность коротковолнового излучения после прохождения свинцового экрана будет в 1,12 раза выше.

38. Рассчитать толщину защитного водяного слоя, который ослабляет интенсивность излучения с энергией 1,6 МэВ в 5 раз.

Дано: ε = 1,6 МэВ; $\frac{I_0}{I} = 5$.

Найти: x.

Решение. Закон ослабления излучения при прохождении слоя толщиной x имеет вид $I = I_0 e^{-\mu x}$. По графику на рис. 54 находим $\mu = 0{,}05$ см$^{-1}$.

Тогда $\frac{I_0}{I} = e^{\mu x} = 5$; $\ln 5 = \mu x$; $x = \frac{\ln 5}{\mu} = \frac{\ln 5}{0{,}05} \simeq 32$ (см).

4. Дефект массы и энергия связи ядра. Радиоактивность. Ядерные реакции

39. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $^{16}_{8}O$.

Дано: $m_{^1_1H} = 1{,}00783$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.; $m_{^{16}_8O} = 15{,}99492$ а. е. м.; $Z = 8$; $A = 16$.

Найти: Δm, $E_{св}$, $\varepsilon_{св}$.

Решение. Дефект массы Δm ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я. \quad (1)$$

Формулу (1) можно также записать в виде

$$\Delta m = Zm_{^1_1H} + (A - Z)m_n - m_а, \quad (2)$$

где $m_а$ — масса атома, дефект массы ядра которого определяется.

Подставляя в (2) числовые данные, получим

$$\Delta m = 0{,}13708 \text{ а. е. м.}$$

Энергия связи ядра $E_{св}$ определяется по формуле

$$E_{св} = c^2 \Delta m. \quad (3)$$

Если дефект массы Δm выражать в а. е. м., а энергию связи $E_{св}$ в МэВ, то формула (3) примет вид

$$E_{св} = 931 \Delta m. \quad (4)$$

Подставляя в (4) числовые значения, получим

$$E_{св} = 931 \cdot 0{,}13708 \simeq 128\ (\text{МэВ}).$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{св}$ вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A}. \quad (5)$$

Проводя вычисления, получим

$$\varepsilon_{св} = \frac{128}{16} = 8\ (\text{МэВ}).$$

40. Вычислить дефект массы, энергию связи ядра и удельную энергию связи для элемента $^{108}_{47}Ag$.

Дано: $m_{^1_1H} = 1{,}00783$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.; $m_{Ag} = 107{,}869$ а. е. м.; $Z = 47$; $A = 108$.

Найти: Δm, $E_{св}$, $\varepsilon_{св}$.

Решение. Дефект массы ядра Δm равен

$$\Delta m = Zm_{^1_1H} + (A - Z)m_n - m_{Ag};$$

$$\Delta m = 47 \cdot 1{,}00783 + (108 - 47) \cdot 1{,}00867 - 107{,}869 = = 1{,}028 \text{ (а. е. м.)}.$$

Энергия связи

$$E_{св} = \Delta mc^2 = 1{,}028 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 15{,}36 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)} \simeq \simeq 960 \text{ (МэВ)}.$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{св} = \dfrac{E_{св}}{A} = \dfrac{960}{108} \simeq 8{,}9$ (МэВ).

41. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи для ядра элемента $^{24}_{12}Mg$.

Дано: $Z = 12$; $A = 24$; $m_{^1_1H} = 1{,}00783$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.

Найти: Δm, $E_{св}$, $\varepsilon_{св}$.

Решение. Ядро магния содержит 12 протонов и 12 нейтронов. Дефект массы ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Zm_{^1_1H} + (A - Z)m_n - m_{Mg}.$$

$$\Delta m = 12 \cdot 1{,}00783 + 12 \cdot 1{,}00867 - 23{,}98504 \simeq 0{,}213 \text{ а. е. м.};$$
$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ (кг)};$$
$$\Delta m = 0{,}213 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 3{,}5 \cdot 10^{-28} \text{ (кг)}.$$

Энергия связи ядра

$$E_{св} = \Delta mc^2 = 3{,}5 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 3{,}2 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)} = 197 \text{ (МэВ)}.$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{св} = \dfrac{E_{св}}{A}$; $\varepsilon_{св} = \dfrac{197}{24} = 8{,}21$ (МэВ).

42. Ядро, состоящее из 92 протонов и 143 нейтронов, выбросило α-частицу. Какое ядро образовалось при α-распаде? Определить дефект массы и энергию связи образовавшегося ядра.

Дано: $Z = 92$; $A = 92 + 143$; $N = 143$.

Найти: X, Δm, $E_{св}$.

Решение. Реакция α-распада имеет вид

$$^{235}_{92}U \to {}^4_2He + {}^{231}_{90}X,$$

т. е. образовалось ядро тория $^{231}_{90}Th$; $m_{Th} = 231{,}02944$ а. е. м.

Дефект массы

$$\Delta m = Zm_{^1_1H} + (A - Z)m_n - m_{Th};$$

$\Delta m = 90 \cdot 1{,}00783 + 141 \cdot 1{,}00867 - 231{,}02944 \simeq 1{,}898$ (а. е. м.) $= 3{,}15 \cdot 10^{-27}$ (кг). Здесь $m_{^1_1H}$, m_n — массы водорода и нейтрона.

Энергия связи ядра тория $E_{св} = \Delta mc^2 = 3{,}15 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq \simeq 2{,}84 \cdot 10^{-10}$ (Дж) $= 1775$ (МэВ).

43. В какой элемент превращается $^{238}_{92}U$ после трех α-распадов и двух β-распадов?

Дано: $Z = 92$; $A = 238$.

Найти: Y.

Решение. Каждый α-распад сопровождается уменьшением зарядового числа Z на 2 и уменьшением массового числа A на 4. Каждый β-распад сопровождается увеличением зарядового числа Z на 1, а массовое число A остается без изменения. Таким образом, зарядовое число Z' полученного элемента будет равно $Z' = Z - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 92 - 6 + 2 = 88$, а массовое число $A' = A - 3 \cdot 4 = 238 - 12 = 226$, т. е. получили элемент радий $^{226}_{88}Ra$.

44. Период полураспада $^{60}_{27}Co$ равен примерно 5,3 года. Определить постоянную распада и среднюю продолжительность жизни атомов этого изотопа.

Дано: $T = 5{,}3$ года.

Найти: λ, τ.

Решение. Постоянная радиоактивного распада λ и период полураспада T связаны соотношением $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{0{,}693}{5{,}3} \simeq \simeq 0{,}13$ (год$^{-1}$).

Среднее время жизни радиоактивного изотопа $\tau = \dfrac{1}{\lambda} \simeq \simeq 7{,}7$ (лет).

45. За год распалось 60% некоторого исходного радиоактивного элемента. Определить период полураспада этого элемента.

Дано: $t = 1$ год; $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}6.$

Найти: $T_{1/2}$.

Решение. Закон радиоактивного распада имеет вид

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

где N_0 — исходное число радиоактивных ядер, N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t, λ — постоянная радиоактивного распада, которая связана с полупериодом распада $T_{1/2}$ соотношением $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$. По условию задачи $\dfrac{N_0 - N}{N_0} =$ $= 1 - \dfrac{N}{N_0} = 1 - \dfrac{N_0 \cdot e^{\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 0{,}6$; $e^{-\lambda t} = 0{,}4$; $e^{\lambda t} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$; $\lambda t = \ln 2{,}5$; $\lambda = \dfrac{\ln 2{,}5}{t}$.

Тогда $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} = \dfrac{\ln 2 \cdot t}{\ln 2{,}5} = \dfrac{\ln 2 \cdot 1}{\ln 2{,}5} \simeq 0{,}76$ (года).

46. Сколько ядер, содержащихся в 1 г трития ^3_1H, распадается за среднее время жизни этого изотопа?

Дано: $m = 10^{-3}$ кг; $t = \tau$.

Найти: N'.

Решение. Согласно закону радиоактивного распада

$$N = N_0 \exp(-\lambda t). \qquad (1)$$

Среднее время жизни τ радиоактивного изотопа есть величина, обратная постоянной распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2)$$

По условию задачи $t = \tau$. Подставляя в (1) вместо t значение τ из (2), получим

$$N = \frac{N_0}{e}. \qquad (3)$$

Число распавшихся атомов за время $t = \tau$ равно

$$N' = N_0 - N = N_0\left(1 - \frac{1}{e}\right). \qquad (4)$$

Найдем число атомов N_0, содержащихся в массе $m = 1$ г изотопа ^3_1H:

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A, \qquad (5)$$

где $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса изотопа ^3_1H, N_A — число Авогадро.

С учетом (5) выражение (4) примет вид

$$N' = \frac{m}{M} N_A \left(1 - \frac{1}{e}\right). \qquad (6)$$

Подставляя в (6) числовые значения, получим

$$N' = \frac{10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 10^{-3}} \left(1 - \frac{1}{2{,}72}\right) \simeq 1{,}27 \cdot 10^{23}.$$

47. Период полураспада $^{60}_{27}Co$ равен 5,3 года. Определить, какая доля первоначального количества ядер этого изотопа распадается через 5 лет.

Дано: $T = 5{,}3$ года; $t = 5$ лет.

Найти: $\dfrac{N_0 - N}{N_0}$.

Решение. Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}, \text{ где } \lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Число распавшихся ядер будет $N_0 - N$, а их доля $\dfrac{N_0 - N}{N_0} \cdot 100\%$;

$\dfrac{N_0 - N}{N_0} = \dfrac{N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{\frac{\ln 2}{T} t}$; $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{\frac{\ln 2}{5{,}3} \cdot 5} \simeq 1 - 0{,}52 = 0{,}48$ или 48% первоначального числа ядер распадется через 5 лет.

48. Период полураспада радиоактивного аргона $^{41}_{18}Ar$ равен 110 мин. Определить время, в течение которого распадается 25% начального количества ядер.

Дано: $T = 110$ мин; $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}25.$

Найти: t.

Решение. Закон радиоактивного распада $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Из условия задачи $\frac{N}{N_0} = 0{,}75$. Учитывая, что $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, получаем:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t};\ \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t = -\frac{\ln 2}{T}t,$$

откуда $$t = -\frac{T\ln\frac{N}{N_0}}{\ln 2};\ t = -\frac{110\cdot(-0{,}288)}{0{,}693} \simeq 46\ \text{(мин)}.$$

49. Определить постоянную распада и число атомов радона, распавшихся в течение суток, если первоначальная масса радона 10 г. Период полураспада ${}^{222}_{86}Rn$ равен 3,82 сут.

Дано: $t = 1$ сут; $T_{1/2} = 3{,}82$ сут; $m = 10\text{ г} = 10^{-2}$ кг.

Найти: λ, N_1.

Решение. Число атомов радона

$$N_0 = N_A\frac{m}{M},$$

где N_A — число Авогадро, M — молярная масса радона, $M = 222$ кг/кмоль, m — масса радона.

Закон радиоактивного распада $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, где N — число ядер, не распавшихся к моменту времени t, λ — постоянная распада, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$. Число атомов, распавшихся за $t = 1$ сут, будет

$$N_1 = N_0 - N = N_0 - N_0\cdot e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = N_A \times$$

$$\times\frac{m}{M}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}\right) = 6{,}02\cdot 10^{26}\cdot\frac{1\cdot 10^{-2}}{222}\cdot\left(1 - e^{-\frac{0{,}693}{3{,}82}\cdot 1}\right) \simeq$$

$$\simeq 4{,}3\cdot 10^{21}\ \text{(атомов)}.$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{3{,}82} \simeq 0{,}181\ (\text{сут}^{-1}).$$

50. Вычислить энергию ядерной реакции

$${}^4_2He + {}^4_2He \to p + {}^7_3Li.$$

Выделяется или поглощается энергия при этой реакции?

Решение. Энергия ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = c^2(m_1 + m_2 - \sum m_i'), \tag{1}$$

где m_1 и m_2 — массы частиц, вступающих в реакцию, $\sum m_i'$ — сумма масс частиц, образовавшихся в результате реакции.

Если массу частиц выражать в а. е. м., а энергию реакции в МэВ, то формула (1) примет вид

$$Q = 931(m_1 + m_2 - \sum m_i'). \tag{2}$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать массы атомов вместо масс их ядер. Из справочных данных находим:

$$m_{{}^4_2He} = 4{,}00260\ \text{а. е. м.},$$

$$m_{{}^1_1H} = 1{,}00783\ \text{а. е. м.},$$

$$m_{{}^7_3Li} = 7{,}01601\ \text{а. е. м.}$$

Дефект массы реакции равен

$$(2m_{{}^4_2He} - m_{{}^1_1H} - m_{{}^7_3Li}) = -0{,}01864\ \text{а. е. м.}$$

Подставляя значение дефекта массы реакции в (2), получим

$$Q = 931(-0{,}01864) \simeq -17{,}4\ \text{(МэВ)}.$$

Поскольку $Q < 0$, то энергия в результате реакции поглощается.

51. Вычислить энергию термоядерной реакции

$${}^2_1H + {}^3_1H \to {}^4_2He + {}^1_0n.$$

Дано: $m_{{}^2_1H} = 2{,}0141$ а. е. м.; $m_{{}^3_1H} = 3{,}01605$ а. е. м.; $m_{{}^4_2He} = 4{,}0026$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.

Найти: E.

Решение. Энергия ядерной реакции определяется по формуле $E = \Delta mc^2$;

$$E = c^2(m_{{}^2_1H} + m_{{}^3_1H} - m_{{}^4_2He} - m_n) = c^2(2{,}0141 + 3{,}01605 -$$

$$- 4{,}0026 - 1{,}00867) = c^2\cdot 0{,}01888 = 9\cdot 10^{16}\cdot 0{,}01888 \times$$

$$\times 1{,}66\cdot 10^{-27} \simeq 28{,}2\cdot 10^{-13}\ \text{(Дж)} \simeq 17{,}6\ \text{(МэВ)}.$$

52. Вычислить энергию ядерной реакции

$${}^2_1H + {}^7_3Li \to 2\cdot{}^4_2He + {}^1_0n.$$

Дано: $m_{{}^2_1H} = 2{,}0141$; $m_{Li} = 7{,}01605$; $m_{He} = 4{,}0026$; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.

Найти: E.

Решение. Энергия E ядерной реакции определяется по формуле $E = \Delta mc^2$. Δm равен разности масс продуктов, вступающих в реакцию и полученных в результате реакции:

$$\Delta m = m_{{}^2_1\mathrm{H}} + m_{\mathrm{Li}} - 2m_{\mathrm{He}} - m_n =$$

$$= 2{,}0141 + 7{,}01605 - 2 \cdot 4{,}0026 - 1{,}00867 = 0{,}01628 \text{ (а. е. м.)},$$

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Энергия ядерной реакции $E = \Delta mc^2 = 0{,}01628 \cdot 1{,}66 \times \times 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ (Дж) $= 15{,}2$ (МэВ).

53. Какое количество энергии освобождается при соединении одного протона и двух нейтронов в одно ядро?

Решение. Результатом ядерной реакции синтеза

$${}^1_1p + 2 \cdot {}^1_0n \to {}^3_1\mathrm{H}$$

является образование ядра трития. Энергетический эффект ядерной реакции $E = \Delta mc^2$;

$$\Delta m = m_p + 2m_n - m_{{}^3_1\mathrm{H}}.$$

Масса протона $m_p = 1{,}00728$ а. е. м., масса нейтрона $m_n = 1{,}00867$ а. е. м., масса трития $m_{{}^3_1\mathrm{H}} = 3{,}01605$ а. е. м.

Тогда $E = \Delta mc^2 = (1{,}00728 + 2 \cdot 1{,}00867 - 3{,}01605) \cdot 1{,}66 \times \times 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 12{,}8 \cdot 10^{-13}$ (Дж) $\simeq 8$ (МэВ).

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить частоту света, излучаемого двукратно ионизованным атомом лития при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом 2, если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз. **Ответ:** $6{,}58 \cdot 10^{15}$ Гц.

2. Какую минимальную энергию необходимо сообщить электрону в атоме водорода, чтобы перевести его из основного состояния во второе возбужденное? **Ответ:** 12,1 эВ.

3. Определить длину волны кванта, излучаемого атомом водорода при переходе с одного энергетического уровня на другой, если при этом энергия атома уменьшилась на 10,2 эВ. **Ответ:** 0,12 мкм.

4. Вычислить длину волны де Бройля для электрона, прошедшего разность потенциалов 2 кВ. **Ответ:** $2{,}75 \cdot 10^{-11}$ м.

5. Вычислить длину волны де Бройля для пули массой 0,015 кг, движущейся со скоростью 500 м/с. **Ответ:** $8{,}8 \cdot 10^{-35}$ м.

6.221 Какое направление (и почему) при контакте металл—полупроводник является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля по направлению совпадают; 2) внешнее и контактное поля по направлению противоположны?

6.222 Используя зонную схему, объясните механизм физических процессов, происходящих в *p-n*-переходе.

6.223 Какое направление (и почему) в *p-n*-переходе является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля противоположны по направлению; 2) внешнее и контактное поля по направлению совпадают?

6.224 Объясните, в каком направлении не могут проходить через запирающий слой контакта полупроводников *n*- и *p*-типа: 1) свободные электроны; 2) дырки.

6.225 Объясните механизм односторонней (вентильной) проводимости *p-n*-перехода.

6.226 Объясните принцип устройства и действия полупроводникового триода (транзистора). Сравните работу транзистора и лампового триода.

7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

7.1. Элементы физики атомного ядра

7.1 Определите массу нейтрального атома $^{54}_{24}\mathrm{Cr}$.

Ответ $m = 8{,}64 \cdot 10^{-26}$ кг.

7.2 Объясните отличие изотопов и изобаров.

7.3 Определите, какую часть массы нейтрального атома $^{12}_{6}\mathrm{C}$ ($m = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг) составляет масса его электронной оболочки.

Дано	Решение
$^{12}_{6}\mathrm{C}$ $m = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$Z = 6$, $\dfrac{Zm_e}{m} = \dfrac{6 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}}{19{,}9272 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}} = 2{,}74 \cdot 10^{-4}$.
$\dfrac{Zm_e}{m}$ — ?	

Ответ $\dfrac{Zm_e}{m} = 2{,}74 \cdot 10^{-4}$.

7.4 Определите число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов бора 1) $^{9}_{5}\mathrm{B}$; 2) $^{10}_{5}\mathrm{B}$; 3) $^{11}_{5}\mathrm{B}$.

7.5 Определите число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов кислорода: 1) $^{16}_{8}\mathrm{O}$; 2) $^{17}_{8}\mathrm{O}$; 3) $^{18}_{8}\mathrm{O}$.

7.6 Определите, пользуясь таблицей Менделеева, число нейтронов и протонов в атомах платины и урана.

Дано	Решение
Pt U	$\boxed{^{195}_{78}\mathrm{Pt}}$ $Z = 78$, $N = A - Z = 117$. $\boxed{^{238}_{92}\mathrm{U}}$ $Z = 92$, $N = 146$.
Z — ? N — ?	

7.7 Определите зарядовые числа ядер, массовые числа и символы ядер, которые получатся, если в ядрах $^{9}_{4}\mathrm{Be}$, $^{13}_{7}\mathrm{N}$, $^{23}_{11}\mathrm{Na}$ нейтроны заменить протонами, а протоны — нейтронами.

7.8 Определите плотность ядерного вещества, выражаемую числом нуклонов в 1 см³, если в ядре с массовым числом A все нуклоны плотно упакованы в пределах его радиуса.

Дано	Решение
A $V = 1$ см³ $= 10^{-6}$ м³ $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м	$N = \dfrac{A}{V}$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $R = R_0 A^{1/3}$, $N = \dfrac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \dfrac{3}{4\pi R_0^3}$.
N — ?	

Ответ $N = 8{,}7 \cdot 10^{37}$ см⁻³.

7.9 Объясните, почему плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер.

7.10 Определите, что больше — масса атомного ядра или масса свободных нуклонов (протонов и нейтронов), входящих в его состав

7.11 Определите, какая энергия в электрон-вольтах соответствует дефекту массы $\Delta m = 3 \cdot 10^{-20}$ мг.

Ответ $E = 16{,}9$ ГэВ.

7.12 Определите энергию связи ядра атома гелия $^{4}_{2}\mathrm{He}$. Масса нейтрального атома гелия равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано	Решение
$^{4}_{2}\mathrm{He}$ $m_{He} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг $m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг	$E_{св} = [Zm_H + (A - Z)m_n - m]c^2$, $Z = 2$, $A = 4$, $A - Z = 2$.
$E_{св}$ — ?	**Ответ** $E_{св} = 28{,}4$ МэВ.

7.13 Определите удельную энергию связи $\delta E_{св}$ (энергию связи, отнесенную к одному нуклону) для ядер: 1) $^{4}_{2}\mathrm{He}$; 2) $^{12}_{6}\mathrm{C}$. Массы нейтральных атомов гелия и углерода соответственно равны $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ и $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано	Решение
1) $^{4}_{2}\mathrm{He}$ 2) $^{12}_{6}\mathrm{C}$	$E_{св} = \Delta mc^2$, $E_{св} = [Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2$,
$\delta E_{св}$ — ?	$\delta E_{св} = \dfrac{[Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2}{A}$.

$m_{^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг. $m_{^{12}_6\mathrm{C}} = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг. $m_{\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ 1) $\delta E_{св} = 7{,}1$ МэВ/нуклон; 2) $\delta E_{св} = 7{,}7$ МэВ/нуклон.

7.14 Используя данные задачи 7.13, определите, какая необходима энергия, чтобы разделить ядро $^{12}_{6}C$ на три альфа-частицы.

Ответ $E = 7{,}26$ МэВ.

7.15 Определите массу изотопа $^{15}_{7}N$, если изменение массы при образовании ядра $^{15}_{7}N$ составляет $0{,}2058 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано

$^{15}_{7}N$

$\Delta m = 0{,}2058 \cdot 10^{-27}$ кг

m — ?

Решение

$\Delta m = Zm_H + (A-Z)m_n - m$,

$m = Zm_H + (A-Z)m_n - \Delta m$,

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $\quad m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг;

$Z = 7$, $\quad A = 15$.

Ответ $m = 2{,}4909 \cdot 10^{-26}$ кг.

7.16 При отрыве нейтрона от ядра гелия $^{4}_{2}He$ образуется ядро $^{3}_{2}He$. Определите энергию связи, которую необходимо для этого затратить Масса нейтральных атомов $^{4}_{2}He$ и $^{3}_{2}He$ соответственно равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг и $5{,}0084 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано

$^{4}_{2}He$

$m_{^{4}_{2}He} = 6{,}6467 \; 10^{-27}$ кг

$m_{^{3}_{2}He} = 5{,}0084 \; 10^{-27}$ кг

$E_{св}'$ — ?

Решение

$$E_{св} = \Delta mc^2 = \left[m_{^{3}_{2}He} + m_n - m_{^{4}_{2}He}\right]c^2.$$

Ответ $E_{св} = 0{,}3303 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 20{,}64$ МэВ.

7.17 Энергия связи $E_{св}$ ядра, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, равна 39,3 МэВ. Определите массу m нейтрального атома, обладающего этим ядром.

Дано

$E_{св} = 39{,}3$ МэВ $=$
$= 6{,}288 \; 10^{-12}$ Дж

$Z = 3$

$N = 4$

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

m — ?

Решение

$E_{св} = \left[Zm_H + (A-Z)m_n - m\right]c^2$,

$\dfrac{E_{св}}{c^2} = Zm_H + (A-Z)m_n - m$,

$m = Zm_H + (A-Z)m_n - \dfrac{E_{св}}{c^2}$.

Ответ $m = 1{,}165 \; 10^{-26}$ кг.

7.18 Определите, какую долю кинетической энергии теряет нейтрон при упругом столкновении с покоящимся ядром углерода $^{12}_{6}C$, если после столкновения частицы движутся вдоль одной прямой. Массу нейтрального атома углерода принять равной $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано

n

$^{12}_{6}C$

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_C = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг

$\dfrac{\Delta T}{T}$ — ?

Решение

$m_n v_n = m_n v_n' + m_C v_C'$,

$\dfrac{m_n v_n^2}{2} = \dfrac{m_n (v_n')^2}{2} + \dfrac{m_C (v_C')^2}{2}$,

$\boxed{\text{удар упругий}}$ $v_n' = \dfrac{(m_n - m_C)v_n}{m_n + m_C}$, $\quad v_C' = \dfrac{2m_n v_n}{m_n + m_C}$,

$\Delta T = \dfrac{(m_C v_C')^2}{2}$, $\qquad T = \dfrac{m_n v_n^2}{2}$,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{v_C'}{v_n}\right)^2 = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{2m_n}{m_n + m_C}\right)^2 = \frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}.$$

Ответ $\dfrac{\Delta T}{T} = 0{,}286$.

7.19 Определите число нуклонов, которые могут находиться в ядре на низшем квантовом уровне.

Ответ $N = 4$.

7.20 Определите, во сколько раз магнетон Бора (единица магнитного момента электрона) больше ядерного магнетона (единица магнитного момента ядра).

Дано

$\dfrac{\mu_Б}{\mu_я}$ — ?

Решение

$\mu_Б = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$, $\qquad \mu_я = \dfrac{e\hbar}{2m_p}$, $\qquad \dfrac{\mu_Б}{\mu_я} = \dfrac{m_p}{m_e}$.

Ответ $\dfrac{\mu_Б}{\mu_Я} = 1835$.

7.21 Охарактеризуйте свойства и особенности сил, действующих между составляющими ядро нуклонами.

7.22 Объясните принципы построения капельной и оболочечной моделей ядра.

7.23 Объясните, почему радиоактивные свойства элементов обусловлены только структурой их ядер.

7.24 Считая постоянную λ радиоактивного распада известной и используя закон радиоактивного распада, выведите выражение: 1) для периода полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного ядра; 2) для среднего времени жизни τ радиоактивного ядра.

Ответ 1) $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$; $\quad$ 2) $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$.

7.25 Определите постоянную радиоактивного распада λ для изотопов: 1) тория $^{229}_{90}Th$, 2) урана $^{238}_{92}U$; 3) иода $^{131}_{53}I$. Период полураспада этих изотопов соответственно равен 1) $7 \cdot 10^{3}$ лет; 2) $4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет; 3) 8 сут.

Ответ 1) $\lambda = 3{,}13$ нс; 2) $\lambda = 4{,}87$ ас; 3) 1 мкс.

7.26 Определите, что (и во сколько раз) продолжительнее — три периода полураспада или два средних времени жизни радиоактивного ядра.

Дано

$3T_{1/2}$

2τ

Решение

$T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, $\qquad \tau = \dfrac{1}{\lambda}$, $\qquad 3T_{1/2} = \dfrac{3\ln 2}{\lambda}$, $\qquad 2\tau = \dfrac{2}{\lambda}$,

$3\ln 2 > 2$, следовательно, $3T_{1/2} > 2\tau$.

7.27 Определите, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за три года, если за один год оно уменьшилось в 4 раза.

Дано

$t_1 = 1$ год

$t_2 = 3$ год

$\dfrac{N_0}{N_1} = 4$

$\dfrac{N_0}{N_2}$ — ?

Решение

$N = N_0 \, e^{-\lambda t}$, $\qquad N_1 = N_0 \, e^{-\lambda t_1}$, $\qquad N_2 = N_0 \, e^{-\lambda t_2}$,

$\dfrac{N_0}{N_1} = e^{\lambda t_1} = 4$, $\qquad \lambda = \dfrac{\ln 4}{t_1}$,

$\dfrac{N_0}{N_2} = e^{\lambda t_2} = e^{\frac{\ln 4 \, t_2}{t_1}} = e^{3\ln 4}$.

Ответ $\dfrac{N_0}{N_2} = 64$.

7.28 Определите, какая часть (%) начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени t, равного двум средним временам жизни τ радиоактивного ядра

Дано	Решение
$t = 2\tau$	$N = N_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad \tau = \frac{1}{\lambda}$, $\quad t = 2\tau = 2\,\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$
$\frac{N}{N_0}(\%)$ — ?	$N = N_0\, e^{-\lambda \frac{2}{\lambda}} = N_0\, e^{-2}$, $\quad \frac{N}{N_0} = e^{-2} = 0{,}135$.

Ответ $\frac{N}{N_0} = 13{,}5\%$.

7.29 Определите, какая часть начального количества ядер радиоактивного изотопа распадется за время t, равное двум периодам полураспада $T_{1/2}$.

Ответ $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}75$.

7.30 Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 849$ с.

Дано	Решение
$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{5}{8}$ $t = 849$ с	$N = N_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{5}{8}$, $\quad e^{-\lambda t} = \frac{3}{8}$,
$T_{1/2}$ — ?	$-\lambda t = \ln\frac{3}{8}$, $\quad \lambda = \frac{\ln\frac{8}{3}}{t}$, $\quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln\frac{8}{3}}$.

Ответ $T_{1/2} = 10$ мин.

7.31 Период полураспада радиоактивного изотопа актиния $^{225}_{89}Ac$ составляет 10 сут. Определите время, за которое распадется 1/3 начального количества ядер актиния.

Ответ $t = 5{,}85$ сут.

7.32 Постоянная радиоактивного распада изотопа $^{210}_{82}Pb$ равна 10^{-9} с$^{-1}$. Определите время, в течение которого распадется 2/5 начального количества ядер этого радиоактивного изотопа.

Дано	Решение
$\lambda = 10^{-9}$ с$^{-1}$ $^{210}_{82}Pb$ $\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{2}{5}$	$N = N_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{2}{5}$, $-\lambda t = \ln\frac{3}{5}$, $\quad \lambda t = \ln\frac{5}{3}$, $\quad t = \frac{\ln\frac{5}{3}}{\lambda}$.
t — ?	**Ответ** $t = 16{,}2$ год.

7.33 Выведите формулу для скорости (активности) радиоактивного распада через период полураспада $T_{1/2}$ и начальное число N_0 радиоактивных атомов.

Дано	Решение
N_0 $T_{1/2}$	$dN = -\lambda N\, dt$, $\quad A = \left\lvert\frac{dN}{dt}\right\rvert = \lambda N$, $\quad N = N_0\, e^{-\lambda t}$,
A — ?	$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $\quad A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0\, e^{-\frac{\ln 2\, t}{T_{1/2}}}$.

Ответ $A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0\, e^{-\frac{(\ln 2)\, t}{T_{1/2}}}$.

7.34 Первоначальная масса радиоактивного изотопа иода $^{131}_{53}I$ (период полураспада $T_{1/2} = 8$ сут) равна 1 г. Определите: 1) начальную активность изотопа, 2) его активность через 3 сут

Дано	Решение
$M = 131 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг $T_{1/2} = 8$ сут $= 6{,}91 \cdot 10^5$ с $t = 3$ сут $= 2{,}59 \cdot 10^5$ с	$A_0 = \lambda N_0$, $\quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $N_0 = \frac{mN_A}{M}$, $\quad A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{mN_A}{M}$,
1) A_0 — ? 2) A — ?	$A = A_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{mN_A}{M}\, e^{-\lambda t}$.

Ответ 1) $A_0 = 4{,}61 \cdot 10^{15}$ Бк; 2) $A = 3{,}55 \cdot 10^{15}$ Бк.

7.35 Активность некоторого радиоактивного изотопа в начальный момент времени составляла 100 Бк. Определите активность этого изотопа по истечении промежутка времени, равного половине периода полураспада.

Дано	Решение
$A_0 = 100$ Бк $t = \frac{1}{2} T_{1/2}$	$A = A_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $A = A_0\, e^{-\frac{\ln 2\, t}{T_{1/2}}}$, $\quad \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{1}{2}$,
A — ?	$A = A_0\, e^{\frac{\ln 2}{2}}$

Ответ $A = 70{,}7$ Бк.

7.36 Начальная активность 1 г изотопа радия $^{226}_{88}Ra$ равна 1 Ки Определите период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

Дано	Решение
$M = 226\ 10^{-3}$ кг/моль $m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг $A_0 = 1$ Ки $= 3{,}7\ 10^{10}$ Бк	$A_0 = \lambda N_0$, $\quad N_0 = \frac{mN_A}{M}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $\quad A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{mN_A}{M}$,
$T_{1/2}$ — ?	$T_{1/2} = \frac{mN_A \ln 2}{MA_0}$.

Ответ $T_{1/2} = 1582$ год.

7.37 Принимая, что все атомы изотопа иода $^{131}_{53}I$ ($T_{1/2} = 8$ сут) массой $m = 1$ мкг радиоактивны, определите: 1) начальную активность A_0 этого изотопа; 2) его активность A через 3 сут.

Ответ 1) $A_0 = 4{,}61$ ТБк; 2) $A = 3{,}55$ ТБк.

7.38 Определите период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за 5 суток уменьшилась в 2,2 раза

Дано	Решение
$\frac{A_0}{A} = 2{,}2$ $t = 5$ сут	$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $\quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, $\quad A = A_0\, e^{-\lambda t}$,
$T_{1/2}$ — ?	$\lambda = \frac{1}{t} \ln\frac{A_0}{A}$, $\quad T_{1/2} = t\frac{\ln 2}{\ln 2{,}2}$.

Ответ $T_{1/2} = 4{,}4$ сут.

7.39 Определите удельную активность a (число распадов в 1 с на 1 кг вещества) изотопа ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, если период его полураспада $T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет.

Ответ $a = \dfrac{N_{\mathrm{A}} \ln 2}{M T_{1/2}} = 12{,}3$ МБк/кг.

7.40 Объясните, как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после α- и β-распадов ядер его атомов.

7.41 Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определите, в какой элемент превращается ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ после трех α- и двух β^--распадов.

Дано	***Решение***
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ 3α $2\beta^-$ X — ?	${}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{87}\mathrm{Fr} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$. торий радий радон франций радий

Ответ X = ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

7.42 Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определите, в какой элемент превращается ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ после шести α- и трех β^--распадов.

Ответ ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$.

7.43 Ядра радиоактивного изотопа тория ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ претерпевают последовательно α-распад, два β^--распада и α-распад. Определите конечный продукт деления.

Ответ ${}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$.

7.44 Определите, сколько β^-- и α-частиц выбрасывается при превращении ядра таллия ${}^{210}_{81}\mathrm{Tl}$ в ядро свинца ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$.

Ответ $N_\alpha = 1$, $N_{\beta^-} = 3$.

7.45 Радиоактивный изотоп радия ${}^{225}_{88}\mathrm{Ra}$ претерпевает четыре α-распада и два β^--распада. Определите для конечного ядра: 1) зарядовое число Z; 2) массовое число A.

Ответ 1) $Z = 82$; 2) $A = 209$.

7.46 Запишите α-распад радия ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

7.47 Определите высоту кулоновского потенциального барьера для α-частицы в ядре свинца ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$.

Дано	***Решение***
${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м $U_{\text{кул}}$ — ?	$U_{\text{кул}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q_{\mathrm{Pb}} Q_\alpha}{R}$, $Q_{\mathrm{Pb}} = Z_{\mathrm{Pb}} \lvert e \rvert$, $Q_\alpha = Z_\alpha \lvert e \rvert$, $R = R_{\mathrm{Pb}} + R_\alpha$, $R_{\mathrm{Pb}} = R_0 A_{\mathrm{Pb}}^{1/3}$, $R_\alpha = R_0 A_\alpha^{1/3}$, $U_{\text{кул}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Z_{\mathrm{Pb}} Z_\alpha \cdot \lvert e \rvert^2}{R_0 (A_{\mathrm{Pb}}^{1/3} + A_\alpha^{1/3})}$.

Ответ $U_{\text{кул}} = 22{,}5$ МэВ.

7.48 Покоившееся ядро радона ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ испускает α-частицу, имеющую скорость 16 Мм/с. Зная, что масса дочернего ядра составляет $3{,}62 \cdot 10^{-25}$ кг, определите: 1) импульс α-частицы; 2) кинетическую энергию α-частицы; 3) импульс отдачи дочернего ядра; 4) кинетическую энергию отдачи дочернего ядра.

Ответ 1) $1{,}07 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с; 2) 5,35 МэВ; 3) $1{,}07 \cdot 10^{19}$ кг · м/с; 4) 9,89 кэВ.

7.49 Покоившееся ядро полония ${}^{200}_{84}\mathrm{Po}$ испускает α-частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5{,}77$ МэВ. Определите: 1) скорость отдачи дочернего ядра; 2) какую долю кинетической энергии α-частицы составляет энергия отдачи дочернего ядра.

Дано	***Решение***
${}^{200}_{84}\mathrm{Po} \to {}^{196}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$ $T_\alpha = 5{,}77$ МэВ $= 9{,}23 \cdot 10^{-15}$ Дж 1) $v_{\text{д}}$ — ? 2) $\dfrac{T_{\text{д}}}{T_\alpha}$ — ?	$m_\alpha v_\alpha = m_{\text{д}} v_{\text{д}}$, $T_\alpha = \dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$, $v_{\text{д}} = \dfrac{m_\alpha v_\alpha}{m_{\text{д}}} = \dfrac{\sqrt{2 m_\alpha T_\alpha}}{m_{\text{д}}}$, $T_{\text{д}} = \dfrac{m_{\text{д}} v_{\text{д}}^2}{2} = \dfrac{m_\alpha T_\alpha}{m_{\text{д}}}$, $\dfrac{T_{\text{д}}}{T_\alpha} = \dfrac{m_\alpha}{m_{\text{д}}}$.

Ответ 1) $v_{\text{д}} = 339$ км/с; 2) $\dfrac{T_{\text{д}}}{T_\alpha} = 0{,}02$.

Правила смещения

для α-распада ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$;

для β^--распада ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e$;

для β^+-распада ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{+1}e$.

7.50 Определите энергию, выделяющуюся в результате реакции ${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \to {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu$. Массы нейтральных атомов магния и натрия соответственно равны $3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг и $3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг

Дано	***Решение***
${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \to {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu$ $m_{\mathrm{Mg}} = 3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг $m_{\mathrm{Na}} = 3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг Q — ?	$m^{\text{я}}_{\mathrm{Mg}} = m_{\mathrm{Mg}} - 12 m_e$, $m^{\text{я}}_{\mathrm{Na}} = m_{\mathrm{Na}} - 11 m_e$, $m^{\text{я}}_{\mathrm{Mg}} c^2 = m^{\text{я}}_{\mathrm{Na}} c^2 + T_{\mathrm{Na}} + m_{e^+} c^2 + T_{e^+} + T_\nu$, $m_{e^+} = m_e = m_e$, $Q = T_{\mathrm{Na}} + T_{e^+} + T_\nu = (m^{\text{я}}_{\mathrm{Mg}} - m^{\text{я}}_{\mathrm{Na}} - m_{e^+}) c^2$, $Q = (m_{\mathrm{Mg}} - 12 m_e - m_{\mathrm{Na}} + 11 m_e - m_e) c^2$, $Q = (m_{\mathrm{Mg}} - m_{\mathrm{Na}} - 2 m_e) c^2$.

Ответ $Q = 2{,}91$ МэВ.

7.51 Запишите β^--распад магния ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg}$

Ответ ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg} \xrightarrow{\beta} {}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e$.

7.52 Известно, что β^--активные ядра обладают до распада и после него вполне определенными энергиями, в то же время энергетический спектр β^--частиц является непрерывным. Объясните непрерывность энергетического спектра испускаемых электронов.

7.53 Объясните, почему существование антинейтрино полностью позволяет объяснить все особенности β^--распада.

7.54 Запишите превращение нейтрона в протон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объясните, почему этот процесс является энергетически возможным.

7.55 Объясните, почему при α - распаде одинаковых ядер энергии α - частиц одинаковы, а при β^- - распаде одинаковых ядер энергии электронов различны.

7.56 Применяя понятия квантовой статистики, объясните, почему невозможно принципиально создать "нейтринный лазер".

7.57 Опишите основные процессы, происходящие при взаимодействии γ - излучения с веществом.

7.58 Свободное покоившееся ядро $^{191}_{77}\mathrm{Ir}$ ($m = 317{,}10953\ 10^{-27}$ кг) с энергией возбуждения $E = 129$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ - квант. Определите изменение энергии γ - кванта, возникающее в результате отдачи ядра.

Дано	*Решение*
$^{191}_{77}\mathrm{Ir}$	$mv = m_\gamma c$, $\quad p = mv = \dfrac{Ec}{c^2} = \dfrac{E}{c}$,
$m = 317{,}10953\cdot10^{-27}$ кг	
$E = 129$ кэВ $= 2{,}06\cdot10^{-14}$ Дж	$\Delta\varepsilon = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{E^2}{2mc^2}$.
$\Delta\varepsilon$ — ?	

Ответ $\Delta\varepsilon = 0{,}047$ эВ.

7.59 Назовите два важных механизма, которыми можно объяснить ослабление потока фотонов с энергией $E = 500$ кэВ при его прохождении через вещество.

7.60 Объясните, почему треки α - частиц представляют сплошную толстую линию, а треки β^- - частиц — тонкую пунктирную линию.

7.61 Объясните, где и почему лучше использовать длинные цепи рождений и распадов частиц высоких энергий — в камере Вильсона или в пузырьковой камере.

7.62 Определите, является ли реакция $^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^7_4\mathrm{Be} + {}^1_0 n$ экзотермической или эндотермической. Определите энергию ядерной реакции.

Дано	*Решение*
$m_{\mathrm{Li}} = 11{,}65079\ 10^{-27}$ кг	$^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^7_4\mathrm{Be} + {}^1_0 n$,
$m_{\mathrm{H}} = 1{,}6736\ 10^{-27}$ кг	$\Delta E = (m_{\mathrm{Li}} + m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{Be}} - m_n)c^2$.
$m_{\mathrm{Be}} = 11{,}65231\ 10^{-27}$ кг	
$m_n = 1{,}675\ 10^{-27}$ кг	
ΔE — ?	

Ответ $\Delta E = -1{,}64$ МэВ, реакция эндотермическая

7.63 Определите, поглощается или выделяется энергия при ядерной реакции $^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0 n$. Определите эту энергию

Ответ $\Delta E = 17{,}6$ МэВ.

7.64 Определите, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^{41}_{19}\mathrm{K} + {}^4_2\mathrm{He}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{^{44}_{20}\mathrm{Ca}} = 7{,}2992\cdot10^{-26}$ кг, $m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}6736\ 10^{-27}$ кг, $m_{^{41}_{19}\mathrm{K}} = 6{,}8021\ 10^{-27}$ кг, $m_{^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467\ 10^{-27}$ кг.

7.65 Определите, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{14}_7\mathrm{N} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^1_1\mathrm{H} + {}^{17}_8\mathrm{O}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{^{14}_7\mathrm{N}} = 2{,}3253\cdot10^{-26}$ кг, $m_{^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467\cdot10^{-27}$ кг, $m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}6736\cdot10^{-27}$ кг, $m_{^{17}_8\mathrm{O}} = 2{,}8229\cdot10^{-27}$ кг.

7.66 Определите зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи реакции: 1) $^{14}_7\mathrm{N} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{17}_8\mathrm{O} + x$; 2) $^9_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{12}_6\mathrm{C} + x$; 3) $^6_3\mathrm{Li} + x \to {}^3_1\mathrm{H} + {}^4_2\mathrm{He}$.

Ответ

1) $^{14}_7\mathrm{N} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{17}_8\mathrm{O} + x$; $Z = 1$, $A = 1$, $^1_1 p$;

2) $^9_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{12}_6\mathrm{C} + x$; $Z = 0$, $A = 1$, $^1_0 n$;

3) $^6_3\mathrm{Li} + x \to {}^3_1\mathrm{H} + {}^4_2\mathrm{He}$; $Z = 0$, $A = 1$, $^1_0 n$.

7.67 Запишите недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях: 1) $^{10}_5\mathrm{B}(n,\alpha)x$; 2) $^{40}_{18}\mathrm{Ar}(\alpha, n)x$; 3) $x(p,n)^{37}_{18}\mathrm{Ar}$; 4) $^3_2\mathrm{He}(x,p)^3_1\mathrm{H}$; 5) $x(n,\alpha)^3_1\mathrm{H}$.

Символическая запись ядерной реакции

$$^A_Z\mathrm{X} + a \to {}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + b,$$

или

$$^A_Z\mathrm{X}(a,b)^{A'}_{Z'}\mathrm{Y},$$

где $^A_Z\mathrm{X}$ и $^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}$ – исходное и конечное ядра с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

7.68 В ядерной реакции $^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0 n$ выделяется энергия $\Delta E = 3{,}27$ МэВ. Определите массу атома $^3_2\mathrm{He}$, если масса атома $^2_1\mathrm{H}$ равна $3{,}34461\cdot10^{-27}$ кг.

Дано	*Решение*
$^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0 n$	$^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0 n + \Delta E$,
$\Delta E = 3{,}27$ МэВ $= 1{,}0032\cdot10^{-18}$ Дж	$m_{^3_2\mathrm{He}} = 2m_{^2_1\mathrm{H}} - m_n - \dfrac{\Delta E}{c^2}$.
$m_{^2_1\mathrm{H}} = 3{,}34461\cdot10^{-27}$ кг	
$m_{^3_2\mathrm{He}}$ — ?	

Ответ $m_{^3_2\mathrm{He}} = 5{,}00841\cdot10^{-27}$ кг.

7.69 Первая в истории искусственная ядерная реакция осуществлена Резерфордом. Запишите эту реакцию и объясните ее огромное значение для развития ядерной физики.

Ответ $^{14}_7\mathrm{N} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{17}_8\mathrm{O} + {}^1_1 p$.

7.70 Жолио-Кюри облучали алюминий $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ α - частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+ - распад. Запишите эту реакцию.

Ответ $^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^1_0 n$,

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \xrightarrow{\beta^+} {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e.$$

7.71 Жолио-Кюри облучали магний $^{24}_{12}\mathrm{Mg}$ α - частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+ - распад. Запишите эту реакцию.

7.72 Запишите превращение протона в нейтрон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объясните, почему это превращение энергетически возможно только для протона, связанного в ядре.

7.73 В процессе осуществления реакции $\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$ энергия E_0 фотона составляла 2,02 МэВ. Определите полную кинетическую энергию позитрона и электрона в момент их возникновения.

Дано	Решение
$\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$ $E_0 = 2{,}02$ МэВ $=$ $= 3{,}23 \cdot 10^{-19}$ эВ T — ?	$E_0 = 2mc^2 + T$, $T = E_0 - 2mc^2$.

Ответ $T = 1$ МэВ.

7.74 При столкновении позитрона и электрона происходит их аннигиляция, в процессе которой электронно-позитронная пара превращается в два γ - кванта, а энергия пары переходит в энергию фотонов. Определите энергию каждого из возникших фотонов, принимая, что кинетическая энергия электрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Дано	Решение
$T = 0$ $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг E_0 — ?	${}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e = 2\gamma$, $\quad 2mc^2 + T = 2E_0$, $T = 0$, $\quad E_0 = mc^2$.

Ответ $E_0 = 0{,}51$ МэВ.

7.75 Запишите схему электронного захвата (e-захвата) и объясните его отличия от $\beta^{\pm}$ - распадов. Приведите пример электронного захвата.

Ответ e-захват: ${}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \to {}_{Z-1}^{\;\;A}Y + {}^{0}_{0}\nu_e$, вылетает ${}^{0}_{0}\nu_e$.

При $\beta^{\pm}$ - распаде вылетают две частицы: (${}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu$) или (${}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$).

7.76 Дополните недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях:

1) ${}^{235}_{x}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{145}_{57}\mathrm{La} + x + 4{}^{1}_{0}n$;

2) ${}^{235}_{x}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{99}_{x}\mathrm{Zr} + {}^{135}_{x}\mathrm{Te} + x{}^{1}_{0}n$;

3) ${}^{232}_{x}\mathrm{Th} + {}^{1}_{0}n \to x + {}^{140}_{x}\mathrm{Xe} + 3{}^{1}_{0}n$;

4) ${}^{x}_{x}\mathrm{Pu} + {}^{1}_{0}n \to {}^{80}_{x}\mathrm{Se} + {}^{157}_{x}\mathrm{Nd} + 3{}^{1}_{0}n$.

7.77 Под действием каких частиц — нейтронов или α - частиц — ядерные реакции осуществляются более эффективно? Объясните ответ.

7.78 Объясните, почему на медленных нейтронах в основном идут реакции типа (n, n) и (n, γ), а на быстрых нейтронах — реакции типа (n, p) и (n, α).

7.79 Для обнаружения нейтрона используются реакции захвата тепловых нейтронов легкими ядрами (${}^{3}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{10}_{5}\mathrm{Be}$), в результате которых испускаются заряженные частицы. Запишите возможные реакции.

Ответ ${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}p$.

${}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}n \to {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

7.80 При энергии нейтронов ≈ 10 МэВ становится возможной на ядре урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ ядерная реакция типа ($n, 2n$), в результате чего образуется искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^- - распад. Запишите эту реакцию.

Ответ ${}^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{237}_{92}\mathrm{U} + 2{}^{1}_{0}n$,

${}^{237}_{92}\mathrm{U} \to {}^{237}_{93}\mathrm{Np} + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e$.

7.81 Ядро урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, захватывая быстрый нейтрон, превращается в радиоактивный изотоп урана, который претерпевает β^- -распад, и превращается в трансурановый элемент, который в свою очередь также претерпевает β^- -распад, в результате чего образуется плутоний. Запишите все эти процессы в виде ядерной реакции.

Ответ ${}^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} \to {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + {}^{0}_{-1}e$,

${}^{239}_{93}\mathrm{Np} \to {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{0}_{-1}e$.

7.82 Определите кинетическую энергию E и скорость v теплового нейтрона при температуре окружающей среды, равной 17 °С.

Дано	Решение
$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $t = 17$ °С; $T = 290$ К E — ? v — ?	$E = \dfrac{3}{2}kT$, $\quad E = \dfrac{m_n v^2}{2}$, $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m_n}}$.

Ответ $E = 6\ 10^{-21}$ Дж; $v = 2{,}68$ км/с.

7.83 Ядро урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, захватывая тепловой нейтрон, делится на изотопы стронция и ксенона с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^- - распада. Запишите реакцию деления, а также цепочку β^- - распадов.

Ответ ${}^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2{}^{1}_{0}n$,

${}^{139}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta} {}^{139}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta} {}^{139}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow{\beta} {}^{139}_{57}\mathrm{La}$.

7.84 При захвате теплового нейтрона ядром урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ образуются два осколка деления и два нейтрона. Определите порядковый номер Z и массовое число A одного из осколков, если другим осколком является ядро стронция ${}^{95}_{38}\mathrm{Sr}$

7.85 Объясните, почему деление ядер должно сопровождаться выделением большого количества энергии.

7.86 Определите энергию (в электрон-вольтах), которую можно получить при расщеплении 1 г урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, если при расщеплении каждого ядра урана выделяется энергия 200 МэВ.

Ответ $\Delta E = 5{,}12\ 10^{23}$ МэВ.

Скорость нарастания цепной реакции

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}, \text{ откуда } N = N_0\, e^{(k-1)t/T},$$

где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t; T — среднее время жизни одного поколения; k — коэффициент размножения нейтронов.

7.87 Определите суточный расход чистого урана ${}^{235}_{92}U$ атомной электростанцией тепловой мощностью $P = 300$ МВт, если энергия E, выделяющаяся при одном акте деления, составляет 200 МэВ.

Дано	*Решение*
${}^{235}_{92}U$ $P = 300$ МВт $= 3 \cdot 10^8$ Вт $E = 200$ МэВ $=$ $= 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж $t = 24$ ч $= 86400$ с $M = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль m — ?	$N = \dfrac{Pt}{E}$, $m = \dfrac{NM}{N_A} = \dfrac{PtM}{EN_A}$.

Ответ $m = 316$ г.

7.88 Определите, во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной ядерной реакции за время $t = 10$ с, если среднее время жизни T одного поколения составляет 80 мс, а коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$.

Дано	*Решение*
$t = 10$ с $T = 80$ мс $= 8 \cdot 10^{-2}$ с $k = 1{,}002$ $\dfrac{N}{N_0}$ — ?	$\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{N(k-1)}{T}$, $\quad N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}}$, $\dfrac{N}{N_0} = e^{\frac{(k-1)t}{T}}$.

Ответ $\dfrac{N}{N_0} = 1{,}284$.

7.89 Объясните, какой характер носит цепная реакция деления, если коэффициент размножения: 1) $k > 1$; 2) $k = 1$; 3) $k < 1$.

7.90 В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни T одного поколения нейтронов составляет 90 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$, определите период τ реактора, т.е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов в реакторе возрастает в е раз.

Ответ $\tau = 45$ с.

7.91 Определите число нейтронов, возникающих за 1 с в ядерном реакторе тепловой мощностью $P = 200$ МВт, если известно, что при одном акте деления выделяется энергия $E = 200$ МэВ, а среднее число нейтронов на один акт деления составляет 2,5.

Ответ $n = 1{,}56 \cdot 10^{19}$ с$^{-1}$.

7.92 Объясните особенности реактора-размножителя и запишите ядерные реакции, за счет которых может в них идти процесс воспроизводства ядерного горючего.

7.93 В водородной бомбе вместо реакции ${}^2_1H + {}^2_1H \to {}^3_2He + {}^1_0n$ используется реакция ${}^2_1H + {}^3_1H \to {}^4_2He + {}^1_0n$. Объясните почему.

7.94 Объясните, почему реакция синтеза атомных ядер — образование из легких ядер более тяжелых — является колоссальным источником энергии.

7.95 Объясните, почему для протекания термоядерной реакции необходима очень высокая температура.

7.2. Элементы физики элементарных частиц

7.96 Известно, что в углеродно-азотном, или углеродном, цикле число ядер углерода остается неизменным. В результате этого цикла четыре ядра водорода ${}^1_1H$ (протона) превращаются в ядро гелия ${}^4_2He$, а также образуются три γ-кванта, два позитрона и два нейтрино. Записав эту реакцию определите выделяющуюся в этом процессе энергию.

Дано	*Решение*
$m_{{}^1_1H} = 1{,}6736\ 10^{-27}$ кг $m_{{}^4_2He} = 6{,}6467\ 10^{-27}$ кг $m_{e^+} = 9{,}11\ 10^{-31}$ кг Q — ?	$4{}^1_1H \to {}^4_2He + 2{}^0_{+1}e + 2{}^0_0\nu_e + 3\gamma + Q$, $\Delta m = 4m_{{}^1_1H} - (m_{{}^4_2He} + 2m_{e^+})$, $Q = \Delta mc^2$.

Ответ $Q = 25{,}8$ МэВ.

7.97 Дайте определение и объясните происхождение первичного и вторичного космического излучения.

7.98 Объясните происхождение мягкого и жесткого компонентов вторичного космического излучения.

7.99 Представьте схематически и объясните происхождение электронно-позитронно-фотонного, или каскадного, ливня

7.100 Запишите схемы распада положительного и отрицательного мюонов.

Ответ $\mu^+ \to {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu$,

$\mu \to {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu$

7.101 При соударении высокоэнергетического положительного мюона и электрона образуются два нейтрино. Запишите эту реакцию и объясните, какой тип нейтрино образуется.

Ответ $\mu^+ + {}^0_{-1}e \to {}^0_0\nu_e + {}^0_0\nu_\mu$.

7.102 При захвате протоном отрицательного мюона образуется нейтрон и еще одна частица. Запишите эту реакцию и определите, что это за частица.

Ответ $\mu^- + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^0_0\nu_\mu$.

7.103 Принимая, что энергия релятивистских мюонов в космическом излучении составляет 3 ГэВ, определите расстояние, проходимое мюонами за время их жизни, если собственное время жизни мюона $t_0 = 2{,}2$ мкс, а энергия покоя $E_0 = 100$ МэВ.

Дано	*Решение*
$E = 3$ ГэВ $= 3 \cdot 10^9$ эВ $t_0 = 2{,}2$ мкс $= 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с $E_0 = 100$ МэВ $= 10^8$ эВ l — ?	$t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, $\quad E = \dfrac{E_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, $t = t_0 \dfrac{E}{E_0}$, $\quad v = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{E_0}{E}\right)^2}$,

$$l = vt = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \cdot t_0 \frac{E}{E_0}.$$

Ответ $l = 19{,}8$ км.

7.104 Известно, что продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Запишите цепочку реакций для π^+ - и π^- -мезонов.

Ответ $\pi^+ \to \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu$, $\mu^+ \to {}^0_{+1}e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu$.

$\pi^- \to \mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu$, $\mu^- \to {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu$.

7.105 π^0 - мезон распадается в состоянии покоя на два γ - кванта. Принимая массу покоя пиона равной $264{,}1m_e$, определите энергию каждого из возникших γ -квантов.

Дано	Решение
$m_\pi = 264{,}1m_e$ $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг E_γ — ?	$\pi^0 \to 2\gamma$, $E_\pi = m_\pi c^2$, $E_\gamma = \dfrac{E_\pi}{2} = \dfrac{m_\pi c^2}{2}$.

Ответ $E_\gamma = 67{,}7$ МэВ.

7.106 Известно, что распад нейтрального короткоживущего каона происходит по схеме $K_s^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Принимая, что до момента распада каон покоился и его масса покоя составляет $974m_e$, определите массу покоя образовавшихся заряженных π - мезонов, если известно, что масса каждого образовавшегося пиона в 1,783 раза больше его массы покоя.

Ответ $m_\pi = 273{,}1m_e$.

7.107 K^+ - мезон распадается (в состоянии покоя) на два пиона. Принимая массу покоя каона равной $966{,}2m_e$ и пренебрегая разностью масс заряженного и нейтрального пионов, определите энергию каждого из возникших пионов.

Ответ $E = 247{,}5$ МэВ.

7.108 Назовите и охарактеризуйте четыре типа фундаментальных взаимодействий, а также сравните радиусы их действия. Какое из взаимодействий является универсальным.

7.109 Что называется изотопическим мультиплетом и изотопическим спином?

7.110 Возможно ли вынужденное излучение, если фотоны были бы фермионами? Дайте объяснение.

7.111 Объясните, в чем заключается принцип зарядового сопряжения.

7.112 Запишите продукты распада антинейтрона.

Ответ ${}^1_0\tilde{n} \to {}^{1}_{-1}\tilde{p} + {}^{0}_{+1}e + {}^0_0\nu_e$.

7.113 При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникают два γ - кванта, а энергия частиц переходит в энергию γ - квантов. Определите энергию каждого из возникших γ - квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Дано	Решение
$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг E_γ — ?	${}^1_0n + {}^1_0\tilde{n} \to 2\gamma$, $E = 2m_n c^2$, $E_\gamma = \dfrac{E}{2}$, $E_\gamma = m_n c^2$.

Ответ $E_\gamma = 942$ МэВ.

7.114 Перечислите основные свойства нейтрино и антинейтрино и объясните, чем они отличаются по современным представлениям друг от друга.

7.115 Выбрав из четырех типов нейтрино (ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$) правильное, напишите недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

1) $x + {}^1_0n \to {}^1_1p + {}^{0}_{-1}e$;

2) $x + {}^1_0n \to {}^1_1p + \mu^-$;

3) $x + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^{0}_{+1}e$.

Ответ 1) ${}^0_0\nu_e + {}^1_0n \to {}^1_1p + {}^{0}_{-1}e$;

2) ${}^0_0\nu_\mu + {}^1_0n \to {}^1_1p + \mu^-$;

3) ${}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^{0}_{+1}e$.

7.116 Назовите элементарную частицу, обладающую наименьшей массой покоя. Чему равен электрический заряд этой частицы?

7.117 Элементарным частицам приписывают квантово-механическую величину — четность. Что она характеризует? В чем заключается закон сохранения четности и при каких взаимодействиях он выполняется?

7.118 Объясните, какая характеристика элементарных частиц положена в основу деления адронов на мезоны и барионы.

Ответ Барионное число B:
мезоны: $B = 0$;
барионы: $B = 1$.

7.119 Объясните, к какой группе элементарных частиц и почему относится: 1) Λ^0 - гиперон; 2) протон; 3) тау-лептон; 4) π^0 - мезон.

7.120 Объясните, к какой группе элементарных частиц и почему относится. 1) мюонное нейтрино; 2) нейтрон; 3) фотон; 4) K^0 -мезон.

7.121 Перечислите, какие величины сохраняются для процессов взаимопревращаемости элементарных частиц, обусловленных слабым и сильным взаимодействиями.

Ответ
1. Энергия.
2. Импульс.
3. Момент импульса.
4. Зарядовое число.
5. Массовое число.
6. Спин.
7. Лептонное число.
8. Барионное число.
9. Изотопический спин (только сильное взаимодействие).
10. Странность (только сильное взаимодействие).
11. Четность (только сильное взаимодействие).
12. Очарование (только сильное взаимодействие).

7.122 Определите, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения лептонного числа: 1) $p \to n + e^+ + \nu_e$; 2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$; 3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$; 4) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$.

Ответ 1) $p \to n + e^+ + \nu_e$;

$(0) = (0) + (-1) + (+1)$ разрешен;

2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$;

$(0) = (+1) + (-1)$ разрешен;

3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$;

$(0) \neq (-1) + (+1) + (-1)$ запрещен;

4) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$;

$(0) = (-1) + (0) + (+1)$ разрешен.

7.123 Определите, какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения странности: 1) $p+\pi^- \to \Lambda^0 + K^0$; 2) $p+\pi^- \to \Sigma^+ + K^-$; 3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$; 4) $p+\pi^- \to K^- + K^+ + n$.

Ответ

1) $p+\pi^- \to \Lambda^0 + K^0$;

$(0)+(0)=(-1)+(+1)$, разрешен;

2) $p+\pi^- \to \Sigma^+ + K^-$;

$(0)+(0)\neq(-1)+(-1)$, запрещен;

3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$;

$(0)+(0)\neq(-1)+(-1)$, запрещен;

4) $p+\pi^- \to K^- + K^+ + n$,

$(0)+(0)=(-1)+(+1)+(0)$, разрешен.

7.124 Ниже приведены запрещенные способы распада. Перечислите для каждого из них законы сохранения, которые он нарушает: 1) $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$; 2) $K^- + n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; 3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$.

Ответ

1) $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$; лептонное число: $(0)\neq(+1)+(+1)$;

2) $K^- + n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; зарядовое число: $(-1)+(0)\neq(-1)+(+1)+(0)$;

3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$; странность: $(0)+(0)\neq(-1)+(-1)$.

7.125 Ниже приведены запрещенные способы распада. Перечислите для каждого из них законы сохранения, которые в нем нарушаются: 1) $p+p \to p+\pi^+$; 2) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$; 3) $\pi^- + n \to \Lambda^0 + K^-$; 4) $\pi^- \to \mu^- + e^+ + e^-$.

7.126 Исследование взаимопревращаемости элементарных частиц привело к открытию нового свойства симметрии — операции зарядового сопряжения, заключающееся в том, что при замене частицы на античастицу в уравнении данной реакции получается новая реакция. Примените операцию зарядового сопряжения к следующим процессам: 1) $\Sigma^+ \to p + \pi^0$; 2) $p+\tilde{p} \to \Sigma^- + \tilde{\Lambda}^0 + K^0 + K^-$.

7.127 Примените операцию зарядового сопряжения (см. задачу 7.126) к следующим процессам: 1) $\pi^0 \to 2\gamma$; 2) $p+K^- \to \Sigma^0 + \pi^+ + \pi^-$.

Ответ

1) $\pi^0 \to 2\gamma$;

2) $\tilde{p} + K^+ \to \tilde{\Sigma}^0 + \pi^- + \pi^+$.

7.128 Охарактеризуйте основные свойства кварков (антикварков) — зарядовые числа (электронное и барионное), спин, странность, цвет, очарование, прелесть.

7.129 Объясните, почему понадобилось введение внутренних характеристик кварков — цвета и очарования.

7.130 Запишите, какие комбинации известных в настоящее время кварков воспроизводят свойства: 1) нейтрона; 2) протона; 3) π^+ - мезона; 4) π^- - мезона; 5) Σ^0 - гиперона.

Ответ

1) n - нейтрон (udd);

2) p - протон (uud);

3) π^+ - мезон ($u\tilde{d}$);

4) π^- - мезон ($\tilde{u}d$);

5) Σ^0 - гиперон (uds).

Условия интерференционных максимумов и минимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Оптическая разность хода в тонких пленках в отраженном свете

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

$$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Условие главных максимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Условие дополнительных минимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = \pm\frac{m'\lambda}{N} \quad (m' \neq 0,\ N,\ 2N,\ \ldots).$$

Формула Вульфа — Брэггов

$$2d\sin\vartheta = m\lambda \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Разрешающая способность спектрального прибора и дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}; \qquad R = mN.$$

Продольный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}}.$$

Поперечный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Закон Малюса

$$I = I_0\cos^2\alpha.$$

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}.$$

Угол вращения плоскости поляризации в кристаллах и растворах

$$\varphi = \alpha d; \qquad \varphi = [\alpha]Cd.$$

Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4.$$

Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = b/T.$$

Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}.$$

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Энергия и импульс фотона

$$\mathscr{E}_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}; \qquad p_\gamma = \frac{\mathscr{E}_0}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Давление света при нормальном падении на поверхность

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho).$$

Изменение длины волны при эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

Обобщенная формула Бальмера

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\,\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Соотношение неопределенностей

$$\begin{cases} \Delta x\Delta p_x \geqslant h, \\ \Delta x\Delta p_y \geqslant h, \\ \Delta x\Delta p_z \geqslant h, \end{cases} \quad \Delta E\Delta t \geqslant h.$$

Общее уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0.$$

Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера

$$D = D_0\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,l\right].$$

Энергия квантового осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0.$$

Закон Мозли

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{я}}\right]c^2.$$

Дефект массы ядра

$$\Delta m = \left[Zm_p + (A-Z)m_n\right] - m_{\text{я}}.$$

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Период полураспада

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Правило смещения для α-распада

$${}^A_Z\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^4_2\mathrm{He}.$$

Правило смещения для β^--распада

$${}^A_Z\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^0_{-1}e.$$

Правило смещения для β^+-распада

$${}^A_Z\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^0_{+1}e.$$

Глава VI
ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

§ 19. Квантовая природа света и волновые свойства частиц

Работа выхода электронов из некоторых металлов дана в таблице 17 приложения.

19.1. Найти массу m фотона: а) красных лучей света ($\lambda = 700$ нм); б) рентгеновских лучей ($\lambda = 25$ пм); в) гамма-лучей ($\lambda = 1{,}24$ пм).

Решение:

Энергия фотона $E = h\nu$ — (1), где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ — частота колебания. Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Т. е. уравнение (1) можно записать $E = h\dfrac{c}{\lambda}$ — (2). С другой стороны, согласно формуле Эйнштейна $E = mc^2$ — (3). Приравнивая (2) и (3), получаем $h\dfrac{c}{\lambda} = mc^2$, откуда $m = \dfrac{h}{c\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг; б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг; в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

19.2. Найти энергию ε, массу m и импульс p фотона, если соответствующая ему длина волны $\lambda = 1{,}6$ пм.

Решение:

Имеем $E = h\dfrac{c}{\lambda}$; $m = \dfrac{h}{c\lambda}$ (см. задачу 19.1). Импульс фотона $p = mc = \dfrac{h}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 1{,}15 \cdot 10^{-13}$ Дж; $m = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ кг; $p = 4{,}1 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

19.3. Ртутная дуга имеет мощность $N = 125$ Вт. Какое число фотонов испускается в единицу времени в излучении с длинами волн λ, равными: 612,1; 579,1; 546,1; 404,7; 365,5; 253,7 нм? Интенсивности этих линий составляют соответственно 2; 4; 4; 2,9; 2,5; 4% интенсивности ртутной дуги. Считать, что 80% мощности дуги идет на излучение.

Решение:

Энергия излучения ртутной дуги $E = \eta Nt$, по условию $t = 1$ с. Энергия одного кванта света $E_0 = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$. Пусть I — интенсивность линии (в процентах), тогда количество квантов можно определить по формуле: $n = \dfrac{IE}{E_0} = \dfrac{I\eta Nt\lambda}{hc}$.

Подставляя числовые данные, получим:

1) $n = \dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}8 \cdot 125 \cdot 1 \cdot 6123 \cdot 10^{-10}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 6{,}2 \cdot 10^{18}$; 2) $n = 1{,}2 \cdot 10^{19}$;

3) $n = 1{,}1 \cdot 10^{19}$; 4) $n = 5{,}9 \cdot 10^{18}$; 5) $n = 4{,}6 \cdot 10^{18}$;

6) $n = 5{,}1 \cdot 10^{18}$.

19.4. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Решение:

Кинетическая энергия электрона $E = \frac{mv^2}{2}$ — (1). Энергия фотона $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\frac{mv^2}{2} = h\frac{c}{\lambda}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 9{,}2 \cdot 10^5$ м/с.

19.5. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Решение:

Импульс электрона $p_e = m_e v$ — (1). Импульс фотона $p = \frac{h}{\lambda}$ — (2) (см. задачу 19.2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $m_e v = \frac{h}{\lambda}$, откуда $v = \frac{h}{\lambda m_e}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с.

19.6. Какую энергию ε должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

Решение:

Энергия фотона $E = mc^2$. Подставляя в эту формулу значения массы покоя электрона, получим $E = 81 \cdot 10^{-15}$ Дж или $E = 510 \cdot 10^3$ эВ.

19.7. Импульс, переносимый монохроматическим пучком фотонов через площадку $S = 2$ см^2 за время $t = 0{,}5$ мин, равен $p = 3 \cdot 10^{-9}$ кг·м/с. Найти для этого пучка энергию E, падающую на единицу площади за единицу времени.

Решение:

Энергия и импульс фотона связаны соотношением $E = pc$. За единицу времени на единицу площади будет падать энергия $E_1 = \frac{pc}{St} = 150$ Дж/(с·м^2).

19.8. При какой температуре T кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение:

Кинетическая энергия молекулы двухатомного газа $W = \frac{5}{2}kT$. Кинетическая энергия фотона $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. По условию $W = \varepsilon$ или $\frac{5}{2}kT = h\frac{c}{\lambda}$, откуда $T = \frac{2hc}{5k\lambda} = 9800$ К.

19.9. При высоких энергиях трудно осуществить условия для изменения экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучений в рентгенах, поэтому допускается применение рентгена как единицы дозы для излучений с энергией квантов до $\varepsilon = 3$ МэВ. До какой предельной длины волны λ рентгеновского излучения можно употреблять рентген?

Решение:

Энергия квантов определяется соотношением $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Отсюда предельная длина волны равна $\lambda = \frac{hc}{E} = 0{,}41 \cdot 10^{-12}$ м.

19.10. Найти массу m фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре $t = 20°$ С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Решение:

Импульс фотона $p_1 = m_1 c$, где m_1 — масса фотона, c — скорость света в вакууме. Импульс молекулы водорода

$p_2 = m_2\sqrt{\overline{v^2}}$, где m_2 — масса молекулы водорода, $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}$ — средняя квадратичная скорость молекулы водорода. По условию $p_1 = p_2$ или $m_1 c = m_2\sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}$ — (1). Массу молекулы водорода можно определить из соотношения $m_2 = \dfrac{\mu}{N_A}$ — (2), где μ — молярная масса водорода, N_A — число Авогадро. Подставляя (2) в (1), найдем $m_1 c = \sqrt{\dfrac{3kT\mu}{N_A}}$, откуда $m_1 = \sqrt{\dfrac{3kT\mu}{c^2 N_A}}$. Подставляя числовые данные, получим $m_1 = 2{,}1\cdot 10^{-32}$ кг.

19.11. В работе А. Г. Столетова «Актино-электрические исследования» (1888 г.) впервые были установлены основные законы фотоэффекта. Один из результатов его опытов был сформулирован так: «Разряжающим действием обладают лучи самой высокой преломляемости с длиной волны менее 295 нм». Найти работу выхода A электрона из металла, с которым работал А. Г. Столетов.

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $h\nu = A + \dfrac{mv^2}{2}$. Условие возникновения фотоэффекта: $h\nu = A$ или $\nu = \dfrac{A}{h}$ — (1). Поскольку $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, то из (1) получим $A = \dfrac{hc}{\lambda}$ — (2). По условию $\lambda = 295\cdot 10^{-9}$ м, тогда из (2) найдем $A = 4{,}2$ эВ.

19.12. Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.

Решение:

Работа выхода электрона из металла, если его скоро[сть] $v = 0$, равна $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0}$, где λ_0 — красная грани[ца] фотоэффекта. Таким образом, $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 5{,}17\cdot 10^{-7}$ м.

19.13. Длина волны света, соответствующая красной грани[це] фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти ми[ни]мальную энергию фотона, вызывающего фотоэффект.

Решение:

Минимальная энергия фотона должна быть равна раб[оте] выхода электрона, т. е. $E_{min} = A = \dfrac{hc}{\lambda_0}$. Подставляя чис[ло]вые данные, получим $E_{min} = 7{,}2\cdot 10^{-19}$ Дж или $E_{min} = 4{,}5$ [эВ].

19.14. Длина волны света, соответствующая красной гран[ице] фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти раб[оту] выхода A электрона из металла, максимальную скорость [v] электронов, вырываемых из металла светом с длиной во[лны] $\lambda = 180$ нм, и максимальную кинетическую энергию [W] электронов.

Решение:

Работа выхода электрона $A = \dfrac{hc}{\lambda_0} = 7{,}2\cdot 10^{-19}$ Дж. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A + \dfrac{mv_{max}^2}{2}$ — (1), [где] $\dfrac{mv_{max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия выл[е]тающего электрона. Из (1) имеем $\dfrac{hc}{\lambda} - A = \dfrac{mv_{max}^2}{2}$, отк[уда] максимальная скорость электронов $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2(hc/\lambda - A)}{m}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v_{max} = 9 \cdot 10^5$ м/с. Максимальная кинетическая энергия электронов равна $W_{max} = \dfrac{mv^2}{2} = 3.7 \cdot 10^{-19}$ Дж.

19.15. Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3$ В. Фотоэффект сжимается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.

Решение:

Работа выхода электрона $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0} = 2.48$ эВ. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $h\nu = A + \dfrac{mv^2}{2}$. Если электроны полностью задерживаются разностью потенциалов U, то по закону сохранения энергии $eU = \dfrac{mv^2}{2}$. Тогда $h\nu = A + eU$, откуда $\nu = \dfrac{A + eU}{h} = 13{,}2 \cdot 10^{14}$ Гц.

19.16. Найти задерживающую разность потенциалов U для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Решение:

Имеем $h\nu = A + eU$ (см. задачу 19.15) или $h\dfrac{c}{\lambda} = A + eU$ — (1). Работа выхода электрона из калия $A = 2$ эВ $=$

$= 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж (см. таблицу 17). Из (1) найдем $U = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} = 1{,}75$ В.

19.17. При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 0{,}8$ В. Найти длину волны λ применяемого облучения и предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект.

Решение:

Имеем $h\dfrac{c}{\lambda} = A + eU$, откуда $\lambda = \dfrac{hc}{A + eU} = 204$ нм. Предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект, найдем из соотношения $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0}$, откуда $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 234$ нм.

19.18. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4{,}5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $\varepsilon = A + \dfrac{mv^2}{2} = A + \dfrac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2m(\varepsilon - A)} = 3.4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

19.19. Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц — разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Решение:

Имеем $h\nu_1 = A + eU_1$ — (1); $h\nu_2 = A + eU_2$ — (2). Вычитая (1) из (2), получим $h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_2 - U_1)$, откуда $h = \dfrac{U_2 - U_1}{\nu_2 - \nu_1} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

19.20. Вакуумный фотоэлемент состоит из центрального катода (вольфрамового шарика) и анода (внутренней поверхности посеребренной изнутри колбы). Контактная разность потенциалов между электродами $U_0 = 0{,}6$ В ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом с длиной волны $\lambda = 230$ нм. Какую задерживающую разность потенциалов U надо приложить между электродами, чтобы фототок упал до нуля? Какую скорость v получат электроны, когда они долетят до анода, если не прикладывать между катодом и анодом разности потенциалов?

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $eU = h\dfrac{c}{\lambda} - A + eU_0$ (см. задачу 19.15), откуда $U = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} + U_0$. Подставляя числовые данные, получим $U = 1{,}5$ В. Чтобы фототок упал до нуля, задерживающая разность потенциалов должна удовлетворять условию $eU = \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 7{,}3 \cdot 10^5$ м/с.

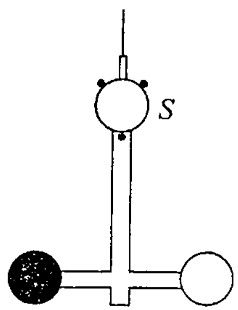
19.21. Между электродами фотоэлемента предыдущей задачи приложена задерживающая разность потенциалов $U = 1$ В. При какой предельной длине волны λ_0 падающего на катод света начинается фотоэффект?

Решение:

Имеем $U_e = h\dfrac{c}{\lambda_0} - A$, откуда $\lambda_0 = \dfrac{hc}{eU + A}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 226$ нм.

19.22. На рисунке показана часть прибора, с которым П. Н. Лебедев производил свои опыты по измерению светового давления. Стеклянная крестовина, подвешенная на тонкой нити, заключена в откачанный сосуд и имеет на концах два легких кружка из платиновой фольги. Один кружок зачернен, другой оставлен блестящим. Направляя свет на один из кружков и измеряя угол поворота нити (для зеркального отсчета служит зеркальце S), можно определить световое давление. Найти световое давление P и световую энергию E, падающую от дуговой лампы в единицу времени на единицу площади кружков. При освещении блестящего кружка отклонение зайчика $a = 76$ мм по шкале, удаленной от зеркальца на расстояние $b = 1200$ мм. Диаметр кружков $d = 5$ мм. Расстояние от центра кружка до оси вращения $l = 9{,}2$ мм. Коэффициент отражения света от блестящего кружка $\rho = 0{,}5$. Постоянная момента кручения нити ($M = k\alpha$) $k = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ Н·м/рад.

Решение:



Имеем $P = \dfrac{F}{S}$ — (1), где F — сила светового давления на кружок площадью S. Но $F = \dfrac{M}{l} = \dfrac{k\alpha}{l}$ — (2), где M — момент кручения нити, l — расстояние от центра кружка до оси вращения, α — угол поворота кружка. Зная, что при повороте зеркальца на угол α отраженный луч повернется на угол 2α, найдем: $tg 2\alpha = \frac{a}{b}$. Для малых углов $tg 2\alpha \approx 2\alpha = \frac{a}{b}$. Отсюда $\alpha = \frac{a}{2b}$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P = \frac{ka}{2lbS} = 3{,}85 \cdot 10^{-6}$ Па. Световая энергия $E = \frac{Pc}{1+\rho} = = 770$ Дж/(с·м^2).

19.23. В одном из опытов П. Н. Лебедева при падении света на зачерненный кружок ($\rho = 0$) угол поворота нити был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление P и мощность N падающего света. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение:

Имеем $p = \frac{k\alpha}{lS} = \frac{4k\alpha}{l\pi d^2}$ (см. задачу 19.22). Подставляя числовые данные, получим $p = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$ Н/м^2. С другой стороны, световое давление $p = \frac{E}{c}(1+\rho)$. По условию коэффициент отражения света $\rho = 0$, тогда $p = \frac{E}{c}$ — (1), где E — количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени. Тогда мощность N света, падающего на площадь S кружка, найдем из соотношения $N = E \cdot S$. Из (1) имеем $E = pc$, кроме того, $S = \frac{\pi d^2}{4}$, отсюда $N = \frac{pc \cdot \pi d^2}{4} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ Вт.

19.24. В одном из опытов П. Н. Лебедева мощность падающего на кружки монохроматического света ($\lambda = 560$ нм) была равна $N = 8{,}33$ мВт. Найти число фотонов I, падающих в единицу времени на единицу площади кружков, и импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, для

значений ρ, равных: 0; 0,5; 1. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение:

Найдем концентрацию фотонов в пучке света, падающем на кружок, из соотношения $n = \frac{\omega}{\varepsilon}$ — (1), где ω — объемная плотность энергии, ε — энергия одного фотона. Поскольку $\omega = \frac{E}{c} = \frac{N}{Sc}$, а $\varepsilon = h\frac{c}{\lambda}$, то выражение (1) примет вид $n = \frac{N\lambda}{Sc^2 h}$ — (2). Площадь кружка $S = \frac{\pi d^2}{4} = = 19{,}6 \cdot 10^6$ м^2. Число I фотонов, падающих за единицу времени на единицу площади, найдем из соотношения $I = \frac{N}{St}$, где N — число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S. Но $N = ncSt$, следовательно, $I = \frac{ncSt}{St} = = nc$. С учетом (2) получим $I = \frac{N\lambda}{Sch} = 1{,}2 \cdot 10^{21}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$. Импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, будет численно равен световому давлению p, т. е. $F\Delta\tau = p = \frac{N}{Sc}(1+\rho)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $F_1\Delta\tau = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2; б) $F_2\Delta\tau = 2{,}13 \times \times 10^{-6}$ Н·с/м^2; в) $F_3\Delta\tau = 2{,}84 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2.

19.25. Русский астроном Ф. А. Бредихин объяснил форму кометных хвостов световым давлением солнечных лучей. Найти световое давление P солнечных лучей на абсолютно черное тело, помещенное на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля. Какую массу m должна иметь частица в кометном хвосте, помещенная на этом расстоянии, чтобы сила светового давления на нее уравновешивалась силой притяжения частицы Солнцем?

площадь частицы, отражающую все падающие на нее лучи, считать равной $S = 0,5 \cdot 10^{-12}$ м^2. Солнечная постоянная $K = 1,37$ кВт/м^2.

Решение:

Световое давление $P = \dfrac{E}{c}(1+\rho)$. В условиях данной задачи $E = K$; $\rho = 0$. Тогда $P = \dfrac{K}{c} = 4,6 \cdot 10^{-6}$ Па. Сила светового давления $F_1 = PS$, сила притяжения частицы Солнцем $F_2 = G\dfrac{mM}{R^2}$, где M — масса Солнца. По условию $F_1 = F_2$, т. е. $PS = G\dfrac{mM}{R^2}$, откуда масса частицы $m = \dfrac{PSR^2}{GM}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 3,9 \cdot 10^{-16}$ кг.

19.26. Найти световое давление P на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5$ см. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 6% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Решение:

По определению светового давления $P = \dfrac{E}{c}(1+\rho)$ — (1), где $E = \dfrac{N}{S}$ — (2) — энергия, падающая на единицу поверхности за единицу времени, N — мощность лампы, $S = 4\pi r^2$ — (3) — площадь поверхности колбы, ρ — коэффициент отражения света. Подставляя (3) в (2), получаем $E = \dfrac{N}{4\pi r^2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), окончательно находим $P = \dfrac{N(1+\rho)}{4\pi r^2 c} = 11,03$ мкПа.

19.27. На поверхность площадью $S = 0,01$ м^2 в единицу времени падает световая энергия $E = 1,05$ Дж/с. найти световое давление P в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

Решение:

Полностью поглощает лучи черная поверхность, а полностью отражает — зеркальная. При падении на черную поверхность фотон с энергией E_0 поглощается, передавая поверхности импульс $\dfrac{E_0}{c}$. За время Δt поверхность площадью S поглотит излучение с энергией $E = IS\Delta t$ — (1), содержащее $\dfrac{E}{E_0}$ фотонов. Переданный поверхности импульс $\dfrac{E}{E_0}\dfrac{E_0}{c} = \dfrac{IS\Delta t}{c}$; с другой стороны, он равен $F\Delta t = P_1 S\Delta t$. Отсюда $P_1 = \dfrac{I}{c}$. Из (1) найдем, учитывая, что по условию $\Delta t = 1$ с, $I = \dfrac{E}{S}$, тогда $P_1 = \dfrac{E}{Sc} = 0,35 \cdot 10^{-6}$ Па. При отражении от зеркальной поверхности фотоны изменяют свой импульс на противоположный. При этом каждый фотон передает поверхности импульс $\dfrac{2E_0}{c}$; таким образом, давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на черную. Т. е. $P_2 = 2\dfrac{E}{Sc} = 0,7 \cdot 10^{-6}$ Па.

19.28. Монохроматический пучок света ($\lambda = 490$ нм), падая по нормали к поверхности, производит световое давление $P = 4,9$ мкПа. Какое число фотонов I падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света $\rho = 0,25$.

Решение:

Воспользуемся формулой из задачи 19.24, выражающей число фотонов, падающих в единицу времени на площадь S: $I = \frac{N\lambda}{Sch}$. Здесь $\frac{N}{S}$ — мощность света, падающего на единицу площади, причем $\frac{N}{S} = E = \frac{Pc}{1+\rho}$ (см. задачу 19.23). Отсюда $I = \frac{P\lambda}{h(1+\rho)} = 2{,}9 \cdot 10^{21}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$.

19.29. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 70{,}8$ пм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны λ рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) $\varphi = \pi$.

Решение:

Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии определяется формулой $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$, где φ — угол рассеяния, m — масса электрона. Отсюда $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 73{,}22 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 75{,}6 \cdot 10^{-12}$ м.

19.30. Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\varphi = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25{,}4$ пм?

Решение:

Имеем $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$ (см. задачу 19.29), отсюда $\lambda_0 = \lambda - \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 24{,}2 \cdot 10^{-12}$ м.

19.31. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\varphi = 90°$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию W_e и импульс электрона отдачи.

Решение:

Кинетическая энергия электрона равна энергии, потерянной фотоном: $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. Подставляя числовые данные, получим $W_e = 10{,}56 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 6{,}6 \cdot 10^3$ эВ. Импульс и кинетическая энергия электрона связаны соотношением $W = \frac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2mW} = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.32. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти энергию W и импульс p рассеянного фотона.

Решение:

Энергия падающего фотона $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$. Энергия рассеянного фотона $W = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. По условию $W_e = \frac{W_0}{2}$, т. е. $\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = \frac{hc}{2\lambda_0}$. Отсюда $\frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = W = \frac{hc}{2\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \frac{h}{mc}$. Окончательно имеем $W = \frac{mc^2}{2}$, т. е. энергия рассеянного фотона равна половине энергии покоя электрона. Подставляя числовые данные, получим $W = 41 \cdot 10^{-15}$ Дж $= 0{,}26 \cdot 10^6$ эВ. Импульс фотона $p = \frac{W}{c} = 13{,}7 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.33. Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = 0{,}6$ МэВ. Найти энергию W_e электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

Решение:

Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$ (см. задачу 19.31). Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0}$, т. е. можно записать, что $W_e = \varepsilon \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$ — (1). По условию $\Delta\lambda = 0{,}2\lambda_0$; $\lambda_0 + \Delta\lambda = 1{,}2\lambda_0$, тогда из (1) получим $W = 0{,}17\varepsilon = 0{,}1$ МэВ.

19.34. Найти длину волны де Бройля λ для электронов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В и $U_2 = 100$ В.

Решение:

Пучок элементарных частиц обладает свойством плоской волны, распространяющейся в направлении перемещения этих частиц. Длина волны λ, соответствующая этому пучку, определяется соотношением де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, где v — скорость частиц, m — масса частиц, W — их кинетическая энергия. Если скорость v частиц соизмерима со скоростью света c, то эта формула принимает вид $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, m_0 — масса покоя частицы. Пройдя разность потенциалов U, электрон приобретает кинетическую энергию, при этом $eU = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (3). При $U_1 = 1$ В получим $v_1 = 6 \cdot 10^5$ м/с, при $U_2 = 100$ В получим $v_2 = 6 \cdot 10^6$ м/с. В первом случае для нахождения длины волны де Бройля можно применить уравнение (1), во втором случае лучше использовать уравнение (2). Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 1{,}22 \cdot 10^{-9}$ м; $\lambda_2 = 0{,}122 \cdot 10^{-9}$ м.

19.35. Решить предыдущую задачу для пучка протонов.

Решение:

Найдем скорость протонов, прошедших разность потенциалов U_1 и U_2. По формуле (3) из предыдущей задачи получим $v_1 = 1{,}38 \cdot 10^4$ м/с; $v_2 = 1{,}38 \cdot 10^5$ м/с. Следовательно, в обоих случаях можно использовать формулу $\lambda = \frac{h}{mv}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 29 \cdot 10^{-12}$ м; $\lambda_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-12}$ м.

19.36. Найти длину волны де Бройля λ для: а) электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6$ м/с; б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре

$T = 300$ К; в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $v = 1$ см/с.

Решение:

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv}$ — (1) для $v << c$ или соотношением $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2}$ — (2) для скоростей v, соизмеримых со скоростью света c. а) Воспользовавшись уравнением (2), найдем $\lambda = 730 \cdot 10^{-12}$ м. б) Скорость атома водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 2735$ м/с, т. е. $v << c$. По формуле (1) найдем $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hN_A}{\mu v} = 145 \cdot 10^{-12}$ м. в) Поскольку скорость шарика $v << c$, то по формуле (1) найдем $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-29}$ м, т. е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

19.37. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, имеющего кинетическую энергию: а) $W_1 = 10$ кэВ; б) $W_2 = 1$ МэВ.

Решение:

Имеем $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ (см. задачу 19.34). Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 12{,}3 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 0{,}87 \cdot 10^{-12}$ м.

19.38. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2{,}02$ пм. Найти массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

Решение:

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ — (1), где $W = eU$ — (2) — энергия частицы, m_0 — масса покоя частицы. Из (2) найдем $W = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж. Поскольку $W << c$, величиной $\frac{W^2}{c^2}$ в уравнении (1) можно пренебречь и оно примет вид $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, откуда $m = \frac{h^2}{2W\lambda^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

19.39. Составить таблицу значений длин волн де Бройля λ для электрона, движущегося со скоростью v, равной: $2 \cdot 10^8$; $2{,}2 \cdot 10^8$; $2{,}4 \cdot 10^8$; $2{,}6 \cdot 10^8$; $2{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

Решение:

Воспользовавшись формулой для нахождения длины волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, составим таблицу.

v, 10^8 м/с	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
λ, пм	2,7	2,25	1,82	1,39	0,93[illegible]

19.40. α-частица движется по окружности радиусом $r = 8{,}3$ мм в однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 18{,}9$ кА/м. Найти длину волны де Бройля λ для α-частицы.

Решение:

На α-частицу, движущуюся в однородном магнитном поле, действует сила Лоренца $F_л = qvB$ — (1), которая является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{r}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_л = \dfrac{mv^2}{r}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (4), получаем $qvB = \dfrac{mv^2}{r}$, откуда скорость α-частицы $v = \dfrac{qBr}{m}$ — (5). Магнитная индукция связана с напряженностью магнитного поля соотношением $B = \mu\mu_0 H$ — (6), причем для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$. Подставляя (6) в (5), получаем $v = \dfrac{q\mu_0 Hr}{m}$ — (7). Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{mv}$ — (8). Подставляя (7) в (8), окончательно находим $\lambda = \dfrac{h}{q\mu_0 Hr} = 13{,}11$ пм.

19.41. Найти длину волны де Бройля λ для атома водорода, движущегося при температуре $T = 293$ К с наиболее вероятной скоростью.

Решение:
Наиболее вероятная скорость движения атома водорода $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$ — (1), где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Длина волны де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{mv_в}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2kT/m}} = 180$ пм.

§ 20. Атом Бора. Рентгеновские лучи

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 19 из приложения. В задачах 20.5, 20.33 дан авторский вариант решения.

20.1. Найти радиусы r_k трех первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости v_k электрона на них.

Решение:
На электрон, движущийся в атоме водорода по k-й боровской орбите, действует кулоновская сила $F = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (1), где e — заряд электрона. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v_k^2}{r_k}$ — (2), где v_k — скорость электрона на k-й орбите. По второму закону Ньютона $F = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = \dfrac{mv_k^2}{r_k}$, откуда $r_k = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_k^2}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\dfrac{h}{2\pi}$ — (5). Решая совместно уравнения (4) и (5), найдем $v_k = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ и $r_k = \dfrac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$. По результатам вычислений составим таблицу.

k	1	2	3
v, 10^6 м/с	2,18	1,08	0,73
r, 10^{-12} м	52,9	211,6	476,1

20.2. Найти кинетическую $W_к$, потенциальную $W_п$ и полную W энергии электрона на первой боровской орбите.

Решение:

Скорость движения электрона по k-й орбите $v_k = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (1) (см. задачу 20.1). Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{к(k)} = \dfrac{mv_k^2}{2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W_{к(k)} = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$. По условию $k = 1$. Подставляя числовые данные, получим $W_{к(1)} = 21{,}78\cdot 10^{-19}$ Дж $= 13{,}6$ эВ. Потенциальная энергия электрона $W_{п(1)} = -2W_{к(1)} = -27{,}2$ эВ. Полная энергия электрона $W_1 = W_{к(1)} + W_{п(1)} = -13{,}6$ эВ.

20.3. Найти кинетическую энергию $W_к$ электрона, находящегося на k-й орбите атома водорода, для $k = 1, 2, 3$ и ∞.

Решение:

Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{к(k)} = \dfrac{mv_k^2}{2}$ (см. задачу 20.2). Если $k = 1$, то $W_{к(1)} = 13{,}6$ эВ. Если $k = 2$, то $W_{к(1)} = 3{,}4$ эВ. Если $k = 3$, то $W_{к(1)} = 1{,}51$ эВ. Если $k = \infty$, то $W_{к(1)} = 0$.

20.4. Найти период T обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость ω.

Решение:

Радиус k-й боровской орбиты электрона в атоме водорода и скорость движения электрона по k-й орбите соответ-

ственно равны $r_k = \dfrac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (1) и $v_k = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1). Период обращения электрона $T_k = \dfrac{2\pi r_k}{v_k}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $T_k = \dfrac{4\varepsilon_0^2 k^3 h^3}{me^4}$ — (4). Для $k = 1$ найдем $T_1 = 1{,}52\cdot 10^{-16}$ с. Угловая скорость движения электрона по k-й орбите $\omega_k = \dfrac{2\pi}{T_k}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получим $\omega_k = \dfrac{\pi m e^4}{2\varepsilon_0^2 k^3 h^3}$. Для $k = 1$ найдем $\omega_1 = 4{,}13\cdot 10^{16}$ рад/с.

20.5. Найти наименьшую λ_{min} и наибольшую λ_{max} длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\dfrac{1}{\lambda} = R\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ — (1).

k	n	Серия	Область
1	2.3.4 ...	Лаймана	Ультрафиолетовая
2	3.4.5 ...	Бальмера	видимая
3	4.5.6 ...	Пашена	инфракрасная
4	5.6.7 ...	Брэккета	инфракрасная
5	6.7.8 ...	Пфунда	инфракрасная

Таким образом, видимая область спектра соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3, 4, 5$ ... Очевидно, наименьшая длина волны спектральных линий этой серии будет при $n = \infty$. Тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{R}{4}$ или $\lambda_{min} = \frac{4}{R} = 365$ нм (с точностью до третьей значащей цифры). Наибольшая длина волны соответствует $n = 3$, при этом $\lambda_{max} = 656$ нм.

20.6. Найти наибольшую длину волны λ_{max} в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). В ультрафиолетовой области $k = 1$, $n = 2, 3, 4$ ... — серия Лаймана. Наибольшая длина волны соответствует $n = 2$, тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{3R}{4}$ или $\lambda_{max} = \frac{4}{3R}$, где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{max} = 121$ нм. С другой стороны, из соотношения де Бройля для релятивистских частиц $\lambda_{max} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), получим $\frac{4}{3R} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$, откуда наименьшая скорость, необходимая для появления данной спектральной линии, равна $v_{min} = \frac{3Rhc}{\sqrt{16m^2c^2 + 9R^2h^2}} = 1{,}88 \cdot 10^6$ м/с.

16—3269

20.7. Найти потенциал ионизации U_i атома водорода.

Решение:

Потенциал ионизации U_i атома определяется соотношением $eU_i = A_i$, где A_i — работа по удалению электрона с нормальной орбиты на бесконечность. Для атома водорода $A_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. При $k = 1$ и $n = \infty$ имеем $A_i = hRc$, потенциал ионизации $U_i = \frac{A_i}{e} = \frac{hRc}{e} = 13{,}6$ В.

20.8. Найти первый потенциал возбуждения U_1 атома водорода.

Решение:

Первый потенциал возбуждения атома водорода определяется из закона сохранения энергии $W_{п(1)} = W_{к(1)} - W_{к(2)}$, где $W_{п(1)} = eU_1$ — (2) — потенциальная энергия электрона, необходимая для возбуждения. $W_{K(k)} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$ — (3) (см. задачу 20.2) — кинетическая энергия электрона на k-й орбите. Подставляя (2) и (3) в (1), получим $eU_1 = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right)$, откуда, учитывая, что $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$, найдем $U_1 = \frac{3me^3}{32\varepsilon_0^2 h^2} = 10{,}2$ В.

20.9. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь эти электроны?

Решение:

Все линии всех серий спектра водорода появятся при ионизации атома водорода. Следовательно, наименьшая энергия $W_{min} = eU_i = \frac{mv_{min}^2}{2}$ — (1). Поскольку $W_{min} = 13{,}6$ эВ (см. задачу 20.7), то из (1) найдем $v_{min} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}2\cdot 10^6$ м/с.

20.10. В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атома водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

Решение:

Энергия, необходимая для перевода атома в первое возбужденное состояние, $W_1 = 10{,}2$ эВ (см. задачу 20.8). Энергия, необходимая для перевода атома во второе возбужденное состояние $(k = 1,\ n = 3)$, $W_2 = 12{,}1$ эВ. Таким образом, спектр водорода будет иметь только одну спектральную линию, если энергия бомбардирующих электронов лежит в интервале $10{,}2 \le W \le 12{,}1$ эВ.

20.11. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн λ этих линий.

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода для всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Для серий Лаймона первые две линии будут иметь следующие длины волн: 1) Если $k = 1$ и $n = 2$, то $\lambda_1 = 121$ нм. 2) Если $k = 1$ и $n = 3$, то $\lambda_2 = 102{,}6$ нм. Кроме того, первая линия в серии

Бальмера при $k = 2$ и $n = 3$ будет иметь длину волны $\lambda_3 = 656{,}3$ нм. Наименьшая энергия бомбардирующих электронов, необходимая для возникновения данных спектральных линий, W_{min} по закону сохранения энергии будет равна энергии, необходимой для перевода атома из основного во второе возбужденное состояние, т. е. $W_{min} = W_{k(1)} - W_{k(3)} = 12{,}03$ эВ.

20.12. В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атома водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

Решение:

Для наблюдения трех спектральных линий необходимо, чтобы мог осуществляться переход электронов в атоме водорода с первого электрического уровня на третий. В этом случае будут наблюдаться две линии серии Лаймана и одна линия серии Бальмера. Формула, позволяющая найти длины волн, соответствующие линиям водородного спектра, имеет вид $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где k и n — номера орбит, $R = 1{,}097\cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Тогда $\lambda = \frac{k^2 n^2}{R\left(n^2 - k^2\right)}$. Для минимальной длины волны $k = 1$ и $n = 3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102{,}6$ нм. Для максимальной длины волны $k = 1$ и $n = 3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102{,}6$ нм. Для максимальной длины волны $k = 1$ и $n = 2$, следовательно, $\lambda_{max} = \frac{4}{3R} = 121{,}5$ нм. Таким образом, $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.13. На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 486$ нм?

Решение:

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = \Delta W$ или $\nu = \frac{\Delta W}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, λ — длина волны излученного атомом фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{\Delta W}{h} = \frac{c}{\lambda}$, откуда изменение кинетической энергии электрона $\Delta W = \frac{ch}{\lambda} = 2{,}55$ эВ.

20.14. В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты r_k электрона увеличился в 9 раз?

Решение:

Радиусы орбит, по которым возможно движение электронов в атоме водорода, согласно первому постулату Бора удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$ — (1), где m — масса электрона, v_k — его скорость на k-й орбите, r_k — радиус этой орбиты, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. На электроны действует кулоновская сила $F_K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (2), которая является центростремительной

и сообщает электронам нормальное ускорение $a_n = \frac{vk^2}{r_k}$ — (3). По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = m\frac{v_k^2}{r_k}$ — (5), где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Решая совместно уравнения (1) и (5), находим $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (6). По условию $\frac{r_n}{r_k} = 9$, тогда из формулы (6) следует, что $\frac{n}{k} = 3$. Поскольку $n = 3k$, то переход электронов осуществляется между первым и третьим энергетическими уровнями, тогда (см. задачу 20.12) длины волн $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.15. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41°$?

Решение:

Согласно условию главных максимумов для дифракционной решетки $d \sin\varphi = k\lambda$ — (1). В нашем случае $k = 5$, тогда из формулы (1) имеем $\lambda = \frac{d \sin\varphi}{k}$ — (2). Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты на другую (см. задачу 20.13) определяется соотношением $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta W = \frac{chk}{d \sin\varphi} = 1{,}89$ эВ. Подбором находим, что такой переход возможен с $n = 3$ на $k = 2$ в серии Бальмера.

20.16. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по первой боровской орбите атома водорода.

Решение:
Длина волны де Бройля для электрона (см. задачу 20.6) определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv_k}\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}$ — (1), где $v_k = \frac{l^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1) — скорость электрона на k-й орбите. Подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{2\varepsilon_0 kh^2}{ml^2}\sqrt{1-\frac{l^4}{4\varepsilon_0 k^2 h^2 c^2}} = 0{,}33$ нм.

20.17. Найти радиус r_1 первой боровской электронной орбиты для однократно ионизированного гелия и скорость v_1 электрона на ней.

Решение:
В однократно ионизированном гелии на электрон, движущийся по первой боровской орбите, будет действовать сила Кулона $F_K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ — (1), где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, r_1 — радиус первой боровской орбиты. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_1^2}{r_1}$ — (2), где v_1 — скорость электрона на первой боровской орбите. По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно

только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$, где k — номер орбиты. В нашем случае $k = 1$, поэтому $mv_1 r_1 = \frac{h}{2\pi}$ — (5), где $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Решая совместно уравнения (4) и (5), находим радиус первой боровской орбиты r_1 и скорость электрона на ней, которые соответственно равны $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Ze^2} = 26{,}47$ пм и $v_1 = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} =$ $= 4{,}37\cdot 10^6$ м/с.

20.18. Найти первый потенциал возбуждения U_1: а) однократно ионизированного гелия; б) двукратно ионизированного лития.

Решение:
Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = W_n - W_k$ — (1), где k и n — номера орбит, причем $n > k$. В нашем случае $n = 2$ и $k = 1$. В водородоподобных ионах частоты определяются из соотношения $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, где $R = 1{,}097\cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя значения k и n для нашего случая, получаем $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\nu = \frac{3RcZ^2 h}{4} = W_n - W_k$ — (3). Для возбуждения водородоподобных ионов электроны должны обладать энергией $W = eU_1$, тогда по закону сохранения энергии $eU_1 = W_n - W_k$ — (4). Приравнивая левые части урав-

нений (3) и (4), получаем $eU_1 = \frac{3RcZ^2h}{4}$, откуда первый потенциал возбуждения водородоподобного иона $U_1 = \frac{3RcZ^2h}{4e}$. а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_1 = 40{,}8$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_2 = 91{,}8$ В.

20.19. Найти потенциал ионизации U_i: а) однократно ионизированного гелия; б) двукратно ионизированного лития.

Решение:

Потенциал ионизации водородоподобного иона U_i определяется уравнением $eU_i = A_i$ — (1), где A_i — работа удаления электрона с нормальной орбиты в бесконечность. Для водородоподобных ионов $A_i = h\nu$ — (2), где $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $A_i = hRcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (4). При $k = 1$ и $n = \infty$ формула (4) примет вид $A_i = hRcZ^2$ — (5). Подставляя (5) в (1), получаем $eU_i = hRcZ^2$, откуда потенциал ионизации $U_i = \frac{hRcZ^2}{e}$.

а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_i = 54{,}5$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_i = 122{,}8$ В.

20.20. Найти длину волны λ фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизированном атоме гелия.

Решение:

Частота излучения фотона водородоподобным ионом (см. задачу 20.18) при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую равна $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где λ — длина волны фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{c}{\lambda} = \frac{2RcZ^2}{4}$ или $\frac{1}{\lambda} = \frac{3RZ^2}{4}$, откуда длина волны $\lambda = \frac{4}{3RZ^2}$. Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $\lambda = 30{,}4$ нм.

20.21. Решить предыдущую задачу для двукратно ионизированного атома лития.

Решение:

Длина волны фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую (см. задачу 20.20), равна $\lambda = \frac{4}{3RZ^2}$. Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $\lambda = 13{,}5$ нм.

20.22. D-линия натрия излучается в результате такого перехода с одной орбиты атома на другую, при котором энергия атома уменьшается на $\Delta W = 3{,}37 \cdot 10^{-19}$ Дж. Найти длину волны λ D-линии натрия.

Решение:

Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты атома на другую (см. задачу 20.13) равно

$\Delta W = \dfrac{ch}{\lambda}$, откуда длина волны D-линии натрия $\lambda = \dfrac{ch}{\Delta W} = 589$ нм.

20.23. На рисунке изображена схема прибора для определения резонансного потенциала натрия. Трубка содержит пары натрия. Электроды G и A имеют одинаковый потенциал. При какой наименьшей ускоряющей разности потенциалов U между катодом K и сеткой G наблюдается спектральная линия с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия электрического поля между катодом и анодом $W_п = eU$ — (1) идет на изменение кинетической энергии электронов при переходе с одной орбиты на другую, которое (см задачу 20.13) равно $\Delta W = \dfrac{ch}{\lambda}$ — (2), т. е. $W_п = \Delta W$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $eU = \dfrac{ch}{\lambda}$, откуда ускоряющая разность потенциалов $U = \dfrac{ch}{e\lambda} = 2{,}1$ В.

20.24. Электрон, пройдя разность потенциалов $U = 4{,}9$ В, сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Какую длину волны λ имеет фотон, соответствующий переходу атома ртути в нормальное состояние?

Решение:

Ускоряющая разность потенциалов (см. задачу 20.23) равна $U = \dfrac{ch}{e\lambda}$. Отсюда длина волны фотона, соответствующего переходу атома ртути в нормальное состояние, $\lambda = \dfrac{ch}{eU} = 533$ нм.

20.25. На рисунке изображена установка для наблюдения дифракции рентгеновских лучей. При вращении кристалла C только тот луч будет отражаться на фотографическую пластинку B, длина волны которого удовлетворяет уравнению Вульфа — Брэгга. При каком наименьшем угле φ между мощного кристалла и пучком рентгеновских лучей были отражены рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм? Постоянная решетки кристалла $d = 303$ пм.

Решение:

Наименьший угол соответствует спектру первого порядка, т. е. $\lambda = 2d\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{2d} = 0{,}033$; $\varphi \approx 2°$.

20.26. Найти постоянную решетки d каменной соли, зная молярную массу $\mu = 0{,}058$ кг/моль каменной соли и ее плотность $\rho = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3. Кристаллы каменной соли обладают простой кубической структурой.

Решение:

Молярный объем каменной соли $V = \dfrac{\mu}{\rho}$. Количество ионов в молярном объеме равно $2N_A$. Объем, приходящийся на один ион, $V_1 = \dfrac{\mu}{2\rho N_A}$, отсюда расстояние между ионами и постоянная решетки, $d = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{\dfrac{\mu}{2\rho N_A}} = 281 \cdot 10^{-12}$ м.

20.27. При экспериментальном определении постоянной Планка h при помощи рентгеновских лучей кристалл устанаввливается под некоторым углом φ, а разность потенциалов U, приложенная к электродам рентгеновской трубки, увеличивается до тех пор, пока не появится линия, соответствующая этому углу. Найти постоянную Планка h из следующих данных: кристалл каменной соли установлен под углом $\varphi = 14°$; разность потенциалов, при которой впервые появилась линия, соответствующая этому углу, $U = 9{,}1$ кВ; постоянная решетки кристалла $d = 281$ пм.

Решение:

При увеличении разности потенциалов U, приложенной к электродам рентгеновской трубки, появляется спектральная линия в спектре первого порядка, длина волны которой λ удовлетворяет уравнению $eU = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ — (1). Но по формуле Вульфа — Брэгга $\lambda = 2d\sin\varphi$ — (2). Из (1) и (2) находим $h = \dfrac{eU\lambda}{c} = \dfrac{eU \cdot 2d}{c}\sin\varphi = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

20.28. К электродам рентгеновской трубки приложена разность потенциалов $U = 60$ кВ. Наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, $\lambda = 20{,}6$ пм. Найти из этих данных постоянную h Планка.

Решение:

Частота $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_{min}}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра, где λ_{min} — наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, может быть найдена из соотношения $h\nu_0 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\dfrac{hc}{\lambda_{min}} = eU$, откуда постоянная Планка $h = \dfrac{eU\lambda_{min}}{c} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

20.29. Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, для случаев, когда к рентгеновской трубке приложена разность потенциалов U, равная: 30, 40, 50 кВ.

Решение:

Частота $\nu_1 = \dfrac{c}{\lambda}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра (см. задачу 20.28), может быть найдена из соотношения $h\nu_1 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\dfrac{hc}{\lambda} = eU$, откуда длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$. Если $U_1 = 30$ кВ, то $\lambda_1 = 43{,}1$ пм. Если $U_2 = 40$ кВ, то $\lambda_2 = 31$ пм. Если $U_3 = 50$ кВ, то $\lambda_3 = 24{,}8$ пм.

20.30. Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на $\Delta U = 23$ кВ увеличивает искомую длину волны в 2 раза.

Решение:

Длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра (см. задачу 20.29), равна $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$ — (1). По условию $2\lambda = \dfrac{hc}{e(U - \Delta U)}$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\dfrac{U}{U - \Delta U} = 2$, отсюда $U = 2\Delta U$ — (3). Подставляя (3) в (1), получаем $\lambda = \dfrac{hc}{2e\Delta U} = 27$ пм.

20.31. Длина волны гамма-излучения радия $\lambda = 1.6$ пм. Какую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить рентгеновские лучи с этой длиной волны?

Решение:

Длина волны гамма-излучения радия (см. задачу 20.29) равна $\lambda = \frac{hc}{eU}$. Отсюда разность потенциалов, которую необходимо приложить к рентгеновской трубке. $U = \frac{hc}{e\lambda} = 775$ кВ.

20.32. Какую наименьшую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии *K*-серии, если в качестве материала антикатода взять: а) медь; б) серебро; в) вольфрам; г) платину?

Решение:

Все линии *K*-серии (а также линии остальных серий) появятся одновременно, как только будет удален электрон с *K*-орбиты атома. Для этого надо приложить разность потенциалов U, удовлетворяющую соотношению $eU = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, где λ — длина волны, соответствующая переходу бесконечно удаленного электрона на *K*-орбиту, т. е. длина волны, определяющая границу *K*-серии. Для нашего случая длина волны λ равна (см. таблицу 19): а) 138пм; б) 48,4пм; в) 17,8пм; г) 15,8пм. Искомая разность потенциалов найдется по формуле $U = \frac{hc}{e\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим следующие значения для разности потенциалов U: а) 9 кВ; б) 25,3 кВ; в) 69 кВ; г) 79 кВ.

20.33. Считая, что формула Мозли с достаточной степенью точности дает связь между длиной волны λ характеристических

рентгеновских лучей и порядковым номером элемента Z, из которого сделан антикатод, найти наибольшую длину волны линий *K*-серии рентгеновских лучей, даваемых трубкой с антикатодом из: а) железа; б) меди; в) молибдена; г) серебра; д) тантала; е) вольфрама; ж) платины. Для *K*-серии постоянная экранирования $b = 1$.

Решение:

Имеем $\frac{1}{\lambda} = R(Z - b)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Наибольшая длина волны K-серии соответствует линии K_α. При этом в формуле (1) мы должны положить $b = 1$, $k = 1$, $n = 2$. Решая уравнение (1) относительно λ и подставляя числовые данные, получим значения λ, равные: а) 194пм; б) 15[illegible]пм; в) 72пм; г) 57,4пм; д) 23,4пм; е) 22,8пм; ж) 20,5пм. Экспериментально найденные значения длин волн λ линии K_α следующие: а) 194пм; б) 154пм; в) 71.2пм; г) 56.[illegible]пм; д) 22пм; е) 21.4пм; ж) 19пм.

20.34. Найти постоянную экранирования b для L-серии рентгеновских лучей, если известно, что при переходе электрона в атоме вольфрама с M- на L-слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 143$ пм.

Решение:

Переход электрона с M- на L-слой соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3$. Порядковый номер вольфрама в таблице Менделеева $Z = 74$. Из формулы Мозли найдем $b = Z - \frac{1}{\sqrt{\lambda R(1/k^2 - 1/n^2)}}$. Подставляя числовые данные, получим $b = 5.5$.

20.35. При переходе электрона в атоме с L- на K-слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 78$[illegible] пм. Какой это атом? Для K-серии постоянная экранирования $b = 1$.

Решение:

Длина волны рентгеновских характеристических лучей может быть найдена по формуле Мозли $\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2 \times \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1), где Z — порядковый номер элемента, b — постоянная экранирования. При этом для K-серии $k = 1$ и $n = 2$. Из формулы (1) находим $Z = \frac{kn}{\sqrt{\lambda R(n^2 - k^2)}} + b = 40$. По таблице Менделеева находим, что элемент с порядковым номером $Z = 40$ — цирконий.

20.36. Воздух в некотором объеме V облучается рентгеновскими лучами. Экспозиционная доза излучения $D_э = 4{,}5$ Р. Какая доля атомов, находящихся в данном объеме, будет ионизирована этим излучением?

Решение:

По определению экспозиционной дозы излучения $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (1), где $\Delta Q = N_i e$ — (2) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе при условии полного использования ионизирующей способности электронов, $\Delta m = \frac{N}{N_A}\mu$ — (3) — масса воздуха. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $D_э = \frac{N_i N_A e}{N\mu}$, откуда доля атомов, ионизированных излучением, $\frac{N_i}{N} = \frac{\mu D_э}{N_A e}$. Воздух в первом приближении можно считать азотом с молярной массой $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $\frac{N_0}{N} = 3{,}42 \cdot 10^{-10}$.

20.37. Рентгеновская трубка создает на некотором расстоянии мощность экспозиционной дозы $P_э = 2{,}58 \cdot 10^{-5}$ А/кг. Какое число N пар ионов в единицу времени создает эта трубка на единицу массы воздуха при данном расстоянии?

Решение:

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза, Δm — масса ионизированного вещества, $\Delta Q = Ne$ — (3) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $P_э = \frac{Ne}{\Delta t \Delta m}$, откуда число пар ионов $N = \frac{P_э \Delta t \Delta m}{e}$. По условию $\Delta t = 1$ с и $\Delta m = 1$ кг, тогда, подставляя значения, находим $N = 1{,}61 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$·кг$^{-1}$.

20.38. Воздух, находящийся при нормальных условиях в ионизационной камере объемом $V = 6$ см^3, облучается рентгеновскими лучами. Мощность экспозиционной дозы рентгеновских лучей $P_э = 0{,}48$ мР/ч. Найти ионизационный ток насыщения $I_н$.

Решение:

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза. Подставляя (2) в (1), получаем $P_э = \dfrac{\Delta Q}{\Delta m \Delta t}$ — (3). Ионизационный ток насыщения $I_н = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, откуда суммарный электрический заряд всех ионов одного знака $\Delta Q = I_н \Delta t$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $P_э = \dfrac{I_н}{\Delta m}$, откуда ионизационный ток насыщения $I_н = P_э \Delta m$ — (5). Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{\Delta m}{\mu} RT$, учитывая, что молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, получаем $\Delta m = \dfrac{pV\mu}{RT}$ — (6). Подставляя (6) в (5), окончательно находим $I_н = \dfrac{P_э pV\mu}{RT}$ или

$$I_н = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}013 \cdot 10^{5} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{3{,}6 \cdot 10^{3} \cdot 8{,}31 \cdot 273} = 10^{-12}\ \text{А}^*.$$

20.39. Найти для алюминия толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления для рентгеновских лучей некоторой длины волны. Массовый коэффициент поглощения алюминия для этой длины волны $\mu_м = 5{,}3$ м^2/кг.

Решение:
Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной x, определяется формулой $I = I_0 e^{-\mu x}$ — (1), где I_0 — интенсивность пучка, падающего на пластинку, μ — линейный коэффициент поглощения. Массовый коэффициент поглощения $\mu_м$ связан с линейным коэффициентом поглощения μ соотношением $\mu_м = \dfrac{\mu}{\rho}$, откуда $\mu = \mu_м \rho$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $I = I_0 e^{-\mu_м \rho x}$ — (3). Пройдя поглощающий слой толщиной, равной толщине слоя половинного ослабления $x_{1/2}$, рентгеновские лучи будут иметь интенсивность $I = \dfrac{I_0}{2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\dfrac{1}{2} = exp\left(-\mu_м \rho x_{1/2}\right)$ — (5). Прологарифмировав выражение (5), получим искомое значение толщины слоя половинного ослабления. $x_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\mu_м \rho} = 0{,}5$ мм.

---

* Ответ не совпадает с ответом первоисточника ($2{,}7 \cdot 10^{-16}$ А).

20.40. Во сколько раз уменьшится интенсивность рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 20$ пм при прохождении слоя железа толщиной $d = 0{,}15$ мм? Массовый коэффициент поглощения железа для этой длины волны $\mu_м = 1{,}1$ м^2/кг.

Решение:
Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 exp\left(-\mu_м \rho d\right)$, откуда $\dfrac{I_0}{I} = exp\left(\mu_м \rho d\right) = 3{,}68$.

20.41. Найти толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления для железа в условиях предыдущей задачи.

Решение:
Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\mu_м \rho} = 79{,}76$ мкм.

20.42. В нижеследующей таблице приведены для некоторых материалов значения толщины слоя $x_{1/2}$ половинного ослабления рентгеновских лучей, энергия которых $W = 1$ МэВ. Найти линейный μ и массовый $\mu_м$ коэффициенты поглощения этих материалов для данной энергии рентгеновских лучей. Для какой длины волны λ рентгеновских лучей получены эти данные?

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10.2	4.5	1.56	0.87

Решение:

Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\mu_м \rho}$, откуда массовый коэффициент поглощения $\mu_м = \dfrac{ln 2}{x_{1/2}\rho}$ — (1). С другой стороны, $\mu_м = \dfrac{\mu}{\rho}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\mu = \dfrac{ln 2}{x_{1/2}}$ — (3). Подставляя числовые данные в формулы (1) и (3), заполняем таблицу.

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10.2	4.5	1.56	0.87
ρ, кг/м^3	1000	2600	7900	11300
μ, м$^{-1}$	6.7	16	44	77
$\mu_м$, 10^{-3} м^2/кг	6.7	6.2	5.6	6.8

Энергия рентгеновских лучей равна $W = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$, откуда длина волны $\lambda = \dfrac{hc}{W} = 1.24$ пм.

20.43. Сколько слоев половинного ослабления необходимо для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз?

Решение:

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 exp(-\mu_м \rho d)$, откуда $\dfrac{I_0}{I} = exp(\mu_м \rho d)$ — (1). По

условию $\dfrac{I_0}{I} = 80$ — (2). Подставляя (2) в (1) и логарифмируя полученное уравнение, находим $ln 80 = \mu_м \rho d$, откуда толщина слоя, необходимого для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз, равна $d = \dfrac{ln 80}{\mu_м \rho}$ — (3). Толщина слоя половинного ослабления интенсивности рентгеновских лучей равна $x_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\mu_м \rho}$ — (4). Количество слоев, необходимое для уменьшения интенсивности в 80 раз, равно $n = \dfrac{d}{x_{1/2}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $n = \dfrac{ln 80}{ln 2} = 6{,}32$.

§ 21. Радиоактивность

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 22 приложения. В задаче 21.11 дан авторский вариант решения.

21.1. Сколько атомов полония распадается за время $\Delta t = 1$ сут из $N = 10^6$ атомов?

Решение:

За время Δt распадается число атомов $|\Delta N| = \lambda N \Delta t$ — (1). Эта формула применима при $\Delta t << T_{1/2}$, где $T_{1/2}$ — период полураспада. Период полураспада полония $T_{1/2} = 138$ сут (таблица 22), следовательно, для $\Delta t = 1$ сут число распадающихся атомов можно определить по формуле (1). Подставляя числовые данные, получим $|\Delta N| = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t = 5025$ сут$^{-1}$.

21.2. Сколько атомов радона распадается за время $\Delta t = 1$ сут из $N = 10^6$ атомов?

Решение:

Период полураспада радона $T_{1/2} = 3{,}82$ сут, следовательно, мы не можем использовать формулу из предыдущей задачи. Необходимо воспользоваться формулой $N = N_0 e^{-\lambda t}$, тогда искомое количество атомов $\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta N = 1{,}67 \cdot 10^5$ сут$^{-1}$.

21.3. Найти активность a массы $m = 1$ г радия.

Решение:

Активностью радиоактивного вещества называется число распадов, которое происходит в нем в единицу времени $a = \frac{dN}{dt} = -\lambda N$ — (1), где λ — постоянная распада, N — число атомов радиоактивного вещества. Период полураспада и постоянная распада связаны между собой соотношением $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (2). Число распадающихся атомов радия равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3), где $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}} = 3{,}68 \cdot 10^{10}$ Бк.

21.4. Найти массу m радона, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Решение:

Активность радиоактивного вещества (см. задачу 21.3) равна $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$. Отсюда масса радиоактивного вещества равна $m = \frac{a \mu T_{1/2}}{N_A \ln 2} = 6{,}49 \cdot 10^{-9}$ кг.

21.5. Найти массу m полония $^{210}_{84}Po$, активность которого $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Решение:
Масса радиоактивного вещества (см. задачу 21.4) равна $m = \frac{a\mu T_{1/2}}{N_A \ln 2} = 0.22$ мг.

21.6. Найти постоянную распада λ радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за время $t = 1$ сут на 18,2%.

Решение:
Число атомов радиоактивного вещества dN, распадающихся за время dt, пропорционально числу имеющихся атомов и определяется соотношением $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, откуда, разделив переменные, получим $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$. Интегрируя полученное выражение, получаем $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$, откуда постоянная распада $\lambda = -\frac{\ln(N/N_0)}{t}$ — (1). По условию задачи $N = (1-x)N_0$ — (2), где N_0 — число атомов по истечении времени t, $x = 0{,}182$ — доля атомов, распавшихся за время t. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\lambda = -\frac{\lambda \ln(1-x)}{t} = 2{,}33 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$.

21.7. Найти удельную активность a_m: а) урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$; б) радона $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$.

Решение:
Удельной активностью радиоактивного вещества называется активность его единицы массы $a_m = \frac{a}{m}$ — (1). По-

скольку активность радиоактивного вещества (см. зада
21.3) равна $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1
получаем $a_m = \frac{N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$. а) Для урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ $\mu = 235$ г/моль
$T_{1/2} = 7{,}1 \cdot 10^8$ лет, следовательно, $a_m = 7{,}93 \cdot 1^7$ Бк/к
б) Для радона $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ $\mu = 222$ г/моль и $T_{1/2} = 3{,}82$ су
следовательно, $a_m = 5{,}69 \cdot 10^{18}$ Бк/кг.

21.8. Ионизационные счетчики Гейгера — Мюллера имеют в отсутствие радиоактивного препарата определенный фо
Присутствие фона может быть вызвано космическим излучени
или радиоактивными загрязнениями. Какой массе радона
соответствует фон, дающий 1 отброс счетчика за время $t = 5$ с?

Решение:
Число атомов радиоактивного вещества, распадающихся
время Δt, определяется формулой $|\Delta N| = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t$ (с
задачу 21.1). Исходное число атомов $N = \frac{m}{\mu} N_A$. П
условию $\Delta N = 1$, $\Delta t = t = 5$ с. Тогда $1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{\mu} N_A t$, отк
$m = \frac{\mu T 1/2}{N_A t \ln 2}$. Подставляя числовые данные, получи
$m = 3{,}5 \cdot 10^{-20}$ кг.

21.9. При помощи ионизационного счетчика исследуе
активность некоторого радиоактивного изотопа. В начальн
момент времени счетчик дает 75 отбросов за время $t = 10$
Какое число отбросов за время $t = 10$ с дает счетчик
истечении времени $t = T_{1/2}/2$? Считать $T_{1/2} >> 10$ с.

Решение:

В начальный момент времени активность радиоактивного изотопа равна $a_1 = \frac{N_0}{t}$ — (1), а спустя время $t_1 = \frac{T_{1/2}}{2}$ — (2) она станет равной $a_2 = \frac{N}{t}$ — (3), где N_0 и N — соответственно число атомов радиоактивного изотопа в начальный момент времени и через время t_1, которые связаны между собой соотношением $N = N_0 \exp(-\lambda t_1)$. Отсюда $\frac{N}{N_0} = \exp(-\lambda t_1)$ или, с учетом (2), $\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\lambda T_{1/2}}{2}\right)$ — (4). Период полураспада и постоянная распада связаны соотношением $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)$ — (6). Разделив (3) на (1), получаем $\frac{a_2}{a_1} = \frac{N}{N_0}$ — (7). Сопоставляя формулы (6) и (7), находим, что $\frac{a_2}{a_1} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)$, откуда окончательно $a_2 = a_1 \exp\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 53$ отброса.

21.10. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ с$^{-1}$. Через какое время t распадется 75% первоначальной массы m атомов?

Решение:

Число атомов радиоактивного изотопа в начальный момент времени связано с их числом по истечении времени t соотношением $N = N_0 \exp(-\lambda t)$ — (1), где

$N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (2) и $N_0 = \frac{m_0}{\mu} N_A$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $m = m_0 \exp(-\lambda t)$ — (4). По условию $m = (1 - 0{,}75) m_0 = 0{,}25 m_0$ — (5). Подставляя (5) в (4) получаем $\exp(-\lambda t) = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ или $\exp(\lambda t) = 4$ — (6). Логарифмируя уравнение (6), получим $\lambda t = \ln 4$, откуда $t = \frac{\ln 4}{\lambda} = 3{,}47 \cdot 10^6$ с $= 40{,}11$ суток.

21.11. Природный уран представляет собой смесь трех изотопов: ${}^{234}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Содержание ${}^{234}_{92}\mathrm{U}$ ничтожно (0,006%), на долю ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ приходится 0,71%, а остальную массу (99,28%) составляет ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Периоды полураспада $T_{1/2}$ этих изотопов соответственно равны $2{,}5 \cdot 10^5$ лет, $7{,}1 \cdot 10^8$ лет и $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Найти процентную долю радиоактивности, вносимую каждым изотопом в общую радиоактивность природного урана.

Решение:

Процентная доля радиоактивности, вносимая каждым из изотопов в общую радиоактивность природного урана определяется отношением числа распадов в единицу времени каждого изотопа к общему числу распадов в единицу времени природного урана. Обозначим через m массу природного урана. Тогда массы изотопов будут равны соответственно $m_1 = 6 \cdot 10^{-5} m$, $m_2 = 7{,}1 \cdot 10^{-3} m$ и $m_3 = 99{,}28 \cdot 10^{-2} m$. Число распадов в единицу времени, даваемое изотопом, будет равно $\Delta N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 \Delta t =$ $= \frac{\ln 2 N_A m_1 \Delta t}{T_1 A_1}$, $\Delta N_2 = \frac{\ln 2 N_A m_2 \Delta t}{T_2 A_2}$, $\Delta N_3 = \frac{\ln 2 N_A m_3 \Delta t}{T_3 A_3}$, где N_A — постоянная Авогадро, T_i — период полураспада изотопа (индекс 1/2 у T опущен), A_i — его молярная масса. Откуда искомое отношение для каждого изотопа равно

$$x = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3} = \frac{m_i/(A_i T_i)}{m_1/(A_1T_1) + m_2/(A_2T_2) + m_3/(A_3T_3)}.$$

Подставляя числовые данные, нетрудно убедиться, что вся радиоактивность природного урана обусловлена изотопом $^{238}_{92}U$, радиоактивность же изотопов $^{235}_{92}U$ и $^{234}_{92}U$ исчезающе мала.

21.12. Кинетическая энергия α-частицы, вылетающей из ядра атома радия при радиоактивном распаде, $W_1 = 4{,}78$ МэВ. Найти скорость v α-частицы и полную энергию W, выделяющуюся при вылете α-частицы.

Решение:

Кинетическая энергия α-частицы $W_1 = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2W_1}{m}} = 1{,}52 \cdot 10^7$ м/с. Полная энергия W, выделяющаяся при вылете α-частицы, складывается из кинетической энергии α-частицы W_1 и кинетической энергии остаточного ядра W_2, т. е. $W = W_1 + W_2$ — (1). Кроме того, согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 = m_2v_2$ — (2). Из (2) получим $(m_1v_1)^2 = \frac{m_1v_1^2 2m_1}{2} = W_1 2m_1$; $(m_1v_1)^2 = (m_2v_2)^2 = \frac{m_2v_2^2 2m_2}{2} = 2m_2W_2$. Из (1) имеем $W = W_1 + \frac{2m_1W_1}{2m_2} = W_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = W_1\frac{m_2 + m_1}{m_2}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 4{,}87 \cdot 10^6$ эВ.

21.13. Какое количество теплоты Q выделяется при распаде радона активностью $a = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк: а) за время $t = 1$ ч; б) за среднее время жизни τ? Кинетическая энергия вылетающей из радона α-частицы $W = 5{,}5$ МэВ.

Решение:

По закону сохранения энергии количество тепла, которое выделяется при распаде радона, равно $Q = NW$ — (1), где N — число распадов за время t, W — кинетическая энергия α-частицы. Поскольку $N = at$ — (2), где a — активность радона, то, подставляя (2) в (1), получаем $Q = atW$ — (3). а) Если $t = 1$ ч, то из формулы (3) $Q = 117{,}22$ Дж. б) По определению среднее время жизни радона $\tau = \frac{1}{\lambda}$ — (4). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.9) равна $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (5), то, подставляя (5) в (4), получаем $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$ — (6). Учитывая, что $t = \tau$, подставив (6) в (3), окончательно получаем $Q = \frac{aWT_{1/2}}{\ln 2} = 15{,}5$ кДж.

21.14. Масса $m = 1$ г урана $^{238}_{92}U$ в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность $P = 1{,}07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Найти молярную теплоту Q_μ, выделяемую ураном за среднее время жизни атомов урана.

Решение:

Мощность, выделяемая при распаде урана $^{238}_{92}U$, равна $P = \frac{Q}{t}$ — (1), где Q — количество тепла, которое выделится при распаде $^{238}_{92}U$ за время t. По условию

$t = \tau = \frac{1}{\lambda}$ — (2), где τ — среднее время жизни атомов урана ${}^{238}_{92}U$, λ — постоянная распада, которая связана с периодом полураспада урана ${}^{238}_{92}U$ следующим соотношением: $T_{1/2} = \frac{ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $t = \frac{T_{1/2}}{ln 2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), получим $P = \frac{Q\, ln 2}{T_{1/2}}$, откуда $Q = \frac{PT_{1/2}}{ln 2}$ — (5). Число молей урана ${}^{238}_{92}U$, участвующее в распаде $\nu = \frac{m}{\mu}$ — (6), где $\mu = 238$ г/моль — молярная масса урана ${}^{238}_{92}U$. Молярная теплота, выделяемая ураном ${}^{238}_{92}U$ за среднее время жизни его атомов, равна $Q_\mu = \frac{Q}{\nu}$ — (7). Подставляя (5) и (6) в (7), окончательно получаем $Q_\mu = \frac{PT_{1/2}\mu}{m\, ln 2} = 5{,}21 \cdot 10^{12}$ Дж/моль.

21.15. Найти активность a радона, образовавшегося из массы $m = 1$ г радия за время $t = 1$ ч.

Решение:

Поскольку по условию задачи из радиоактивного изотопа ${}^{226}_{88}Ra$ образуется новый радиоактивный изотоп ${}^{222}_{86}Rn$, то по истечении времени t число ядер изотопа ${}^{222}_{86}Rn$ будет определяться по формуле $N_2 = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times$ $\times (exp(-\lambda_1 t) - exp(-\lambda_2 t))$ — (1), где $N_{01} = \frac{m_1}{\mu_1}N_A$ — (2) — начальное число ядер изотопа ${}^{226}_{88}Ra$, λ_1 и λ_2 — соответственно постоянные распада ${}^{226}_{88}Ra$ и ${}^{222}_{86}Rn$. Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N_2 = \frac{m_1}{\mu_1}N_A \times$ $\times \frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)} - T_{1/2(2)}}\left[exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(1)}}\right) - exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(2)}}\right)\right]$ — (4). Активность образовавшегося радона равна $a_2 = -\lambda_2 N_2$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), окончательно получаем

$$N_2 = \frac{m_1 N_A\, ln 2}{\mu_1 \left(T_{1/2(1)} - T_{1/2(2)}\right)}\left[exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(1)}}\right) - exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2(2)}}\right)\right];$$

$N_2 = 2{,}85 \cdot 10^8$ Бк.

21.16. В результате распада массы $m_0 = 1$ г радия за время $t = 1$ год образовалась некоторая масса гелия, занимающая при нормальных условиях объем $V = 43$ мм^3. Найти из этих данных постоянную Авогадро N_A.

Решение:

Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории $p = nkT$, откуда $n = \frac{p}{kT}$ — (1), где n — число образовавшихся атомов гелия в единице объема, $p = 101$ кПа и $T = 273$ К — соответственно давление и абсолютная температура при нормальных условиях, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. С другой стороны, $n = \frac{N_0 - N}{V}$ — (2), где $N = N_0\, exp(-\lambda t)$ — (3)

Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $N = N_0 \cdot exp\left(-\frac{t\, ln 2}{T_{1/2}}\right)$ — (5), затем, подставляя (5) в (2), получаем $n = \frac{N_0\left[1 - exp\left(-t\, ln 2 / T_{1/2}\right)\right]}{V}$ — (6). Приравнивая правые части соотношений (1) и (6), получаем $\frac{P}{kT} = \frac{N_0\left[1 - exp\left(-t\, ln 2 / T_{1/2}\right)\right]}{V}$ — (7). Начальное число атомов радия равно $N_0 = \frac{m_0}{\mu} N_A$ — (8). Подставляя (8) в (7), получаем $\frac{P}{kT} = \frac{m_0 N_A\left[1 - exp\left(-t\, ln 2 / T_{1/2}\right)\right]}{\mu V}$, откуда окончательно постоянная Авогадро равна $N_A = \frac{pV\mu}{kTm_0\left[1 - exp\left(-t\, ln 2 / T_{1/2}\right)\right]} = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

21.17. В ампулу помещен препарат, содержащий массу $m_0 = 1{,}5$ г радия. Какая масса m радона накопится в этой ампуле по истечении времени $t = T_{1/2}/2$, где $T_{1/2}$ — период полураспада радона?

Решение:

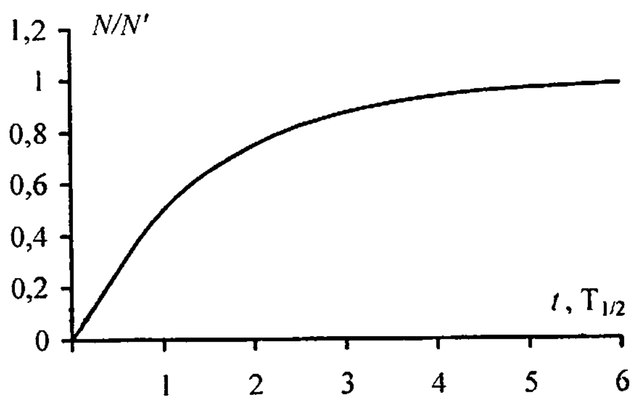
Поскольку период полураспада изотопа $^{222}_{86}Rn$ значительно меньше периода полураспада изотопа $^{226}_{88}Ra$, то число атомов радона, которое накопится в ампуле по истечении времени t, равно $N_2 = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(1 - exp\left(-\lambda_2 t\right)\right)$ — (1). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (2) и по условию $t = \frac{T_{1/2(2)}}{2}$ — (3), то, подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N_2 = N_{01}\frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}} \times \left[1 - exp\left(-\frac{ln 2}{2}\right)\right]$ — (4). Поскольку $N_2 = \frac{m}{\mu_2} N_A$ — (5) и $N_{01} = \frac{m_0}{\mu_1} N_A$ — (6), то, подставляя (5) и (6) в (4), окончательно получаем $m = \frac{m_0 \mu_2 T_{1/2(2)}}{\mu_1 T_{1/2(1)}}\left[1 - exp\left(-\frac{ln 2}{2}\right)\right] = 3 \cdot 10^{-9}$ кг.

21.18. Некоторое число атомов радия помещено в замкнутый сосуд. Через какое время t число атомов радона N в этом сосуде будет отличаться на 10% от того числа атомов радона N', которое соответствует радиоактивному равновесию радия с радоном в этом сосуде? Построить кривую зависимости изменения $\frac{N}{N'}$ в сосуде от времени t в интервале $0 \le t \le 6T_{1/2}$, принимая за единицу времени период полураспада радона $T_{1/2}$.

Решение:

Число атомов радона, которое накопится в замкнутом сосуде за время t (см. задачу 21.17), равно $N = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \times \left(1 - exp\left(-\lambda_2 t\right)\right)$ — (1). При радиоактивном равновесии $\frac{N_{01}}{N'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, откуда $N' = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{N}{N'} = \left(1 - exp\left(-\lambda_2 t\right)\right)$ — (3). По условию $\frac{N - N'}{N} = 0{,}1$ или $\frac{N}{N'} = 0{,}9$ — (4). Приравнивая правые части соотношений (3) и (4), получаем $1 - exp\left(-\lambda_2 t\right) = 0{,}9$ или $exp\left(-\lambda_2 t\right) = 0{,}1$ — (5). Логарифмируя соотношение (5), получаем $-\lambda_2 t = ln\,0{,}1$ или $t = -\dfrac{ln\,0{,}1}{\lambda_2}$ — (6). Поскольку постоянная распада равна $\lambda = \dfrac{ln\,2}{T_{1/2}}$ — (7), то, подставляя (7) в (6), получаем $t = -\dfrac{T_{1/2(2)}\,ln\,0{,}1}{ln\,2} = 12{,}69$ суток. Подставляя (7) в (3), получаем $\dfrac{N}{N'} = \left[1 - exp\left(-\dfrac{t\,ln\,2}{T_{1/2(2)}}\right)\right]$. Подставляя в полученную формулу числовые данные, составим таблицу и построим график:

t	0	$T_{1/2}$	$2T_{1/2}$	$3T_{1/2}$	$4T_{1/2}$	$5T_{1/2}$	$6T_{1/2}$
N/N'	0	0,5	0,75	0,875	0,9375	0,96875	0.9844



21.19. Некоторое число атомов радона N' помещено в замкнутый сосуд. Построить кривую зависимости изменения числа атомов радона $\dfrac{N}{N'}$ в сосуде от времени в интервале $0 \le t \le 20$ сут через каждые 2 сут. Постоянная распада радона $\lambda = 0{,}181$ сут$^{-1}$ Из кривой $\dfrac{N}{N'} = f(t)$ найти период полураспада $T_{1/2}$ радона.

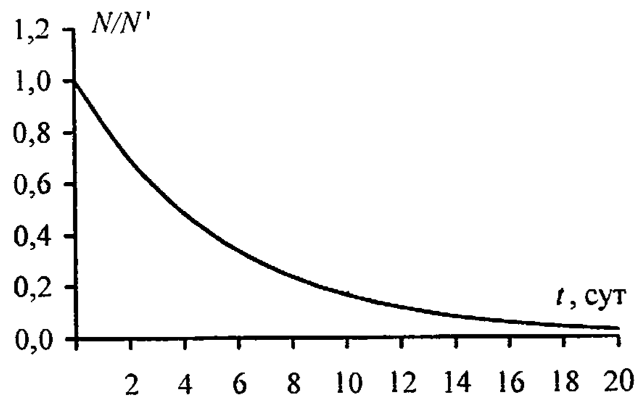
Решение:

Имеем $N = N'e^{-\lambda t}$, отсюда $\dfrac{N}{N'} = e^{-\lambda t} = exp(-0{,}181t)$. Для заданного интервала значений t составим таблицу и построим график. Период полураспада найдем как абсциссу точки кривой, ордината которой равна 0,5. По графику найдем $T_{1/2} = 3{,}8$ сут.

t, сут	0	2	4	6	8	10
N/N'	1	0,696	0,485	0,338	0,235	0,164

Продолжение

t, сут	12	14	16	18	20
N/N'	0,114	0,079	0,055	0,038	0,027



21.20. В нижеследующей таблице приведены результаты измерения зависимости активности a некоторого радиоактивного элемента от времени t. Найти период полураспада $T_{1/2}$ элемента.

t, ч	0	3	6	9	12	15
a, $3{,}7\cdot10^7$ Бк	21,6	12,6	7,6	4,2	2,4	1,8

Решение:

Как видно из таблицы, измерение активности радиоактивного изотопа производилось через равные промежутки времени $\tau = 3$ часа. По определению активность $a = |-\lambda N|$ — (1), где N — число распавшихся ядер к моменту времени t. По закону радиоактивного распада $N = N_0\,exp(-\lambda t)$ — (2), где N_0 — начальное число ядер. Начальная активность из формулы (1) равна $a_0 = \lambda N_0$ — (3), а к моменту времени t она станет равной $a(t) = \lambda N(t)$ — (4). Подставляя (2) в (4), получаем $a(t) = \lambda N_0\,exp(-\lambda t)$ — (5). Сопоставляя формулы (3) и (5), нетрудно заметить, что закон изменения активности имеет вид: $a(t) = a_0\,exp(-\lambda t)$ — (6). Подставим в формулу (6) любое значение активности из таблицы, например для $t = 4\tau$, тогда $a_4 = a_0\,exp(-4\tau\lambda)$, откуда $exp(4\tau\lambda) = \dfrac{a_0}{a_4}$ — (7). Логарифмируя выражение (7), получаем $4\tau\lambda = ln\dfrac{a_0}{a_4}$, откуда постоянная распада $\lambda = \dfrac{ln(a_0/a_4)}{4\tau}$ — (8). По определению период полураспада $T_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\lambda}$ — (9). Подставляя (7) в (8), окончательно получаем $T_{1/2} = \dfrac{4\tau\, ln 2}{ln(a_0/a_4)} = 3{,}79$ часа.

21.21. В ампулу помещен радон, активность которого $a_0 = 14{,}8\cdot 10^9$ Бк. Через какое время t после наполнения ампулы активность радона будет равна $a = 2{,}22\cdot 10^9$ Бк?

Решение:

В начальный момент времени активность радона в ампуле равна $a_0 = -\lambda N_0$ — (1), а спустя время t она станет равной

$a = -\lambda N$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\dfrac{a}{a_0} = \dfrac{N}{N_0}$ — (3). Поскольку $N = N_0\,exp(-\lambda t)$, то отсюда $\dfrac{N}{N_0} = exp(-\lambda t)$ — (4). Сопоставляя формулы (3) и (4), находим, что $\dfrac{a}{a_0} = exp(-\lambda t)$, откуда, логарифмируя, получаем $ln\left(\dfrac{a}{a_0}\right) = -\lambda t$ — (5). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \dfrac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (6), то, подставляя (6) в (5), получаем $ln\left(\dfrac{a}{a_0}\right) = -\dfrac{t\, ln 2}{T_{1/2}}$, откуда окончательно находим $t = -\dfrac{T_{1/2}\, ln(a/a_0)}{ln 2} = 10{,}45$ суток.

21.22. Свинец, содержащийся в урановой руде, является конечным продуктом распада уранового ряда, поэтому из отношения массы урана в руде к массе свинца в ней можно определить возраст руды. Найти возраст t урановой руды, если известно, что на массу $m_{ур} = 1$ кг урана $^{238}_{92}U$ в этой руде приходится масса $m_{св} = 320$ г свинца $^{206}_{82}Pb$.

Решение:

Имеем $N_{св} = N_{ур}\left[1 - exp\left(-\dfrac{0{,}693t}{T_{1/2}}\right)\right]$;

$\dfrac{m_{св}}{A_{св}} = \dfrac{m_{ур}}{A_{ур}}\left[1 - exp\left(-\dfrac{0{,}693t}{T_{1/2}}\right)\right]$, где $T_{1/2}$ — период полураспада урана, $A_{св}$ и $A_{ур}$ — молярные массы свинца и урана. Отсюда $t = 3\cdot 10^9$ лет.

21.23. Зная периоды полураспада $T_{1/2}$ радия и урана, найти число атомов урана, приходящееся на один атом радия в природной урановой руде. Указание: учесть, что радиоактивность природного урана обусловлена в основном изотопом $^{238}_{92}U$.

Решение:
В природной урановой руде атомы урана и радия находятся в радиоактивном равновесии, поэтому $\frac{N_1}{N_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — (1). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda=\frac{ln2}{T_{1/2}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\frac{N_1}{N_2}=\frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}}$, откуда $N_2=\frac{N_1T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}$, где $T_{1/2(1)}$ и $T_{1/2(2)}$ — соответственно периоды полураспада радия и урана. Учитывая, что радиоактивность природного урана обусловлена в основном изотопом $^{238}_{92}U$, то принимаем $T_{1/2(2)}=4{,}5\cdot10^9$ лет. Поскольку $N_1=1$, то $N_2=\frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}=$ $=2{,}83\cdot10^6$ лет.

21.24. Из какой наименьшей массы m руды, содержащей 42% чистого урана, можно получить массу $m_0=1$ г радия?

Решение:
В природной урановой руде (см. задачу 21.23) соотношение атомов радия и урана $\frac{N_1}{N_2}=\frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}}$ — (1). Количество атомов радия и урана соответственно равно $N_1=\frac{m_0}{\mu_1}N_A$ — (2) и $N_2=\frac{0{,}42m}{\mu_2}N_A$ — (3), поскольку по условию руда содержит 42% чистого урана. Разделив (2)

на (3), получаем $\frac{N_1}{N_2}=\frac{m_0\mu_2}{0{,}42m\mu_1}$ — (4). Приравнивая правые части соотношений (4) и (1), получаем $\frac{m_0\mu_2}{0{,}42m\mu_1}=\frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}=7{,}09\cdot10^3$ кг.

21.25. α-частицы из изотопа радия вылетают со скоростью $v=1{,}5\cdot10^7$ м/с и ударяются о флуоресцирующий экран. Считая, что экран потребляет на единицу силы света мощность $P_I=0{,}25$ Вт/кд, найти силу света I экрана, если на него падают все α-частицы, испускаемые массой $m=1$ мкг радия.

Решение:
Из теории относительности известно, что кинетическая энергия α-частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (1), где $\beta=\frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость α-частицы. Подставляя (2) в (1), получаем $W_к=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$ — (3). Полная энергия всех α-частиц, испускаемых радием, равна $W=aW_к$ — (4), где $a=|-\lambda N|$ — (5) — активность радия, $N=\frac{m}{\mu}N_A$ — (6) — число атомов радия, $\lambda=\frac{ln2}{T_{1/2}}$ — (7) — постоянная распада радия. Подставляя (6) и (7) в (5), получаем $a=\frac{mN_A\,ln2}{\mu T_{1/2}}$ — (8). Подставляя (3) и (8) в (4), получаем $W=\frac{m_0c^2mN_A\,ln2}{\mu T_{1/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$ — (9). Мощ-

ность, потребляемая экраном на единицу силы света, равна $P_I = \frac{P}{I}$, откуда сила света $I = \frac{P}{P_I}$ — (10). По определению мощность $P = \frac{W}{t}$ — (11), причем в нашем случае $t = 1$ с. Подставляя (11) в (10), получаем $I = \frac{W}{P_I t}$ — (12). Подставляя (9) в (12), окончательно получаем $I = \frac{m_0 c^2 m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2} P_I t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$. Подставляя числовые данные, получим $I = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ Кд.

21.26. Какая доля первоначальной массы радиоактивного изотопа распадается за время жизни этого изотопа?

Решение:
Число атомов радиоактивного изотопа, которое распадается за время t, равно $N = N_0(1 - exp(-\lambda t))$, где N_0 — начальное число атомов, λ — постоянная распада. Отсюда доля первоначальной массы радиоактивного изотопа, которая распадается за время t, равна $\frac{N}{N_0} = 1 - exp(-\lambda t)$ — (1). Среднее время жизни радиоактивного атома $\tau = \frac{1}{\lambda}$, по условию $t = \tau$ — (3). Подставляя (2), с учетом (3), в (1), получаем $\frac{N}{N_0} = 1 - e^{-1} = 0{,}632$ или $\frac{N}{N_0} = 63.2\%$.

21.27. Найти активность a массы $m = 1$ мкг полония $^{210}_{84}Po$.

Решение:
Активность радиоактивного изотопа равна $a = |-\lambda N|$ — (1). Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна

$\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (2). Число атомов полония $^{210}_{84}$Po равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}} = 1{,}67 \cdot 10^8$ Бк.

21.28. Найти удельную активность a_m искусственно полученного радиоактивного изотопа стронция $^{90}_{38}Sr$.

Решение:
Удельная активность радиоактивного изотопа $a_m = \frac{a}{m}$ — (1), где a — активность радиоактивного изотопа, которая (см. задачу 21.27) равна $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $a_m = \frac{N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ Бк/кг.

21.29. К массе $m_1 = 10$ мг радиоактивного изотопа $^{45}_{20}$Ca добавлена масса $m_2 = 30$ мг нерадиоактивного изотопа $^{40}_{20}$Ca. На сколько уменьшилась удельная активность a_m радиоактивного источника?

Решение:
Первоначальная удельная активность изотопа $^{45}_{20}$Ca равна $a_{m1} = \frac{\Delta N}{m_1 \Delta t} = \frac{\lambda N}{m_1} = \frac{\ln 2 N_A m_1}{T_{1/2} A_1 m_1} = \frac{\ln 2 N_A}{T_{1/2} A_1}$ — (1). После добавления изотопа $^{40}_{20}$Ca удельная активность стала равна $a_{m2} = \frac{\Delta N}{(m_1 + m_2)\Delta t} = \frac{\ln 2 N_A m_1}{T_{1/2} A_1 (m_1 + m_2)}$ — (2), где A_1 — моляр-

ная масса радиоактивного изотопа. Вычитая (2) из (1), получим $\Delta a_m = \frac{ln 2 N_A}{T_{1/2} A_1}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{ln 2 N_A m_2}{T_{1/2} A_1 (m_1 + m_2)}$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta a_m = 4{,}9 \cdot 10^{17}$ Бк/кг

21.30. Какую массу m_2 радиоактивного изотопа ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ надо добавить к массе $m_1 = 5$ мг нерадиоактивного изотопа ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$, чтобы через время $t = 10$ сут после этого отношение числа распавшихся атомов к числу нераспавшихся было равно 50%? Постоянная распада изотопа ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ равна $\lambda = 0{,}14$ сут$^{-1}$

Решение:

Поскольку распадается только радиоактивный изотоп ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$, то число распавшихся атомов будет равно $N_р = \frac{m_2}{\mu_2} N_A (1 - exp(-\lambda t))$ — (1), а число нераспавшихся будет складываться из атомов нерадиоактивного изотопа ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$ и нераспавшихся атомов изотопа ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ и будет равно $N_н = \frac{m_1}{\mu_1} N_A + \frac{m_2}{\mu_2} N_A exp(-\lambda t)$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{N_р}{N_н} = \frac{m_2 \mu_1 (1 - exp(-\lambda t))}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1 exp(-\lambda t)}$, откуда масса радиоактивного изотопа ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ равна

$$m_2 = \frac{m_1 \mu_2 N_р}{N_н \mu_1 \left(1 - exp(-\lambda t)(1 + N_р / N_н)\right)}.$$

Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 4$ мг.

21.31. Какой изотоп образуется из ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ после четырех α-распадов и двух β-распадов?

Решение:

При α-распаде массовое число радиоактивного изотопа уменьшается на 4, а заряд на 2 единицы. В общем виде уравнение α-распада можно записать как ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A-4}_{Z-2}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha$ — (1). При β-распаде испускается электрон, поэтому заряд ядра возрастает на единицу, а массовое число не изменяется. Таким образом, уравнение β-распада имеет следующий вид: ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A}_{Z+1}K_2 + {}^{0}_{-1}e$ — (2). Для N распадов уравнения (1) и (2) перепишутся следующим образом: ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A-4N}_{Z-2N}K_2 + N{}^{4}_{2}\alpha$ — (3) и ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A}_{Z+N}K_2 + N{}^{0}_{-1}e$ — (4). Для $N_\alpha = 4$ из уравнения (3) для радиоактивного изотопа ${}^{232}_{90}Th$ имеем ${}^{232}_{90}Th \to {}^{216}_{82}K_2 + 4{}^{4}_{2}\alpha$. Для $N_\beta = 2$ из уравнения (4) для радиоактивного изотопа ${}^{216}_{82}K_1$ имеем ${}^{216}_{82}K_1 \to {}^{216}_{84}K_2 + 2{}^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}^{216}_{84}Po$.

21.32. Какой изотоп образуется из ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ после трех α-распадов и двух β-распадов?

Решение:

Для N α-распадов и β-распадов (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A-4N}_{Z-2N}K_2 + N{}^{4}_{2}\alpha$ — (1) и ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A}_{Z+N}K_2 + N{}^{0}_{-1}e$ — (2). Для $N_\alpha = 3$ из уравнения (1) для радиоактивного изотопа ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ имеем ${}^{238}_{92}U \to {}^{226}_{86}K_2 + 3{}^{4}_{2}\alpha$. Для $N_\beta = 2$ из уравнения (2) для радиоактивного изотопа ${}^{226}_{86}K_1$ имеем ${}^{226}_{86}K_1 \to {}^{226}_{88}K_2 + 2{}^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

21.33. Какой изотоп образуется из ${}^{239}_{92}\mathrm{U}$ после двух β-распадов и одного α-распада?

Решение:

Для N β-распадов и одного α-распада (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A}_{Z+N}K_2 + N{}^{0}_{-1}e$ — (1) и ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A-4}_{Z-2}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha$ — (2). Для $N_\beta = 2$ из уравнения (1) для радиоактивного изотопа ${}^{239}_{92}\mathrm{U}$ имеем ${}^{239}_{92}U \to {}^{239}_{94}K_2 + 2{}^{0}_{-1}e$. Из уравнения (2) для радиоактивного изотопа ${}^{239}_{94}K_1$ имеем ${}^{239}_{94}K_1 \to {}^{235}_{92}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.34. Какой изотоп образуется из ${}^{8}_{3}\mathrm{Li}$ после одного β-распада и одного α-распада?

Решение:

Для одного β-распада и одного α-распада (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A}_{Z+1}K_2 + {}^{0}_{-1}e$ — (1) и ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A-4}_{Z-2}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha$ — (2). Из уравнения (1) для радиоактивного изотопа ${}^{8}_{3}\mathrm{Li}$ имеем ${}^{8}_{3}Li \to {}^{8}_{4}K_2 + {}^{0}_{-1}e$. Из уравнения (2) для радиоактивного изотопа ${}^{8}_{4}K_1$ имеем ${}^{8}_{4}K_1 \to {}^{4}_{2}K_2 + {}^{4}_{2}\alpha$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.35. Какой изотоп образуется из ${}^{133}_{51}\mathrm{Sb}$ после четырех β-распадов?

Решение:

Для N β-распадов (см. задачу 21.31) уравнение имеет вид ${}^{A}_{Z}K_1 \to {}^{A}_{Z+N}K_2 + N{}^{0}_{-1}e$. Для $N_\beta = 4$ для радиоактивного

изотопа ${}^{133}_{51}\mathrm{Sb}$ имеем ${}^{133}_{51}\mathrm{Sb} \to {}^{133}_{55}K_2 + 4{}^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.36. Кинетическая энергия α-частицы, вылетающей из ядра атома полония ${}^{214}_{84}\mathrm{Po}$ при радиоактивном распаде, $W_к = 7{,}68$ МэВ. Найти: а) скорость v α-частицы; б) полную энергию W, выделяющуюся при вылете α-частицы; в) число пар ионов N, образуемых α-частицей, принимая, что на образование одной пары ионов в воздухе требуется энергия $W_0 = 34$ эВ; г) ток насыщения $I_н$ в ионизационной камере от всех α-частиц, испускаемых полонием. Активность полония $a = 3{,}7 \cdot 10^4$ Бк.

Решение:

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия α-частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1), где $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость α-частицы. а) Из формулы (1) относительная скорость равна $\beta = \dfrac{\sqrt{W_к\left(W_к + 2m_0c^2\right)}}{W_к + m_0c^2}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), находим скорость α-частицы: $v = \dfrac{c\sqrt{W_к\left(W_к + 2m_0c^2\right)}}{W_к + m_0c^2}$ м/с. б) Полная энергия W, выделяющаяся при вылете α-частицы, равна сумме кинетической энергии $W_{к1}$ α-частицы и кинетической энергии $W_{к2}$ остаточного ядра: $W = W_{к1} + W_{к2}$ — (4). Кроме того, имеет место закон сохранения импульса. Поскольку до распада импульс системы был равен нулю, то после распада

$m_1 v_1 = m_2 v_2$ — (5). Из (5) нетрудно получить $(m_1 v_1)^2 = \frac{m_1 v_1^2 2m_1}{2} = W_{к1} 2m_1 = (m_2 v_2)^2 = \frac{m_2 v_2^2 2m_2}{2} = W_{к2} 2m_2$.

Тогда из (4) имеем $W = W_{к1} + \frac{2m_1 W_{к1}}{2m_2} = W_{к1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) =$

$= W_{к1}\frac{m_1 + m_2}{m_2}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 7{,}83$ МэВ. в) Число пар ионов, образуемых α-частицей, равно $N = \frac{W_{к1}}{W_0} = 2{,}26 \cdot 10^5$. г) Ток насыщения в ионизационной камере от всех α-частиц, испускаемых полонием, равен $I_н = aN|e|$, где N — число пар ионов, образуемых полонием, a — активность полония, e — элементарный заряд. Подставляя числовые данные, находим $I_н = 1{,}34 \cdot 10^{-9}$ А.

§ 22. Ядерные реакции

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 21 из приложения. В задачах 22.22, 22.31 дан авторский вариант решения.

22.1. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния: а) ${}^{24}_{12}Mg$; б) ${}^{25}_{12}Mg$; в) ${}^{26}_{12}Mg$.

Решение:
Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: ${}^{A}_{Z}X$, где X — символ химического элемента; Z — зарядовое число (атомный номер, число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число нейтронов в ядре $N = A - Z$. С учетом сказанного найдем: а) ядро ${}^{24}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 12 нейтронов; ядро ${}^{25}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 13 нейтронов; ядро ${}^{26}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 14 нейтронов.

22.2. Найти энергию связи W ядра изотопа лития ${}^{7}_{3}Li$.

Решение:
Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением $W = c^2 \Delta m$, где Δm —разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра. Очевидно, $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$, где m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, $m_я$ — масса ядра изотопа. Т. к. $m_я = m_A - Zm_e$, где m_e — масса электрона, m_A — масса изотопа, то $\Delta m = Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_A$. С помощью таблицы 21 найдем $\Delta m = (3 \cdot 1{,}00783 + 4 \cdot 1{,}00867 - 7{,}01600) = 0{,}04217$ а.е.м. Массе 1 а.е.м. соответствует энергия 931 МэВ (см. задачу 17.20), энергия связи ядра ${}^{7}_{3}Li$ будет

равна $W = 0{,}04217 \cdot 931 = 39{,}3$ МэВ. Эту энергию надо затратить, чтобы расщепить ядро ${}^{7}_{3}Li$ на нуклоны.

22.3. Найти энергию связи W ядра атома гелия ${}^{4}_{2}He$.

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением $W = c^2 \Delta m$ — (1), где $\Delta m = Zm_p + (A - Z) \times \times m_n - m_я$ — (2) — разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра, Z — порядковый номер изотопа, A — массовое число, m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, $m_я$ — масса ядра изотопа. Поскольку $m_я = m_a - Zm_e$ — (3), где m_a — масса изотопа и m_e — масса электрона, то, подставляя (3) в (2), получаем $\Delta m = Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a$ — (4). Подставляя (4) в (1), окончательно получаем $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$.

Для гелия ${}^{4}_{2}He$: $A = 4$, $Z = 2$, $m_a = 4{,}0026$ а.е.м. Кроме того, $m_{{}^1_1H} = 1{,}0078$ а.е.м. и $m_n = 1{,}0087$ а.е.м. Подставляя числовые значения, получаем $W = 28{,}6$ МэВ.

22.4. Найти энергию связи W ядра атома алюминия ${}^{27}_{13}Al$.

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$. Для алюминия ${}^{27}_{13}Al$: $A = 27$, $Z = 13$ и $m_a = 26{.}9815$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 227$ МэВ.

22.5. Найти энергию связи W ядер: а) ${}^{3}_{1}H$; б) ${}^{3}_{2}He$. Какое из этих ядер более устойчиво?

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$. а) Для ядра ${}^{3}_{1}H$: $A = 3$, $Z = 1$ и $m_a = 3{.}0161$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 8{,}52$ МэВ. б) Для ядра ${}^{3}_{2}He$: $A = 3$, $Z = 2$ и $m_a = 3{.}0160$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 7{.}81$ МэВ. Поскольку энергия связи ядра ${}^{3}_{1}H$ больше, чем ядра ${}^{3}_{2}He$, следовательно, ядро ${}^{3}_{1}H$ более устойчивое.

22.6. Найти энергию связи W_0, приходящуюся на один нуклон в ядре атома кислорода ${}^{16}_{8}O$.

Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$ — (1). Энергия связи, приходящаяся на один нуклон в ядре, равна $W_0 = \dfrac{W}{A}$ — (2).

Подставляя (1) в (2), получаем $W_0 = \dfrac{c^2}{A}\left[Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$. Для кислорода ${}^{16}_{8}O$: $A = 16$, $Z = 8$ и $m_a = 15{.}9994$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W_0 = 7{.}78$ МэВ.

22.7. Найти энергию связи W ядра дейтерия ${}^{2}_{1}H$.

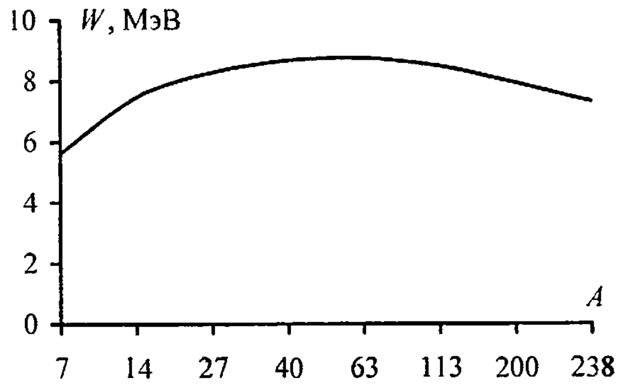
Решение:

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a\right]$. Для дейтерия ${}^{2}_{1}H$: $A = 2$,

$Z = 1$ и $m_a = 2{,}0141$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 2{,}25$ МэВ.

22.8. Найти энергию связи W_0, приходящуюся на один нуклон в ядрах: а) ${}^{7}_{3}Li$; б) ${}^{14}_{7}N$; в) ${}^{27}_{13}Al$; г) ${}^{40}_{20}Ca$; д) ${}^{63}_{29}Cu$; е) ${}^{113}_{48}Cd$; ж) ${}^{200}_{80}Hg$; з) ${}^{238}_{92}U$. Построить зависимость $W_0 = f(A)$, где A — массовое число.

Решение:



Между энергией и массой любого вещества существует связь, которая дается уравнением Эйнштейна $W = mc^2$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Под энергией связи понимают энергию, которая высвобождается в процессе образования из нуклонов атомного ядра, т. е. $W_{св} = \Delta mc^2$, где $\Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_Ш\right]$ — дефект массы этого ядра, Z — атомарный номер, A — массовое число. Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, $W_0 = \frac{W_{св}}{A} = \frac{\left(Zm_p + (A - Z)m_n - m_я\right)c^2}{A}$.

а) $W_0 = \frac{(3 \cdot 1{,}67 + 4 \cdot 1{,}68 - 7 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{7} =$
$= 0{,}089 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 5{,}62$ МэВ.

б) $W_0 = \frac{(7 \cdot 1{,}67 + 7 \cdot 1{,}68 - 14 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{14} =$
$= 0{,}12 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 7{,}53$ МэВ.

в) $W_0 = \frac{(13 \cdot 1{,}67 + 14 \cdot 1{,}68 - 27 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{27} =$
$= 0{,}134 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}35$ МэВ.

г) $W_0 = \frac{(20 \cdot 1{,}67 + 20 \cdot 1{,}68 - 40 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{40} =$
$= 0{,}137 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}55$ МэВ.

д) $W_0 = \frac{(29 \cdot 1{,}67 + 34 \cdot 1{,}68 - 63 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{63} =$
$= 0{,}141 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}75$ МэВ.

е) $W_0 = \frac{(48 \cdot 1{,}67 + 65 \cdot 1{,}68 - 113 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{113} =$
$= 0{,}135 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 8{,}48$ МэВ.

ж) $W_0 = \frac{(80 \cdot 1{,}67 + 120 \cdot 1{,}68 - 200 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{200} =$
$= 0{,}127 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 7{,}93$ МэВ.

з) $W_0 = \frac{(92 \cdot 1{,}67 + 146 \cdot 1{,}68 - 238 \cdot 1{,}66) \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{238} =$
$= 0{,}0122 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 7{,}62$ МэВ.

22.9. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{2}_{2}He$.

Решение:
Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ — (1). Сумма масс исходных частиц $\sum m_1 = (7{,}01600 + 1{,}00783) = 8{,}02383$ а.е.м. Сумма масс образовавшихся частиц $\sum m_2 = (4{,}00260 + 4{,}00260) = 8{,}00520$ а.е.м. Таким образом, дефект масс $\Delta m = 0{,}01863$ а.е.м. Тогда из (1) найдем $Q = 17{,}3 \cdot 10^6$ эВ.

22.10. Найти энергию Q, поглощенную при реакции ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$.

Решение:
Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$, где $\sum m_1$ — сумма масс частиц до реакции, $\sum m_2$ — сумма масс частиц после реакции. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} + m_{{}^{4}_{2}He} = 18{,}0057$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{17}_{8}O} = 18{,}0069$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 1{,}13$ МэВ.

22.11. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакциях а) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{1}_{1}H + {}^{3}_{1}H$; б) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{0}n$.

Решение:
Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). а) $\sum m_1 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{2}_{1}H} = 4{,}0566$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{3}_{1}H} = 4{,}0239$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим

$Q = 3{,}11$ МэВ. б) $\sum m_1 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{2}_{1}H} = 4{,}0566$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{3}_{2}He} + m_{{}^{1}_{0}n} = 4{,}0247$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 3{,}01$ МэВ.

22.12. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакциях: а) ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{2}He \to {}^{1}_{1}H + {}^{4}_{2}He$; б) ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$;
в) ${}^{6}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{3}_{2}He + {}^{4}_{2}He$.

Решение:
Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). а) $\sum m_1 = m_{{}^{2}_{1}H} + m_{{}^{3}_{2}He} = 5{,}0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{4}_{2}He} = 5{,}0104$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 18{,}5$ МэВ.
б) $\sum m_1 = m_{{}^{6}_{3}Li} + m_{{}^{2}_{1}H} = 8{,}0292$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{4}_{2}He} + m_{{}^{4}_{2}He} = 8{,}0052$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 22{,}5$ МэВ. в) $\sum m_1 = m_{{}^{6}_{3}Li} + m_{{}^{1}_{1}H} = 7{,}0229$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{3}_{2}He} + m_{{}^{4}_{2}He} = 7{,}0186$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 4{,}04$ МэВ.

22.13. Какую массу M воды можно нагреть от $0°$ С до кипения, если использовать все тепло, выделяющееся при реакции ${}^{7}_{3}Li(p,\alpha)$, при полном разложении массы $m = 1$ г лития?

Решение:

Напишем уравнение реакции ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \to {}^{4}_{2}\alpha + {}^{4}_{2}\alpha$. Количество тепла, выделяемое при распаде одного ядра, $Q_1 = c^2\left(\sum m_1 + \sum m_2\right)$. Полная энергия, выделенная при распаде, $Q = NQ_1$ — где $N = \frac{m}{\mu}N_A$ — число ядер ${}^{3}_{7}Li$; $N_A = 6{,}023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Количество тепла, необходимое для нагревания воды, $Q = c_в M(t_2 - t_1)$. По условию все тепло, выделенное при реакции, идет на нагревание воды, поэтому $\frac{m}{\mu}N_A c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right) = c_в M(t_2 - t_1)$. Отсюда $M = \frac{mN_A c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)}{\mu c_в (t_2 - t_1)}$. Подставляя числовые данные, получим $M = 563$ т.

22.14. Написать недостающие обозначения в реакциях: а) ${}^{27}_{13}Al(n,\alpha)x$; б) ${}^{19}_{9}F(p,x){}^{16}_{8}O$; в) ${}^{55}_{25}Mn(x,n){}^{55}_{26}Fe$; г) ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p)x$; д) ${}^{14}_{7}N(n,x){}^{14}_{6}C$; е) $x(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

Решение:

а) Запишем уравнение реакции ${}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \to {}^{24}_{11}x + {}^{4}_{2}\alpha$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Na — натрий, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Al(n,\alpha){}^{24}_{11}Na$.

б) Запишем уравнение реакции ${}^{19}_{9}F + {}^{1}_{1}p \to {}^{16}_{8}O + {}^{4}_{2}x$. Следовательно, x — ${}^{4}_{2}\alpha$, отсюда окончательно ${}^{19}_{9}F(p,\alpha){}^{16}_{8}O$.

в) Запишем уравнение реакции ${}^{55}_{25}Mn + {}^{1}_{1}x \to {}^{55}_{26}Fe + {}^{1}_{0}n$. Следовательно, x — ${}^{1}_{1}p$, отсюда окончательно ${}^{55}_{25}Mn(p,n){}^{55}_{26}Fe$.

г) Запишем уравнение реакции ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{14}x + {}^{1}_{1}p$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Si — кремний, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p){}^{30}_{14}Si$.

д) Запишем уравнение реакции ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — ${}^{1}_{1}p$, отсюда окончательно ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$.

е) Запишем уравнение реакции ${}^{25}_{12}x + {}^{1}_{1}p \to {}^{22}_{11}Na + {}^{4}_{2}\alpha$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Mg — марганец, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Mg(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

22.15. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \to {}^{8}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} + m_{{}^{2}_{1}H} = 9{,}0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{8}_{4}Be} + m_{{}^{1}_{0}n} = 9{,}0140$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 15{,}12$ МэВ.

22.16. Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{9}_{4}Be + {}^{2}_{1}H \to {}^{10}_{5}Be + {}^{1}_{0}n$.

Решение:

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{9}_{4}Be} + m_{{}^{2}_{1}H} = 11{,}0263$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{10}_{5}Be} + m_{{}^{1}_{0}n} =$

$= 11{,}0216$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 4{,}42$ МэВ.

22.17. При бомбардировке изотопа азота ${}^{14}_{7}N$ нейтронами получается изотоп углерода ${}^{14}_{6}C$, который оказывается β-активным. Написать уравнения обеих реакций.

Решение:

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{1}p$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}p$ или ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$. По условию изотоп ${}^{14}_{6}C$ оказывается β-радиоактивным, т. е. испускает электроны, поэтому ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — N — азот, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N$.

22.18. При бомбардировке изотопа алюминия ${}^{27}_{13}Al$ α-частицами получается радиоактивный изотоп фосфора ${}^{30}_{15}P$, который затем распадается с выделением позитрона. Написать уравнения обеих реакций. Найти удельную активность a_m изотопа ${}^{30}_{15}P$, если его период полураспада $T_{1/2} = 130$ с.

Решение:

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{30}_{15}p + {}^{1}_{0}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{0}n$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{30}_{15}p + {}^{1}_{0}n$ или ${}^{27}_{13}Al(\alpha,n){}^{30}_{15}p$. По условию

изотоп ${}^{30}_{15}p$ оказывается радиоактивным и распадается с излучением позитрона, поэтому ${}^{30}_{15}p \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{16}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — S — сера, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{30}_{15}p \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{30}_{16}S$. Период полураспада определяется как $T_{1/2} = \dfrac{ln2}{\lambda}$, отсюда $\lambda = \dfrac{0{,}693}{T_{1/2}}$ — постоянная распада. Активностью вещества называется физическая величина $A = \lambda N$, где $N = \dfrac{m}{\mu}N_A$ — число делящихся ядер. Тогда $A = \dfrac{0{,}693mN_A}{T_{1/2}\mu}$. Удельная активность $a_m = \dfrac{A}{m} = \dfrac{0{,}689N_A}{T_{1/2}\mu} =$ $= 1{,}07 \cdot 10^{23}$ Бк/кг.

22.19. При бомбардировке изотопа ${}^{23}_{11}Na$ дейтонами образуется β-радиоактивный изотоп ${}^{24}_{11}Na$. Счетчик β-частиц установлен вблизи препарата, содержащего радиоактивный ${}^{24}_{11}Na$. При первом измерении счетчик дал 170 отбросов за 1мин, а через сутки — 56 отбросов за 1мин. Написать уравнения обеих реакций. Найти период полураспада $T_{1/2}$ изотопа ${}^{24}_{11}Na$.

Решение:

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{23}_{11}Na + {}^{2}_{1}d \rightarrow {}^{24}_{11}Na + {}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{1}p$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{23}_{11}Na + {}^{2}_{1}d \rightarrow {}^{24}_{11}Na + {}^{1}_{1}p$ или ${}^{23}_{11}Nf(d,p){}^{24}_{11}Na$. По условию изотоп ${}^{24}_{11}Na$ оказывается β-радиоактивным, т. е. испускает электроны, поэтому ${}^{24}_{11}Na \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{24}_{10}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — Ne —

неон, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{24}_{11}Na \to {}^{0}_{-1}e + {}^{24}_{10}Ne$. По закону радиоактивного распада $N = \frac{N_0}{2t / T_{1/2}}$, отсюда $2\frac{t}{T_{1/2}} = \frac{N_0}{N}$; $\frac{t}{T_{1/2}} = log_2\left(\frac{N_0}{N}\right) = \frac{ln(N_0 / N)}{ln 2} = \frac{ln(N_0 / N)}{0{,}693}$. Тогда период полураспада

$$T_{1/2} = \frac{t\, ln 2}{ln(N_0 / N)} = 14.97 \text{ ч.}$$

22.20. Какая энергия Q_1 выделится, если при реакции ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \to {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{1}H$ подвергаются превращению все ядра, находящиеся в массе $m = 1$ г алюминия? Какую энергию Q_2 надо затратить, чтобы осуществить это превращение, если известно, что при бомбардировке ядра алюминия α-частицами с энергией $W = 8$ МэВ только одна α-частица из $n = 2\cdot 10^6$ частиц вызывает превращение?

Решение:

Энергия, выделяемая при превращении одного ядра алюминия, $Q_0 = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Число ядер алюминия, участвующих в реакции, $N = \frac{m}{\mu}N_A$. Тогда полная энергия, выделяемая при превращении всех ядер, $Q_1 = Q_0 N = \frac{m}{\mu}N_A c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Подставляя числовые данные и учитывая, что энергетический эквивалент атомной единицы массы $(1 а.е.м.)c^2 = 931{,}5$ МэВ, получим: $Q_1 = 5{,}3\cdot 10^{22}$ МэВ. Т. к. превращение может осуществлять только одна из n частиц, то энергия, необходимая для осуществления превращения всех ядер, $Q_2 = WNn = \frac{WmN_A n}{\mu} = 3{,}57\cdot 10^{29}$ МэВ. Таким образом,

$\frac{Q_2}{Q_1} = 5{,}71\cdot 10^6$, т. е. чтобы осуществить это превращение, надо затратить энергии приблизительно в 6 млн раз больше, чем выделится при этой реакции.

22.21. При бомбардировке изотопа лития ${}^{6}_{3}Li$ дейтонами (ядрами дейтерия ${}^{2}_{1}H$) образуются две α-частицы. При этом выделяется энергия $Q = 22{,}3$ МэВ. Зная массы дейтона d и α-частицы, найти массу m изотопа лития ${}^{6}_{3}Li$.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}d \to {}^{4}_{2}\alpha + {}^{4}_{2}\alpha$. Количество выделенной энергии $Q = c^2\left[(m_{Li} + m_d) - 2m_\alpha\right]$;

$$m_{Li} = \frac{Q}{c^2} - m_d + 2m_\alpha = 6{,}015 \text{ а.е.м.}$$

22.22. Источником энергии солнечного излучения является энергия образования гелия из водорода по следующей циклической реакции: ${}^{12}_{6}C + {}^{1}_{1}H \to {}^{13}_{7}N \to {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{-1}e$, ${}^{13}_{6}C + {}^{1}_{1}H \to {}^{14}_{7}N$, ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{1}H \to {}^{15}_{8}O \to {}^{15}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$, ${}^{15}_{7}N + {}^{1}_{1}H \to {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He$. Какая масса m_t водорода в единицу времени должна превращаться в гелий? Солнечная постоянная $K = 1{,}37$ кВт/м^2. Принимая, что масса водорода составляет 35% массы Солнца, подсчитать, на какое время t хватит запаса водорода, если излучение Солнца считать постоянным.

Решение:

В результате проведенного цикла четыре ядра водорода превращаются в одно ядро гелия. Углерод, ведущий себя как химический катализатор, может использоваться снова.

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Для цикла реакций $\sum m_1 = 4m_{^1_1H} = = 4{,}0312$ а.е.м., а $\sum m_2 = 4m_{^4_2He} = 4{,}0026$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 268{,}66$ МэВ $= = 4{,}29 \cdot 10^{-12}$ Дж. С другой стороны, энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени, $W_t = 4\pi \langle R \rangle^2 K$ — (1), где $\langle R \rangle = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ м — среднее расстояние от Земли до Солнца, K — солнечная постоянная. Число атомов водорода, необходимое для излучения энергии W_t, равно $N = \dfrac{4W_t}{Q}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $N = 16\pi \langle R \rangle^2 K$ — (3), тогда необходимая масса водорода в единицу времени равна $M_{Ht} = m_{^1_1H} N = \dfrac{16\pi \langle R \rangle^2 K m_{^1_1H}}{Q} = = 6{,}03 \cdot 10^{11}$ кг. По условию $M_H = 0{,}35 M_C$ — (4), где $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Тогда время, на которое хватит запаса водорода, равно $t = \dfrac{M_H}{M_{Ht}}$ — (5). Подставляя (4) в (5), окончательно получаем $t = \dfrac{0{,}35 M_C}{M_{Ht}} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ лет.

22.23. Реакция разложения дейтона γ-лучами: $^2_1H + h\nu \to ^1_1H + ^1_0n$. Найти массу m нейтрона, если известно, что энергия γ-квантов $W_1 = 2{,}66$ МэВ, а энергия вылетающих протонов, измеренная по производимой ими ионизации, оказалась равной $W_2 = 0{,}22$ МэВ. Энергию нейтрона считать равной энергии протона. Массы дейтона и протона считать известными.

Решение:

Запишем уравнение реакции $^2_1d + h\nu \to ^1_1p + ^1_0n$. Количество тепла, выделенное при реакции, $Q = c^2 \times \times \left(m_d - (m_p + m_n)\right)$. По закону сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - Q$. Подставим Q в закон сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - c^2\left(m_d (m_p + m_n)\right)$, откуда $m_n = m_d - m_p - -\dfrac{2W_2 - W_1}{c^2}$; $m_n = 1{,}0087$ а.е.м.

22.24. Написать недостающие обозначения в реакциях: а) $^{27}_{13}Al(\gamma, x)^{26}_{12}Mg$; б) $^{27}_{13}Al(\gamma, n)x$; в) $^{63}_{29}Cu(\gamma, x)^{62}_{29}Cu$; г) $x(\gamma, n)^{181}_{74}W$.

Решение:

а) Уравнение реакции будет иметь следующий вид $^{27}_{13}Al + h\nu \to ^{26}_{12}Mg + ^1_1x$, следовательно, ^1_1x — есть ^1_1p, тогда $^{27}_{13}Al(\gamma, p)^{26}_{12}Mg$. б) Уравнение реакции имеет вид $^{27}_{13}Al + h\nu \to ^{26}_{13}x + ^1_0n$. По заряду ядра с помощью таблицы Менделеева находим, что x — алюминий, тогда $^{27}_{13}Al(\gamma, n)^{26}_{13}Al$. в) Т. к. порядковый номер элемента не изменился, то и не изменился заряд ядра, поэтому x — есть ^1_0n, значит, $^{63}_{29}Cu(\gamma, n)^{62}_{29}Cu$. г) При излучении нейтрона заряд ядра не меняется (см. б и в), поэтому $^{182}_{74}W(\gamma, n)^{181}_{74}W$.

22.25. Выход реакции образования радиоактивных изотопов можно охарактеризовать либо числом k_1 — отношением числа происшедших актов ядерного превращения к числу бомбардирующих частиц, либо числом k_2 [Бк] — отношением активности полученного продукта к числу единиц, бомбардирующих мишень. Как связаны между собой величины k_1 и k_2?

Решение:

Пусть N_1 — число происшедших актов ядерного превращения, N_2 — число бомбардирующих частиц. Тогда $k_1 = \frac{N_1}{N_2}$ — (1); $k_2 = \frac{a}{N_2} = \frac{\lambda N_1}{N_2} = \frac{\ln 2 N_1}{T_{1/2} N_2}$ — (2). Сравнивая выражения (1) и (2), получим $k_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} k_1$.

22.26. При бомбардировке ^7_3Li протонами образуется радиоактивный изотоп бериллия ^7_4Be с периодом полураспада $T_{1/2} = 4{,}67 \cdot 10^6$ с. Найти выход реакции k_1 (см. задачу 22.25), если известно, что бомбардирующие протоны общим зарядом $q = 1$ мкА·ч вызывают активность полученного препарата $a = 6{,}51 \cdot 10^6$ Бк.

Решение:

По определению $k_1 = \frac{N_1}{N_2}$ — (1), где N_1 — число происшедших актов ядерного превращения за некоторый промежуток времени, N_2 — число частиц, бомбардирующих мишень за этот промежуток времени, а $k_2 = \frac{a}{N_2}$ — (3), где a — активность полученного продукта. Суммарный заряд протонов, бомбардирующих мишень, равен $q = eN_2$, откуда $N_2 = \frac{q}{e}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2),

соответственно получаем $k_1 = \frac{N_1 e}{q}$ — (4) и $k_2 = \frac{ae}{q}$ — (5). Величины k_1 и k_2 связаны между собой соотношением: $k_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} k_1$, где $T_{1/2}$ — период полураспада полученного продукта. тогда $k_1 = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} k_2$ — (6). Подставляя (5) в (6). окончательно получаем $k_1 = \frac{aeT_{1/2}}{q \ln 2} = 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{500}$, значит, только один протон из 500 вызывает реакцию.

22.27. В результате ядерной реакции $^{56}_{26}Fe(p,n)$ образуется радиоактивный изотоп кобальта $^{56}_{27}Co$ с периодом полураспада $T_{1/2} = 80$ сут. Найти выход реакции k_1 (см. задачу 22.25), если известно, что бомбардирующие протоны общим зарядом $q = 20$ мкА·ч вызывают активность полученного препарата $a = 5{,}2 \cdot 10^7$ Бк.

Решение:

Выход реакции (см. задачу 22.26) выражается соотношением $k_1 = \frac{aeT_{1/2}}{q \ln 2} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$.

22.28. Источником нейтронов является трубка, содержащая порошок бериллия ^9_4Be и газообразный радон. При реакции α-частиц радона с бериллием возникают нейтроны. Написать реакцию получения нейтронов. Найти массу m радона, введенного в источник при его изготовлении, если известно, что этот источник дает через время $t = 5$ сут после его изготовления число нейтронов в единицу времени $a_2 = 1{,}2 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Выход реакции $k_1 = 1/4000$, т. е. только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию.

Решение:

Сразу после изготовления источник дает в единицу времени число распадов $a_1 = \left(\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\right)_1 = \lambda N_1$. Через время t число распадов в единицу времени $a_2 = \left(\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\right)_2 = \lambda N_2$, где $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$. По условию только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию, тогда число атомов радона, введенного в источник, $N' = nN_1 = \dfrac{nN_2}{e^{-\lambda t}} = nN_2 e^{\lambda t}$. Тогда масса радона $m = \dfrac{\mu N'}{N_A} = \dfrac{\mu}{N_A} nN_2 e^{\lambda t} = \dfrac{\mu n e^{\lambda t} a_2}{N_A \lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 2{,}1 \cdot 10^{-9}$ кг.

22.29. Источником нейтронов является трубка, описанная в задаче 22.28. Какое число нейтронов a_2 в единицу времени создают α-частицы, излучаемые радоном с активностью $a_1 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк, попадая на порошок бериллия? Выход реакции $k_1 = 1/4000$.

Решение:

По условию выход реакции $k_1 = \dfrac{1}{4000}$, значит, только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию. Поскольку активность радона равна $a_1 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк, то число нейтронов в единицу времени, создаваемое α-частицами, равно $a_2 = \dfrac{a_1}{n} = a_1 k_1 = 9{,}25 \cdot 10^6$ с$^{-1}$.

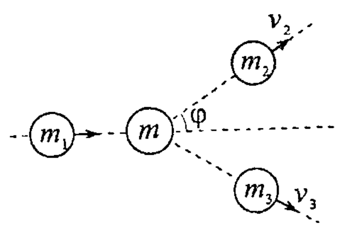
22.30. Реакция образования радиоактивного изотопа углерода ${}^{11}_{6}C$ имеет вид ${}^{10}_{5}B(d,n)$, где d-дейтон (ядро дейтерия ${}^{2}_{1}H$). Период полураспада изотопа ${}^{11}_{6}C$ $T_{1/2} = 20$ мин. Какая энергия Q выделится при этой реакции? Найти выход реакции k_2, если $k_1 = 10^{-8}$ (см. задачу 22.25).

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^{10}_{5}B + {}^{2}_{1}H \to {}^{11}_{6}C + {}^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{10}_{5}B} + m_{{}^{2}_{1}H} = 12{,}0270$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{11}_{6}C} + m_{{}^{1}_{0}n} = 12{,}0087$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 7{,}12$ МэВ. Величины k_1 и k_2 связаны соотношением $k_2 = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} k_1$, отсюда $k_2 = 5{,}78 \cdot 10^{-12}$ Бк.

22.31. В реакции ${}^{14}_{7}N(\alpha, p)$ кинетическая энергия α-частицы $W_1 = 7{,}7$ МэВ. Под каким углом φ к направлению движения α-частицы вылетает протон, если известно, что его кинетическая энергия $W_2 = 8{,}5$ МэВ?

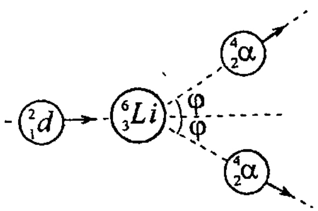
Решение:



Обозначим m_1, m_2 и m_3 — массы бомбардирующей α-частицы, протона и ядра отдачи (в нашем случае кислорода); W_1, W_2 и W_3 — их кинетические энергии. Если ядро азота (m) неподвижно, то закон сохранения энергии запишется так: $W_1+Q=W_2+W_3$ — (1), где Q — энергия реакции. Закон сохранения импульса в векторной форме имеет вид $\vec{p}_1=\vec{p}_2+\vec{p}_3$ — (2). Из (2) имеем для импульсов $p_3^2=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\cos\varphi$ — (3). Т. к. $p^2=(mv)^2=\frac{mv^2}{2}2m=2mW$ — (4), то уравнение (3) примет вид $2m_3W_3=2m_1W_1+2m_2W_2-2\cos\varphi\sqrt{2m_1W_1 2m_2W_2}$, или $W_3=\frac{m_1}{m_3}W_1+\frac{m_2}{m_3}W_2-\frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2W_1W_2}$ — (5). Исключая из (1) и (5) энергию W_3, получим формулу, связывающую кинетическую энергию бомбардирующих α-частиц с кинетической энергией протонов: $W_1\left(\frac{m_3-m_1}{m_3}\right)+Q=W_2\times\left(\frac{m_2+m_3}{m_3}\right)-\frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2W_1W_2}$ — (6). Здесь $Q=-1{,}18$ МэВ. Решая (6) относительно $\cos\varphi$ и подставляя числовые данные, найдем $\cos\varphi=\frac{m_2+m_3}{2}\sqrt{\frac{W_2}{m_1m_2W_1}}-\frac{m_3-m_1}{2}\times\sqrt{\frac{W_1}{m_1m_2W_2}}-\frac{m_3Q}{2\sqrt{m_1m_2W_1W_2}}=0{,}849$, или $\varphi=32°$.

22.32. При бомбардировке изотопа лития ${}^6_3Li$ дейтонами образуются две α-частицы, разлетающиеся симметрично под углом φ к направлению скорости бомбардирующих дейтонов. Какую кинетическую энергию W_2 имеют образующиеся α-частицы, если известно, что энергия бомбардирующих дейтонов $W_1=0{,}2$ МэВ? Найти угол φ.

Решение:



Запишем уравнение реакции ${}^6_3Li+{}^1_2d\to{}^4_2\alpha+{}^4_2\alpha$. Т. к. ядра лития покоились, то по закону сохранения энергии $W_1=2W_2-Q$, где $Q=c^2(m_{Li}+m_d-2m_\alpha)$. Тогда $2W_2=W_1+c^2(m_{Li}+m_d-2m_\alpha)$, отсюда $W_2=\frac{W_1+c^2(m_{Li}+m_d-2m_\alpha)}{2}=11{,}31$ МэВ. Из механики кинетическая энергия $W_к=\frac{mv^2}{2}=\frac{m^2v^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}$, откуда $p^2=2mW_к$ или импульс $p=\sqrt{2mW_к}$. Импульсы дейтона и α-частиц будут соответственно равны $p_1=\sqrt{2m_dW_1}$ и $p_2=\sqrt{2m_\alpha W_2}$. По закону сохранения импульса $p_1=2\rho_2\cos\varphi$; $\cos\varphi=\frac{p_1}{2p_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_dW_1}{m_\alpha W_2}}=0{,}047$, отсюда $\varphi=\arccos(0{,}047)\approx 87{,}3°$.

22.33. Изотоп гелия ${}^3_2He$ получается бомбардировкой ядер трития ${}^3_1H$ протонами. Написать уравнение реакции. Какая энергия Q выделяется при этой реакции? Найти порог реакции, т. е. минимальную кинетическую энергию бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция. Указание: учесть, что при пороговом значении кинетической энергии бомбардирующей частицы относительная скорость частиц, возникающих в реакции, равна нулю.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^3_1H+{}^1_1p\to{}^3_2He+{}^1_0n$. Энергия, выделяемая при реакции, $Q=c^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$. Подставляя числовые данные и учитывая, что энергетический эквивалент атомной единицы массы $(1 а.е.м.)c^2 = 931{,}5$ МэВ, получим $Q = 931{,}5\cdot((3{,}01605+1{,}0078)-(3{,}01603+1{,}00867)) = -0{,}79$ МэВ. Т. к. $Q<0$, то реакция эндотермическая, т. е. идет с поглощением энергии и обладает порогом. Если частицы покоятся друг относительно друга, то такая реакция не пойдет. Необходимо, чтобы энергия относительного движения частиц была не меньше $|Q|$, поэтому пороговая энергия определяется соотношением $W_{\text{пор}} = \dfrac{p_1^2}{2(m_1+m_2)} + |Q|$, где p_1 — импульс центра инерции системы. С другой стороны, по определению $W_{\text{пор}}$ равна кинетической энергии протона: $W_{\text{пор}} = \dfrac{p_1^2}{2m_2}$, откуда $p_1^2 = 2m_2 W_{\text{пор}}$. Значит, $W_{\text{пор}} = \dfrac{2m_2 W_{\text{пор}}}{2(m_1+m_2)} + |Q|$, откуда $W_{\text{пор}}\left(1-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right) = |Q|$ или $W_{\text{пор}} = \dfrac{|Q|(m_1+m_2)}{m_1} = 1{,}04$ МэВ.

22.34. Найти порог W ядерной реакции ${}^{14}_{7}N(\alpha,p)$.

Решение:

Порог ядерной реакции, т. е. минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция (см. задачу 22.33), выражается соотношением $W = \dfrac{|Q|(m_1+m_2)}{m_1}$. В нашем случае $m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} = 14{,}0031$ а.е.м. — масса покоящегося ядра, $m_2 = m_{{}^{4}_{2}He} = 4{,}0026$ а.е.м. — масса бомбардирующей частицы. Запишем уравнение реакции: ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{7}_{8}O + {}^{1}_{1}p$. Изменение

энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} + m_{{}^{4}_{2}He} = 18{,}0057$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{17}_{8}O} + m_{{}^{1}_{1}p} = 18{,}0069$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -1{,}13$ МэВ и $W = 1{,}45$ МэВ.

22.35. Найти порог W ядерной реакции ${}^{7}_{3}Li(p,n)$.

Решение:

Порог ядерной реакции, т. е. минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция (см. задачу 22.33), выражается соотношением $W = \dfrac{|Q|(m_1+m_2)}{m_1}$. В нашем случае $m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} = 7{,}0160$ а.е.м. — масса покоящегося ядра, $m_2 = m_{{}^{1}_{1}p} = 1{,}0078$ а.е.м. — масса бомбардирующей частицы. Запишем уравнение реакции: ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \to {}^{7}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} + m_{{}^{1}_{1}p} = 8{,}0238$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{7}_{4}Be} + m_{{}^{1}_{0}n} = 8{,}0256$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -1{,}69$ МэВ и $W = 1{,}93$ МэВ.

22.36. Искусственный изотоп азота ${}^{13}_{7}N$ получается бомбардировкой ядер углерода ${}^{12}_{6}C$ дейтонами. Написать уравнение реакции. Найти количество теплоты Q, поглощенное при этой реакции, и порог W этой реакции. Какова суммарная кинетическая энергия W' продуктов этой реакции при пороговом значении кинетической энергии дейтонов? Ядра углерода считать неподвижными.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^{12}_{6}C+{}^{2}_{1}d\to{}^{13}_{7}N+{}^{1}_{0}n$. Найдем количество тепла $Q=c^2\left[(m_C+m_d)-(m_N+m_n)\right]$;

$Q=9\cdot10^{16}\left[(12+2{,}0141)-(13{,}00574+1{,}0087)\right]\cdot1{,}66\cdot10^{-27}$;

$Q=-0{,}00507\cdot10^{-11}$ Дж $=-0{,}00317\cdot10^{-8}$ эВ $=-0{,}317$ МэВ.

Т. к. $Q<0$, то реакция эндотермическая, т. е. она не пойдет, если частицы покоятся друг относительно друга. Необходимо, чтобы энергия относительного движения частиц была не меньше $|Q|$. Поэтому порог определяется соотношением $W=\dfrac{p_d^2}{2(m_d+m_C)}+|Q|$. С другой стороны, по определению этот порог равен кинетической энергии дейтона, т. е. $W=\dfrac{p_d^2}{2m_d}$; $\dfrac{p_d^2}{2(m_d+m_C)}+|Q|=\dfrac{p_d^2}{2m_d}$. Т. к. импульс $p_d^2=2m_dW$ (см. задачу 22.32), то

$$\frac{2m_dW}{2m_d}-\frac{2m_dW}{2(m_d+m_C)}=|Q|;$$

$$W-\frac{m_dW}{m_d+m_C}=W\left(1-\frac{m_d}{m_d+m_C}\right)=|Q|;$$

$$W=\frac{|Q|}{1-m_d/(m_d+m_C)}=\frac{|Q|(m_d+m_C)}{m_d+m_C-m_d}=|Q|\left(\frac{m_d}{m_C}+1\right)$$

— пороговая энергия. $W=0{,}317\left(\dfrac{2{,}0141}{12}+1\right)=0{,}37$ МэВ. Суммарная кинетическая энергия продуктов реакции $W'=W+Q=0{,}37-0{,}317=0{,}053$ МэВ.

22.37. Реакция ${}^{10}_{5}B(n,\alpha)$ идет при бомбардировке бора нейтронами, скорость которых очень мала (тепловые нейтроны). Какая энергия Q выделяется при этой реакции? Пренебрегая скоростями нейтронов, найти скорость v и кинетическую энергию W α-частицы. Ядра бора считать неподвижными.

Решение:

Запишем уравнение реакции ${}^{10}_{5}B+{}^{1}_{0}n\to{}^{7}_{3}Li+{}^{4}_{2}\alpha$. Количество тепла, выделенного при реакции, $Q=c^2\left[(m_B+m_n)+\right.$ $\left.+(m_{Li}+m_\alpha)\right]$;

$Q=9\cdot10^{16}\left[(10{,}01294+1{,}0087)-(7{,}016+4{,}0026)\right]\cdot1{,}66\cdot10^{-27}=$ $=0{,}0454\cdot10^{-11}$ Дж $Q=2{,}83$ МэВ. Т. к. по условию скоростью нейтронов можно пренебречь, то по закону сохранения импульса $m_{Li}v_{Li}=m_\alpha v_\alpha$, отсюда $v_{Li}=\dfrac{m_\alpha v_\alpha}{m_{Li}}$. По закону сохранения энергии $Q=W_{Li}+W_\alpha=\dfrac{m_{Li}v_{Li}^2}{2}+\dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$;

$2Q=m_\alpha v_\alpha^2\left(\dfrac{m_\alpha}{m_{Li}}+1\right)$, отсюда $v_\alpha=\sqrt{\dfrac{2Q}{m_\alpha(m_\alpha/m_{Li}+1)}}$;

$$v_\alpha=\sqrt{\frac{2\cdot0{,}0454\cdot10^{-11}}{4{,}0026\cdot1{,}66\cdot10^{-27}(4{,}0026/7{,}016+1)}}=9{,}33\cdot10^6\text{ м/с}.$$

Кинетическая энергия α-частицы $W_\alpha=\dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$;

$$W_\alpha=\frac{4{,}0026\cdot1{,}66\cdot10^{-27}\cdot9{,}33^2\cdot10^{12}}{2}=2{,}89\cdot10^{-13}\text{ Дж}=$$

$=1{,}806$ МэВ.

22.38. При бомбардировке изотопа лития ${}^{7}_{3}Li$ протонами образуются две α-частицы. Энергия каждой α-частицы в момент их образования $W_2=9{,}15$ МэВ. Какова энергия W_1 бомбардирующих протонов?

Решение:

Запишем уравнение реакции: ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}p \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{7}_{3}Li} + m_{{}^{1}_{1}p} = 8{,}0238$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{4}_{2}He} + m_{{}^{4}_{2}He} = 8{,}0052$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 17{,}37$ МэВ. По закону сохранения энергии $W_1 + Q = 2W_2$, откуда энергия бомбардирующих протонов $W_1 = 2W_2 - Q = 0{,}93$ МэВ.

22.39. Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции разложения дейтона γ-лучами ${}^{2}_{1}H + h\nu \to {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{0}n$.

Решение:

Количество тепла, поглощаемое при реакции $Q = c^2 \times \times\left(m_{{}^{2}_{1}H} - \left(m_{{}^{1}_{1}H} + m_n\right)\right) = 9\cdot10^{16}\left[2{,}0141 - (1{,}00783 + 1{,}0086)\right]\times \times 1{,}66\cdot10^{-27} = -0{,}035\cdot10^{-11}$ Дж $= -2{,}175$ МэВ. Для осуществления расщепления необходимо, чтобы γ-квант имел энергию $h\nu \ge |Q|$. В предельном случае при $h\nu = |Q|$ γ-квант расщепит ядро, но не сможет сообщить образовавшимся частицам кинетическую энергию. Значит, $h\nu_{min} = 2{,}175$ МэВ.

22.40. Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции ${}^{24}_{12}Mg(\gamma, n)$.

Решение:

Запишем уравнение реакции: ${}^{24}_{12}Mg + h\nu \to {}^{23}_{12}Mg + {}^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{24}_{12}Mg} = = 23{,}9850$ а.е.м., т. к. масса покоя γ-кванта равна нулю, а $\sum m_2 = m_{{}^{23}_{12}Mg} + m_{{}^{1}_{0}n} = 24{,}0028$ а.е.м. Поскольку отношение $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -16{,}72$ МэВ. Чтобы реакция могла произойти, энергия γ-кванта должна быть больше или равна порогу ядерной реакции, который выражается соотношением $W = \dfrac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1}$ (см. задачу 22.33). Однако в нашем случае масса покоя γ-кванта $m_2 = 0$, поэтому порог ядерной реакции $W = |Q|$, а следовательно, наименьшая энергия γ-кванта $h\nu = |Q| = 16{,}72$ МэВ.

22.41. Какую энергию W (в киловатт-часах) можно получить от деления массы $m = 1$ г урана ${}^{235}_{92}U$, если при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ?

Решение:

Число делящихся ядер урана ${}^{235}_{92}U$, содержащееся в определенной массе, равно $N = \dfrac{m}{\mu}N_A$ — (1), где $\mu = 0{,}235$ кг/моль — молярная масса ${}^{235}_{92}U$, $N_A = 6{,}02\times \times10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Энергия, которую можно получить при образовании данной массы ${}^{235}_{92}U$, равна $W = QN$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{m}{\mu} N_A Q = 2{,}28$ кВт·ч.

22.42. Какая масса урана $^{235}_{92}U$ расходуется за время $t = 1$ сут на атомной электростанции мощностью $P = 5000$ кВт? К.п.д. принять равным 17%. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ.

Решение:

Число распавшихся ядер урана $n = \frac{m}{\mu} N_A$. Полная энергия, выделяемая при распаде массы m урана, $Q_{полн} = Q_0 n = = Q_0 \frac{m}{\mu} N_A$. Тогда полезная энергия $Q_{полез} = \eta Q_{полн} = \eta Q_0 \times \times \frac{m}{\mu} N_A$. Мощность атомной электростанции $p = \frac{Q_{полез}}{t} = = \frac{\eta Q_0 m N_A}{\mu t}$. Отсюда масса распавшегося урана за время t

$m = \frac{p \mu t}{\eta Q_0 N_A} = 31$ г.

22.43. При взрыве водородной бомбы протекает термоядерная реакция образования гелия из дейтерия и трития. Написать уравнение реакции. Найти энергию Q, выделяющуюся при этой реакции. Какую энергию W можно получить при образовании массы $m = 1$ г гелия?

Решение:

Запишем уравнение реакции: $^2_1H + ^3_1H \to ^4_2He + ^1_0n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$.

В нашем случае $\sum m_1 = m_{^2_1H} + m_{^3_1H} = 5.0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{^4_2He} + m_{^1_0n} = 5{,}0113$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 17{,}66$ МэВ. Энергия, которую можно получить при образовании данной массы ^4_2He (см. задачу 22.41), равна $W = \frac{m}{M} N_A Q = 11{,}8 \cdot 10^4$ кВт·ч.

§ 23. Элементарные частицы. Ускорители частиц

В задачах данного раздела используются данные таблиц 3, 21, 22 приложения.

23.1. В ядерной физике принято число заряженных частиц, бомбардирующих мишень, характеризовать их общим зарядом, выраженным в микроампер-часах (мкА·ч). Какому числу заряженных частиц соответствует общий заряд $q = 1$ мкА·ч? Задачу решить для: а) электронов; б) α-частиц.

Решение:

а) Заряд электрона равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \frac{q}{e} = 2{,}25 \cdot 10^{16}$ электронов. б) Заряд α-частицы равен $2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \frac{q}{2e} = 1{,}125 \cdot 10^{16}$ α-частиц.

23.2. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу m ядер замедляющего вещества.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ — начальная кинетическая энергия нейтрона, $W_{к1}$ — его кинетическая энергия после взаимодействия с ядром, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющего вещества. По условию $\frac{W_{к0}}{W_{к1}} = k = 1{,}4$, отсюда $W_{к0} = kW_{к1}$ — (2) и после подстановки (2) в (1) получаем $(k-1)W_{к1} = W_{к2}$ — (3). По закону сохранения импульса $p_0 = p_2 - p_1$ — (4), где p_0 — начальный импульс нейтрона, p_1 — его импульс после взаимодействия с ядром, p_2 — импульс ядра

замедляющего вещества. Кинетическая энергия и импульс связаны между собой соотношением $W_к = \frac{p^2}{2m}$ — (5). Подставляя (5) в (2), получаем $p_0^2 = kp_1^2$ или $p_0 = \sqrt{k}\,p_1$ — (6). Подставляя (6) в (4), получаем $\frac{(k-1)p_1^2}{m_n} = \frac{p_2^2}{m}$ — (8), где $m_n = 1{,}675^{-27}$ кг — масса нейтрона. Решая совместно уравнения (7) и (8), находим массу ядер замедляющего вещества $m = \frac{(\sqrt{k}+1)^2 m_n}{k-1} = 19{,}96 \cdot 10^{-27}$ кг $= 12{,}02$ а.е.м. По таблице Менделеева находим, что это углерод ${}^{12}_{6}C$, следовательно, замедлителем является графит.

23.3. Какую часть первоначальной скорости будет составлять скорость нейтрона после упругого центрального столкновения с неподвижным ядром изотопа ${}^{23}_{11}Na$?

Решение:

Масса ядер замедляющего вещества (см. задачу 23.2) равна $m = \frac{(\sqrt{k}+1)^2 m_n}{k-1}$ — (1), где $k = \frac{W_{к0}}{W_{к1}}$ — (2), $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно начальная и кинетическая энергии бомбардирующего натрия, $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг — масса нейтрона. Поскольку кинетическая энергия равна $W_к = mv^2/2$ — (3), то, подставляя (3) в (2), получаем $k = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ или $\frac{v_0}{v} = \sqrt{k}$ — (4). Из формулы (1) находим $\sqrt{k} = \frac{m+m_n}{m-m_n}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{v}{v_0} = \frac{m-m_n}{m+m_n} = 0{,}916 \cdot 100\% = 91{,}6\%$.

23.4. Для получения медленных нейтронов их пропускают через вещества, содержащие водород (например, парафин). Какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0 может передать: а) протону (масса m_0); б) ядру атома свинца (масса $207m_0$)? Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному столкновению.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно кинетическая энергия нейтрона до и после взаимодействия с ядром замедлителя, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющегося вещества. Если $\frac{W_{к0}}{W_{к1}} = k$ — (2), то из (1) и (2) следует, что $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} = 1 - \frac{1}{k}$ — (3). Поскольку (см. задачу 23.3) $\sqrt{k} = \frac{m + m_0}{m - m_0}$, то $k = \left(\frac{m + m_0}{m - m_0}\right)^2$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} = 1 - \left(\frac{m - m_0}{m + m_0}\right)^2$. а) Для протона $m \approx m_0$, поэтому $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} \approx 1 \cdot 100\% = 100\%$. б) Для ядра атома свинца $m = 207m_0$, поэтому $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} = 0{,}0191 \cdot 100\% = 19{,}1\%$.

23.5. Найти в предыдущей задаче распределение энергии между нейтроном и протоном, если столкновение неупругое. Нейтрон при каждом столкновении отклоняется в среднем на угол $\varphi = 45°$.

Решение:

Направление скорости $\vec{v}$ нейтрона и скорости частиц $\vec{v}_1$ показано на рисунке. Скорости частиц одинаковы и равны $v' = \frac{v\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, энергия распределится между нейтроном и протоном в среднем поровну.

23.6. Нейтрон, обладающий энергией $W_0 = 4{,}6$ МэВ, в результате столкновений с протонами замедляется. Сколько столкновений он должен испытать, чтобы его энергия уменьшилась до $W = 0{,}23$ эВ? Нейтрон отклоняется при каждом столкновении в среднем на угол $\varphi = 45°$.

Решение:

После каждого столкновения кинетическая энергия нейтрона становится в два раза меньше (см. задачу 23.5). Тогда после n столкновений энергия нейтрона $W = \left(\frac{1}{2}\right)^n W_0$. Отсюда $n \lg 2 = \lg\left(\frac{W_0}{W}\right) = \lg\left(2 \cdot 10^7\right)$; $n = \frac{\lg\left(2 \cdot 10^7\right)}{\lg 2} = 24$.

23.7. Поток заряженных частиц влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3$ Тл. Скорость частиц $v = 1{,}52 \cdot 10^7$ м/с и направлена перпендикулярно к направлению поля. Найти заряд q каждой частицы, если известно, что на нее действует сила $F = 1{,}46 \cdot 10^{-11}$ Н.

Решение:

В однородном магнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца, которая равна $F_Л = qvB \sin\alpha$. По условию скорость частиц направлена перпендикулярно направлению поля, значит, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\alpha = 1$, а следовательно, $F_Л = qvB$. Отсюда заряд каждой частицы $q = \frac{F_Л}{vB} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

23.8. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл и движется по окружности с радиусом $R = 10$ см. Скорость частицы $v = 2{,}4 \cdot 10^6$ м/с. Найти для этой частицы отношение ее заряда к массе.

Решение:

В однородном магнитном поле на заряженную частицу действует сила Лоренца, которая (см. задачу 23.7) равна $F_Л = qvB$ — (1). Она является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_Л = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $qvB = m\frac{v^2}{R}$, откуда отношение заряда частицы к ее массе равно $\frac{q}{m} = \frac{v}{BR} = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

23.9. Электрон ускорен разностью потенциалов $U = 180$ кВ. Учитывая поправки теории относительности, найти для этого электрона массу m, скорость v, кинетическую энергию W и отношение его заряда к массе. Какова скорость v' этого электрона без учета релятивистской поправки?

Решение:

Электрон, ускоренный разностью потенциалов, обладает потенциальной энергией $W_п = eU$ — (1). По закону сохранения энергии $W_п = W_к$ — (2). Приравнивая правые части соотношений (1) и (2), получаем $eU = W_к$ — (3) или

$W_к = eU = 2{,}88 \cdot 10^{-14}$ Дж $= 1{,}8 \cdot 10^5$ эВ. Зависимость кинетической энергии электрона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (3), где $m_0 = 9{,}11 \times 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость электрона, c — скорость света. Из формулы (3) имеем $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0c^2}{W_к + m_0c^2}$ — (5). Зависимость массы электрона от скорости его движения дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (6). Подставляя (5) в (6), получаем $m = \frac{W_к + m_0c^2}{c^2}$ — (7), а затем, подставляя (3) в (7), окончательно находим массу электрона $m = \frac{eU + m_0c^2}{c^2} = 1{,}23 \cdot 10^{-30}$ кг. Кинетическая энергия электрона $W_к = \frac{mv^2}{2}$, откуда релятивистская скорость электрона $v' = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}52 \cdot 10^8$ м/с. Отношение заряда электрона к его массе равно $\frac{e}{m} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Реальное значение равно $\frac{e}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. С учетом погрешностей величину, полученную в данной задаче, можно считать допустимой.

23.10. Мезон космических лучей имеет энергию $W = 3$ ГэВ. Энергия покоя мезона $W_0 = 100$ МэВ. Какое расстояние l в атмосфере сможет пройти мезон за время его жизни τ по лабораторным часам? Собственное время жизни мезона $\tau_0 = 2$ мкс.

Решение:

Имеем $\dfrac{W}{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 30$, отсюда найдем $v = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с. Время жизни мезона по лабораторным часам $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 30\tau_0$. Расстояние, пройденное мезоном за это время, равно $l = v\tau = v \cdot 30\tau_0 \approx 18 \cdot 10^3$ м.

23.11. Мезон космических лучей имеет кинетическую энергию $W = 7m_0c^2$, где m_0 — масса покоя мезона. Во сколько раз собственное время жизни τ_0 мезона меньше времени его жизни τ по лабораторным часам?

Решение:

Зависимость кинетической энергии мезона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1). По условию кинетическая энергия мезона равна $W_к = 7m_0c^2$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $7m_0c^2 = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{1}{8}$ — (3). Время жизни мезона по лабораторным часам τ связано с его собственным временем жизни τ_0 соотношением $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\dfrac{\tau}{\tau_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (4).

Подставляя (3) в (4), получаем $\dfrac{\tau}{\tau_0} = 8$.

23.12. Позитрон и электрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала. Какова длина волны λ этих фотонов?

Решение:

Если электрон и позитрон образуют два фотона, то по закону сохранения энергии $2m_0c^2 + W_1 + W_2 = 2h\nu$, где $2m_0c^2$ — суммарная энергия покоя электрона и позитрона, W_1 и W_2 — кинетические энергии электрона и позитрона, $2h\nu$ — суммарная энергия образовавшихся фотонов. Поскольку по условию начальная энергия частиц W_1 и W_2 ничтожно мала, то энергия каждого из фотонов равна $h\nu = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ. Отсюда частота излучения фотона $\nu = \dfrac{m_0c^2}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\dfrac{m_0c}{h} = \dfrac{1}{\lambda}$, откуда длина волны фотонов $\lambda = \dfrac{h}{m_0c} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ м.

23.13. Электрон и позитрон образуются фотоном с энергией $h\nu = 2{,}62$ МэВ. Какова была в момент возникновения полная кинетическая энергия $W_1 + W_2$ позитрона и электрона?

Решение:

По закону сохранения энергии $h\nu = 2m_0c^2 + W_1 + W_2$. Энергия покоя каждой частицы $m_0c^2 = 0{,}51 \cdot 10^6$ эВ. Тогда $W_1 + W_2 = h\nu - 2m_0c^2 = 1{,}6 \cdot 10^6$ эВ.

23.14. Электрон и позитрон, образованные фотоном с энергией $h\nu = 5{,}7$ МэВ, дают в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, траектории с радиусом кривизны $R = 3$ см. Найти магнитную индукцию B поля.

Решение:
На электрон и позитрон в магнитном поле действует сила Лоренца, сообщая им нормальное ускорение, т. е. $qBv = \frac{mv^2}{R}$, откуда $B = \frac{mv}{qR}$ — (1). Согласно теории относительности импульс частицы $p = mv = \frac{1}{c}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $B = \frac{1}{cqR}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (3). Кинетическая энергия каждой частицы $W = \frac{h\nu - 2m_0c^2}{2} = 2{,}34$ МэВ (см. задачу 23.13). Подставляя числовые данные в (3), получим $B = 0{,}31$ Тл.

23.15. Неподвижный нейтральный π-мезон, распадаясь, превращается в два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого фотона. Масса покоя π-мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$, где m_0 — масса покоя электрона.

Решение:
Если неподвижный нейтральный π-мезон распадается на два фотона, то по закону сохранения энергии $m_0(\pi)c^2 = 2h\nu$ — (1). По условию масса покоя мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона. Подставляя (2) в (1), получаем $h\nu = 132{,}1m_0c^2 = 67{,}7$ МэВ.

23.16. Нейтрон и антинейтрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала.

Решение:
Энергия каждого из фотонов (см. задачу 23.12) равна $h\nu = m_0c^2 = 942$ МэВ.

23.17. Неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона. Масса покоя K^0-мезона $m_0(K^0) = 965m_0$, где m_0 — масса покоя электрона; масса каждого π-мезона $m(\pi) = 1{,}77m_0(\pi)$, где $m_0(\pi)$ — его масса покоя. Найти массу покоя $m_0(\pi)$ π-мезонов и их скорость v в момент образования.

Решение:

Если неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона, то по закону сохранения энергии $m_{0K^0}c^2 - 2m_{0\pi}c^2 = 2(m_\pi - m_{0\pi})c^2$ — (1). По условию задачи масса покоя K^0-мезона $m_{0K^0} = 965m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, а масса каждого π-мезона $m_\pi = 1{,}77m_{0\pi}$ — (3), где $m_{0\pi}$ — его масса покоя. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $965m_0c^2 - 2m_{0\pi}c^2 = 2 \cdot 1{,}77m_{0\pi}c^2$. Отсюда масса покоя π-мезонов равна $m_{0\pi} = \frac{965m_0}{2 \cdot 1{,}77} = 272{,}59m_0 = 2{,}48 \cdot 10^{-28}$ кг. Из теории относительности известно, что кинетическая энергия тела зависит от скорости его движения следующим образом: $W_к = m_{0\pi}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (4), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (5) — относительная скорость. С другой стороны, $W_к = m_\pi c^2$, или, учитывая (3), $W_к = 1{,}77m_{0\pi}c^2$ (6). Приравнивая правые части уравнений (4) и (6), получим $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = 1{,}77$. Отсюда относительная скорость π-мезонов равна $\beta = 0{,}932$. Тогда, учитывая (5), скорость π-мезонов в момент образования будет равна $v = 0{,}932 \cdot c = 2{,}79 \cdot 10^8$ м/с.

23.18. Вывести формулу, связывающую магнитную индукцию B поля циклотрона и частоту ν приложенной к дуантам разности потенциалов. Найти частоту приложенной к дуантам разности потенциалов для дейтонов, протонов и α-частиц. Магнитная индукция поля $B = 1{,}26$ Тл.

Решение:

На заряженную частицу в циклотроне действует сила Лоренца $F_Л = qvB\sin\alpha$, где q — заряд частицы, B — индукция магнитного поля. Т. к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = 1$, отсюда $F_Л = qvB$. Она является центростремительной силой и сообщает частице центростремительное ускорение $a_{ц.с.} = \frac{v^2}{R}$. По второму закону Ньютона $F_Л = ma_{ц.с.} = m\frac{v^2}{R}$. Приравняем правые части уравнений $qvB = \frac{mv^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{qB}$ — радиус окружности циклотрона. Период обращения циклотрона $T_ц = \frac{L}{v}$, где $L = 2\pi R = \frac{2\pi mv}{qB}$ — длина окружности циклотрона. $T_ц = \frac{2\pi m}{qB}$. Тогда частота $\nu_ц = \frac{1}{T_ц} = \frac{qB}{2\pi m}$. Для того чтобы частица непрерывно ускорялась, необходимо, чтобы она попадала в ускоряющий промежуток между дуантами в тот момент, когда электрическое поле изменит свою полярность, т. е. частота изменения полярности ускоряющего электрического поля должна совпадать с

частотой циклотрона: $\nu = \nu_ц = \frac{qB}{2\pi m}$ — условие синхронизации. Подставляя числовые данные, получим $\nu_D = 9{,}7$ МГц; $\nu_p = 19{,}4$ МГц; $\nu_\alpha = 9{,}7$ МГц.

23.19. Вывести формулу, связывающую энергию W вылетающих из циклотрона частиц и максимальный радиус кривизны R траектории частиц. Найти энергию W вылетающих из циклотрона дейтонов, протонов и α-частиц, если максимальный радиус кривизны $R = 48{,}3$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 12$ МГц.

Решение:

Радиус окружности циклотрона и частота изменения полярности ускоряющего электрического поля (см. задачу 23.18) равны: $R = \frac{mv}{qB}$ и $\nu = \frac{qB}{2\pi m}$, отсюда $qB = 2\pi m\nu$; $R = \frac{mv}{2\pi m\nu} = \frac{v}{2\pi\nu}$. Отсюда скорость вылетающих из циклотрона частиц $v = 2\pi\nu R$, а их кинетическая энергия $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m4\pi^2\nu^2R^2}{2} = 2\pi^2 m\nu^2R^2$. Подставляя числовые данные, получим $W_D = 13{,}8$ МэВ; $W_p = 6{,}9$ МэВ; $W_\alpha = 27{,}6$ МэВ.

23.20. Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 35$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 13{,}8$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, и максимальную энергию W вылетающих протонов.

Решение:

Частота приложенной к дуантам циклотрона разности потенциалов (см. задачу 23.18) определяется соотношением $\nu = \frac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, равна $B = \frac{2\pi m \nu}{q}$. Для протона $m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг и $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, поэтому $B = 0{,}9$ Тл. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$. Подставляя значения для протона, получаем $W = 4{,}8$ МэВ.

23.21. Решить предыдущую задачу для: а) дейтонов, б) α-частиц.

Решение:

Индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона (см. задачу 23.20), равна $B = \frac{2\pi m \nu}{q}$. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$. а) Для дейтонов $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 3{,}346 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 9{,}6$ МэВ. б) Для α-частиц $q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 6{,}692 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 19{,}25$ МэВ.

23.22. Ионный ток в циклотроне при работе с α-частицами $I = 15$ мкА. Во сколько раз такой циклотрон продуктивнее массы $m = 1$ г радия?

Решение:

По определению ионный ток в циклотроне $I = \frac{q}{T} = qn$ — (1), где $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд α-частицы, T — период

обращения α-частицы в циклотроне, n — частота излучения α-частиц циклотроном. Активность излучения α-частиц радием равна $a = \lambda N$ — (2), где $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3) — число делящихся ядер радия, $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Период полураспада радия равен $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда постоянная распада $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (2), получим $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (5). Из формулы (1) $n = \frac{I}{q}$ — (6). Разделив (6) на (5), окончательно находим $\frac{n}{a} = \frac{I \mu T_{1/2}}{q m N_A \ln 2} = 1270$.

23.23. Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 50$ см; магнитная индукция поля $B = 1$ Тл. Какую постоянную разность потенциалов U должны пройти протоны, чтобы получить такое же ускорение, как в данном циклотроне?

Решение:

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 13.18), равна $\nu = \frac{Be}{2\pi m}$ — (1), а энергия вылетающих из циклотрона протонов (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{B^2 e^2 R^2}{2m}$ — (3). Потенциальная энергия протонов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, равна $W_п = eU$ — (4). Чтобы протоны получили такое же ускорение, как в циклотроне, по закону сохранения энергии необходимо, чтобы $W_п = W$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $U = \frac{B^2 e R^2}{2m} = 11{,}98$ МВ.

23.24. Циклотрон дает дейтоны с энергией $W = 7$ МэВ. Магнитная индукция поля циклотрона $B = 1{,}5$ Тл. Найти минимальный радиус кривизны R траектории дейтона.

Решение:

Энергия дейтонов, вылетающих из циклотрона (см. задачу 23.23), равна $W = \frac{B^2 q^2 R^2}{2m}$. Отсюда максимальный радиус кривизны траектории дейтона равен $R = \frac{\sqrt{2mW}}{Bq} = 36$ см.

23.25. Между дуантами циклотрона радиусом $R = 50$ см приложена переменная разность потенциалов $U = 75$ кВ с частотой $\nu = 10$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля циклотрона, скорость v и энергию W вылетающих из циклотрона частиц. Какое число оборотов n делает заряженная частица до своего вылета из циклотрона? Задачу решить для дейтонов, протонов и α-частиц.

Решение:

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 23.18), равна $\nu = \frac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда магнитная индукция поля циклотрона равна $B = \frac{2\pi m \nu}{q}$ — (1). Энергия вылетающих из циклотрона частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$ — (2). Из теории относительности известно, что кинетическая энергия частицы

зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $2\pi^2 \nu^2 R^2 = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\beta = \frac{2\pi \nu R\sqrt{\pi^2 \nu^2 R^2 + c^2}}{2\pi^2 \nu^2 R^2 + c^2}$ — (4). С другой стороны, относительная скорость $\beta = \frac{u}{c}$ — (5). Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), находим скорость частиц $u = \frac{2\pi \nu R c\sqrt{\pi^2 \nu^2 R^2 + c^2}}{2\pi^2 \nu^2 R^2 + c^2}$ — (6). При каждом полном обороте заряженная частица проходит дважды расстояние между дуантами и, следовательно, дважды получит добавочный импульс. Поэтому при n оборотах заряженная частица приобретает энергию, эквивалентную ускоряющему потенциалу, $U' = 2nU$, где U — разность потенциалов, приложенная между дуантами. Отсюда $n = \frac{U'}{2U}$ — (7). Подставляя значения в формулы (1), (2), (6) и (7), получаем следующие числовые значения: а) Для дейтонов: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 10{,}2$ МэВ; $u_1 = 3{,}13 \cdot 10^7$ м/с; $n = 68$. б) Для протонов: $B_1 = 0{,}65$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13 \cdot 10^7$ м/с; $n = 34$. в) Для α-частиц: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13 \cdot 10^7$ м/с; $n = 68$.

23.26. До какой энергии W можно ускорить α-частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m - m_0}{m_0}$ не должно превышать 5%?

Решение:

Из теории относительности известно, что изменение массы частицы на Δm соответствует изменению ее энергии на $\Delta W = c^2 \Delta m$ — (1). По условию задачи относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0} \le 0{,}05$ — (2). Считая начальную энергию α-частицы равной нулю, можно предположить, что $W_{max} = \Delta W$ — (3). В этом случае из формулы (2) изменение массы α-частицы равно $\Delta m = 0{,}05 m_0$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (1), получаем $W_{max} = 0{,}05 m_0 c^2 = 187$ МэВ.

23.27. Энергия дейтонов, ускоренных синхротроном, $W = 200$ МэВ. Найти для этих дейтонов отношение $\frac{m}{m_0}$ (где m — масса движущегося дейтона и m_0 — его масса покоя) и скорость v.

Решение:

Считая начальную энергию дейтонов равной нулю (см. задачу 23.26), можно предположить, что $W = c^2 \Delta m$ — (1), где $\Delta m = m - m_0$ — (2) — изменение массы дейтона, $m_0 = 2{,}0141$ а.е.м. — его масса покоя. Подставляя (2) в (1), получаем $W = c^2 (m - m_0)$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} = 1{,}1$. Из теории относительности известно, что масса дейтона зависит от скорости его движения следующим образом $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость дейтона. Решая совместно уравнения (3) и (4), получаем $v = \frac{c\sqrt{(m/m_0)^2 - 1}}{m/m_0} = 1{,}3 \cdot 10^8$ м/с.

23.28. В фазотроне увеличение массы частицы при возрастании ее скорости компенсируется увеличением периода ускоряющего поля. Частота разности потенциалов, подаваемой на дуанты фазотрона, менялась для каждого ускоряющего цикла от $\nu_0 = 25$ МГц до $\nu = 18{,}9$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля фазотрона и кинетическую энергию W вылетающих протонов.

Решение:

Имеем $B = \frac{2\pi m_0 \nu_0}{q} = \frac{2\pi m \nu}{q} = 1{,}62$ Тл. Поскольку $\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то $W = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \frac{m_0 c^2 (\nu_0 - \nu)}{\nu} = 300$ МэВ.

23.29. Протоны ускоряются в фазотроне до энергии $W = 660$ МэВ, α-частицы — до энергии $W = 840$ МэВ. Для того чтобы скомпенсировать увеличение массы, изменялся период ускоряющего поля фазотрона. Во сколько раз необходимо было изменить период ускоряющего поля фазотрона (для каждого ускоряющего цикла) при работе: а) с протонами; б) с α-частицами?

Решение:

В фазотроне при ускорении релятивистских частиц, когда их скорость приближается к скорости света, их масса заметно возрастает. Следовательно, возрастает и период обращения частицы. Чтобы сохранить синхронизацию, увеличивают период ускоряющего поля фазотрона. Начальный и конечный периоды можно найти аналогично, как в циклотроне (см. задачу 12.18): $T_0 = \frac{2\pi m_0}{qB}$; $T = \frac{2\pi m}{qB}$, где m_0 — масса покоя, m — конечная масса. $\frac{T}{T_0} = \frac{2\pi m}{qB} \frac{qB}{2\pi m_0} = \frac{m}{m_0}$. Релятивистская энергия частицы

$\varepsilon = mc^2$, где c — скорость света. Энергия покоя $\varepsilon_0 = m_0 c^2$. По закону сохранения энергии разность начальной и конечной энергий составит кинетическая энергия, полученная частицей при ускорении фазотроном, $W = \varepsilon - \varepsilon_0 = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2$, отсюда $m = \dfrac{W}{c^2} + m_0$. $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{W/c^2 + m_0}{m_0} = \dfrac{W}{c^2 m_0} + 1$. а) Для протона $W = W_p = 660 \times 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\dfrac{T}{T_0} = 1{,}7$. б) Для α-частицы $W = W_\alpha = 840 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}34 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\dfrac{T}{T_0} = 1{,}2$.

21. Массы некоторых изотопов, *а.е.м.*

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
$^{1}_{1}H$	1,00783	$^{9}_{4}Be$	9,01218	$^{30}_{14}Si$	29,97377
$^{2}_{1}H$	2,01410	$^{10}_{5}Be$	10,01294	$^{40}_{20}Ca$	39,96257
$^{3}_{2}He$	3,01605	$^{12}_{6}C$	12,0	$^{56}_{27}Co$	55,93984
$^{4}_{2}He$	3,01603	$^{13}_{7}N$	13,00574	$^{63}_{29}Cu$	62,92960
$^{6}_{3}Li$	4,00260	$^{17}_{7}N$	14,00307	$^{112}_{48}Cd$	111,90276
$^{7}_{3}Li$	6,01512	$^{23}_{12}Mg$	16,99913	$^{200}_{80}Hg$	199,96832
$^{7}_{3}Li$	7,01600	$^{23}_{12}Mg$	22,99413	$^{235}_{92}U$	235,04393
$^{7}_{4}Be$	7,01693	$^{24}_{12}Mg$	23,98504	$^{238}_{92}U$	238,05353
$^{8}_{4}Be$	8,00531	$^{27}_{13}Al$	26,98154		

22. Периоды полураспада некоторых радиоактивных элементов

$^{45}_{20}Ca$	164 сут	$^{226}_{88}Ra$	1590 лет
$^{90}_{38}Sr$	28 лет	$^{235}_{92}U$	$7{,}1 \cdot 10^{8}$ лет
$^{210}_{84}Po$	138 сут	$^{238}_{92}U$	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ лет
$^{222}_{86}Rn$	3,82 сут		

Периодическая система элементов Д. И. Менделеева

Период	Ряд	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			0
		Группы элементов										
1	1	H 1 1.0079 Водород										He 2 4.00260 Гелий
2	2	Li 3 6.941 Литий	Be 4 9.01218 Бериллий	B 5 10.81 Бор	C 6 12.011 Углерод	N 7 14.0067 Азот	O 8 15.9994 Кислород	F 9 18.99840 Фтор				Ne 10 20.179 Неон
3	3	Na 11 22.98977 Натрий	Mg 12 24.305 Магний	Al 13 26.98154 Алюминий	Si 14 28.086 Кремний	P 15 30.97376 Фосфор	S 16 32.06 Сера	Cl 17 35.453 Хлор				Ar 18 39.948 Аргон
4	4	K 19 39.098 Калий	Ca 20 40.08 Кальций	21 Sc 44.9559 Скандий	22 Ti 47.90 Титан	23 V 50.942 Ванадий	24 Cr 51.996 Хром	25 Mn 54.938 Марганец	26 Fe 55.847 Железо	27 Co 58.933 Кобальт	28 Ni 58.71 Никель	
	5	29 Cu 63.546 Медь	Zn 30 65.37 Цинк	Ga 31 69.72 Галлий	Ge 32 72.59 Германий	As 33 74.92 Мышьяк	Se 34 78.96 Селен	Br 35 79.90 Бром				Kr 36 83.80 Криптон
5	6	Rb 37 85.47 Рубидий	Sr 38 87.62 Стронций	39 Y 88.905 Иттрий	40 Zr 91.22 Цирконий	41 Nb 92.906 Ниобий	42 Mo 95.94 Молибден	43 Tc (99) Технеций	44 Ru 101.07 Рутений	45 Rh 102.905 Родий	46 Pd 106.4 Палладий	
	7	47 Ag 107.868 Серебро	48 Cd 112.40 Кадмий	In 49 114.82 Индий	Sn 50 118.69 Олово	Sb 51 121.75 Сурьма	Te 52 127.60 Теллур	I 53 126.904 Йод				Xe 54 131.30 Ксенон
6	8	Cs 55 132.905 Цезий	Ba 56 137.34 Барий	57* La 138.91 Лантан	72 Hf 178.49 Гафний	73 Ta 180.95 Тантал	74 W 183.85 Вольфрам	75 Re 186.2 Рений	76 Os 190.2 Осмий	77 Ir 192.2 Иридий	78 Pt 195.09 Платина	
	9	79 Au 196.967 Золото	80 Hg 200.59 Ртуть	Tl 81 204.37 Таллий	Pb 82 207.19 Свинец	Bi 83 208.98 Висмут	Po 84 (210) Полоний	At 85 (210) Астат				Rn 86 (222) Радон
7	10	Fr 87 (223) Франций	Ra 88 (226) Радий	89** Ac (227) Актиний	Ku 104 (260) Курчатовий							

* Лантаноиды

58 Ce 140.12 Церий	59 Pr 140.91 Празеодим	60 Nd 144.24 Неодим	61 Pm (145) Прометий	62 Sm 150.35 Самарий	63 Eu 151.96 Европий	64 Gd 157.25 Гадолиний	65 Tb 158.92 Тербий	66 Dy 162.50 Диспрозий	67 Ho 164.93 Гольмий	68 Er 167.26 Эрбий	69 Tu 168.93 Тулий	70 Yb 173.04 Иттербий	71 Lu 174.97 Лютеций

** Актиноиды

90 Th 232.038 Торий	91 Pa (231) Протактиний	92 U 238.03 Уран	93 Np (237) Нептуний	94 Pu (242) Плутоний	95 Am (243) Америций	96 Cm (247) Кюрий	97 Bk (247) Берклий	98 Cf (249) Калифорний	99 Es (254) Эйнштейний	100 Fm (253) Фермий	101 Md (256) Менделевий	102 (No) (256) (Нобелий)	103 Lr (257) Лоуренсий

IV. АТОМНАЯ ФИЗИКА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

ЗАДАЧИ

IV. 1.1 (20 баллов).

а) Почему при резерфордовском рассеянии α-частиц в тонкой золотой фольге пренебрегают влиянием электронов атома на α-частицу?

б) Объясните, почему при комптоновском рассеянии рентгеновских лучей не учитывают влияния ядер атомов.

IV. 1.2 (20 баллов). Оцените магнитное поле, действующее на протон в атоме водорода со стороны электрона, находящегося в состоянии $2p$.

IV. 1.3 (20 баллов). Ртутная лампа излучает 10^{18} фотонов в секунду на спектральной линии 2537 Å. Полагая, что плотность паров ртути в лампе мала и они находятся в тепловом равновесии при температуре $T = 300$ K, вычислите доплеровское уширение спектральной линии. Оцените ее естественную ширину. Какова мощность излучения лампы на этой спектральной линии?

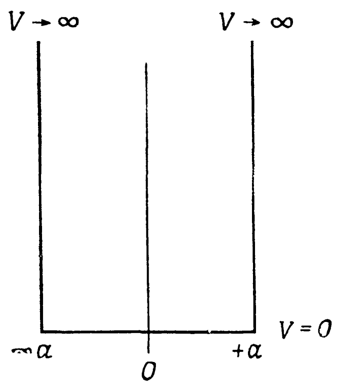
IV. 1.4 (20 баллов). Калий — щелочной металл с атомным номером $Z = 19$.

а) Какова конфигурация электронных оболочек этого атома в основном состоянии?

б) Какие квантовые числа L, S и J характеризуют основное состояние атома калия?

в) Опишите количественно зеемановское расщепление уровней атома, находящегося в основном и первом возбужденном состояниях.

IV. 1.5 (20 баллов). Рассмотрим прямоугольную потенциальную яму с бесконечно высокими стенками и шириной $2a$, как показано на рисунке



Волновая функция частицы, находящейся в этой потенциальной яме, записывается в виде

$$\psi = C\left(\cos\frac{\pi x}{2a} + \sin\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi x}{2a}\right) \quad \text{(внутри потенциальной ямы)},$$

$$\psi = 0 \quad \text{(вне потенциальной ямы)}.$$

а) Вычислите коэффициент C.

б) Какие значения можно получить при измерении полной энергии частицы и какова вероятность появления каждого из этих значений?

IV. 2.1 (15 баллов). Дайте числовые значения следующих физических постоянных (в общепринятых единицах):

а) массы нейтрона m_n,

б) постоянной Планка h,

в) постоянной тонкой структуры α,

г) комптоновской длины волны электрона λ_e,

д) классического радиуса электрона r_0,

е) времени жизни атома водорода в возбужденном $2p$-состоянии,

ж) магнитного момента протона μ_p,

з) времени жизни свободного нейтрона τ,

и) скорости электрона на первой боровской орбите v.

Ответы на п. «в», «г» и «д» выразите через фундаментальные постоянные e, $\hbar$, m_e и c.

IV. 2.2 (25 баллов).

а) Одномерное движение частицы массой m в поле с потенциалом $V(x)$ описывается стационарным уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

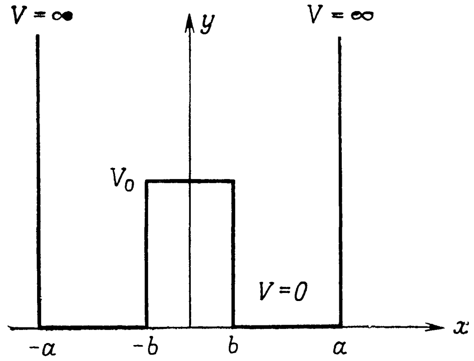
Предполагая $V(x) = V(-x)$, а решение $\psi(x)$ невырожденным, докажите, что $\psi(x)$ имеет определенную четность, т. е. что

$$\psi(x) = +\psi(-x) \text{ — четная функция}$$

или

$$\psi(x) = -\psi(-x) \text{ — нечетная функция.}$$

б) Рассмотрите движение частицы в потенциальном поле, показанном на следующем рисунке:



Постройте приближенную картину решений стационарного уравнения Шредингера, соответствующих двум самым низким собственным значениям энергии частицы в данном потенциальном поле. Обозначьте полученные решения через ψ_1 и ψ_2, а соответствующие им энергии через E_1 и E_2.

в) Частное решение полного уравнения Шредингера для приведенного выше потенциального поля можно представить в виде суперпозиции функций

$$\psi_1 e^{-i(E_1/\hbar)t} \quad \text{и} \quad \psi_2 e^{-i(E_2/\hbar)t}.$$

Получите волновой пакет ψ, который в момент времени $t = 0$ сосредоточен (почти) полностью в левой потенциальной яме. Опишите подробно дальнейшее движение пакета во времени.

IV. 2.3 (20 баллов). Позитрон имеет ту же массу, что и электрон, но положительный заряд и противоположный спиновый магнитный момент. Если в атоме водорода заменить протон позитроном, то получится атом позитрония.

а) Атом позитрония в основном состоянии имеет два очень близко расположенных энергетических уровня $^1S_0$ и $^3S_1$. Какой из них расположен ниже?

б) Какова энергия связи электрона в атоме позитрония в основном состоянии?

в) Предположим, что атом позитрония покоится и, находясь в состоянии $^1S_0$, аннигилирует с образованием двух γ-квантов. Определите энергию γ-квантов и относительные направления их разлета.

IV. 2.4 (15 баллов).

а) Вычислите значение матричного элемента

$$\langle l', m' | [L_+, L_-] | l, m \rangle.$$

б) Докажите, что

$$e^{i\sigma_y \theta/2} = \cos(\theta/2) + i\sigma_y \sin(\theta/2).$$

IV. 2.5 (25 баллов). На какую величину сдвинется энергетический уровень $1S$ атома водорода, если представить заряд протона не точечным, а равномерно распределенным по сферической оболочке радиусом 10^{-13} см? Воспользуйтесь первым приближением теории возмущений.

IV. 3.1 (5 баллов). Предположим, что заряд протона оказался вдвое большим. С каким зарядовым числом Z и массовым числом A существовало бы наиболее тяжелое устойчивое ядро?

IV. 3.2 (5 баллов). Оцените порядок величины магнитного поля, в котором обычное ядро вместо эффекта Зеемана давало бы эффект Пашена — Бака? (Такой эффект никогда не наблюдался.)

IV. 3.3 (5 баллов). Какой минимальной кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с тяжелым ядром образовался антинейтрон?

IV. 3.4 (5 баллов). Попадая в вещество, отрицательно заряженные мюоны очень быстро втягиваются на боровские орбиты вокруг ядер, а затем постепенно захватываются протонами атомных ядер (K-захват). Эта картина очень напоминает процесс β-распада, только протекающий в обратном порядке. Вероятность такого захвата в различных веществах довольно точно подчиняется следующему закону:

$$\text{Вероятность захвата мюона} = \text{const} \cdot Z^p.$$

Объясните, почему в этом законе показатель степени p должен быть равен 4.

IV. 3.5 (5 баллов). До какого значения энергии протонов их рассеяние на нейтронах можно считать изотропным?

IV. 3.6 (15 баллов). Определите (без подробных вычислений) энергетические уровни частицы массой m, движущейся в одномерном потенциальном поле

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ +\dfrac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

IV. 3.7 (5 баллов). Перечислите известные вам точные симметрии (законы сохранения). Приведите примеры приближенных симметрий.

IV. 3.8 (5 баллов). Имеется мезон, который может распадаться двумя возможными путями с образованием различных продуктов распада. Оба процесса характеризуются временами распада t_1 и t_2. Напишите формулу для неопределенности массы этого мезона.

IV. 3.9 (5 баллов). Каковы фазовая и групповая скорости волны де Бройля у свободного электрона, движущегося со скоростью V, определяемой по классической теории?

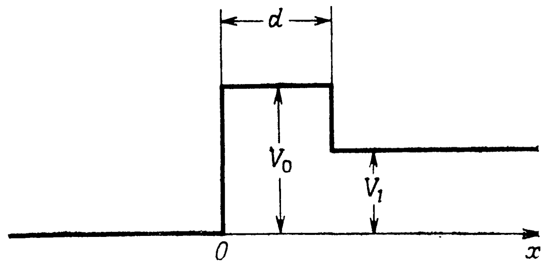
IV. 3.10 (10 баллов). Укажите, в каких областях трехмерного конфигурационного пространства волновая функция ψ должна обращаться в нуль для каждого из перечисленных ниже энергетических состояний атома водорода:
а) $1s$-состояние,
б) $2s$-состояние,
в) $2p$-состояние (в этом случае рассмотрите отдельно каждое из возможных состояний).

IV. 3.11 (10 баллов). Напишите простейшую формулу для энергии связи электрона, находящегося на K-оболочке, с ядром атома, имеющим заряд Z. Рассмотрите, как изменится (увеличится или уменьшится) эта энергия связи, если учесть
а) релятивистскую поправку,
б) эффект экранировки центрального поля остальными электронами,
в) конечный размер ядра.

IV. 3.12 (10 баллов). Найдите зависимость (с точностью до знака) потенциальной энергии взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними (r велико) для следующих конкретных случаев:
а) два нейтральных атома,
б) два ионизованных атома,
в) один нейтральный атом и один ион,
г) два нейтрона (учтите только ядерные силы),
д) два нейтрона (с учетом электромагнитных сил).

IV. 3.13 (15 баллов). Рассмотрим квантовомеханическую модель — однородную сферу, которая может свободно вращаться относительно своего центра. Предположим, что центр сферы совпадает с началом координат. Поскольку точки на поверхности сферы не отличимы друг от друга, квадрат модуля волновой функции $|\psi(\theta, \varphi)|^2$ не зависит от углов θ и φ. Определите возможные значения момента импульса сферы и покажите, как вы их получили.

IV. 4.1 (15 баллов). Одномерный потенциальный барьер имеет следующую форму:



Определите коэффициент прозрачности этого барьера для частиц массой m, движущихся к нему слева с энергией E ($V_1 < E < V_0$).

IV. 4.2 (5 баллов). Найдите собственные значения и нормированные собственные векторы следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. 4.3 (20 баллов). Предположим, что ψ является собственной функцией уравнения Шредингера для одной частицы. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{C}$, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \psi^*\psi\, dV\right) = -\int_V (\nabla\cdot\mathbf{C})\, dV.$$

а) Какой физический смысл имеет вектор $\mathbf{C}$?
б) Найдите выражение для $\mathbf{C}$ в явном виде.

IV. 4.4 (20 баллов).
а) Напишите волновую функцию для атома водорода в основном состоянии.
б) Получите выражение для вероятности найти частицу (электрон) в шаровом слое между r и $r + dr$.
в) При каком значении r эта вероятность максимальна?

IV. 4.5 (20 баллов). Дайте числовые значения (не более чем с трехкратной ошибкой) следующих физических величин:
а) расстояния между ядрами атомов в молекуле водорода;
б) длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности излучения абсолютно черного тела при температуре 3 К;

в) ширины запрещенной зоны, расположенной между валентной зоной и зоной проводимости, в чистом кристалле германия;
г) энергии, выделяемой при делении одного ядра урана-235;
д) частоты излучения в красной области спектра;
е) интервала времени, в течение которого свет проходит расстояние, равное диаметру одного протона;
ж) магнитного момента свободного электрона.

IV. 4.6 (20 баллов). Частица массой m находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с очень высокими («бесконечными») стенками, разделенными промежутком длиной a. Стенки ямы мгновенно и симметрично раздвигаются до расстояния $2a$.
а) Какова вероятность того, что частица в этой расширенной системе находится в основном состоянии?
б) Сохранится ли энергия частицы в результате раздвижения стенок?

IV. 5.1 (20 баллов). Кратко объясните:
а) Что такое принцип соответствия?
б) Что представляет собой закон Дюлонга и Пти?
в) Почему в спектрах поглощения щелочных металлов наблюдается только главная серия?
г) Почему g-фактор Ланде для всех синглетных уровней равен 1, а для всех S-уровней равен 2?
д) Назовите два экспериментальных факта, непосредственно подтверждающих корпускулярную природу электромагнитного излучения.

IV. 5.2 (20 баллов). Мю-мезон (мюон) и протон образуют водородоподобный атом. Масса мю-мезона в 210 раз превышает массу электрона.
а) Какой энергией обладает фотон, испускаемый таким атомом при переходе из первого возбужденного состояния в основное?
б) Чему равен радиус первой боровской орбиты у такого атома?
в) Какова скорость мю-мезона на n-й боровской орбите? n — главное квантовое число.

IV. 5.3 (20 баллов). Студенты, проходящие химический практикум, определяют присутствие малых примесей натрия в образце по характерному желтому окрашиванию (линия 5890 Å) пламени бунзеновской горелки, в котором сжигается образец. Этот эффект может показаться необъяснимым, так как температура пламени сравнительно невелика (2000 К). Проведите количественный расчет и покажите, что здесь нет ничего странного.

IV. 5.4 (20 баллов). Частица движется в одномерном потенциальном поле

$$V(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 0, \\ V_0, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Предположим, что она обладает энергией $E>V_0$ и движется слева направо.
а) Определите волновую функцию частицы. Нормировать ее не нужно.
б) Произведите нормировку волновой функции таким образом, чтобы она соответствовала единичному потоку движущихся частиц (одна частица в одну секунду).
в) Решите задачу «а» для случая $E<V_0$ и сделайте вывод из полученного результата.

IV. 5.5 (20 баллов). Состояние частицы массой m характеризуется (ненормированной) волновой функцией

$$\psi_k(r)=\frac{e^{-ikr}+be^{ikr}}{r},$$

где r — расстояние от начала координат.
а) Чему равна энергия частицы?
б) Является ли эта частица свободной? Если нет, то опишите, по возможности, потенциальное поле, в котором она находится.

IV. 6.1 (15 баллов).
а) В уравнения электродинамики входит уравнение непрерывности, которое связывает изменение плотности заряда во времени с дивергенцией плотности тока. Используйте аналогичное уравнение квантовой механики для того, чтобы получить выражение для потока вероятности в нерелятивистском случае.
б) Вычислите поток вероятности для ненормированной волновой функции $\psi=e^{-ikx}$.
в) Применимо ли понятие потока к действительной волновой функции?

IV. 6.2 (20 баллов). На лестнице стоит мальчик и с высоты H роняет вниз маленькие шарики массой m. Представим себе, что он целится идеально точно. Используя принцип неопределенности, оцените средний разброс шариков около мишени.

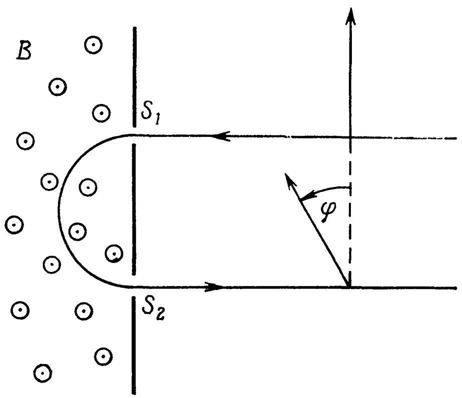
IV. 6.3 (20 баллов). Согласно закону Мозли, частота линии K_α рентгеновского излучения ν зависит от атомного номера элемента Z следующим образом:

$$\sqrt{\nu} = aZ - b.$$

а) Выразите приближенно коэффициент a через фундаментальные физические постоянные.
б) Объясните, почему частоты спектральных линий рентгеновского излучения изменяются от элемента к элементу в соответствии с таким простым законом, а частоты линий оптических спектров описываются более сложно.

IV. 6.4 (10 баллов). Частица с массой покоя m_1 налетает со скоростью v на покоящуюся частицу массой m_2 и поглощается ею. Определите массу покоя M и скорость V образовавшейся частицы.

IV. 6.5 (15 баллов). Электроны влетают через щель S_1 в область с однородным магнитным полем B и, описав в этой области полуокружность, покидают ее через щель S_2. При входе в эту область спины электронов ориентированы вверх ($\varphi = 0$), как показано на рисунке. Магнитный момент электронов $\mu = -(eg/2m_e c)\mathbf{s}$, где фактор $g = 2 + \alpha/\pi$ (здесь α — постоянная тонкой структуры).



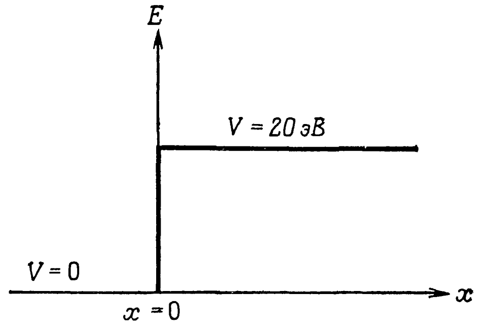
а) Определите частоту, с которой прецессирует спин электронов.
б) Вычислите циклотронную частоту электронов.
в) Под каким углом φ к первоначальному направлению ориентированы спины электронов при выходе из области с магнитным полем?

Замечание. Можно доказать, что квантовомеханическое выражение для изменения среднего значения спина электрона во вре-

мени аналогично выражению из классической динамики. Следовательно, здесь может быть полностью оправдан классический подход к решению задачи, и его нужно использовать.

IV. 6.6 (20 баллов).
а) Используя классические формулы для кинетической и потенциальной энергий электронно-протонной системы и квантовый постулат Бора, получите выражение для энергии уровней в атоме водорода.
б) Оцените разность энергий между четвертым и вторым уровнями.

IV. 7.1 (20 баллов). Электрон движется параллельно оси x слева направо в потенциальном поле $V = 0$ в области $x < 0$ и $V = 20$ эВ в области $x > 0$ (см. рисунок).



Кинетическая энергия электрона при $x = -\infty$ равна 10 эВ. Будем рассматривать движение электрона как одномерную плоскую волну.
а) Напишите уравнение Шредингера для областей $x < 0$ и $x > 0$;
б) постройте на графике решения этого уравнения для обеих областей;
в) чему равна дебройлевская длина волны электрона (в сантиметрах) при $x < 0$?
г) найдите граничные условия при $x = 0$;
д) что можно сказать о вероятности нахождения электрона вблизи некоторого положительного значения координаты x?

IV. 7.2 (20 баллов).
а) Рассмотрим *одномерный* гармонический осциллятор с характеристической частотой ν_0. Каковы собственное значение энергии и четность собственного состояния, соответствующие квантовому числу n?
Какие значения может принимать n?

1/28 Зак. 743

б) Волновую функцию *трехмерного* гармонического осциллятора можно записать в виде произведения трех собственных функций одномерного гармонического осциллятора, каждая из которых зависит от определенной декартовой координаты и соответствует квантовому числу n_x, n_y или n_z. Найдите энергию, четность и кратность вырождения четырех самых нижних *отдельных групп* энергетических уровней.

в) Задачу о трехмерном гармоническом осцилляторе можно решить и в сферических координатах. Несмотря на использование других собственных функций, собственные значения энергии окажутся *теми же самыми*. На основе своих знаний о четности и вырождении различных состояний установите, какому значению орбитального квантового числа l соответствует каждая группа уровней, о которых говорилось в п. «б».

IV. 7.3 (20 баллов). Свободный атом углерода имеет четыре электрона в s-состояниях и два электрона в p-состояниях.

а) Определите, пользуясь принципом Паули, число разрешенных состояний для последней пары электронов.

б) В предположении LS-связи квантовые числа для суммарного полного момента **J**, суммарного орбитального момента $L^2 = (l_1 + l_2)^2$ и суммарного спинового момента $S^2 = (s_1 + s_2)^2$ получаются «хорошими» [1]). Определите наборы квантовых чисел J, L и S для p-состояний обоих электронов и вычислите их мультиплетность.

в) Сложите мультиплетности термов, найденных в п. «б», и *убедитесь*, что полученный результат в точности совпадает с полученным в п. «а».

IV. 7.4 (20 баллов). Атомный номер натрия равен 11.

а) Какова электронная конфигурация этого атома в основном состоянии? (Используйте стандартное символическое обозначение, которое показывает распределение электронов атома по различным состояниям.)

б) Обозначьте основное состояние атома, как принято в спектроскопии. (Примером может служить обозначение 5^3F_2.)

в) Самая низкочастотная линия в спектре поглощения натрия представляет собой дублет. Какие спектроскопические обозначения следует приписать соответствующей паре возбужденных энергетических уровней, на которые переходит атом в процессе поглощения.

[1]) «Хорошими» квантовыми числами называют те, которые определяют точно (или в некотором достаточно точном для рассматриваемой ситуации приближении) сохраняющиеся величины. — *Прим. ред.*

г) Чем можно объяснить расщепление на эти два энергетических уровня?

д) Суммарный полный момент атома J различен для этих двух уровней. Выше или ниже расположен уровень, соответствующий большему значению J?

е) Рассматриваемое расщепление на два уровня пропорционально средней величине r^n, где r — расстояние между валентным электроном и ядром атома. Вычислите наиболее простым путем значение n.

IV. 7.5 (20 баллов).

а) Выпишите все перестановочные соотношения для операторов момента импульса L_x, L_y, L_z и оператора L^2.

б) Пусть ψ_{lm} — собственная функция операторов L^2 и L_z, отвечающая их собственным значениям $\hbar^2 l(l+1)$ и $\hbar m$ соответственно. Докажите, что $\varphi = (L_x + iL_y)\psi_{lm}$ также является собственной функцией операторов L^2 и L_z, и найдите их собственные значения.

в) Покажите, что в случае $l = 0$ функция ψ_{lm}, рассматриваемая в п. «б», является также собственной функцией операторов L_x и L_y.

IV. 8.1 (15 баллов). Определив квантовые числа S, L и J, запишите в принятых спектроскопических обозначениях следующие состояния атомов:

а) основное состояние нейтрального атома бора (атомный номер $Z = 5$),

б) основное состояние однократно ионизованного атома натрия ($Z = 11$),

в) основное состояние двукратно ионизованного атома натрия,

г) первое возбужденное состояние однократно ионизованного атома натрия,

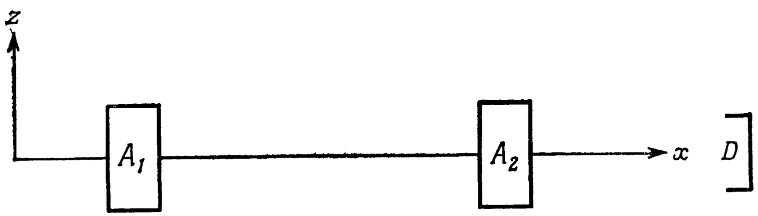
д) основное состояние молекулы водорода.

IV. 8.2 (10 баллов). Частица массой m находится в основном состоянии с энергией $E = -B$ в одномерной потенциальной яме шириной a. В решение уравнения Шредингера входят два параметра, имеющие размерность длины:

$$d_1 = a \quad \text{и} \quad d_2 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mB}}.$$

Ответьте качественно на следующий вопрос: до какого расстояния x можно считать отличной от нуля плотность вероятности для этой частицы? Для иллюстрации ваших результатов постройте график волновой функции.

IV. 8.3 (10 баллов). На рисунке представлена система из двух магнитов A_1 и A_2; каждый из них аналогичен магнитам, используемым в опытах Штерна и Герлаха. Через такую систему проходят атомы только в состояних с $S_z = +^1/_2$ (имеются в виду атомы калия, узкий пучок которых падает слева). Представим теперь, что между магнитами A_1 и A_2 на пучок атомов в течение одной микросекунды воздействует пространственно однородное магнитное поле **B**. Каковы должны быть величина и направление поля **B**, чтобы ни один атом из этого пучка не попал на детектор D?



IV. 8.4 (10 баллов). Оцените приближенно время жизни τ атома водорода в возбужденном $2p$-состоянии. Принимая во внимание принцип неопределенности, мы могли бы сказать, что энергетический уровень этого состояния имеет ширину[1] $\Delta E \approx \approx \hbar/\tau$. Однако в известной серии опытов, проведенных более двадцати лет назад, Лэмб и его сотрудники измерили энергию этого уровня с погрешностью примерно в тысячу раз меньшей, чем ΔE. Объясните этот парадокс.

IV. 8.5 (15 баллов). Приведите формулы и числовые значения в сантиметрах (с точностью до одной значащей цифры) для
а) радиуса первой боровской орбиты в атоме водорода,
б) радиуса первой боровской орбиты в атоме ртути,
в) комптоновской длины волны электрона,
г) комптоновской длины волны пи-мезона,
д) дебройлевской длины волны нейтрона с энергией 10 кэВ,
е) дебройлевской длины волны протона с энергией 10 ГэВ,
ж) комптоновской длины волны нейтрино (с указанием типов нейтрино),
з) радиуса наиболее тяжелого устойчивого ядра.

[1]) Здесь τ обозначает среднее время пребывания атома в возбужденном нестабильном состоянии, переход из которого является разрешенным. — *Прим. ред.*

IV. 8.6 (10 баллов).
а) Докажите, что для любого стационарного состояния квантовое среднее значение импульса **p** должно равняться нулю.
б) При каких условиях можно доказать, что квантовое среднее значение оператора положения **r** обращается в нуль?

IV. 8.7 (10 баллов).
а) Установите правила отбора для электрических дипольных переходов в атомах легких элементов.
б) Какие из них остаются в силе для тяжелых элементов?
в) для ядер?

IV. 8.8 (10 баллов). Расщепление линий в сверхтонкой структуре атома меньше расщепления в тонкой структуре примерно в m/MZ раз, где m — масса электрона, M — масса протона, а Z — атомный номер. Объясните, чем это вызвано.

IV. 8.9 (10 баллов). Рассмотрим функцию $f(x)$, определяемую степенным рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p},$$

где p — некоторое положительное целое число.
а) Какое суждение можно вынести о скорости возрастания этой функции (по сравнению со степенной функцией) при $x \to +\infty$?
б) Может ли эта функция служить решением какого-нибудь конкретного уравнения Шредингера, удовлетворяя одновременно условию нормировки

$$\int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1?$$

Дайте объяснение.

IV. 9.1 (5 баллов). В некотором циклотроне дейтроны ускоряются до энергии 16 МэВ. До какой энергии будут ускорены α-частицы в этом циклотроне, если заменить в нем дейтерий гелием?

IV. 9.2 (5 баллов). Какова плотность вещества в ядре атома в г/см^3?

IV. 9.3 (5 баллов). Протоны и α-частицы, обладающие одинаковыми кинетическими энергиями, проходят через золотую фольгу. Чему равно отношение их сечений кулоновского рассеяния (нерелятивистского)?

IV. 9.4 (5 баллов). Какая выделилась бы энергия (в джоулях), если бы метеор из антивещества массой 1 кг столкнулся с Землей?

IV. 9.5 (5 баллов). Определите энергию основного состояния атома, образованного из электрона и позитрона, которые связаны между собой силами кулоновского притяжения.

IV. 9.6 (5 баллов). На сколько компонент расщепляется спектральная линия атома натрия, соответствующая переходу $^2D_{3/2} \to {}^2D_{1/2}$ в случае нормального эффекта Зеемана?

IV. 9.7 (5 баллов). Частица массой m находится в потенциальной яме, имеющей форму полусферы радиусом R. Оцените приближенно кинетическую энергию частицы в основном состоянии. (Рассмотрите только нерелятивистский квантовый случай.)

IV. 9.8 (5 баллов). Определите границу коротковолнового рентгеновского излучения для трубки, находящейся под напряжением 25 кВ.

IV. 9.9 (5 баллов). Большое число идентичных фермионов находится в прямоугольном ящике объемом V, занимая низшие возможные уровни. Во сколько раз изменится максимальный импульс частиц, если удвоить объем ящика, а число частиц оставить неизменным?

IV. 9.10 (5 баллов). Укажите величину магнитного момента протона не более чем с двукратной ошибкой.

IV. 9.11 (5 баллов). Запишите в спектроскопических обозначениях основное состояние атома гелия.

IV. 9.12 (5 баллов). Пусть $\psi(r, t)$ — волновая функция частицы, движущейся в потенциальном поле $V = kr^2/2$. Рассмотрим другое состояние этой частицы с волновой функцией $\psi(\alpha r, t)$. Во сколько раз отличаются средние кинетическая и потенциальная энергии в этих двух случаях?

IV. 9.13 (10 баллов). Исходя из элементарной теории Бора:

а) вычислите магнитное поле в центре атома водорода, индуцированное электроном в основном состоянии;

б) оцените для этого состояния сверхтонкое расщепление энергетического уровня[1];

в) вычислите частоту радиоизлучения атомарного водорода, распределенного в космосе (в пренебрежении магнитным моментом электрона).

IV. 9.14 (15 баллов). Рассмотрим атом, состоящий из двух протонов и одного электрона.

[1]) Без учета аномального магнитного момента протона. — *Прим. ред.*

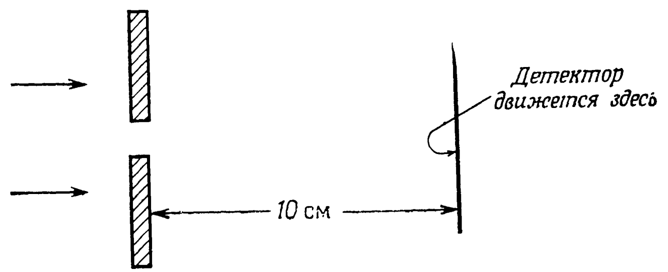
а) Предполагая, что расстояние R между протонами жестко зафиксировано и нам известна зависимость энергии электрона E_0 в основном состоянии от R, напишите выражения для $E_0(0)$ и $E_0(\infty)$ и оцените их численно.

б) Теперь предположите, что оба протона взаимодействуют друг с другом, и их «эффективная потенциальная энергия» $V(R)$ равна сумме $E_0(R)$ и энергии электростатического отталкивания. Определите, как зависит расстояние R между протонами в состоянии равновесия от $E_0(R)$.

в) Считая функцию $E_0(R)$ гладкой и монотонной в интервале между предельными значениями $E_0(0)$ и $E_0(\infty)$, постройте приближенно график зависимости $V(R)$.

г) До сих пор мы не учитывали собственного движения протонов. Охарактеризуйте качественно природу нижних энергетических подуровней основного состояния электрона и нижних возбужденных состояний обоих протонов.

IV. 9.15 (15 баллов). Параллельный пучок электронов, ускоренных в поле с разностью потенциалов 37 В, падает нормально на экран, в котором имеется щель шириной 1 Å (ясно, что такая щель нереальна и рассматривается абстрактная задача). За экраном, на расстоянии 10 см от него, перпендикулярно щели и направлению пучка перемещается детектор очень малых размеров ($\sim$1 Å).



а) Какова примерно ширина области, в которой детектор зарегистрирует электроны?

б) Какое распределение электронов будет регистрировать детектор, если в экране сделать еще одну такую же щель, параллельную первой и отстоящую от нее на расстояние 10 Å? Нарисуйте это распределение.

в) Предположим, что интенсивность электронного пучка уменьшилась настолько, что в любой момент времени в пространстве между экраном и плоскостью детектора имеется только один электрон. Произойдет ли изменение картины?

г) Какая наблюдалась бы картина, если бы одну из щелей перекрыли вторым (прозрачным для электронов) детектором, дающим нам информацию о том, через какую щель прошел каждый электрон?

IV. 10.1 (20 баллов).

а) Мюон — это частица с массой 206 m_e, заряд которой равен заряду электрона. Предположим, что отрицательно заряженный мюон оказался захваченным атомом фосфора ($Z = 15$) и стал последовательно переходить на все более низкие энергетические уровни. Определите энергию фотона, испускаемого атомом, при переходе мюона с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$.

б) Для точного определения массы мюона можно использовать результаты прецизионного измерения энергии фотона, излучаемого так, как описано в п. «а». Случайно оказалось, что энергия фотона лежит примерно в середине длинноволновой границы K-полосы поглощения у свинца ($Z = 82$). Чтобы доказать, что данное утверждение справедливо, вычислите приближенно энергию, соответствующую границе K-полосы поглощения для свинца.

в) Как, используя этот факт, вы произвели бы точное измерение энергии фотона и почему упомянутый случайный факт можно отнести к разряду «счастливых»?

IV. 10.2 (25 баллов).

а) Исходя из выражения для мощности излучения ускоренно движущегося электрона

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c^3} \text{ эрг/с},$$

получите формулу для сечения томсоновского рассеяния.

б) Опишите, какая существует связь между томсоновским и комптоновским рассеянием?

в) Считая, что γ-кванты с энергией 0,5 МэВ рассеиваются атомами водорода под углом 90°, вычислите энергию γ-квантов, рассеянных на электронах и протонах, а также оцените по порядку величины отношение их сечений рассеяния $(\gamma + e^-)/(\gamma + p)$.

IV. 10.3 (20 баллов). Напишите классическую формулу для мощности излучения ускоренно движущегося заряда (см. задачу IV. 10.2) и, применяя принцип соответствия, определите среднее время жизни простого гармонического осциллятора в возбужденном состоянии с высоко расположенными квантовыми уровнями энергии. Результат выразите через квантовое число уровня n, классическую круговую частоту ω, массу m и заряд e осциллирующей частицы.

IV. 10.4 (20 баллов). Согласно одной из простых моделей, атомное ядро из N нейтронов и Z протонов рассматривается как совокупность нуклонов в бесконечно глубоком (квадратном) потенциальном ящике.

а) Получите выражение для плотности энергетических уровней (т. е. для числа уровней, приходящихся на единичный энергетический интервал) в таком потенциальном ящике.

б) Чему равна максимальная кинетическая энергия отдельного нуклона, если ядро атома находится на самом нижнем энергетическом уровне?

в) Покажите, что при постоянной плотности ядра найденная выше максимальная энергия не зависит от числа нуклонов.

г) Как следует изменить рассматриваемую модель, чтобы учесть электрическое взаимодействие между протонами?

IV. 10.5 (15 баллов). Парамагнитная соль титана подвергается действию магнитного поля $B = 10\,000$ Гс в гелиевом криостате при температуре 1 К. Вычислите приближенно, какая часть от общего числа ионов Ti^{3+} $[3d^1; {}^2D_{3/2}]$ имеет ориентацию спина по направлению поля.

IV. 11.1 (20 баллов). Представьте себе метательное копье, которое, упираясь своим острием в неподвижную горизонтальную мраморную плиту, находится в «идеально сбалансированном» вертикальном положении. Используя принцип неопределенности, оцените время, через которое упадет это копье.

IV. 11.2 (20 баллов). В некоторых магнитных материалах могут существовать спиновые волны с частотой $\omega = Dk^2$, где D — постоянная, а k — волновое число (модуль волнового вектора), соответствующее данной спиновой волне. Энергетические уровни квантованы: $E = n\hbar\omega$.

а) Найдите зависимость фазовой v и групповой u скоростей этих волн от частоты ω.

б) Определите температурную зависимость интегральной по спектру плотности энергии U, связанной со спиновыми волнами, в состоянии теплового равновесия.

Замечание. Спиновые волны являются бозонами, энергия теплового движения которых описывается законом Планка для излучения абсолютно черного тела. Здесь так же, как и в теории свободного электронного газа, можно определить число частиц $N(k)$, у которых волновые числа попадают в интервал между k

и $k+dk$ (только для спиновых волн не нужно писать множитель 2, учитывающий поляризацию, т. е. спиновые состояния электронов или, например, фотонов).

IV. 11.3 (20 баллов). Коротко опишите такие положения, рассматриваемые в квантовой механике, как

а) физическая интерпретация волновой функции $\psi(x)$,
б) правила векторного сложения моментов импульса,
в) правила отбора, т. е. допустимые изменения квантовых чисел j, l и m для разрешенных излучательных электрических дипольных переходов,
в) соотношение, налагаемое на динамические величины G и F, когда они одновременно могут иметь точно определенные значения.

IV. 11.4 (5 баллов). Оцените кинетическую энергию нуклона в ядре атома углерода. Диаметр ядра равен примерно 3×10^{-15} м.

IV. 11.5 (5 баллов). Мощность излучения Солнца (с учетом излучения нейтрино) равна $4 \cdot 10^{26}$ Вт. Предположим, что вся энергия выделяется в результате ядерной реакции, протекающей по протонно-протонному циклу:

$$4\mathrm{p} \to \mathrm{He}^4 + 26\ \text{МэВ}.$$

Сколько рождается атомов гелия внутри Солнца в одну секунду?

IV. 11.6 (5 баллов). Какова (с точностью $\pm 30\%$) энергия фотонов в K-линиях характеристического рентгеновского спектра атома меди?

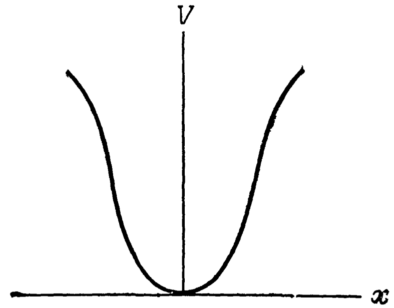
IV. 11.7 (5 баллов). Какой минимальной энергией должен обладать движущийся электрон, чтобы при его столкновении с другим покоящимся электроном образовалась пара электрон — позитрон:

$$e^- + e^- \to e^- + e^- + e^- + e^+?$$

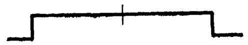
IV. 11.8 (5 баллов). Атом с атомным номером $Z = 26$ часто проявляет валентность $+2$. Обозначьте символически конфигурацию электронных оболочек атома для этого случая. [*Пример.* Для кислорода она записывается в виде $(1s^2,\ 2s^2,\ 2p^4)\,^3P_2$.]

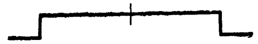
IV. 11.9 (5 баллов). Оцените зеемановское расщепление $\Delta\nu$ спектральных линий атома водорода в магнитном поле $B = 10\,000$ Гс.

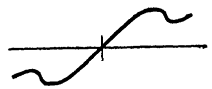
IV. 11.10 (10 баллов). Частица движется в одномерной симметричной потенциальной яме вида



Укажите, как повлияют малые возмущения этого поля (они изображены ниже графически) на поведение частицы в различных состояниях:

а)  — в основном состоянии,

б)  — в первом возбужденном состоянии,

в)  — в основном состоянии.

Для краткости ответов введем следующие обозначения: A — если энергия состояния возрастет в первом приближении теории возмущений, B — если возрастет во втором приближении, C — если уменьшится в первом приближении, D — если уменьшится во втором приближении и E — если не изменится в обоих приближениях.

IV. 12.1 (20 баллов). Рассмотрим систему из двух частиц, имеющих одинаковые массы M. Пусть эти частицы совершают одномерное движение и взаимодействуют между собой с силой $F = -k(x_1 - x_2)$, где x_1 и x_2 — координаты частиц. Предположим, что состояние этой системы описывается волновой функцией

$$\psi = \exp\left[i\,\frac{P(x_1+x_2)}{2\hbar}\right]\exp\left[-\frac{\sqrt{Mk/2}\,(x_1-x_2)^2}{2\hbar}\right].$$

а) Чему равно среднее значение полной энергии относительного движения частиц?
б) Определите среднее значение модуля импульса относительного движения этих частиц.

в) Если измерить относительный импульс p, то с какой вероятностью можно получить значение

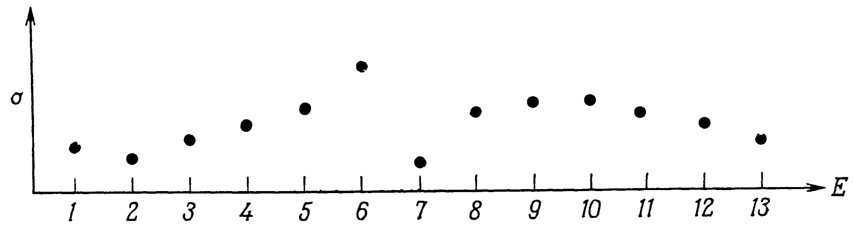
$$p < \sqrt{\hbar\sqrt{2Mk}}?$$

IV. 12.2 (10 баллов). При квантовомеханическом рассмотрении процесса рассеяния используют волновую функцию вида

$$\psi(r) \sim e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \to \infty.$$

а) Воспользуйтесь этой функцией ψ и получите выражения для падающего и рассеянного потоков вероятности.
б) Найдите соотношение, связывающее $f(\theta)$ и сечение рассеяния $\sigma(\theta)$.

IV. 12.3 (10 баллов).



На рисунке нанесены экспериментальные точки, отражающие, например, зависимость сечения рассеяния атома от энергии бомбардирующих электронов. Они нанесены довольно редко — нужно было получить самое общее представление о характере процесса. Предположим, что вам предоставлена возможность произвести пять дополнительных измерений. Какие значения координаты E вы бы приблизительно выбрали и почему?

IV. 12.4 (5 баллов). Счетчик регистрирует излучение долгоживущего радиоактивного препарата. Среднее показание его равно 10^4 импульсов в секунду. Какова вероятность того, что в течение одной секунды он зарегистрирует менее 9700 импульсов?

IV. 12.5 (5 баллов). Время жизни радиоактивного элемента в среднем составляет $\tau = 10$ дней. Какова вероятность того, что произвольный атом этого элемента распадается в течение пятого дня?

IV. 12.6 (5 баллов). Период полураспада свободного нейтрона ~ 12 мин. Какой энергией (в МэВ) должен обладать нейтрон, чтобы с вероятностью 50% он мог выжить, преодолев расстояние в 10 световых лет от звезды до Земли?

IV. 12.7 (3 балла). K-мезон распадается на два нейтральных пиона с нулевым спином. Каким спином обладает K-мезон?

IV. 12.8 (3 балла).
а) Какому расположению трех положительных зарядов на сфере отвечает состояние с наименьшей энергией?
б) В случае четырех зарядов?

IV. 12.9 (3 балла). Оцените высоту кулоновского барьера, преодолеваемого α-частицами у поверхности ядра U^{238} при его распаде.

IV.12.10 (3 балла). Какой радиус имела бы $1s$-оболочка воображаемого атома из нейтрона и электрона, связанных между собой силой только гравитационного взаимодействия?

IV. 12.11 (3 балла). Как зависит радиус K-оболочки атома от его атомного номера Z?

IV. 12.12 (3 балла). Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом квантовыми числами $n = 3$ и $l = 2$. На какие нижние уровни он может совершить излучательные переходы? (Рассмотрите только электрические дипольные переходы.)

IV. 12.13 (3 балла). Сколько электронов может уместиться на оболочке с главным квантовым числом $n = 5$?

IV.12.14 (3 балла). Рассмотрим атом из электрона и позитрона, находящийся в состоянии с орбитальным квантовым числом $l = 1$. Определите магнитный момент такого атома.

IV. 12.15 (3 балла). Определите собственные значения следующих четырех операторов, относящихся к спину электрона:

$$s_x,\ s_y,\ s_z \quad \text{и} \quad s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2.$$

IV. 12.16 (3 балла). Представьте себе, что электрон, помещенный в однородное магнитное поле, обладает только одной степенью свободы — спиновой. Напишите выражение для энергии электрона в различных состояниях в зависимости от магнитного поля B и фундаментальных констант e, $\hbar$, m и c.

IV. 12.17 (3 балла). Покоящаяся частица (например, нейтральный пион) массой m распадается на два фотона. Определите импульс p каждого фотона.

IV. 12.18 (3 балла). Фотон выбивает электрон из покоящегося атома водорода. При каком условии пренебрежение связью электрона с ядром и его движением не вызывает грубых ошибок при анализе этого процесса?

IV. 12.19 (3 балла). Атом водорода находится в состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 2$. Какому орбитальному квантовому числу ($l = 0$ или $l = 1$) соответствует в полуклассическом представлении орбита с бóльшим эксцентриситетом?

IV. 12.20 (3 балла). Какова (в электрон-вольтах) энергия связи электрона, находящегося в основном состоянии, с ядром однократно ионизованного атома гелия?

IV. 12.21 (3 балла). Назовите два важных механизма, которыми можно объяснить ослабление пучка фотонов с энергией 500 кэВ при его прохождении через вещество.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

IV. 1.1.

а) α-частицы обладают низкими энергиями, и размер ядра атома оказывается малым по сравнению с длиной волны де Бройля — Комптона для этих частиц. Следовательно, рассеяние частиц на ядрах является когерентным, причем сечение такого когерентного рассеяния на протонах пропорционально Z^2, где Z — число протонов в ядре. Рассеяние же α-частиц на электронах является некогерентным, поскольку радиус электронной орбиты намного превышает длину волны де Бройля для этих частиц. Сечение рассеяния α-частиц на электронах пропорционально Z. Отсюда видно, что рассеяние α-частиц на ядрах превалирует над рассеянием их на электронах. Более того, энергетические потери α-частиц при рассеянии на ядрах намного превышают их потери на ионизацию атома, поскольку энергия, передаваемая электрону при единичном акте рассеяния частицы на электроне, меньше $2m_e v_\alpha^2$. Наконец, угол рассеяния α-частиц на ядрах значительно больше, чем на электронах. Именно по этим основным причинам пренебрегают влиянием атомных электронов.

б) Сечение комптоновского рассеяния обратно пропорционально квадрату массы рассеивающей частицы. Следовательно,

$$\frac{\text{Сечение фотон-электронного рассеяния}}{\text{Сечение фотон-ядерного рассеяния}} = \left(\frac{m_N}{m_e}\right)^2 \gg 1,$$

откуда видно, что влияние ядер на рассеяние рентгеновских лучей пренебрежимо мало.

IV. 1.2. Магнитное поле в центре петли с током i вычисляем по формуле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a},$$

где a — радиус петли. Если электрон в атоме водорода находится в $2p$-состоянии, то радиус его орбиты a и скорость орбитального движения v равны [1])

$$a = n^2 a_0 \quad \text{и} \quad v = \alpha \frac{c}{n},$$

[1]) Оценка делается на основе модели атома Бора. — *Прим. ред.*

где a_0 — боровский радиус электронной орбиты в атоме водорода, α — постоянная тонкой структуры, а $n = 2$. Определяем ток i:

$$i = \frac{ev}{2\pi a} = \frac{e\alpha c}{2\pi n^3 a_0} = \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})(1/137)(3\cdot 10^8)}{(2)(3{,}14)(8)(0{,}5\cdot 10^{-10})} \approx 1{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{А}.$$

Следовательно,

$$B = \frac{(4\pi\cdot 10^{-7})(1{,}4\cdot 10^{-4})}{(2)(2\cdot 10^{-10})} \approx 0{,}43\ \text{Вб/м}^2.$$

IV. 1.3. В соответствии с классической волновой теорией относительное доплеровское уширение линии дается выражением

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega} \approx \frac{\sqrt{\langle V^2\rangle}}{c}, \qquad (1)$$

где в нашем случае $\sqrt{\langle V^2\rangle}$ — среднеквадратичная скорость атомов ртути, а

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 2\pi \frac{3{,}0\cdot 10^8}{2{,}537\cdot 10^{-7}} \approx 7{,}43\cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}.$$

Согласно закону равнораспределения,

$$\frac{m}{2}\langle V^2\rangle = \frac{kT}{2},$$

откуда

$$\sqrt{\langle V^2\rangle} = \sqrt{\frac{kT}{m}} = c\sqrt{\frac{kT}{mc^2}} = c\sqrt{\frac{(1{,}38\cdot 10^{-16})(3\cdot 10^2)}{(202\cdot 1{,}66\cdot 10^{-24})(9\cdot 10^{20})}} \approx$$

$$\approx 3{,}7\cdot 10^{-7}\ c.$$

Таким образом, из формулы (1) получаем

$$\Delta\omega_D = 3{,}7\cdot 10^{-7}\omega = (3{,}7\cdot 10^{-7})(7{,}42\cdot 10^{15}) \approx 3\cdot 10^9\ \text{с}^{-1}.$$

Используя соотношение неопределенностей, находим естественную ширину спектральной линии

$$\Delta\omega_N = \frac{1}{\tau},$$

где τ — среднее время перехода, ответственного за излучение. Для электрического дипольного перехода $\tau \approx 10^{-8}$ с, так что

$$\Delta\omega_N \approx 10^8\ \text{с}^{-1} \ll \Delta\omega_D.$$

Полная энергия излучения за одну секунду на данной спектральной линии вычисляется по формуле

$$W = n\hbar\omega = n\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

(n — число испускаемых фотонов в одну секунду). Таким образом, находим [1])

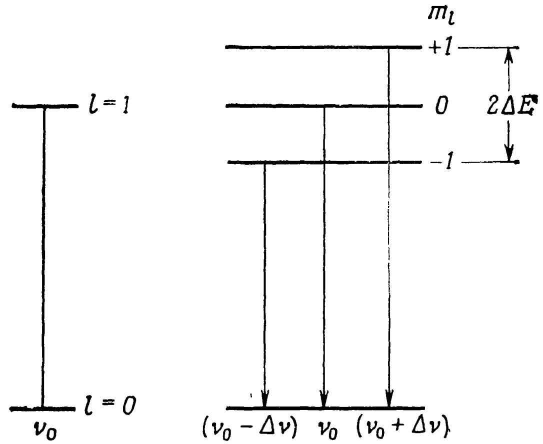
$$W = 10^{18}\frac{1973}{400} = 5\cdot 10^{18}\ \text{эВ} \approx 1\ \text{Дж}.$$

IV. 1.4.

а) $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^1$.

б) $L = 0$, $S = {}^1/_2$, $J = {}^1/_2$.

в)



В случае нормального эффекта Зеемана мы должны рассматривать только то расщепление энергетического уровня, которое отвечает изменениям квантового числа m_l, соответствующего z-компоненте орбитального момента количества движения. Для основного состояния $m_l = 0$, а для первого возбужденного состояния ($4p$) оно может принимать значения $m_l = -1$, 0 и $+1$. На рисунке приведена диаграмма энергетических уровней и показаны разрешенные переходы. Сдвиг уровней ΔE в магнитном поле B составляет

$$\Delta E = \pm\frac{eh}{4\pi mc}B.$$

Согласно правилу отбора для разрешенных переходов с магнитных подуровней, имеем $\Delta m_l = 0$ или ± 1. Им соответствует излучение с энергией

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{eh}{4\pi mc}B, \qquad \Delta m_l = +1,$$

$$h\nu = h\nu_0, \qquad \Delta m_l = 0,$$

$$h\nu = h\nu_0 - \frac{eh}{4\pi mc}B, \qquad \Delta m_l = -1.$$

[1]) Здесь в числителе дроби стоит значение $\hbar c$ в эВ·Å, а в знаменателе — длина волны в Å, деленная на 2π. — *Прим. перев.*

IV. 1.5.

а) Функция ψ должна быть нормированной. Из условия нормировки

$$\int_{-a}^{+a} \psi^2\, dx = 1$$

получаем

$$C^2 \int_{-a}^{+a} \left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16}\cos^2\left(\frac{3\pi x}{2a}\right)\right] dx = 1.$$

Здесь из подынтегрального выражения отброшены произведения с перекрестными членами, поскольку при интегрировании они дают нули. Что касается оставшихся членов, то мы имеем

$$2aC^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{32}\right) = 1,$$

откуда

$$C = 4\sqrt{\frac{1}{33a}}.$$

б) Подставляя поочередно каждый член волновой функции ψ в уравнение Шредингера, получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{4a^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \equiv E_1\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{9\pi^2}{a^2}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \equiv E_2\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \equiv E_3\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right),$$

Можно показать, что все члены волновой функции описывают собственные состояния системы, а E_1, E_2 и E_3 являются собственными значениями энергий, соответствующими этим состояниям. Поскольку исходная волновая функция представляет собой линейную комбинацию трех собственных функций, то возможные результаты измерений энергии записываются следующим образом:

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \quad E_2 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{и} \quad E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{8ma^2}.$$

Вероятность измерения каждого из этих значений пропорциональна квадрату веса соответствующего члена волновой функции, т. е.

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 1 : \frac{1}{16},$$

а так как $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, получаем

$$P_1 = \frac{16}{33}, \quad P_2 = \frac{16}{33} \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{1}{33}.$$

IV. 2.1.

а) $m_n = 939{,}5$ МэВ/c^2, или $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг,

б) $h = 6{,}626 \cdot 10^{-27}$ эрг·с,

в) $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$,

г) $\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = \frac{2\pi\hbar c}{m_e c^2} = \frac{2\pi\,(1973)}{5 \cdot 10^5} \approx 0{,}0243$ Å,

д) $r_0 = \frac{e}{m_e c^2} \approx 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ см,

е) 10^{-9} с,

ж) $\mu_p \approx \frac{2{,}7e\hbar}{2m_p c} \approx 8 \cdot 10^{-18}$ МэВ/Гс,

з) $\tau = 10^3$ с, поскольку $c\tau = 3{,}03 \cdot 10^{13}$ см,

и) $v = \alpha c \approx 2{,}2 \cdot 10^8$ см/с.

IV. 2.2.

а) В стационарном уравнении Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\,\psi(x) = E\psi(x) \tag{1}$$

изменим знак координаты x. Тогда получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(-x)\,\psi(-x) = E\psi(-x). \tag{2}$$

Считая $V(x) = V(-x)$, уравнение (2) можно переписать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + V(x)\,\psi(-x) = E\psi(-x). \tag{3}$$

Следовательно, $\psi(-x)$ также является решением уравнения Шредингера, соответствующим тому же значению энергии E. Но из условия задачи известно, что решение уравнения должно быть невырожденным; поэтому $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ должны быть линейно зависимыми. Если обе функции нормированы, то

$$\psi(x) = \pm\,\psi(-x); \tag{4}$$

здесь знак $\pm$ означает, что решение может иметь либо положительную, либо отрицательную четность.

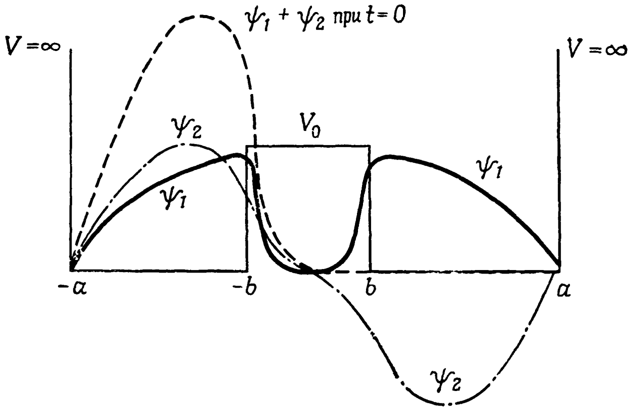
б) Заданное потенциальное поле $V(x)$ удовлетворяет условию $V(x) = V(-x)$. Значит, как было показано в предыдущем пункте, волновая функция имеет вполне определенную четность: либо $\psi(x) = +\psi(-x)$, либо $\psi(x) = -\psi(-x)$. Пусть

$$k_1 = \frac{n\pi}{2a} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mV_0 - k_1^2\hbar^2},$$

где n — целое число. Поскольку волновая функция должна обращаться в нуль при $x = \pm a$, то $\psi(x)$ ведет себя в области $-a < x < -b$ подобно функции $\sin k_1(x + a)$, а в области $b < x < a$ — подобно функции $\pm\sin k_1(a - x)$. В областях же $-b < x < 0$ и $0 < x < b$ она изменяется экспоненциально как $^{-k_2(b+x)}$ и $+(-)e^{-k_2(b-x)}$ соответственно[1]). Знак $+$ $(-)$ отвечает положительной (отрицательной) четности волновой функции. Основное состояние ψ_1 системы имеет положительную четность (четно), а возбужденное состояние ψ_2 — отрицательную четность (нечетно). Энергию системы в n-м состоянии можно вычислить по формуле

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

На рисунке построены волновые функции ψ_1, ψ_2 и $(\psi_1 + \psi_2)$ в зависимости от x для момента времени $t = 0$.



в) Запишем волновой пакет в виде

$$\psi = \psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}.$$

Поскольку в правой потенциальной яме функции ψ_1 и ψ_2 складываются в противофазе (т. е. гасят друг друга), в левой потенциальной яме складываются в фазе (т. е. усиливают друг друга), а в области $-b < x < b$ они пренебрежимо малы, то в

[1]) Можно порекомендовать читателю найти более корректное решение этой задачи. — *Прим. ред.*

момент времени $t = 0$ волновой пакет ψ почти полностью сосредоточен в левой потенциальной яме. С течением времени разность фаз между обеими составляющими волнового пакета изменяется как $(E_2 - E_1)t/\hbar$. Это означает, что волновой пакет постепенно перемещается в правую потенциальную яму, а затем возвращается обратно. Период таких колебаний равен

$$\frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1}.$$

IV. 2.3.

а) Ниже расположен уровень $^1S_0$, и вот почему. У позитрона направления магнитного и спинового моментов совпадают, а у электрона они противоположны друг другу. Из курса классической электродинамики нам известно, что система, состоящая из двух магнитных диполей, обладает минимальной потенциальной энергией, когда оба диполя ориентированы в одном направлении. Следовательно, в основном состоянии направления спинов позитрона и электрона противоположны.

б) Приведенная масса позитрония равна $\mu = {}^1/_2 m_e$. Следовательно,

Энергия связи $= (^1/_2)$ (*Энергия связи в атоме водорода*) $= 6{,}8$ эВ.

в) $E_\gamma = [2m_e -$ (*Энергия связи*)$]/2 \approx 0{,}5$ МэВ. Согласно законам сохранения импульса и момента количества движения, оба γ-кванта разлетаются в противоположных направлениях с противоположно направленными моментами количества движения.

IV. 2.4.

а)

$$\langle l', m' \,|\, [L_+, L_-] \,|\, l, m\rangle = \langle l', m' \,|\, [M_x + iM_y,\ M_x - iM_y] \,|\, l, m\rangle =$$
$$= \langle l', m' \,|\, 2(iM_yM_x - iM_xM_y) \,|\, l, m\rangle = \langle l', m' \,|\, 2i[M_y, M_x] \,|\, l, m\rangle =$$
$$= \langle l', m' \,|\, 2\hbar M_z \,|\, l, m\rangle = 2\hbar^2 m\delta(l - l')\,\delta(m - m').$$

б) Если x — некоторый оператор (матрица), то функции от этого оператора e^{ix}, $\cos x$ и $\sin x$ определяются с помощью формальных разложений в соответствующие ряды. Следовательно, мы можем написать ряд

$$e^{i\sigma_y\theta/2} = 1 + \left(i\sigma_y\frac{\theta}{2}\right) + \frac{(i\sigma_y\theta/2)^2}{2!} + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{(\sigma_y\theta/2)^2}{2!} + \frac{(\sigma_y\theta/2)^4}{4!} - \ldots +$$
$$+ i\left[\left(\sigma_y\frac{\theta}{2}\right) - \frac{(\sigma_y\theta/2)^3}{3!} + \frac{(\sigma_y\theta/2)^5}{5!} - \ldots\right].$$

Пользуясь тем, что $\sigma_y^2 = 1$, получаем

$$e^{i\sigma_y\theta/2} = 1 - \frac{(\theta/2)^2}{2!} + \frac{(\theta/2)^4}{4!} - \ldots + i\sigma_y\left[\frac{\theta}{2} - \frac{(\theta/2)^3}{3!} + \frac{(\theta/2)^5}{5!} - \ldots\right] = \cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2}.$$

IV. 2.5. Электрический потенциал внутри однородно заряженной сферы постоянен и равен $V = e/a$. Соответствующий потенциал точечного заряда изменяется как e/r. Определяем искомый сдвиг энергетического уровня:

$$\Delta E = \int \psi^* \left(\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{a}\right) \psi r^2\, dr\, d\Omega = \left(\frac{1}{a_0}\right)^3 4 \int_0^a e^{-2r/a_0} \left(\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{a}\right) r^2\, dr \approx$$

$$\approx \frac{2e^2a^2}{3a_0^3} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{2a_0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{4}{3}(13{,}6 \text{ эВ})\left(\frac{10^{-13}}{0{,}5 \cdot 10^{-8}}\right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-9} \text{ эВ}.$$

Отсюда мы видим, что энергетический уровень поднимется. Следовательно, энергия связи уменьшится.

IV. 3.1. Устойчивость ядра зависит от величины отношения r, определяемого выражением [1])

$$r = \frac{\text{Энергия кулоновского взаимодействия}}{\text{Поверхностная энергия ядра}}.$$

Поскольку радиус ядра $\sim A^{1/3}$, а площадь его поверхности $\sim A^{2/3}$, то

$$r \sim \frac{Z^2e^2/A^{1/3}}{A^{2/3}},$$

или

$$r = \text{const} \cdot \frac{Z^2e^2}{A}.$$

При малых значениях r ядро устойчиво. Оно распадается при $r > r_0$, где r_0 — критическое значение r, соответствующее ядру с $Z = Z_0 \approx 80$ и $A = A_0 \approx 200$. Для устойчивого ядра с удвоенным зарядом должно выполняться соотношение

$$r_0 \equiv \text{const} \cdot \frac{Z_0^2e^2}{A_0} \geqslant \text{const} \cdot \frac{Z^2(2e)^2}{A} \equiv \text{const} \cdot \frac{4Z^2e^2}{A}.$$

Отсюда находим

$$\frac{4Z^2}{A} \leqslant \frac{Z_0^2}{A_0} \approx \frac{(80)^2}{200} = 32,$$

[1]) Приводимый автором критерий устойчивости не является полным. — *Прим. ред.*

а так как

$$\frac{4Z^2}{A} \approx \frac{4Z^2}{2Z} = 2Z,$$

то получаем $2Z \lesssim 32$, или $Z \lesssim 16$. Наиболее тяжелому устойчивому ядру соответствовало бы $Z \approx 16$ и $A \approx 32$.

IV. 3.2. Эффект Пашена — Бака проявляется при увеличении магнитного поля B до таких значений, когда энергия $\mu_{\text{яд}}B$ становится сравнимой с величиной сверхтонкого расщепления энергетических уровней, имеющей порядок 10^{-6} эВ. Отсюда следует, что

$$B = \frac{10^{-6}}{\mu_{\text{яд}}} = \frac{10^{-6}}{3 \cdot 10^{-12}} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Гс}.$$

IV. 3.3. Кинетическая энергия равна $m_{\text{n}}c^2 + m_{\text{n}}c^2 = 2m_{\text{n}}c^2$.

IV. 3.4. Боровский радиус орбиты мюона пропорционален $1/Z$; число же протонов в ядре пропорционально Z. Следовательно, вероятность [1]) того, что мюон попадет в объем, занимаемый ядром, пропорциональна Z^4.

IV. 3.5. До значений энергии E_{p}, не превышающих 10 МэВ, при которых дебройлевская длина волны протона еще достаточно велика по сравнению с $\hbar/m_\pi c$, где m_π — масса пиона ($J^P = 0^{-1}$).

IV. 3.6. Данная задача аналогична задаче о линейном гармоническом осцилляторе. Потенциал, заданный в области $x > 0$, совпадает с потенциалом для гармонического осциллятора. Следовательно, уравнение Шредингера должно записываться аналогичным образом:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = 0, \qquad x > 0.$$

Однако граничное условие в нашем случае имеет вид

$$\psi_n(x = 0) = 0.$$

В случае линейного гармонического осциллятора четным значениям n соответствуют четные волновые функции. При $x = 0$ эти волновые функции отличны от нуля и, следовательно, не удовлетворяют записанному выше граничному условию. Нечетным зна-

[1]) Амплитуда вероятности захвата пропорциональна отношению объема ядра (который пропорционален Z) к размерам области, в которой может находиться мюон (этот размер порядка радиуса боровской орбиты, т. е. $\sim 1/Z$). Вероятность (т. е. квадрат модуля амплитуды) оказывается поэтому пропорциональной Z^4. — *Прим. ред.*

чениям n отвечают нечетные волновые функции относительно x. Поэтому

$$\psi_{2m+1}(x=0)\equiv 0;$$

здесь m — любое положительное целое число. Отсюда мы видим, что функции

$$\psi_{2m+1}(x)$$

удовлетворяют уравнению Шредингера и заданному граничному условию и их можно считать допустимыми решениями. Им соответствуют собственные значения энергии

$$E_{2m+1}=\left(2m+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega, \qquad \text{где} \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ .$$

IV. 3.7. Ниже перечислены точные симметрии и законы сохранения:

1) комбинированная четность $CPT=1$,
2) преобразования Лоренца,
3) закон сохранения вероятности (унитарность),
4) закон сохранения числа фермионов,
5) законы сохранения импульса, энергии и момента количества движения,
6) законы сохранения барионного и лептонного зарядов,
7) закон сохранения заряда.

Неуниверсальное сохранение имеет место для

1) четности,
2) зарядового сопряжения,
3) обращения времени,
4) зарядовой независимости ядерных сил,
5) G-четности,
6) странности,

и т. д.

IV. 3.8. Запишем отнесенную к единице времени вероятность распада частицы в момент t в дифференциальной форме

$$dP(t)\sim-\left(\frac{dt}{t_1}+\frac{dt}{t_2}\right)=-\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}\,dt.$$

Отсюда определяем вероятность того, что к моменту времени t мезон еще существует:

$$P(t)\sim\exp\left(-\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}\,t\right).$$

Таким образом, среднее время жизни частицы равно

$$\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}.$$

Согласно принципу неопределенности для энергии E имеем

$$\Delta E=\frac{\hbar(t_1+t_2)}{t_1t_2}.$$

Следовательно, неопределенность массы частицы

$$\Delta m=\frac{\hbar(t_1+t_2)}{t_1t_2c^2}.$$

IV. 3.9. *Групповая скорость* $=\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{dE}{dp}=\dfrac{p}{m}=V.$

Фазовая скорость $=\lambda\nu=\dfrac{h}{mV}\,\nu=\dfrac{E}{mV}=\dfrac{c^2}{V}.$

IV. 3.10.

а) Для $1s$-состояния волновая функция обращается в нуль только на бесконечности.

б) Для $2s$-состояния она обращается в нуль как при $r=2a_0$, так и при $r=\infty$.

в) Для $2p$-состояния $(m=\pm1)$ волновая функция равна нулю при $\theta=0$, π и $r=0$, ∞. Для $2p$-состояния $(m=0)$ она равна нулю при $\theta=\pi/2$, $3\pi/2$ и при $r=\theta,\infty$. (Здесь m — магнитное квантовое число, θ — сферическая координата, дополняющая широту.)

IV. 3.11. Энергия связи дается формулой

$$\varepsilon=\frac{2\pi^2m_e e^4Z^2}{h^2}.$$

а) При учете релятивистской поправки масса электрона окажется больше. Следовательно, энергия связи увеличится (а энергетический уровень опустится).

б) Экранировка уменьшает поле ядра, или эффективное значение Z; следовательно, станет меньше и энергия связи.

в) Если распределение заряда в ядре считать однородным и сферически симметричным, то потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром будет такая же, как и для электрона на определенной орбите в боровской модели. Однако, согласно квантовомеханическим представлениям, имеется некоторая конечная вероятность попадания этого электрона внутрь ядра атома. Отсюда следует, что учет конечного размера ядра атома приводит к уменьшению энергии связи. (См. задачу IV. 2.5.)

IV. 3.12.

а) Только гравитационное взаимодействие[1]), потенциал которого $V\sim-1/r$.

[1]) Автор имеет в виду такие большие расстояния r, на которых все «атомные» силы (например, силы Ван-дер-Ваальса) можно считать пренебрежимо малыми. — *Прим. ред.*

б) Кулоновское взаимодействие: $V \sim 1/r$.

в) В поле иона нейтральный атом ведет себя подобно электрическому диполю. В этом случае $V \sim -1/r^2$.

г) Ядерное взаимодействие, характеризуемое потенциалом $-e^{-kr}/r$.

д) Нейтроны — нейтральные частицы, не обладающие электрической поляризацией. Поэтому здесь нужно учесть только взаимодействие их магнитных моментов. Рассматривая нейтроны как два магнитных диполя, получаем следующий вклад в потенциальную энергию взаимодействия: $-2d_1d_2/r^3$, где $d_1 = d_2 = d$ (d — магнитный момент нейтрона).

IV. 3.13. Полную волновую функцию системы можно записать в виде произведения радиальной функции $R(r)$ и угловой функции $\psi(\theta, \varphi)$:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,\psi(\theta, \varphi).$$

В свою очередь функцию $\psi(\theta, \varphi)$ можно представить как суперпозицию собственных функций оператора момента импульса системы:

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{l,\,m} a_{l,\,m} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Здесь $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — общеизвестные сферические функции с целочисленными индексами l и m, причем $0 \leqslant m \leqslant l$. Функция $Y_l^m(\theta, \varphi)$ характеризует состояние системы с собственным значением модуля момента импульса $\hbar\sqrt{l(l+1)}$. Квадраты всех этих функций

$$|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2, \text{ за исключением } |Y_0^0(\theta, \varphi)|^2,$$

зависят от угла θ; то же самое относится и к перекрестным произведениям [1]). Таким образом, единственной функцией, которая удовлетворяет условию независимости

$$|\psi(\theta, \varphi)|^2$$

[1]) Если сумма определенного числа произведений с перекрестными членами не зависит от θ и φ, т. е.

$$\sum_{i,\,j} a_{ij}\left[\psi_{l_i}^{m_i}(\theta, \varphi)\right]^* \psi_{l_j}^{m_j}(\theta, \varphi) = \text{const} = A,$$

то, интегрируя по всему угловому пространству и используя условие ортогональности

$$\int \psi_l^m(\theta, \varphi)\,\psi_{l'}^{m'}(\theta, \varphi)\,d\Omega = 0 \quad \text{для} \quad l \neq l' \quad \text{или} \quad m \neq m',$$

мы находим, что $4\pi A = 0$. Таким образом, произведения с перекрестными членами обращаются в нуль.

от углов θ и φ, является

$$\psi(\theta, \varphi) \equiv Y_0^0(\theta, \varphi);$$

следовательно, $l = m = 0$. Это означает, что единственно возможное значение момента импульса системы равно нулю, т. е. система должна находиться в S-состоянии.

IV. 4.1. Одномерное уравнение Шредингера записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - V)\,\psi. \tag{1}$$

Если частицы расположены слева от барьера, то $V = 0$, и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi.$$

Общее решение этого уравнения дается функцией

$$\psi_L = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \tag{2}$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Для частиц, находящихся в центральной части, имеем $V = V_0$, причем $V_0 > E$. Соответствующее решение уравнения Шредингера для этой области записывается как

$$\psi_M = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, \tag{3}$$

где

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Наконец, для частиц, находящихся справа от выступа потенциального барьера, $V = V_1 < E$. Здесь, поскольку мы рассматриваем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, решение уравнения (1) будет следующим:

$$\psi_R = Fe^{ik_3x}, \tag{4}$$

где

$$k_3 = \frac{\sqrt{2m(E - V_1)}}{\hbar}.$$

Запишем теперь граничные условия

$$Ae^{-ik_1d/2} + Be^{ik_1d/2} = Ce^{-k_2d/2} + De^{k_2d/2}, \tag{5}$$

$$ik_1Ae^{-ik_1d/2} - ik_1Be^{ik_1d/2} = k_2Ce^{-k_2d/2} - k_2De^{k_2d/2}, \tag{6}$$

$$Fe^{ik_3d/2} = Ce^{k_2d/2} + De^{-k_2d/2}, \tag{7}$$

$$ik_3Fe^{ik_3d/2} = k_2Ce^{k_2d/2} - k_2De^{-k_2d/2}. \tag{8}$$

Из условий (5) и (6) получаем

$$2ik_1Ae^{-ik_1d/2}=(ik_1+k_2)\,Ce^{-k_2d/2}+(ik_1-k_2)\,De^{k_2d/2}, \tag{9}$$

а из условий (7) и (8) —

$$(k_2+ik_3)\,Fe^{ik_3d/2}=2k_2Ce^{k_2d/2} \tag{10}$$

и

$$(k_2-ik_3)\,Fe^{ik_3d/2}=2k_2\,De^{-k_2d/2}. \tag{11}$$

Путем исключения из уравнений (9), (10) и (11) коэффициентов C и D находим

$$\frac{2ik_1Ae^{-ik_1d/2}}{Fe^{ik_3d/2}}=\frac{(ik_1+k_2)\,e^{-k_2d}\,(k_2+ik_3)}{2k_2}+\frac{(ik_1-k_2)\,e^{k_2d}\,(k_2-ik_3)}{2k_2},$$

откуда получаем следующее выражение для коэффициента прозрачности барьера:

$$\frac{k_3\,|\,F\,|^2}{k_1\,|\,A\,|^2}=\frac{16k_1k_2^2k_3}{\left(k_2^2-k_1k_3\right)^2\left(e^{-k_2d}-e^{k_2d}\right)^2+\left(k_1k_2+k_2k_3\right)^2\left(e^{-k_2d}+e^{k_2d}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{E}\,(V_0-E)\sqrt{E-V_1}}{\left[(V_0-E)-\sqrt{E\,(E-V_1)}\right]^2\operatorname{sh}^2 k_2d+(V_0-E)\left(\sqrt{E}-\sqrt{E-V_1}\right)^2\operatorname{ch}^2 k_2d}.$$

IV. 4.2. Нам дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти собственные значения матрицы, нужно решить характеристическое уравнение

$$|\,A-\lambda I\,|=0, \tag{1}$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Отсюда следует

$$(3-\lambda)\,\lambda+4=0,$$

или

$$(\lambda-4)\,(\lambda+1)=0. \tag{3}$$

Следовательно, собственными значениями матрицы A являются $\lambda=4$ и $\lambda=-1$. Пусть $\lambda=4$. Согласно определению собственного вектора, имеем

$$\begin{pmatrix}3-4 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0, \tag{4}$$

Отсюда следует

$$-x_1+2x_2=0, \quad \text{или} \quad x_1=2x_2; \tag{5}$$

при этом компоненты вектора должны удовлетворять условию нормировки

$$x_1^2+x_2^2=1. \tag{6}$$

Таким образом, собственному значению $\lambda=4$ соответствует собственный вектор

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{Bmatrix}.$$

Для $\lambda=-1$ имеем

$$\begin{pmatrix}3+1 & 2\\ 2 & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=0, \tag{7}$$

откуда

$$4y_1+2y_2=0, \quad \text{или} \quad y_1=-\frac{1}{2}\,y_2, \tag{8}$$

и

$$y_1^2+y_2^2=1. \tag{9}$$

В результате получаем собственный вектор

$$\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\[2mm] \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{Bmatrix},$$

соответствующий собственному значению $\lambda=-1$.

IV. 4.3.

а) $\mathbf{C}$ — вектор, характеризующий плотность потока вероятности. Его аналогом в классической электродинамике является вектор Пойнтинга.

б)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \psi^*\psi\,dV=\int\limits_V\left(\psi^*\,\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\psi^*}{dt}\,\psi\right)dV=\frac{i\hbar}{2m}\int\limits_V\left[\psi^*\nabla^2\psi-(\nabla^2\psi^*)\,\psi\right]dV=$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\int\limits_V \operatorname{div}\left[\psi^*\operatorname{grad}\psi-(\operatorname{grad}\psi^*)\,\psi\right]dV=-\int\limits_V(\nabla\cdot\mathbf{C})\,dV.$$

Следовательно,

$$\mathbf{C}=\frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*\operatorname{grad}\psi-(\operatorname{grad}\psi^*)\,\psi\right].$$

IV. 4.4.

а) Волновая функция, отвечающая основному состоянию атома водорода, имеет вид

$$\psi_0 = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

где $a_0 = 0{,}5$ Å.

б) Вероятность нахождения электрона в слое между r и $r + dr$ вычисляется по формуле

$$P(r)\,dr = |\psi_0|^2\,dV, \quad \text{где} \quad dV = 4\pi r^2\,dr.$$

Подставляя сюда выражение для волновой функции ψ_0, получаем

$$P(r)\,dr = \left[2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\right]^2 r^2\,dr. \qquad (1)$$

в) При максимальном значении $P(r)$ производная $dP(r)/dr$ обращается в нуль. Следовательно, для нашего случая имеем

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)\right] = 0,$$

или

$$2r - \frac{2r^2}{a_0} = 0. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что $P(r)$ принимает максимальное значение при $r = a_0$. Второе решение уравнения (2), $r = 0$, соответствует минимальному значению $P(r)$, равному нулю.

IV. 4.5.

а) $R \approx \frac{2\hbar^2}{me^2} \approx 1$ Å.

б) Из известного соотношения $\lambda_{\text{макс}} T = 0{,}29$ К·см находим, что при $T = 3$ К

$$\lambda \approx 10^{-1}\ \text{см} = 10^7\ \text{Å}.$$

в) Ширина запрещенной зоны $\approx 1{,}1$ эВ.

г) При делении одного ядра освобождается энергия, примерно равная 200 МэВ. Она соответствует разности энергий связи в исходном и конечных ядрах.

д)

$$f = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{7 \cdot 10^{-5}} \approx 4 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}.$$

е)

$$t = \frac{d}{c} = \frac{3 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-23}\ \text{с}.$$

ж)

$$\mu_e = 0{,}9 \cdot 10^{-27}\ \text{Дж/Гс}.$$

IV. 4.6. Основному состоянию частицы, находящейся между двумя непроницаемыми стенками, соответствует нормированная волновая функция вида

$$u^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\frac{\pi x}{a},$$

где a — расстояние между стенками. Эта функция обращается в нуль при $x = -a/2$ и $x = a/2$.

а) Собственные функции состояний частицы в расширенном потенциальном барьере записываются в виде

$$v^n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \cos\frac{n\pi x}{2a} \quad \text{для нечетных } n$$

и

$$v^n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\frac{n\pi x}{2a} \quad \text{для четных } n \text{ (исключая } n = 0),$$

которые обращаются в нуль при $x = a$ и $x = -a$. Функцию $u^0(x)$ можно разложить в ряд по ортонормированным собственным функциям v^n:

$$u^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v^n(x),$$

где

$$a_n = \int_{-a/2}^{+a/2} u^0(x)\, v^n(x)\, dx$$

— амплитуда вероятности нахождения частицы в состоянии n. Вычисляем эту вероятность для основного состояния:

$$P = a_0^2 = \left[\int_{-a/2}^{+a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\cos\frac{\pi x}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\cos\frac{\pi x}{2a}\right) dx\right]^2 =$$

$$= \frac{2}{a^2}\left(\int_{-a/2}^{+a/2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi x}{2a}\, dx\right)^2 = \frac{64}{9\pi^2}.$$

б) Энергия частицы сохраняется в статистическом смысле, т. е. энергия частицы в исходном состоянии $E(u^0)$ равна сумме энергий E_i всех возможных состояний v^i, взятых с весом P_i, который равен вероятности пребывания частицы в каждом из этих состояний:

$$E(u^0) = \sum_i E_i(v^i)\, P_i.$$

(См. задачу IV. 1.5.)

IV. 5.1.

а) Принцип соответствия: классическая механика является предельным случаем квантовой механики, когда постоянная Планка оказывается пренебрежимо малой относительно некоторого характерного параметра системы, например момента импульса. В этом случае все законы и предположения квантовой механики должны сводиться к классическим.

б) Закон Дюлонга и Пти утверждает, что молярная теплоемкость любого металла равна $3R$, или 6 кал/моль·К [1]).

в) Потому что первоначально каждый атом калия находится в основном, или S-состоянии, и при переходе любого из них в возбужденное $3S$-состояние происходит поглощение только того фотона, длина волны которого соответствует главной серии.

г) Фактор g равен 2 для спинового момента электрона и 1 для орбитального момента.

д) Комптоновское рассеяние и фотоэффект.

IV. 5.2.

а) В случае системы, образуемой протоном и электроном, испускаемый фотон обладает энергией

$$\varepsilon_e = 13{,}6\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right) = 10{,}2 \text{ эВ, поскольку } n = 2.$$

Энергии уровней пропорциональны массе m, и она у мюона в 210 раз превышает массу электрона. Следовательно [2]),

$$\varepsilon_\mu \approx 2100 \text{ эВ}.$$

б) Радиус первой боровской орбиты обратно пропорционален массе m. Поскольку для электрона он равен $a_0 = 0{,}5$ Å, то для мюона получаем следующее значение:

$$a_\mu = 0{,}5 \cdot \frac{1}{210} \approx 0{,}0024 \text{ Å}.$$

в) Скорость частицы на n-й боровской орбите $v = a_n \omega_n$ не зависит от массы частицы, потому что a_n обратно пропорционально m, а ω_n пропорционально ей. Следовательно,

$$v = \frac{e^2}{n\hbar} = \frac{\alpha c}{n};$$

здесь α — постоянная тонкой структуры.

IV. 5.3. Из известного соотношения $\lambda_{\text{макс}} T = 0{,}29$ см·К находим, что максимум спектральной плотности излучения при температуре $T = 2000$ К приходится на длину волны $\lambda_{\text{макс}} =$

[1]) Этот закон справедлив при достаточно высоких температурах. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь не учитывается содвижение ядра. — *Прим. ред.*

$= 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ см $= 1{,}45 \cdot 10^4$ Å. Фотоны с этой длиной волны обладают энергией ≈ 1 эВ, что вдвое меньше энергии фотонов в желтой линии натрия (2,07 эВ).

Чтобы разрешить противоречие, нужно рассмотреть спектральное распределение энергии теплового излучения

$$I(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{1{,}44\cdot 10^8/\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{7\,22\cdot 10^4/\lambda} - 1}.$$

Здесь подставлены числовые значения второй радиационной постоянной $c_2 = 1{,}44 \cdot 10^{-2}$ м·К $= 1{,}44 \cdot 10^8$ Å·К и температуры $T = 2000$ К. На длине волны $\lambda = 5890$ Å имеем

$$I(5890 \text{ Å}) \approx \frac{c_1}{(5890)^5}\frac{1}{e^{12{,}3} - 1}.$$

По сравнению с $I(14\,500 \text{ Å})$ это очень малая величина. Действительно,

$$\frac{I(5890 \text{ Å})}{I(14\,500 \text{ Å})} = \left(\frac{14\,500}{5890}\right)^5 \frac{e^{4{,}98} - 1}{e^{12{,}3} - 1} \approx (2{,}46)^5 \frac{1{,}44 \cdot 10^2}{2{,}20 \cdot 10^5} \approx$$

$$\approx (88{,}6)(6{,}54 \cdot 10^{-4}) \approx 0{,}058.$$

В то же время она больше, чем I ($\lambda < 5890$ Å). Поскольку все атомы натрия находятся в основном состоянии $3^2S_{1/2}$, то ближайшим разрешенным возбужденным состоянием является $3^2P_{1/2,\,3/2}$. Переходам

$$3^2P_{1/2,\,3/2} \to 3^2S_{1/2}$$

соответствует излучение линии 5890 Å. Для электрических дипольных переходов $\Delta L = \pm 1$, поэтому следующим близким возбужденным состоянием является $4p$, переход с которого отвечает излучению с $\lambda = 3300$ Å. Однако этим переходом можно пренебречь, поскольку I (3300 Å) $\ll I$ (5890 Å) [1]).

Мы приходим к выводу, что при такой низкой температуре наблюдается в основном только желтая линия.

IV. 5.4. Запишем уравнение Шредингера. Для области $x \leqslant 0$ оно имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + E\psi_1 = 0, \tag{1}$$

а для области $x > 0$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + (E - V_0)\psi_2 = 0. \tag{2}$$

[1]) Очевидно, что физиологическое восприятие рассматриваемого явления не изменилось бы и при противоположном неравенстве: излучение с $\lambda = 3300$ Å лежит вне области спектральной чувствительности человеческого глаза. — *Прим. перев.*

а) Уравнения (1) и (2) имеют следующие решения:

$$\psi_1 = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \qquad x \leqslant 0, \tag{3}$$

$$\psi_2 = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \qquad x > 0, \tag{4}$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}.$$

Если частицы движутся слева направо, то $D = 0$. Для сшивания решений воспользуемся граничными условиями

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \text{и} \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}. \tag{5}$$

Они дают

$$A + B = C$$

и

$$k_1(A - B) = k_2C.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \tag{6}$$

и

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A. \tag{7}$$

Из выражений (3), (4), (6) и (7) получаем

$$\psi_1 = A\left(e^{ik_1x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1x}\right),$$
$$\psi_2 = A\frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2x}. \tag{8}$$

б) Если частицы движутся к барьеру со скоростью $v = \sqrt{2E/m}$, то в ящике с единичным сечением и длиной $l = v$ будет находиться только одна частица. Плотность частиц, движущихся к барьеру, равна A^2. Следовательно, мы имеем следующее условие нормировки:

$$A^2v = 1,$$

откуда находим

$$A = \left(\frac{m}{2E}\right)^{1/4}. \tag{9}$$

в) В случае $E < V_0$ имеем

$$k_2 = i\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \equiv ik_3.$$

Таким образом, волновые функции (8) принимают вид

$$\psi_1 = A\left(e^{ik_1x} + \frac{k_1 - ik_3}{k_1 + ik_3} e^{-ik_1x}\right),$$
$$\psi_2 = 2A\frac{k_1}{k_1 + ik_3} e^{-k_3x}. \tag{10}$$

Частицы не могут полностью преодолеть потенциальный барьер и отражаются от него обратно. Характеристическое расстояние, на которое проникают частицы в глубь барьера ($x > 0$), равно

$$\frac{1}{k_3} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}.$$

IV. 5.5. Подставим заданную волновую функцию в уравнение Шредингера, записанное в сферической системе координат:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_k}{dr}\right) + V(r)\psi_k = E\psi_k. \tag{1}$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi_k + V(r)\psi_k = E\psi_k. \tag{2}$$

Функция $V(r)$ оказывается постоянной, и ее можно положить равной нулю. Из уравнения (2) мы видим, что

$$E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}.$$

Следовательно, частица является свободной.

IV. 6.1.

а) Формула для потока вероятности имеет вид

$$J = -\frac{i\hbar}{2m}\int_S [\psi^* \operatorname{grad}\psi - (\operatorname{grad}\psi^*)\psi]\, dA.$$

(Ее вывод дан в решении задачи IV. 4.3.)

б) Подставляя $\psi = e^{ikx}$ и $\psi^* = e^{-ikx}$ в приведенную выше формулу, мы получаем

$$J_x = -\frac{i\hbar}{2m}\int_S [e^{-ikx}(ik)e^{ikx} - (-ik)e^{-ikx}e^{ikx}]\, dA_x = \frac{\hbar k}{m}\int_S dA_x;$$

здесь $\frac{\hbar k}{m}$ — скорость распространения волны.

в) Нет. Поток, соответствующий действительной волновой функции тождественно равен нулю.

IV. 6.2. При свободном падении тела в поле силы тяжести имеем

$$s = \Delta x + v_xt.$$

Здесь s — расстояние между шариком и отвесом, Δx — начальное смещение шарика, v_x — горизонтальная составляющая его скорости, равная $\Delta p_x/m$. Применяя соотношение неопределенностей

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x},$$

получаем

$$s = \Delta x + \frac{\Delta p_x}{m}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \Delta x + \frac{\hbar}{m}\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Минимальному значению s соответствует условие

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = 1 + \frac{\hbar}{m}\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[-\frac{1}{(\Delta x)^2}\right] = 0,$$

или

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m}\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g}}.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g}\right)^{1/4}.$$

Следовательно,

$$s \approx 2\left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g}\right)^{1/4}.$$

IV. 6.3.

а) Сравнивая формулы

$$\sqrt{\nu} = aZ - b$$

и

$$\hbar\nu = E_f - E_i = (Z-1)^2 Rch\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2\pi^2 me^4 (Z-1)^2}{h^2}\frac{3}{4},$$

получаем

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3Rc} = \frac{\pi e^2}{2h}\sqrt{\frac{6m}{h}},$$

где R — постоянная Ридберга.

б) В атоме с большим атомным номером Z все электроны, за исключением $1s$-электронов, удалены от ядра на довольно большое расстояние. Поэтому на положение энергетических уровней $1s$-электронов остальные электроны не оказывают влияния. Считая, что

$$E(1s) \sim (Z-1)^2,$$

а

$$E(2p) \sim (1/2^2)(Z-1)^2,$$

получаем

$$\nu = \frac{E(2p) - E(1s)}{h} \sim (Z-1)^2,$$

т. е. частный случай закона Мозли.

При анализе оптических спектров пренебрегать влиянием остальных электронов уже нельзя, поскольку именно они определяют уровни оптических переходов.

IV. 6.4. Направим ось x вдоль направления движения первой частицы. Тогда компоненты 4-импульсов обеих частиц записываются в виде

$$P_1 = (\gamma_1 m_1 v_1,\ 0,\ 0,\ i\gamma_1 m_1 c),$$
$$P_2 = (0,\ 0,\ 0,\ im_2 c),$$

где

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Определяем массу покоя образовавшейся частицы:

$$M = \left[-\sum_{i=1}^{4}(P_1 + P_2)_i \cdot (P_1 + P_2)_i\right]^{1/2}\frac{1}{c} = (m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2)^{1/2}.$$

Скорость V этой частицы можно найти из выражения для ее импульса P. Поскольку импульс сохраняется, мы имеем

$$P \equiv \frac{MV}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \gamma_1 m_1 v.$$

Отсюда

$$\gamma_1^2 m_1^2 v^2 (c^2 - V^2) = M^2 V^2 c^2.$$

Следовательно,

$$V = \frac{\gamma_1 m_1 vc}{\sqrt{M^2 c^2 + \gamma_1^2 m_1^2 v^2}}.$$

IV. 6.5.

а) На каждый электрон, попавший в магнитное поле, действует вращающий момент

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2mc}g(\mathbf{s} \times \mathbf{B}),$$

или

$$\tau = \frac{egsB}{2mc} \text{ (поскольку } \mathbf{s} \perp \mathbf{B}).$$

Угловая скорость прецессии спина равна отношению вращающего момента к спину:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{s} \times \boldsymbol{\tau}}{s^2},$$

или

$$\Omega = \frac{egB}{2mc},$$

причем вектор Ω совпадает по направлению с вектором магнитной индукции B.

б) Циклотронную частоту определяем по формуле $\omega = eg/2mc \approx 8{,}8 \cdot 10^6$ рад$\cdot$с$^{-1}\cdot$Гс (если пренебречь постоянной тонкой структуры α в выражении для фактора g).

в)

$$\varphi = \Omega t = \Omega \frac{\pi R}{v} = \pi \frac{egB}{2mc} \frac{mc}{eB} = \frac{\pi g}{2} = \pi + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, измеряя φ, можно опытным путем определять численное значение α. На этом принципе основаны известные эксперименты по измерению малых отклонений g-фактора мюона от значения, равного 2.

IV. 6.6.

а) Если электрон движется по круговой стационарной орбите, то

$$\frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}; \qquad (1)$$

здесь v — линейная скорость электрона, r — радиус орбиты. Согласно квантовому постулату Бора,

$$\textit{Орбитальный момент электрона} = mvr = n\hbar, \qquad (2)$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Исключая v в формулах (1) и (2), находим

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}. \qquad (3)$$

Потенциальная энергия электрона на орбите

$$V = -\frac{e^2}{r},$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{2r}.$$

Следовательно, полная энергия электрона дается выражением

$$E = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

б)

$$E(n=4) - E(n=2) = \frac{me^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = (13{,}6\ \text{эВ})\,\frac{3}{16} \approx 2{,}55\ \text{эВ}.$$

IV. 7.1.

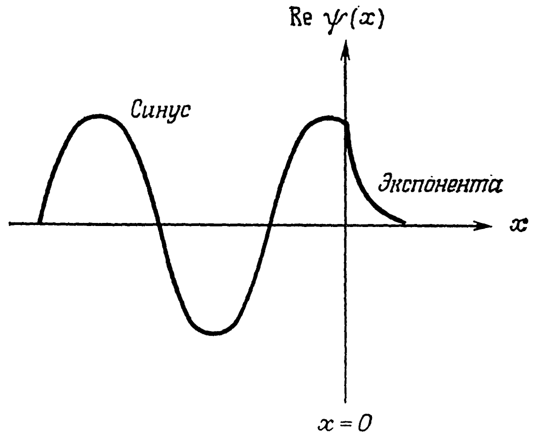
а) Уравнения Шредингера для рассматриваемых областей записываются следующим образом:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) = E\psi(x), \qquad x > 0,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \qquad x < 0;$$

здесь $V_0 = 20$ эВ, $E = 10$ эВ.

б) Оба решения этих уравнений представлены на рисунке.



в) Дебройлевскую длину волны электрона вычисляем по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{(2mc^2)\,E}}.$$

Подставляя в нее значения $m = 0{,}5$ МэВ$/c^2$, $\hbar c = 1{,}973 \times 10^{-11}$ МэВ$\cdot$см и $E = 10$ эВ, получаем

$$\lambda = \frac{(1{,}973 \cdot 10^{-11})\,2\pi}{3{,}2 \cdot 10^{-3}} \approx 4 \cdot 10^{-8}\ \text{см};$$

здесь в знаменателе стоит числовое значение величины $\sqrt{(2mc^2)\,E} = \sqrt{1{,}02\ \text{МэВ} \cdot 10^{-5}\ \text{МэВ}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ МэВ.

г) Граничные условия: функция $\psi(x)$ и ее производная $d\psi(x)/dx$ при $x = 0$ должны быть непрерывными.

д) Вероятность нахождения электрона в области $x > 0$ пропорциональна $\exp(-2x/\lambda)$.

IV. 7.2.

а) Собственные значения энергии: $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Четность собственных состояний: $P=(-1)^n$.

б) Собственные значения энергии: $E_n=E_n^x+E_n^y+E_n^z=$ $=\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)h\nu_0$.

Четность собственных состояний: $P=(-1)^{n_x+n_y+n_z}$.

Свойства состояний, соответствующих четырем самым нижним энергетическим уровням, сведены в следующую таблицу:

Таблица

$n_x+n_y+n_z$	E_n	Четность P	n_x	n_y	n_z	l	Кратность вырождения $\sum(2l+1)$
0	$\frac{3}{2}h\nu_0$	+1	0	0	0	0	1
1	$\frac{5}{2}h\nu_0$	−1	1	0	0	1	3
			0	1	0		
			0	0	1		
2	$\frac{7}{2}h\nu_0$	+1	1	1	0	2; 0	6
			0	1	1		
			1	0	1		
			2	0	0		
			0	2	0		
			0	0	2		
3	$\frac{9}{2}h\nu_0$	−1	1	1	1	3; 1	10
			2	1	0		
			1	2	0		
			2	0	1		
			1	0	2		
			0	2	1		
			0	1	2		
			3	0	0		
			0	3	0		
			0	0	3		

в) Используя выражения для четности $P=(-1)^l$ и числа вырожденных состояний $2l+1$, находим, что каждой группе уровней соответствуют те значения l, которые приведены в таблице.

IV. 7.3.

а) Всего имеется 6 различных $2p$-состояний, поэтому число всевозможных состояний первого $2p$-электрона равно 6, а второго, согласно принципу Паули, — только 5. Таким образом, число всевозможных размещений для двух $2p$-электронов равно

30. Фактически же вследствие неразличимости обоих электронов число возможных состояний меньше, а именно $30/2=15$.

б) Пусть S и L — полные спиновый и орбитальный моменты обоих электронов. Общую волновую функцию ψ для обоих электронов можно представить в виде произведения спиновой волновой функции $\psi_s(s_1, s_2)$ и орбитальной волновой функции $\psi_L(r_1, r_2)$. Теперь, если мы поменяем местами оба электрона, то получим

$$\psi(r_1,\ r_2)=(-1)^L\,\psi_L(r_2,\ r_1)$$

и

$$\psi_S(s_1,\ s_2)=(-1)^{S+1}\,\psi_S(s_2,\ s_1).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(1,\ 2)=(-1)^{L+S+1}\,\psi(2,\ 1), \qquad (1)$$

но, согласно статистике Ферми, волновая функция для обоих электронов должна быть антисимметричной, т. е.

$$\psi(1,\ 2)=(-1)\,\psi(2,\ 1). \qquad (2)$$

Поэтому из (1) и (2) получаем

$$S+L=\textit{Четное число}. \qquad (3)$$

В силу того что $\mathbf{S}=\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2$, сумма S может быть либо 0, либо 1, а поскольку $\mathbf{L}=\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2$, то L может принимать значения 0, 1 или 2. Отсюда получаем следующие возможные квантовые состояния, удовлетворяющие условию (3):

S	L	J	Мультиплетность состояний $2J+1$
0	0	0	1
0	2	2	5
1	1	0	1
1	1	1	3
1	1	2	5

Полное число состояний равно 15.

IV. 7.4.

а) $1s^2$, $2s^2$, $2p^6$, $3s^1$.

б) $3^2S_{1/2}$.

в) $3^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2}$.

г) Структура тонкого расщепления обязана спин-орбитальному взаимодействию, т. е. взаимодействию спина электрона с

9 Зак. 713

магнитным полем ядра B, если рассматривать это взаимодействие в системе отсчета, жестко связанной с электроном.

д) Энергетический уровень, соответствующий большему значению J, расположен выше.

е) Поскольку потенциал кулоновского поля $V \sim 1/r$, то $dV/dr \sim r^{-2}$. Следовательно, при фиксированном значении L энергия взаимодействия пропорциональна

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr} \sim r^{-3}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} \sim r^{-3}.$$

Отсюда видно, что $n = -3$.

IV. 7.5.

а)

$$[L_x,\ L_y] = i\hbar L_z,$$
$$[L_y,\ L_z] = i\hbar L_x,$$
$$[L_z,\ L_x] = i\hbar L_y,$$
$$[L_i,\ L^2] = 0, \qquad i = x,\ y,\ z.$$

б)

$$L^2\varphi = L^2(L_x + iL_y)\,\psi_{lm} = (L_x + iL_y)\,L^2\psi_{lm} = $$
$$= (L_x + iL_y)\,\hbar^2 l(l+1)\,\psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\,\varphi.$$

Таким образом доказано, что φ является собственным состоянием оператора L^2.

$$L_z\varphi = L_z(L_x + iL_y)\,\psi_{lm} = (i\hbar L_y + L_xL_z + \hbar L_x + iL_yL_z)\,\psi_{lm} =$$
$$= (L_x + iL_y)(m\hbar + \hbar)\,\psi_{lm} = (m+1)\,\hbar\,(L_x + iL_y)\,\psi_{lm} = (m+1)\,\hbar\varphi.$$

Отсюда следует, что φ является также собственной функцией оператора L_z.

в) Предположим, что

$$L_x\psi_{00} = \sum_{l,\,m} A_{lm}\psi_{lm}; \qquad (1)$$

здесь $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l$ и $l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, а A_{lm} — постоянные коэффициенты. Действуя оператором L^2 на обе части равенства (1), получаем

$$L^2L_x\psi_{00} = \hbar^2\sum_{l,\,m} A_{lm}l(l+1)\,\psi_{lm}. \qquad (2)$$

Левая часть полученного соотношения равна нулю, так как операторы L^2 и L_x коммутируют друг с другом, а $L^2\psi_{00} = 0$. Но функции ψ_{lm} являются ортонормированными; значит, все коэффициенты A_{lm}, за исключением A_{00}, в правой части соотношения (2) должны обращаться в нуль, т. е.

$$A_{lm} = 0 \quad (\text{кроме } A_{00}).$$

Таким образом мы доказали, что

$$L_x\psi_{00} = A_{00}\psi_{00}.$$

Аналогичным путем можно доказать и второе соотношение

$$L_y\psi_{00} = B_{00}\psi_{00}.$$

IV. 8.1.

а) $^2P_{1/2}$, поскольку имеется один неспаренный электрон.

б) $^1S_0$, так как отсутствует внешний электрон.

в) $^2P_{3/2}$, поскольку имеется «дырка» в $2p$-оболочке.

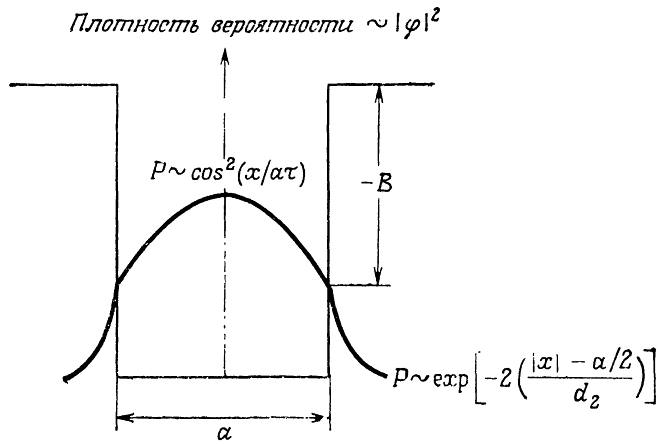
г) В данном случае один из $2p$-электронов переходит в состояние $3s$, образуя «дырку» в $2p$-оболочке. Пользуясь правилом Хунда, находим

$$S = s_{2p} + s_{3s} = 1, \quad L = 1 \quad \text{и} \quad J = 0.$$

Следовательно, получаем возбужденное состояние $^3P_0$.

д) $^1S_0$.

IV. 8.2. График волновой функции приведен на рисунке.



Волновая функция частицы, находящейся в потенциальной яме в основном состоянии, имеет только один максимум. Между стенками потенциальной ямы она характеризуется длиной волны $\sim 2a$. Вне потенциальной ямы плотность вероятности спадает экспоненциально:

$$P \sim \exp\left(-2\,\frac{|x| - a/2}{d_2}\right).$$

На расстоянии $x \equiv d \gg a/2 + d$ вероятность нахождения частицы становится настолько малой, что ею можно пренебречь.

IV. 8.3. Спиновый магнитный момент электрона равен $g_s\mu_Б s$. В магнитном поле спин электрона прецессирует с ларморовой частотой

$$\omega = \frac{g_s\mu_Б s}{\hbar} B = \frac{eB}{2mc} \qquad \left(g_s = 2,\ s = \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Если при прохождении электронами области между A_1 и A_2 направления их спинов изменяются на большой угол, скажем 180°, то электроны не смогут пройти через магнитную систему A_2, потому что в полях магнитов A_1 и A_2 на них действуют отклоняющие силы в одном и том же направлении. Таким образом, мы имеем условие

$$\theta \approx \pi = \omega t = \frac{eBt}{2mc}, \tag{2}$$

из которого находим магнитное поле

$$B \approx \frac{2mc\pi}{et} = \frac{\pi}{(8{,}8\cdot 10^6)(10^{-6})} \approx 0{,}36\ \text{Гс}.$$

Это поле должно быть направлено либо параллельно пучку электронов, либо перпендикулярно плоскости x, z.

IV. 8.4. В атоме большинство разрешенных переходов между энергетическими уровнями происходит за время $\sim 10^{-9}$ с. Поэтому можно считать, что время жизни возбужденного $2p$-состояния в атоме водорода тоже порядка 10^{-9} с. Пользуясь соотношением неопределенностей, находим ширину энергетического уровня

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{6{,}6\cdot 10^{-16}}{10^{-9}} = 6{,}6\cdot 10^{-7}\ \text{эВ}; \tag{1}$$

здесь мы использовали значение $\hbar$ в следующих единицах:

$$\hbar = \frac{1{,}05\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с}}{1{,}6\cdot 10^{-12}\ \text{эрг/эВ}} \approx 6{,}6\cdot 10^{-16}\ \text{эВ}\cdot\text{с}.$$

Значениям $n = 2$ и $J = {}^1/_2$ соответствуют два уровня с $l = 0$ и $l = 1$. Уровень с $l = 0$ является метастабильным, поэтому его энергия может быть измерена с гораздо более высокой степенью точности, чем та, которую дают вычисления по формуле (1). Что касается уровня с $l = 1$, то его положение более неопределенно. Однако оба уровня расположены настолько близко друг к другу, что частота перехода между ними лежит в микроволновом диапазоне. Поскольку радиочастоты можно измерить с весьма высокой точностью, то имеется возможность определить экспериментально среднюю частоту квантов, поглощенных на этом переходе, что равносильно измерению с большой точностью среднего энергетического сдвига между этими уровнями. Используя соотношение

$$\overline{E(l=1)} = \overline{E(l=1) - E(l=0)} + E(l=0),$$

можно определить *среднюю* энергию уровня, соответствующего $l = 1$, с гораздо большей точностью, чем она дается формулой (1).

IV. 8.5.

а) $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}53\ \text{Å} = 5{,}3\cdot 10^{-9}$ см.

б) $r_0 = \dfrac{\hbar^2}{mZe^2} \approx 6{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{Å} = 6{,}6\cdot 10^{-11}$ см.

в) $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{mc} \approx 3{,}8\cdot 10^{-11}$ см; $\lambda = \dfrac{h}{mc} \approx 2{,}42\cdot 10^{-10}$ см.

г) $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{m_\pi c} \approx 1{,}4\cdot 10^{-13}$ см; $\lambda = \dfrac{h}{m_\pi c} \approx 8{,}88\cdot 10^{-13}$ см.

д) $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m_nE}} = \dfrac{\hbar c}{\sqrt{2m_nc^2E}} = \dfrac{1973}{\sqrt{2\cdot 10^9\cdot 10^4}} \approx 0{,}44\cdot 10^{-3}\ \text{Å} = 44\cdot 10^{-13}$ см.

е) $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{P} = \dfrac{\hbar c}{Pc} = \dfrac{1973}{10^{10}} = 1{,}973\cdot 10^{-7}\ \text{Å} = 1{,}973\cdot 10^{-15}$ см.

ж) Для мюонного нейтрино с $m_\nu < 1{,}2$ МэВ/c^2 имеем $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{m_\nu c} \gtrsim 10^{-3}\ \text{Å} = 10^{-11}$ см, и для электронного нейтрино с $m_\nu < 60$ эВ/c^2 имеем $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{m_\nu c} \gtrsim 30\ \text{Å} = 3\cdot 10^{-7}$ см.

з) Поскольку $r \approx 1{,}3\cdot 10^{-13}\sqrt[3]{A}$ см, а $\sqrt[3]{A} \approx 6$, то получаем $r \approx 8\cdot 10^{-13}$ см.

IV. 8.6.

а) Пусть P — оператор четности, который «отражает» все координаты относительно начала системы отсчета. Полагая, что все состояния имеют определенную четность, имеем

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}\rangle &= \langle\psi,\ \mathbf{p}\psi\rangle = \langle P\psi,\ \mathbf{p}P\psi\rangle = \langle PP\psi,\ P\mathbf{p}P\psi\rangle = \\ &= \langle\psi,\ P\mathbf{p}P\psi\rangle = \langle\psi,\ -\mathbf{p}\psi\rangle = -\langle\psi,\ \mathbf{p}\psi\rangle = -\langle\mathbf{p}\rangle,\end{aligned}$$

поскольку $PP = 1$. Следовательно, $\langle\mathbf{p}\rangle \equiv 0$.

б) Если все собственные состояния, соответствующие собственному значению энергии E_i, имеют определенную и одинаковую четность, то среднее значение радиус-вектора **r** должно равняться нулю.

IV. 8.7.

а) Полагая, что в атомах легких элементов преобладает LS связь, получаем следующие правила отбора для электрических дипольных переходов:

1) должна изменяться четность,
2) $\Delta L = \pm 1$, $\Delta M = \pm 1, 0$,
3) $\Delta S = 0$,
4) $\Delta J = 0, \pm 1$ (исключая переход $J_i = 0 \to J_f = 0$).

б) В атомах тяжелых элементов следует принимать во внимание $J - J$-связь. Поэтому получаем следующие правила отбора:

1) в любой момент времени реализуется переход только для одного электрона,
2) $\Delta J = 0, \pm 1$, и для электрона, совершившего переход, $\Delta l = \pm 1$ и $\Delta j = 0$ или ± 1,
3) изменяется четность.

в) В случае ядер налагается ограничение на изменение ядерного спина $\Delta I = \pm 1, 0$. Четность также должна изменяться (но не для перехода $I_i = 0 \to I_f = 0$).

IV. 8.8. Сверхтонкое расщепление связано с взаимодействием магнитного момента ядра $\boldsymbol{\mu}_n$ и магнитного поля $\mathbf{B}_e$, обусловленного орбитальным движением электрона. Энергия взаимодействия равна $\boldsymbol{\mu}_n \cdot \mathbf{B}_e$; она обратно пропорциональна массе ядра M, поскольку $\mu_n = e\hbar/2Mc$ [1]).

Тонкое расщепление объясняется взаимодействием магнитного момента электрона $\boldsymbol{\mu}_e$ с кулоновским полем ядра $\mathbf{E}$. Энергия взаимодействия равна $\boldsymbol{\mu}_e \cdot \mathbf{E}$. Она обратно пропорциональна массе электрона m_e, так как $\mu_e = e\hbar/2m_ec$. В то же время на малых расстояниях от ядра ($r \approx 0$) поле $\mathbf{E}$ в пренебрежении эффектом экранировки растет пропорционально заряду ядра ($E \sim Z$). Следовательно, энергия взаимодействия оказывается пропорциональной Z. В результате получаем

$$\frac{\textit{Сверхтонкое расщепление}}{\textit{Тонкое расщепление}} \sim \frac{1/M}{Z/m} = \frac{m}{MZ}.$$

IV. 8.9.

а) Дана функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

[1]) Магнитные моменты протонов и нейтронов, из которых состоят ядра, не сводятся к указанному выражению для μ_n, но имеют тот же порядок величины. — *Прим. ред.*

где

$$a_n = \frac{x^n}{(n!)^p}.$$

Мы видим, что при $n \to \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{(n+1)^p} \to 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ конечна при любом конечном значении x. В случае $x \to \infty$ она стремится к бесконечности быстрее любой степенной функции.

б) Функция не относится к возможным решениям уравнения Шредингера, поскольку не является нормируемой из-за расходимости интеграла.

IV. 9.1. Обозначим через K_α и K_D кинетические энергии α-частицы и дейтрона соответственно. Тогда [1])

$$K_\alpha = \frac{P_\alpha^2}{2M_\alpha} = \frac{(Q_\alpha BR)^2}{2M_\alpha},$$

$$K_D = \frac{P_D^2}{2M_D} = \frac{(Q_D BR)^2}{2M_D}.$$

Отсюда находим

$$\frac{K_\alpha}{K_D} = \frac{M_D}{M_\alpha}\frac{Q_\alpha^2}{Q_D^2} = \frac{(2)(2)^2}{(4)(1)} = 2.$$

Следовательно,

$$K_\alpha = 2K_D = 32 \text{ МэВ}.$$

IV. 9.2. Плотность ядра $\rho \sim 10^{15}$ г/см³. Такая величина получается при умножении плотности обычного вещества на отношение объема атома к объему ядра:

$$\rho = (1 \text{ г/см}^3)\left(\frac{r_a}{r_n}\right)^3 \approx \left(\frac{10^{-8}}{10^{-13}}\right)^3 = 10^{15} \text{ г/см}^3.$$

IV. 9.3. Отношение сечений равно 4, поскольку кулоновское рассеяние пропорционально Z^2.

IV. 9.4. $2mc^2 = 2\cdot(3\cdot 10^8)^2 = 1{,}8\cdot 10^{17}$ Дж.

[1]) Здесь используются следующие обозначения: Q_α и Q_D — заряды α-частицы и дейтрона, M_α и M_D — их массы соответственно, B — индукция магнитного поля в циклотроне, а R — радиус орбиты. Возможности ускорения в циклотронах ограничены нерелятивистской областью энергий. Поэтому приводимые здесь формулы также не нуждаются в релятивистских поправках. — *Прим. ред.*

IV. 9.5. Она равна 6,8 эВ, так как приведенная масса позитрония равна половине массы электрона.

IV. 9.6. Атом натрия имеет шесть уровней энергии с тремя парами различных переходов. Поэтому при зеемановском расщеплении будут наблюдаться три спектральные линии, соответствующие $\Delta m_J = +1$, 0 и -1.

IV. 9.7. В соответствии с принципом неопределенности $p \approx \approx \hbar/R$. Следовательно,

$$\textit{Кин. эн.} \approx \frac{\hbar^2}{2R^2m}.$$

IV.9.8. Из соотношения $\hbar c/\lambda\!\!\!^- = 25$ кэВ находим $\lambda\!\!\!^- = 0{,}08$ Å.

IV. 9.9. Максимальный импульс частиц изменится в $(^1/_2)^{1/3}$ раз, потому что $P_{\text{макс}} \sim V^{-1/3}$.

IV. 9.10. Магнитный момент протона равен $2{,}8\mu_{\text{яд}}$ ($\mu_{\text{яд}}$ — ядерный магнетон), т. е. $1{,}4 \cdot 10^{-23}$ эрг/Гс.

IV. 9.11. $^1S_0$.

IV. 9.12. Кинетическая энергия увеличится в α^2 раз[1]):

$$\textit{Кин. эн.} = \left\langle \psi(\alpha r),\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\psi(\alpha r)\right\rangle = \alpha^2\left\langle \psi(\alpha r),\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d(\alpha r)^2}\psi(\alpha r)\right\rangle,$$

а потенциальная энергия уменьшится в α^2 раз:

$$\textit{Пот. эн.} = \left\langle \psi(\alpha r),\ \frac{k}{2}r^2\psi(\alpha r)\right\rangle = \frac{1}{\alpha^2}\left\langle \psi(\alpha r),\ \frac{k}{2}\alpha^2r^2\psi(\alpha r)\right\rangle = \frac{1}{\alpha^2}\left\langle \psi(r),\ \frac{k}{2}r^2\psi(r)\right\rangle.$$

[1]) Приведенное автором решение требует уточнения. Дело в том, что нужно учесть изменение нормировки и правильно записать оператор кинетической энергии для трехмерного осциллятора. Для заданных условий имеем

$$\textit{Кин. эн.} = -\frac{N\hbar^2}{2m}\int_0^\infty \psi^*(r, t)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\psi(r, t)}{\partial r}\right]r^2\,dr;$$

сюда входит нормировочный множитель N:

$$N = 1\Big/\int_0^\infty \psi^*(r, t)\,\psi(r, t)\,r\,dr.$$

Следует заметить, что задача составлена формально, ибо состояние с волновой функцией $\psi(\alpha r, t)$ не является решением уравнения Шредингера для рассматриваемой задачи. Это очевидно хотя бы из того, что если первое состояние $\psi(r, t)$ было устойчивым, то изменение кинетической энергии в одну сторону, а потенциальной в противоположную обязательно нарушит такую устойчивость. — *Прим. ред.*

IV. 9.13.

а) Электрон в основном состоянии создает круговой ток

$$i = \frac{ev}{2\pi a_0}, \tag{1}$$

где e — заряд и v — скорость электрона, а a_0 — радиус боровской орбиты. Этот ток создает в центре орбиты радиусом a_0 магнитное поле

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a_0} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev}{a_0^2} = (10^{-7})\frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})(2{,}2\cdot 10^6)}{(0{,}53\cdot 10^{-10})^2} \approx 12{,}5\ \text{Вб/м}^2 = = 1{,}25\cdot 10^5\ \text{Гс};$$

здесь использована подстановка $v = \alpha c = 2{,}2\cdot 10^6$ м/с и $a_0 = = 0{,}53\cdot 10^{-10}$ м.

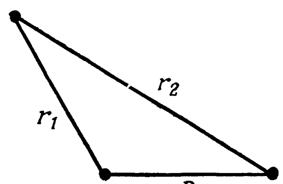
б) Разность энергий между состояниями протона со спином, направленным вверх и вниз, равна

$$\Delta E = 2B\mu_{\text{яд}} = (2{,}5\cdot 10^5)(3{,}15\cdot 10^{-12}) = 7{,}88\cdot 10^{-7}\ \text{эВ}.$$

Здесь $\mu_{\text{яд}} = 3{,}15\cdot 10^{-12}$ эВ/Гс.

в) $\omega = \dfrac{\Delta E}{\hbar} = \dfrac{\Delta E c}{\hbar c} = \dfrac{(7{,}88\cdot 10^{-7}\ \text{эВ})(3\cdot 10^{18}\ \text{Å/c})}{1973\ \text{эВ}\cdot\text{Å}} \approx 1{,}2\cdot 10^9$ рад/с.

IV. 9.14.



а) При $R = 0$ оба положительных заряда находятся в начале координат. Следовательно, $E(0)$ в 4 раза должно превышать энергию связи электрона в атоме водорода в основном состоянии:

$$E_0(0) = -4(R_H) = -54{,}4\ \text{эВ}. \tag{1}$$

Если $R \to \infty$, то удаленный протон не оказывает никакого влияния на электрон. Поэтому

$$E_0(\infty) = -R_H = -13{,}6\ \text{эВ}. \tag{2}$$

б) Полная потенциальная энергия системы по условию задачи равна

$$V(R) = E_0(R) + \frac{e^2}{R}. \tag{3}$$

Условие равновесия протонов записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dR} V(R) = 0. \tag{4}$$

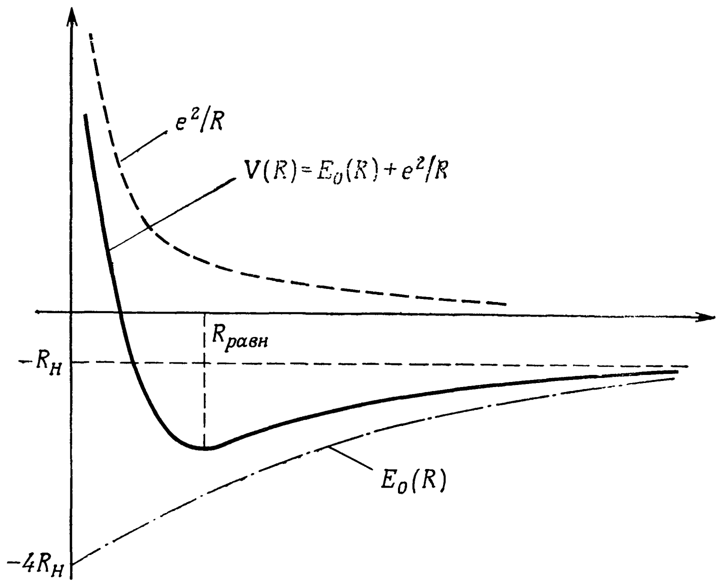
Подставляя выражение для потенциальной энергии (3) в (4), получаем

$$-\frac{e^2}{R^2} + \frac{dE_0(R)}{dR} = 0, \tag{5}$$

откуда находим

$$R_{\text{равн}} = \frac{e}{\sqrt{\left.\frac{dE_0(R)}{dR}\right|_{R=R_{\text{равн}}}}}. \tag{6}$$

в) Приблизительная зависимость $E_0(R)$ показана на следующем рисунке:



г) Если оба протона находятся в нижнем возбужденном состоянии, то следует учитывать дополнительные энергетические уровни, отвечающие колебательным и вращательным степеням свободы протонов, с энергиями

$$U_{\text{кол}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и

$$U_{\text{вр}} \sim \frac{1}{m_p} J(J+1), \qquad J = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

причем ω_c можно выразить через $V(R)$, массу протона m_p и $R_{\text{равн}}$.

IV. 9.15.

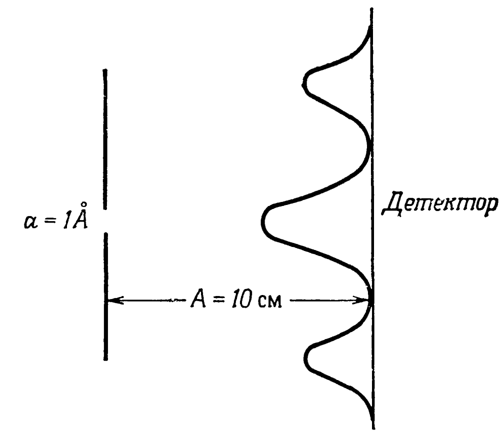
а) Конечная энергия каждого электрона равна 37 эВ. Следовательно, для дебройлевской длины волны электрона получаем

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2E}} = \frac{1973}{\sqrt{(1{,}02 \cdot 10^6)(37)}} \approx 0{,}32\ \text{Å}.$$

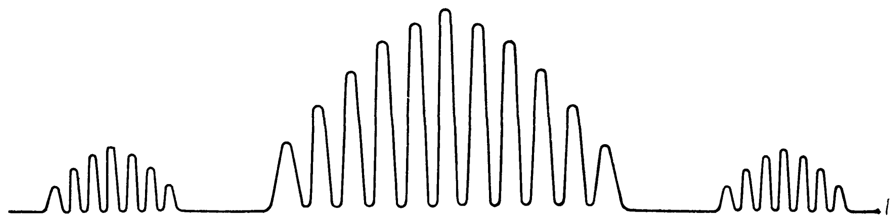
Ширина центрального максимума дифракционной картины определяется по формуле[1]) из классической оптики:

$$x \approx \frac{2\lambda}{a} A \approx 6{,}4\ \text{см};$$

это та ширина, в пределах которой электрон может быть зарегистрирован.



б) При наличии двойной щели будет наблюдаться следующая интерференционная картина:



[1]) В данную формулу следует подставлять $\lambda = 2\pi\lambda\!\!\!^{-}$. Поскольку она справедлива лишь при $\lambda \ll a$, то ее применение нельзя считать оправданным. — *Прим. перев.*

в) Согласно квантовой механике, волновая функция одиночного электрона может интерферировать сама с собой. Поэтому должна наблюдаться та же картина, что и в п. «б».

г) Если бы существовал такой детектор и можно было бы регистрировать прохождение электронов через одну из щелей, то мы получили бы дифракционную картину от одной щели. Однако из-за неопределенности координат и импульсов сами электроны и детекторы оказываются столь ненадежными объектами (т. е. нельзя ни жестко закрепить второй детектор на щели, ни узнать, падают ли электроны на нее параллельным пучком), что вряд ли можно получить какую-либо достоверную информацию от второго детектора [1]). Сохранится интерференционная картина от двойной щели. (См. книгу: *R. M. Eisberg*, Fundamental of Modern Physics, 1961, стр. 161.)

IV. 10.1.

а) Поскольку $Z = 15$, а $m_\mu = 206m_e$, то для энергии излученного фотона получаем

$$E_{3\to 2} = Z^2 R_\infty (206)\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \approx 88 \text{ кэВ}$$

(здесь $R_\infty = 13{,}6$ эВ).

б) Границе K-полосы поглощения у свинца соответствует энергия

$$E_K = (Z-1)^2 R_\infty = (81)^2 (13{,}6 \text{ эВ}) \approx 89{,}3 \text{ кэВ},$$

и K-серия линий рентгеновского излучения простирается (от 67) до 89,3 кэВ. Поэтому, когда мю-мезон переходит с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$, он излучает фотон на частоте рентгеновского излучения, под действием которого электрон из K-оболочки атома свинца может перейти в возбужденное состояние. Следовательно, коэффициент поглощения у свинца оказывается довольно значительным.

в) Давайте поступим следующим образом:

1) Установим источник γ-квантов, энергия которых была определена в п. «а».

2) Поместим счетчик γ-квантов непосредственно за свинцовой фольгой, служащей поглотителем. Мы зафиксируем слабый сигнал от источника, поскольку элемент с $Z = 82$ обладает большим поглощением, как было показано в п. «б».

---

[1]) Объяснение автора может не удовлетворить читателя. Подробно об интерференционном опыте с электронами можно узнать из книги: *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс*, Фейнмановские лекции по физике, т. 3—4, «Мир», 1977, стр. 207—216, или из книги: *Э. Вихман*, Квантовая физика (БКФ), «Наука», 1974, стр. 206—207. Об аналогичном опыте с фотонами см. там же, стр. 168—178. — *Прим. перев.*

3) Будем последовательно заменять свинец другими поглощающими элементами с меньшими номерами Z (81, 80, 79 ...), но с одинаковой радиационной длиной. Попытаемся регистрировать γ-кванты способом, указанным в п. 2.

4) Построим зависимость наблюдаемой интенсивности излучения γ-квантов от атомного номера Z соответствующего поглотителя. При некотором значении $Z = Z_1$ мы заметим резкое увеличение интенсивности наблюдаемого излучения. Иными словами, для веществ с $Z > Z_1$ регистрируются сравнительно сильные сигналы, а с $Z < Z_1$ — только слабые. Таким образом, получаем следующее неравенство:

Энергия границы K-полосы поглощения у элемента с номером $Z_1 + 1 \geqslant E_{3\to 2} \geqslant$ *Энергия границы K-полосы поглощения у элемента с номером* Z_1,

где $Z_1 = 81$, или

$$E_K(Z_1+1) \geqslant E_{3\to 2} \geqslant E_K(Z_1).$$

Из этого соотношения можно установить верхний и нижний пределы для массы мю-мезона:

$$203m_e \leqslant m_\mu \leqslant 209m_e.$$

Если бы масса мю-мезона оказалась значительно больше, то соответственно намного больше, чем 82, оказалось бы и число Z_1. Элемент с таким номером вряд ли удалось бы найти среди известных нам устойчивых элементов, и, следовательно, он был бы для нас недоступен.

IV. 10.2.

а) Энергия рассеянного излучения равна энергии излучения движущегося заряда:

$$\frac{\text{Энергия рассеянного излучения}}{\text{Единица времени}} = \frac{dw}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c^3}. \tag{1}$$

Если электрическое поле падающего излучения в месте расположения заряда равно E, то

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -e\frac{\mathbf{E}}{m}. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) в (1), находим

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}. \tag{3}$$

Интенсивность падающего излучения равна

$$I = \frac{cE^2}{4\pi}. \quad (4)$$

По определению сечение томсоновского рассеяния дается выражением

$$\sigma_T \equiv \frac{1}{I}\frac{dw}{dt}.$$

Таким образом, подставляя сюда выражения (3) и (4) для dw/dt и I, получаем

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \quad (5)$$

б) Томсоновское рассеяние — это предельный нерелятивистский случай комптоновского рассеяния. Кроме того, они совпадают, если рассматривается рассеяние излучения в прямом направлении при малом изменении длины волны, т. е.

$$\sigma_K = \sigma_T f(\cos\theta,\ E_\gamma),$$

где $f(1, E_\gamma \ll m_e c^2) \approx 1$.

в) Используя законы сохранения энергии и импульса, мы получаем следующую формулу для комптоновского рассеяния:

$$E_{\text{расс}} = \frac{E_{\text{пад}}}{E_{\text{пад}}(1-\cos\theta)/m_0c^2 + 1}. \quad (6)$$

Подставляя в эту формулу $\theta = 90°$, $m_0c^2 = m_ec^2 = 0{,}5$ МэВ и $E_{\text{пад}} = 0{,}5$ МэВ, находим энергию γ-квантов, рассеянных на электронах:

$$E_{\text{расс}} \approx 0{,}25 \text{ МэВ}.$$

Если происходит рассеяние на протоне, то $m_0c^2 = m_pc^2 \gg E_{\text{пад}}$ и

$$E_{\text{расс}} = E_{\text{пад}}.$$

Из формулы (5) следует, что сечение рассеяния пропорционально $1/m^2$. Отсюда для γ-квантов малых энергий получаем такое отношение сечений рассеяния на электронах и протонах:

$$\frac{\gamma + e^-}{\gamma + p^+} \approx \frac{m_p^2}{m_e^2} \approx 4\cdot 10^6.$$

VI. 10.3. Энергия осциллятора с квантовым числом n равна

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (1)$$

где ω — круговая частота осциллятора. Запишем соответствующее выражение для энергии из классической механики:

$$E_n = \frac{m}{2}A^2\omega^2, \quad (2)$$

где A — амплитуда колебаний. Из (1) и (2) следует

$$A^2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{\omega m}. \quad (3)$$

Подставляя в формулу излучения ускоренно движущегося заряда

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c^3}$$

величину $a = A\omega^2$, получаем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2A^2\omega^4}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^3}{mc^3}(2n+1)\hbar. \quad (4)$$

Согласно правилу отбора для осциллятора, $\Delta n = \pm 1$. Если электрон переходит из состояния с номером n в состояние с номером $n-1$, мы говорим, что он больше не находится в состоянии n. Следовательно, среднее время жизни осциллятора на уровне n

$$\tau = \frac{E_n - E_{n-1}}{dw/dt} = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2(2n+1)}.$$

IV. 10.4.

а) Частица массой m внутри потенциального ящика описывается уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = E\psi.$$

Поскольку на стенках ящика потенциал обращается в бесконечность, то на стенках волновая функция

$$\psi(x,\ y,\ z) = 0.$$

Собственные значения полной энергии E протона (или нейтрона) определяются выражением

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2ma^2},$$

где n_x, n_y и n_z — положительные целые числа, а a — размер потенциального ящика. В результате получаем

$$\frac{dn}{dE} = \frac{ma^2}{\pi^2\hbar^2 n}.$$

б) Поскольку полное число нейтронов (или протонов) связано с n соотношением

$$N\,(\text{или } Z) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi n^3\right)\cdot 2 = \frac{\pi n^3}{3},$$

или

$$n^2 = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{2/3}$$

(здесь n — положительно и каждому его значению соответствуют два спиновых состояния частицы), то получаем для нейтрона

$$E_f = 3^{2/}\pi^{4/3}\frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2ma^2}$$

и аналогично для протона

$$E_f = 3^{2/3}\pi^{4/3}\frac{\hbar^2 Z^{2/3}}{2ma^2}.$$

в) Обозначим $A/a^3 = \rho$, $N/A = \alpha_n$ и $Z/A = \alpha_p$. (*Замечание.* Не забудьте, что $A = N + Z$.) Поскольку ρ, α_n и α_p являются постоянными, а $N = \alpha_n A = \alpha_n \rho a^3$ и $Z = \alpha_p A = \alpha_p \rho a^3$, то

$$\frac{N^{2/3}}{a^2} = (\alpha_n\rho)^{2/3} = \text{const},$$

$$\frac{Z^{2/3}}{a^2} = (\alpha_p\rho)^{2/3} = \text{const}.$$

Следовательно, энергия E_f в выше написанных формулах — постоянная величина.

г) Здесь для оценки можно ввести общее потенциальное поле для всех протонов [1]). При этом все энергетические уровни протонов повысятся.

IV. 10.5.

Если предположить, что орбитальный момент $3d$-электрона в ионах Ti^{3+} полностью «заморожен», т. е. $\langle L_z\rangle = 0$, то орбитальное движение не дает никакого вклада в эффективный магнитный момент. (См. *Ch. Kittel.*, Introduction to Solid State Physics, 1971, стр. 629 [2]).) В этом случае мы имеем дело с нормальным эффектом Зеемана: происходит расщепление энергетических уровней в магнитном поле на подуровни с различными значениями m_s. Обозначим через $N_{1/2}$ (и $N_{-1/2}$) число электронов,

[1]) В действительности этот потенциал не постоянен. — *Прим. ред.*

[2]) См. перевод раннего издания этой книги (1956 г.): *Ч. Киттель*, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, 1963, стр. 244—251; см. также *Ч. Киттель*, Элементарная физика твердого тела, «Наука», 1965, стр. 267—271. — *Прим. перев.*

спин которых параллелен (и антипараллелен) направлению поля B. Мы имеем следующее отношение:

$$N_{1/2} : N_{-1/2} = \exp\left(\frac{x}{kT}\right) : \exp\left(-\frac{x}{kT}\right),$$

где (в предположении $g = 2$)

$$x = \frac{e\hbar B}{2mc} = 0{,}93\cdot 10^{-16}\ \text{эрг}.$$

(*Замечание.* Поскольку заряд электрона отрицательный, то направления спинового и магнитного моментов противоположны друг другу.) Отсюда находим относительную долю ионов титана, спин которых направлен по полю:

$$f = \frac{N_{1/2}}{N_{1/2} + N_{-1/2}} = \frac{1}{1 + \exp(-2x/kT)} = \frac{1}{1 + \exp(-1{,}86/1{,}38)} \approx 0{,}79.$$

IV. 11.1. Согласно принципу неопределенности, момент импульса копья $J = I\dot\theta$ и сопряженная с ним угловая координата θ не могут быть одновременно определены с произвольно высокой точностью, т. е.

$$I\dot\theta_0\cdot\theta_0 = \frac{1}{3}ml^2\dot\theta_0\theta_0 \approx \hbar; \qquad (1)$$

здесь l — длина копья, а θ_0 и $\dot\theta_0$ — возможные начальные значения угловой координаты и угловой скорости копья. Для оценки времени падения копья нужно определить порядок значений $\dot\theta_0$ и θ_0, соответствующих наилучшей балансировке копья в вертикальном положении. Проще всего предположить, что копье идеально сбалансировано, когда неопределенность его кинетической энергии равна по порядку величины неопределенности его потенциальной энергии [1]):

$$\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta_0^2 \approx \frac{1}{4}mg\theta_0^2 l$$

(в строго вертикальном положении потенциальная энергия копья принята равной нулю), или

$$\sqrt{\frac{l}{3}}\,\dot\theta_0 \approx \sqrt{\frac{g}{2}}\,\theta_0. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\theta_0^2 \approx \frac{\hbar}{ml^2}\sqrt{\frac{6l}{g}} \qquad (3)$$

[1]) В действительности это требует доказательства. — *Прим. ред.*

и

$$\dot{\theta}_0^2 \approx \frac{3\hbar}{ml^2}\sqrt{\frac{3g}{2l}}. \qquad (4)$$

Уравнение движения копья записывается в виде

$$mg\,\frac{l\sin\theta}{2} \approx \frac{1}{2}\,mgl\theta \equiv \textit{Вращающий момент} = I\ddot{\theta} = \frac{1}{3}\,ml^2\ddot{\theta},$$

или

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\,\theta.$$

Интегрируя это уравнение, находим решение

$$\theta = \theta_0 \exp\sqrt{\frac{3g}{2l}}\,t = \sqrt{\frac{\hbar}{ml^2}\sqrt{\frac{6l}{g}}}\exp\sqrt{\frac{3g}{2l}}\,t; \qquad (5)$$

здесь мы учли начальное условие (3). При $\theta \approx 1$ копье можно считать практически упавшим. Таким образом, из (5) получаем искомое время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{3g}}\,\ln\sqrt{\frac{ml^2}{\hbar}\sqrt{\frac{g}{6l}}}.$$

Если сюда подставить[1]) $l = 1000$ см и $m = 1$ г, то получим $t \approx 30$ с.

IV. 11.2.

а) Энергия волны квантована:

$$E = n\hbar\omega = n\hbar Dk^2.$$

Отсюда находим фазовую скорость

$$v = \frac{E}{P} = \frac{n\hbar Dk^2}{\hbar k} = nDk = nD\sqrt{\frac{\omega}{D}} = n\sqrt{D\omega}$$

и групповую скорость волны

$$u = \frac{dE}{dP} = \frac{dk}{dP}\frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar}(2n\hbar Dk) = 2nDk = 2n\sqrt{D\omega}.$$

б) Согласно закону излучения абсолютно черного тела, тепловая энергия имеет следующее распределение:

$$W(E_n) \sim \frac{1}{\exp\left(\frac{E_n}{\varkappa T}\right) - 1}$$

[1]) Автор подставляет далекие от действительности цифры. Однако, ввиду того что под знаком логарифма получается огромное число ($\approx 2\cdot 10^{16}$) и оно при подстановке реальных цифр изменяется не более чем на порядок, ответ оказывается практически тем же. — *Прим. перев.*

(здесь $\varkappa$ — постоянная Больцмана). Определяем интегральную по спектру плотность энергии:

$$u = \int_0^\infty E_n W(E_n)\,\frac{4\pi k^2\,dk}{\hbar^3},$$

где $4\pi k^2 dk/\hbar^3$ — плотность состояний. Подставляя в эту формулу выражения для E_n и $W(E_n)$, получаем

$$u = n\hbar D\int_0^\infty k^4\left[\frac{1}{\exp\left(\frac{n\hbar Dk^2}{\varkappa T}\right) - 1}\right]\frac{4\pi\,dk}{\hbar^3} =$$

$$= \frac{4\pi nD}{\hbar^2}\int_0^\infty \frac{k^4\,dk}{\exp\left(\frac{n\hbar Dk^2}{\varkappa T}\right) - 1} = \frac{4\pi nD}{\hbar^2}\left(\frac{\varkappa T}{n\hbar D}\right)^{5/2} f;$$

здесь

$$f = \int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{\exp(x^2) - 1} = \text{const}.$$

Следовательно,

$$u \sim T^{5/2}.$$

IV. 11.3.

а) Волновая функция является функцией пространственных координат x, y, z и времени t, описывающей состояние системы. При этом:

1) Волновая функция представляет собой амплитуду вероятности и может интерферировать сама с собой.

2) Квадрат модуля волновой функции характеризует вероятностное состояние рассматриваемой системы.

3) Она описывает состояние одиночной частицы[1]) (фотона, электрона и т. д.) в отличие от статистической функции распределения, которая характеризует состояние большого числа таких частиц.

б) $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$; на это правило векторного сложения двух моментов импульса $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ налагается следующее условие:

$$|J| = |J_1| - |J_2|,\quad |J_1| - |J_2| + 1,\ \ldots,\quad |J_1| + |J_2|;$$

здесь мы предположили, что $|J_1| > |J_2|$.

в) $\Delta j = 0,\ \pm 1$ (исключая $j = 0 \rightarrow j = 0$),

$$\Delta l = \pm 1,$$

$$\Delta m = \pm 1,\ 0.$$

[1]) В действительности важно не то, что частица одиночная (можно записать волновую функцию и для нескольких частиц), а отсутствие влияния «термостата». — *Прим. ред.*

г) Коммутатор операторов G и F должен быть равен нулю:

$$[G, F] = GF - FG = 0.$$

IV. 11.4. Используя принцип неопределенности, найдем сначала импульс нуклона. Если размер нуклона находится в пределах Δx, то его импульс должен быть порядка

$$\Delta P \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{10^{-27}}{3 \cdot 10^{-13}} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ дин} \cdot \text{с};$$

здесь Δx приближенно равно диаметру ядра углерода: $\Delta x \approx \approx 3 \cdot 10^{-13}$ см. Отсюда кинетическая энергия нуклона в основном состоянии равна

$$3\,\frac{(\Delta P)^2}{2m} \approx \frac{3\hbar^2}{2\,(\Delta x)^2\, m} \approx 7 \text{ МэВ}.$$

Средняя энергия нуклона должна быть несколько больше этого значения. В самом деле, применяя статистику Ферми для случая $kT \ll E_f$, мы получаем следующее выражение для средней энергии нуклона в ядре:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_f = \frac{3}{5}\,\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 n}{V}\right)^{2/3} = \frac{3}{5}\,\frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2}\left[\frac{3\pi^2 \cdot 6}{(4\pi/3)\,(3 \cdot 10^{-13})^3}\right]^{2/3} \approx$$

$$\approx \frac{3 \cdot (1{,}973 \cdot 10^{-11})^2 \cdot 12{,}6}{9380 \cdot (10^{-13})^2 \cdot 9} \approx 17 \text{ МэВ}$$

(вывод формулы для энергии Ферми E_f дан в решении задачи IV. 10.4).

IV. 11.5. В результате предполагаемой ядерной реакции на Солнце выделяется

$$\frac{4 \cdot 10^{26}}{26 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}} \approx 10^{38} \text{ атомов He в секунду.}$$

IV. 11.6. Энергия фотонов рентгеновского излучения в K-линиях спектра меди равна $\sim 13{,}6 \cdot (29 - 1)^2$ эВ $\approx 10{,}6$ кэВ.

IV. 11.7. Воспользуемся законом сохранения 4-импульса

$$P_1 + P_2 = P_f,$$

где P_f — суммарный 4-импульс частиц после столкновения. Следовательно,

$$2m_e^2 c^2 + 2m_e E_e = m_f^2 c^2,$$

откуда

$$E_e = \frac{m_f^2 c^2 - 2m_e^2 c^2}{2m_e}.$$

Условию $m_f = 4m_e$ соответствует минимальная энергия движущегося электрона, при которой происходит рождение пары электрон — позитрон. Следовательно, $E_e = 7m_e c^2$, т. е. пороговая кинетическая энергия электрона равна приблизительно 3 МэВ.

IV. 11.8. Потенциальная энергия системы минимальна, когда магнитные моменты неспаренных электронов принимают одинаковую ориентацию и спины электронов в состояниях с $n = 3$ выстраиваются в одном направлении. Следовательно, $S = (1/2)\,(6-2) = 2$. Далее, согласно правилу Хунда, $L = 2$ и $J = 4$. Таким образом, атом находится в состоянии

$$(1s^2,\ 2s^2,\ 2p^6,\ 3s^2,\ 3p^6,\ 4s^2,\ 3d^6)^5 D_4.$$

IV. 11.9. Величина расщепления между энергетическими подуровнями соответствует частоте

$$\Delta\gamma = \frac{1}{h}\, 2\mu_e B = \frac{2e\hbar B}{\hbar 4\pi mc}\, g_s s = \frac{eB}{2\pi mc} = \frac{e}{mc}\,\frac{B}{2\pi} =$$

$$= \frac{1{,}76 \cdot 10^7 \cdot 10^4}{6{,}28} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

IV. 11.10.

а) A, потому что $\Delta E_1 = \langle \psi_0, H_1 \psi_0 \rangle$ больше нуля при $H_1 > 0$.

б) A, так как $\Delta E_1 = \langle \psi_1, H_1 \psi_1 \rangle$ больше нуля.

в) D, поскольку $\Delta E_1 = \langle \psi_0, H_1 \psi_0 \rangle = 0$ для нечетной функции H_1, а во втором приближении

$$\Delta E_2 = \frac{|\langle \psi_0, H_1 \psi_1 \rangle|^2}{E_0 - E_1} < 0.$$

IV. 12.1.

а) Подставим $x = x_1 - x_2$, $R = x_1 + x_2$, $\psi = \psi_x \psi_R$ и приведенную массу $\mu = M/2$ в уравнение Шредингера для двух частиц с координатами x_1 и x_2. Тогда получим следующее уравнение, описывающее относительное движение:

$$H\psi_x \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2\right)\psi_x = E\psi_x.$$

После дифференцирования получаем

$$\left(-\frac{\mu k}{2\mu} x^2 + \frac{\hbar}{2\mu}\sqrt{\mu k} + \frac{1}{2} kx^2\right)\psi_x = E\psi_x,$$

или

$$\frac{\hbar}{2\mu}\sqrt{\mu k}\,\psi_x = E\psi_x,$$

откуда находим

$$E = \frac{\sqrt{\mu k}}{2\mu}\,\hbar = \sqrt{\frac{k}{4\mu}}\,\hbar = \sqrt{\frac{k}{2M}}\,\hbar.$$

б) Введем обозначение $y^2 = \sqrt{\mu k}\, x^2/\hbar$. Поскольку волновая функция для основного состояния системы записывается в виде

$$\psi_x = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right),$$

то

$$|\langle P_x\rangle| = \left|\left\langle \psi_x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi_x\right\rangle \Big/ \langle \psi_x, \psi_x\rangle\right| =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y^2} y \frac{(\mu k \hbar^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\, dy = \frac{\sqrt{\hbar\sqrt{\mu k}}}{\sqrt{\pi}}\, 2\int_0^\infty e^{-y^2} y\, dy = \frac{\sqrt{\hbar\sqrt{\mu k}}}{\sqrt{\pi}};$$

здесь мы учли, что

$$\int_0^\infty e^{-y^2}(2y\, dy) = \int_0^\infty e^{-z}\, dz = 1,$$

а $\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}/2$; $dy/dx = (\mu k/\hbar^2)^{1/4}$.

в) Пусть $\psi(p)$ — волновая функция в p-представлении. Она связана с ψ_x посредством преобразования Фурье

$$\psi(p) = \int_0^\infty e^{ipx/\hbar} e^{-\alpha x^2}\, dx;$$

здесь $\alpha = \sqrt{\mu k}/2\hbar$. Таким образом,

$$\psi(p) = \int_0^\infty \exp\left[-\alpha\left(x + \frac{ip}{2\hbar\alpha}\right)^2 - \alpha\left(\frac{ip}{2\hbar\alpha}\right)^2\right] dx \sim \exp\left(\frac{-p^2}{4\hbar^2\alpha}\right) \sim$$

$$\sim \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar\sqrt{\mu k}}\right).$$

Вероятность того, что импульс частицы примет значение $p < \sqrt{\hbar\sqrt{2Mk}} = p_0$, дается выражением

$$\int_0^{p_0} \psi^2(p)\, dp \Big/ \int_0^\infty \psi^2(p)\, dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_0} e^{-q^2}\, dq \equiv \Phi(q_0),$$

где $\Phi(q_0)$ — функция ошибок. Подставляя сюда

$$q_0 = \frac{p_0}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\mu k}}} = \frac{\sqrt{\hbar\sqrt{2Mk}}}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\mu k}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2M}}}{\sqrt{2\sqrt{\mu}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{4\mu}}}{\sqrt{2\sqrt{\mu}}} = 1,$$

находим, что искомая вероятность равна

$$\Phi(1) = 0{,}84.$$

IV. 12.2.

а) Пусть $\psi_{\text{пад}} = e^{ikz}$ и $\psi_{\text{расс}} = f(\theta)\ e^{ikr}/r$. Тогда мы можем записать

$$J_{\text{пад}} = \left\langle \psi_{\text{пад}}, \frac{P_z}{m}\psi_{\text{пад}}\right\rangle = \left\langle \psi_{\text{пад}}, \frac{\hbar}{im}\frac{d}{dz}\psi_{\text{пад}}\right\rangle = \frac{\hbar k}{m}.$$

Если же использовать для J известное выражение, антисимметризованное относительно $\psi_{\text{пад}}$ и $\bar\psi_{\text{пад}}$, то

$$J_{\text{пад}} = \frac{\hbar}{2im}\left[\bar\psi_{\text{пад}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\psi_{\text{пад}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial z}\bar\psi_{\text{пад}}\right)\psi_{\text{пад}}\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[(ik)\, e^{-ikz}e^{ikz} - (-ik)\, e^{-ikz}e^{ikz}\right] = \frac{\hbar}{2im}\, 2ik = \frac{\hbar k}{m}$$

и

$$J_{\text{расс}} = \frac{\hbar}{2im}\left[\bar\psi_{\text{расс}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi_{\text{расс}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r}\bar\psi_{\text{расс}}\right)\psi_{\text{расс}}\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{im}\left[f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\, ikf(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right] = \frac{\hbar k}{m}\left(\frac{|f(\theta)|}{r}\right)^2.$$

б) По определению дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{r^2 J_{\text{расс}}}{J_{\text{пад}}} = |f(\theta)|^2.$$

IV. 12.3. Прежде всего следует уточнить положения максимума и минимума кривой и поведение кривой между ними. Поэтому следует произвести измерения при следующих значениях E: 5,5, 6,25, 6,5, 6,75 и 7,5. Представляет интерес также исследовать асимптотическое поведение кривой при $E \gg 13$. Если обработка результатов измерений σ занимает немного времени, то можно вначале произвести три измерения: при $E_1 = 5{,}5$, $E_2 = 6{,}5$ и $E_3 = 7{,}5$, а затем, используя полученные новые данные, определить подходящие значения E для оставшихся двух измерений. Здесь следует стремиться к тому, чтобы получить максимальную информацию о характере кривой в тех областях, где ее поведение отклоняется от монотонного. Например, если $\sigma(E_i)$ сильно отличается от $\frac{1}{2}[\sigma(E_i + 0{,}5) + \sigma(E_i - 0{,}5)]$, где $i = 1$, 2 или 3, то нужно произвести дополнительные измерения в точках $E_i \pm 0{,}25$.

IV. 12.4. Вероятность отсчета n импульсов в секунду подчиняется нормальному (гауссову) закону распределения

$$P(n) = \frac{1}{\Delta n\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(n-N)^2}{2\,\Delta n^2}\right];$$

здесь Δn — среднеквадратичное отклонение n, а N — среднее число отсчетов.

При $N \gg 1$ имеем $\Delta n \approx \sqrt{N}$. Вероятность того, что счетчик зарегистрирует $n < 9700$ импульсов, определяется по формуле

$$P(n < 9700) = \frac{1}{\Delta n \sqrt{2\pi}} \int_0^{9700} \exp\left[-\frac{(n-N)^2}{2\Delta n^2}\right] dn \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} \exp(-x^2)\, dx \approx 0{,}0015.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x = \frac{n-N}{\sqrt{2}\,\Delta n} = \frac{n - 10\,000}{141{,}4}$$

и

$$x_0 = \frac{9700 - N}{\sqrt{2}\,\Delta n} = \frac{-300}{141{,}4} \approx -2{,}13.$$

IV. 12.5. Вероятность распада атома, отнесенная к единице времени, в момент t равна

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} \times \begin{array}{l}\textit{Вероятность существования атома}\\ \textit{после момента времени } t,\end{array}$$

где τ — среднее время жизни элемента, равное 10 дням. Вероятность распада атома в течение пятого дня составляет

$$\hat{P} = \int_4^5 P(t)\, dt = \frac{1}{\tau} \int_4^5 e^{-t/\tau}\, dt = -e^{-t/\tau}\Big|_{t=4}^{t=5} =$$

$$= e^{-0{,}4} - e^{-0{,}5} = 0{,}670 - 0{,}606 = 0{,}064.$$

IV. 12.6. Для преодоления столь огромного расстояния нейтрон должен двигаться со скоростью, близкой к скорости света, и поэтому обладать очень большой энергией. Чтобы достигнуть Земли, ему отведено время $t = 10$ лет, или около $\pi \cdot 10^8$ с. Согласно условию задачи, только половина нейтронов должна «выжить» к концу этого пути; отсюда мы получаем, что время, затрачиваемое нейтроном в его собственной системе отсчета на покрытие данного расстояния, должно быть равно периоду полураспада нейтрона, т. е. $t_0 = 12$ мин. Применяя соотношение

$$\gamma \equiv \frac{E_n}{m_n c^2} = \frac{t}{t_0},$$

где t — время, измеряемое на Земле, находим

$$E_n = \gamma(m_n c^2) = \frac{t}{t_0} m_n c^2 = \frac{\pi \cdot 10^8}{12 \cdot 60} m_n c^2 \approx (4{,}4 \cdot 10^5)\, m_n c^2 \approx$$

$$\approx (4{,}4 \cdot 10^5)(940 \text{ МэВ}) \approx 4 \cdot 10^8 \text{ МэВ}.$$

IV. 12.7. Пусть $L\hbar$ — момент относительного импульса обоих пионов. Четность системы равна $(-1)^L$. Пионы подчиняются статистике Бозе, так что система из двух пионов должна находиться в четном состоянии[1]). Следоватеельно, L четно для двух таких бесспиновых частиц, как пионы. Значит, $S_K = L$ четно.

IV. 12.8.

а) В случае трех зарядов минимальной энергии соответствует расположение зарядов в вершинах равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{3}\, R$.

б) В случае четырех зарядов минимальной энергии соответствует расположение зарядов в вершинах правильного тетраэдра с ребром $2R/\sqrt{3}$.

При таких конфигурациях заряды разнесены на максимально возможные расстояния друг от друга, а сами состояния симметричны относительно перестановки любых двух зарядов.

IV. 12.9.

$$\frac{Zze^2}{R} = \frac{90 \cdot 2 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{(1{,}3 \cdot 10^{-13}) \cdot 6 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-6})} \approx 30 \text{ МэВ};$$

здесь использована подстановка

$$R \approx \sqrt[3]{238}\,(1{,}3 \cdot 10^{-13} \text{см}) \approx 6 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-13} \text{см}.$$

IV. 12.10. Из условия равенства сил

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

имеем

$$GM = v^2 r.$$

Применяя квантовый постулат Бора, находим

$$v = \frac{n\hbar}{mr}.$$

Таким образом,

$$GM = v^2 r = \left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 r = \frac{n^2\hbar^2}{m^2 r}.$$

Отсюда при $n = 1$ получаем

$$r = a = \frac{n^2\hbar^2}{GMm^2} = \frac{1}{GMm}\left(\frac{\hbar^2}{m}\right) = \frac{1}{GMm}(e^2 a_0) = \frac{(e/m)^2}{GM/m} a_0 =$$

$$= \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{(6{,}7 \cdot 10^{-8}) \cdot 1840 \cdot (9{,}1 \cdot 10^{-28})^2} a_0 \approx 0{,}24 \cdot 10^{40} a_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{31} \text{см}$$

(здесь $a_0 = 5 \cdot 10^{-9}$ см).

[1]) Здесь не учитывается, что пионы — псевдоскалярные поля. — *Прим. ред.*

IV. 12.11. Радиус K-оболочки обратно пропорционален Z.

IV. 12.12. На уровни с $n = 3$, $l = 1$ и $n = 2$, $l = 1$.

IV. 12.13. $\sum\limits_{l=0}^{4} 2(2l + 1) = 50$.

IV. 12.14. Согласно статистике Ферми, волновая функция системы фермион — антифермион должна быть антисимметричной. Поэтому $(-1)^{l+s+1} = -1$, т. е. сумма $l + s$ должна быть четной (см. задачу IV. 7.3). Отсюда при $l = 1$ получаем $s = 1$, т. е. спины электрона и позитрона имеют одинаковую ориентацию. Поскольку заряды электрона и позитрона противоположны по знаку, то магнитные моменты обеих частиц антипараллельны, и суммарный магнитный момент системы равен нулю.

IV. 12.15. $\pm^1/_2$, $\pm^1/_2$, $\pm^1/_2$, $^3/_4$.

IV. 12.16. $\pm \dfrac{e\hbar}{2mc} B$.

IV. 12.17. $p = mc/2$.

IV. 12.18. При $h\nu \gg \alpha^2 m_e c^2$, где $(^1/_2)\alpha^2 m_e c^2 = 13{,}6$ эВ — энергия связи.

IV. 12.19. В квантовой механике значению $l = 0$ соответствует симметричное состояние. В полуклассической теории значение $l = 0$ исключается, а значению $l = 1$ соответствует круговая орбита (модель Зоммерфельда).

IV. 12.20. $4 \cdot 13{,}6$ эВ.

IV. 12.21. Комптоновское рассеяние и фотоэффект.

Глава 8

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 28. АТОМ БОРА

Основные формулы

Первый постулат Бора: электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, находясь на которых они не излучают энергии. Эти орбиты определяются условием

$$mv_n r_n = nh/2\pi, \qquad (28.1)$$

где r_n — радиус n-й орбиты, $mv_n r_n$ — момент импульса электрона на этой орбите, n — главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Второй постулат Бора: при переходе электрона с одной орбиты на другую атом излучает или поглощает квант энергии, равный

$$h\nu_{lk} = W_k - W_l, \qquad (28.2)$$

где W_l, W_k — энергии электрона на соответствующих орбитах.

Формула Бальмера — Ритца для длин волн линий спектра водорода

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right). \qquad (28.3)$$

Здесь n_l, n_k — целые числа ($n_k > n_l$). Число n_l определяет серию, n_k — отдельную линию этой серии. Величина

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1} \qquad (28.4)$$

называется постоянной Ридберга.

Сериальная формула для длин волн линий спектра водородоподобных ионов

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right), \qquad (28.5)$$

где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Частоты характеристического рентгеновского излучения определяются законом Мозли:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b), \qquad (28.6)$$

где

$$a = \sqrt{Rc\,(1/n_l^2 - 1/n_k^2)}, \qquad (28.7)$$

b — постоянная экранирования, зависящая сильно от серии (числа n_l) и слабо — от линии данной серии (числа n_k).

Методические указания

1. Имеется много задач, в которых рассматриваются спектры водорода и водородоподобных ионов (т. е. ионов, имеющих по одному электрону: He^+, Li^{++} и т. д.).

Чтобы с помощью формул (28.3), (28.5) находить длину волны λ (или частоту $\nu = c/\lambda$, или квант энергии $h\nu$), надо прежде всего, исходя из условия задачи, определить числа n_l и n_k, входящие в эти формулы. Так, для водорода числу $n_l = 1$ соответствует ультрафиолетовая серия (серия Лаймана); $n_l = 2$ — видимая серия (серия Бальмера), $n_l = 3$ — первая инфракрасная серия (серия Пашена), $n_l = 4$ — вторая инфракрасная серия (серия Брэкета), $n_l = 5$ — третья инфракрасная серия (серия Пфунда). Число n_k выражается формулой $n_k = n_l + N$, где N — номер спектральной линии в данной серии, взятый в порядке убывания длины волны. Например, для второй линии серии Пашена $n_l = 3$, $n_k = 3 + 2 = 5$.

2. Постоянная Ридберга [см (28.4)] вычислена в предположении, что в атоме водорода (или водородоподобного иона) электрон вращается вокруг *неподвижного* ядра. Это возможно лишь при условии, когда масса ядра бесконечно велика по сравнению с массой электрона. Поэтому постоянную Ридберга, определяемую по (28.4), часто обозначают через R_∞.

В действительности электрон и ядро вращаются вокруг их общего центра масс, что приводит к несколько иному значению для постоянной Ридберга. В самом деле, если умножить обе части формулы (28.5) на hc и сравнить ее с формулой (28.2), то получим

$$W_l = -\frac{RhcZ^2}{n_l^2},$$

т. е. при фиксированном числе n_l постоянная Ридберга оказывается пропорциональной полной энергии W_l атома. Но из законов механики следует, что между *действительной* полной энергией W атома и его полной энергией W_∞, вычисленной в предположении, что ядро неподвижно, существует связь

$$W = \frac{W_\infty}{1 + m/M},$$

где M — масса ядра, m — масса электрона. А так как величина R пропорциональна полной энергии атома, можно на основании этой формулы записать для точного значения постоянной Ридберга:

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m/M}, \qquad (28.8)$$

где $R_\infty = 1{,}097 \cdot 10^{-7}$ м$^{-1}$. Таким образом, величина R несколько различна для разных атомов. Это обстоятельство надо учитывать в задачах на сравнение спектров различных атомов (см. задачи № 28-3, 28-4).

3. При вычислении частоты характеристических рентгеновских лучей по закону Мозли следует иметь в виду, что спектральные серии обозначаются теми же буквами, что и электронные слои, переход электронов на каждый из которых вызывает данное излучение. Например, K-серия обусловлена переходом электронов на K-слой. При этом се-

риям (электронным слоям) K, L, M, N соответствуют квантовые числа n_i в формуле (28.7), равные 1, 2, 3, 4. Число n_k по-прежнему определяется формулой $n_k = n_i + N$, где N — номер линии в данной серии. Линии серии записываются в порядке уменьшения длины волны индексами α, β, γ, ... Например, вторая линия K-серии обозначается K_β; в этом случае $n_i = 1$, $n_k = 1 + 2 = 3$.

Если для решения задачи надо знать величину постоянной экранирования b, то руководствуются следующим: $b = 1$ для линии K_α и $b > 1$ для остальных линий K-серии (см. замечание к задаче № 28-5). Однако при приближенных расчетах считают величину b одинаковой для всех линий одной и той же серии. Тогда $b \approx 1$ для серии K и $b \approx 7{,}5$ для серии L.

Решение задач

28-1. Вычислить для атома водорода радиус первой боровской орбиты и скорость электрона на ней.

Решение. Радиус n-й боровской орбиты r_n и скорость v_n электрона на ней связаны между собой уравнением (28.1) первого постулата Бора. Чтобы иметь еще одно уравнение, связывающее величины r_n, v_n, запишем второй закон Ньютона для электрона, движущегося под действием кулоновской силы притяжения ядра* по круговой орбите. Учитывая, что ядром атома водорода является протон, заряд которого равен по модулю заряду электрона e, запишем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r_n^2} = m\,\frac{v_n^2}{r_n}, \qquad (1)$$

где m — масса электрона, v_n^2/r_n — центростремительное ускорение. Решив совместно (1) и (28.1), получим

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2}, \quad v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hn}.$$

Положив здесь $n = 1$ и произведя вычисление, найдем:

$$r = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{м}; \quad v = 2{,}2 \cdot 10^6\ \text{м/с}.$$

28-2. Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

Решение. *Потенциалом ионизации* U_i называют ту наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с данным невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по удалению электрона из атома A_i равна работе сил электрического поля, ускоряющего электрон, $A' = eU_i$, поэтому

$$A_i = eU_i. \qquad (1)$$

* Между электроном и ядром действует также гравитационная сила. Однако, как показывает расчет, эта сила пренебрежимо мала по сравнению с кулоновской силой.

Учитывая квантовый характер поглощения энергии атомом, можно сказать, что работа ионизации A_i равна кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой боровской орбиты на бесконечно удаленную орбиту. Тогда, применив формулу Бальмера — Ритца (28.3) и положив в ней $n_i = 1$, $n_k = \infty$, получим

$$A_i = h\nu = hc\,\frac{1}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right) = hcR. \qquad (2)$$

Теперь из (1), (2) найдем

$$U_i = hcR/e = 13{,}6\ \text{В}. \qquad (3)$$

Первый потенциал возбуждения U_1 есть та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с первой боровской орбиты на вторую. Снова приравняв работу сил ускоряющего электрического поля eU_1 кванту энергии $h\nu$, поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние, и положив в (28.3) $n_i = 1$, $n_k = 2$, получим

$$eU_1 = h\nu = hcR\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right) = \frac{3}{4}\,hcR,$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{3}{4}\,\frac{hcR}{e} = \frac{3}{4}\cdot 13{,}6\ \text{В} = 10{,}2\ \text{В}.$$

28-3. Найти разность ионизационных потенциалов водорода (H) и дейтерия (D).

Решение. Прежде всего выясним, в чем причина различия ионизационных потенциалов водорода и дейтерия. Дейтерий является одним из изотопов водорода, отличаясь от обычного водорода лишь массой ядра: $M_D \approx 2M_H$. Масса ядра определяет его гравитационное поле. Однако последнее не играет в атоме практически никакой роли (см. сноску к задаче № 28-1). Поэтому ионизационные потенциалы атомов H и D должны были бы совпадать.

Действительно, если рассуждения предыдущей задачи, приведенные для атома водорода, повторить теперь для атома дейтерия, то снова придем к формуле

$$U = hcR/e.$$

Однако, строго говоря, необходимо учесть, что постоянная Ридберга R различна для атомов H и D: точное ее значение, вычисленное с учетом движения электрона и ядра вокруг их общего центра масс, дается формулой (28.8). Тогда для ионизационных потенциалов водорода U_H и дейтерия U_D получим:

$$U_H = \frac{hcR_\infty}{1 + m/M_H}, \quad U_D = \frac{hcR_\infty}{1 + m/M_D},$$

где m — масса электрона, M_H, M_D — массы ядер водорода и дейтерия.

Учитывая, что $m \ll M_H < M_D$, найдем по формулам приближенного вычисления:

$$U_D - U_H = hcR_\infty\left(1-\frac{m}{M_D}\right) - hcR_\infty\left(1-\frac{m}{M_H}\right) = hcR_\infty\left(\frac{m}{M_H}-\frac{m}{M_D}\right).$$

Взяв из таблиц значения: $m = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг, $M_H = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг, $M_D = 3{,}35\cdot 10^{-27}$ кг — и произведя вычисление, получим

$$U_D - U_H = 13{,}6\cdot 0{,}000273\ \text{В} = 0{,}0037\ \text{В} = 3{,}7\ \text{мВ}.$$

28-4. Вычислить необходимую минимальную разрешающую силу спектрального прибора в двух случаях 1) чтобы разрешить первые 20 линий серий Бальмера; 2) чтобы при наблюдении спектра смеси водорода и ионизированного гелия разрешить первую линию серии Бальмера и вторую линию серии Пиккеринга.

Решение Серией Пиккеринга называют спектральную серию ионизированного гелия, соответствующую значениям квантовых чисел в (28.5) : $n_i = 4$, $n_k = 5, 6, 7, \ldots$ Разрешающая сила спектрального прибора определяется соотношением (24.4). Так как с увеличением номера спектральной линии одной и той же серии разность длин волн $\delta\lambda$ соседних линий уменьшается (линии располагаются все теснее), то, очевидно, все первые 20 линий серии Бальмера будут разрешены, если будут разрешены двадцатая (λ_{20}) и двадцать первая (λ_{21}) линии этой серии. Поэтому согласно (24.4) для минимальной разрешающей силы спектрального прибора получим

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{20}-\lambda_{21}}.$$

Длины волн λ_{20}, λ_{21} найдем по формуле Бальмера — Ритца (28.3), положив $n_i = 2$, $n_k = 22$ (для λ_{20}) и $n_k = 23$ (для λ_{21}):

$$\frac{1}{\lambda_{20}} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{22^2}\right) = \frac{R}{4{,}0333};\quad \frac{1}{\lambda_{21}} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{23^2}\right) = \frac{R}{4{,}0305}.$$

Отсюда

$$r = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{20}-\lambda_{21}} = \frac{4{,}0333}{4{,}0333-4{,}0305} = 1{,}41\cdot 10^3.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, выразим длину волны λ_H первой линии серии Бальмера по формуле (28.3), а длину волны λ_{He} второй линии серии Пиккеринга — по сериальной формуле (28.5), положив для гелия $Z = 2$. Тогда получим:

$$\frac{1}{\lambda_H} = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 7{,}2\,R; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda_{He}} = 4R\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}\right) = R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 7{,}2R. \qquad (2)$$

Из формул (1), (2) следует, что длины волны λ_H, λ_{He} совпадают. Поэтому, казалось бы, разрешить соответствующие линии двух спектров нельзя. Однако в действительности величины λ_H, λ_{He} несколько отличаются друг от друга, так как постоянная Ридберга R различна для атомов водорода и гелия вследствие различия их масс, как это следует из (28.8). Поэтому более точно формулы (1), (2) надо записать так:

$$\frac{1}{\lambda_H} = 7{,}2\,R_H = \frac{7{,}2\,R_\infty}{1+m/M_H};\quad \frac{1}{\lambda_{He}} = 7{,}2\,R_{He} = \frac{7{,}2\,R_\infty}{1+m/M_{He}}.$$

Отсюда

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda_H}{\lambda_H-\lambda_{He}} = \frac{1+m/M_H}{(1+m/M_H)-(1+m/M_{He})} = \frac{M_H+m}{M_{He}-M_H}\,\frac{M_{He}}{m}.$$

Взяв из таблиц значения величин $M_H = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг, $M_{He} = 3{,}35\cdot 10^{-27}$ кг, $m = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг — и выполнив вычисление, найдем

$$r = 7{,}3\cdot 10^3.$$

28-5. Антикатод рентгеновской трубки покрыт молибденом ($Z = 42$). Найти приближенно минимальную разность потенциалов, которую надо приложить к трубке, чтобы в спектре рентгеновского излучения появились линии K-серии молибдена.

Решение. В отличие от задачи № 27-1, где рассматривалось тормозное рентгеновское излучение со сплошным спектром, здесь речь идет о *характеристических* рентгеновских лучах, дающих линейчатый спектр Как известно, характеристическое рентгеновское излучение обусловлено электронными переходами в глубокие электронные слои атома Серия K возникает при переходах электронов на самый глубокий слой K ($n = 1$) из менее глубоких электронных слоев L ($n = 2$), M ($n = 3$) и т. д. Но чтобы любой из этих переходов стал возможным, необходимо появление вакантного места в K-слое. Для этого один из двух электронов K-слоя должен быть вырван из атома (или переведен на внешний, не заполненный электронами слой), так как внутренние слои L, M и т. д. целиком заполнены электронами.

Минимальную энергию, необходимую для удаления электрона K-слоя из атома, можно приближенно вычислить по закону Мозли. Действительно, из (28 6) и (28 7) следует, что квант энергии характеристических рентгеновских лучей равен

$$\varepsilon = h\nu = ha^2(Z-b)^2 = hc\,R\,(Z-b)^2\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_k^2}\right). \qquad (1)$$

Положив в (1) $n_i = 1$, $n_k = \infty$ и приняв приближенно, что постоянная экранирования $b = 1$ для всех линий K-серии, найдем энергию ε' излучения атома, соответствующую переходу внешнего электрона на K-слой:

$$\varepsilon' = hcR\,(Z-1)^2. \qquad (2)$$

Очевидно, такую же энергию должен поглотить атом при обратном процессе — вырывании электрона из K-слоя, что необходимо для появления линий K-серии.

Эту энергию ε' атом молибдена получает в результате удара об антикатод электрона, обладающего кинетической энергией eU [см. формулу (1) задачи № 27-1]. Разность потенциалов U будет минимальной, когда *вся* энергия электрона $eU_{мин}$ поглощается атомом, т. е.

$$eU_{мин} = \varepsilon'. \tag{3}$$

Из (3) и (2) получим

$$U_{мин} = \frac{hcR}{e}(Z-1)^2. \tag{4}$$

Используя результат (3) задачи № 28-2, найдем

$$U_{мин} = 13{,}6 \cdot (42-1)^2 \text{ В} = 23 \cdot 10^3 \text{ В} = 23 \text{ кВ}.$$

З а м е ч а н и е. Вычисленный результат для $U_{мин}$ оказался завышенным по сравнению с его истинным значением (20 кВ), так как, приняв в формуле (1) постоянную экранирования $b = 1$, мы учли лишь экранирующее действие одного электрона K-слоя. Это верно при электронном переходе $L \to K$, что соответствует K_α-линии и числу $n_k = 2$ в формуле (1). В данном же случае ($n_k = \infty$) оказывают слабое экранирующее действие и все остальные электроны атома. Поэтому $b > 1$.

§ 29. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Основные формулы

Формула де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \tag{29.1}$$

где λ — длина волны, соответствующая частице с импульсом p; $\hbar = h/2\pi = 1{,}06 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant 2\pi\hbar, \tag{29.2}$$

где Δx — неопределенность координаты частицы, Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на ось x.

Вероятность пребывания частицы в объеме dV

$$dP = |\psi|^2\, dV, \tag{29.3}$$

где ψ — волновая функция, $|\psi|^2$ — плотность вероятности.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\,\psi = 0. \tag{29.4}$$

Здесь ψ — волновая функция, описывающая состояние частицы Δ — оператор Лапласа $\left(\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$, W — полная энергия частицы, U — ее потенциальная энергия.

Собственная волновая функция частицы, находящейся в бесконечно глубоком одномерном потенциальном ящике (рис 29-1),

$$\psi(x) = \sqrt{2/l}\,\sin(\pi n x/l) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{29.5}$$

где l — длина ящика, x — координата ($0 < x < l$)

Коэффициент отражения волн де Бройля от низкого ($U < W$) потенциального барьера бесконечной ширины (рис. 29-2) определяется формулой

$$R = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2, \tag{29.6}$$

где k_1, k_2 — значения волнового числа в областях I, II (волновое число $k = 2\pi/\lambda$).

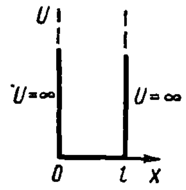


Рис. 29-1

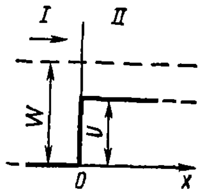


Рис 29-2

Собственная волновая функция, отвечающая 1s-состоянию (основному) электрона в атоме водорода,

$$\psi(r) = e^{-r/a}/\sqrt{\pi a^3}, \tag{29.7}$$

где r — расстояние от ядра, $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/me^2$ — радиус первой боровской орбиты

Собственные значения энергии электрона в атоме водорода

$$W_n = -me^4/32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2, \tag{29.8}$$

где n — главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Орбитальный момент импульса M_l электрона и его проекция M_{lz} на заданное направление z определяются формулами:

$$M_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \tag{29.9}$$

$$M_{lz} = m_l\hbar, \tag{29.10}$$

где l — орбитальное квантовое число ($l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), m_l — магнитное квантовое число ($m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$).

Спиновый момент импульса M_s электрона и его проекция M_{sz} на заданное направление z выражаются формулами:

$$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \tag{29.11}$$

$$M_{sz} = m_s\hbar, \tag{29.12}$$

где $m_s = \pm s = \pm 1/2$ — спиновое квантовое число.

Результирующие орбитальный M_L и спиновый M_S моменты импульса многоэлектронного атома (имеются в виду атомы с нормальной, или рессель-саундеровской, спин орбитальной связью):

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \tag{29.13}$$

$$M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}, \tag{29.14}$$

где L — квантовое число результирующего орбитального момента, S — квантовое число результирующего спинового момента. (Правила определения возможных значений чисел L и S изложены на стр. 317, 318.)

Полный момент импульса $\mathbf{M}_J$ атома определяется формулами:

$$\mathbf{M}_J = \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_S, \quad (29.15)$$

$$M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}, \quad (29.16)$$

где J — квантовое число полного момента импульса ($J = L + S,\ L + S - 1, \ldots$ $\ldots, |L - S|$).

А. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ

Методические указания

1. Нередко для решения задачи требуется выразить импульс p частицы через ее кинетическую энергию T (или наоборот). При этом, а также при вычислении скорости частицы по (29.1) надо различать случаи классических и релятивистских частиц*. Заметим, что во всех случаях движения электрона в *атоме*, где его кинетическая энергия измеряется лишь несколькими электронвольтами, релятивистскими эффектами можно вполне пренебречь.

2. С помощью соотношения неопределенностей (29.2) решают не только задачи, в которых требуется определить наименьшее значение одной из двух неопределенностей Δx, Δp_x при заданном значении другой (в этом случае в формуле пишут знак равенства), но и задачи на приближенный расчет наименьшего значения *самих величин*: линейных размеров области l, в которой находится частица, или импульса p частицы (или связанной с импульсом кинетической энергии T). В задачах второго типа руководствуются следующими соображениями:

1) если даны линейные размеры области l, в которой находится частица, то считают $\Delta x \approx l$; если известен модуль импульса p, но неизвестно его направление, то полагают $\Delta p \approx p$ (см. задачу № 29-3);

2) искомая величина не может быть меньше наименьшей неопределенности в ее измерении, т. е. в качестве минимального значения искомой величины приближенно берут минимальную неопределенность этой величины: $l_{\text{мин}} = (\Delta x)_{\text{мин}}$, $p_{\text{мин}} = (\Delta p)_{\text{мин}}$.

Решение задач

29-1. Найти длину волны де Бройля для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) $T = 100$ эВ; 2) $T = 3{,}0$ МэВ.

Решение. Как видно из соотношения (29.1), определяющего длину волны де Бройля, задача сводится к выражению импульса p электрона через его кинетическую энергию T. Решение задачи зависит от того, классической или релятивистской частицей следует считать электрон.

1. Так как $T \ll m_0c^2$, где $m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ — энергия покоя электрона, то в данном случае электрон является классической частицей. Значит, его импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Отсюда

$$p = \sqrt{2mT}. \quad (1)$$

Подставив это значение импульса в (29.1), получим

$$\lambda_1 = 2\pi\hbar/\sqrt{2mT}.$$

Заменим в формуле величины их числовыми значениями, выраженными в единицах СИ: $2\pi\hbar = h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, $T = 1{,}00 \cdot 10^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Выполнив вычисление, найдем

$$\lambda_1 = 1{,}23 \cdot 10^{-10}\ \text{м} = 1{,}23\ \text{Å}.$$

2. Теперь $T > m_0c^2$. Поэтому электрон следует считать релятивистской частицей, импульс и кинетическая энергия которой выражаются формулами (18.5), (18.6). Исключив из этих формул величину β, получим

$$p = \sqrt{2m_0T(1 + T/2m_0c^2)}, \quad (2)$$

где $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона. Следовательно,

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0T(1 + T/2m_0c^2)}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + T/2m_0c^2}}.$$

Взяв величины T и m_0c^2 в мегаэлектронвольтах и произведя вычисление, найдем

$$\lambda_2 \approx \lambda_1/2 = 0{,}62\ \text{Å}.$$

29-2. Параллельный пучок электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой $a = 2{,}0$ мкм. Определить скорость электронов (считая ее одинаковой для всех частиц), если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии $l = 50$ см, ширина центрального дифракционного максимума $b = 80$ мкм.

Решение. Дифракция электронов является следствием волновой природы частиц. Поэтому для определения скорости электронов применим формулу де Бройля (29.1), откуда

$$v = 2\pi\hbar/m\lambda. \quad (1)$$

Чтобы найти длину волны де Бройля λ, воспользуемся тем обстоятельством, что дифракционная картина, возникающая при прохождении через узкую щель параллельного пучка электронов, вполне соответствует дифракционной картине, полученной от этой же щели при освещении ее параллельным пучком монохроматического света, длина волны которого равна длине волны де Бройля для электрона.

---

* См. «Общие замечания» к § 18, а также формулы (18.2), (18.5), (18.6).

Это значит, что в случае дифракции электронов положение дифракционных минимумов можно определять по формуле (24.2), если понимать в ней под λ длину волны де Бройля для электрона.

Воспользуемся решением задачи № 24-2, основанным на применении формулы (24.2). По-прежнему считая, что центральный дифракционный максимум заключен между двумя минимумами первого порядка и учитывая соотношение между величинами b и l, получим (см. рис 24-2)

$$\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = b/2\,l.$$

Отсюда, полагая в формуле (24.2) $k = 1$, имеем

$$\lambda = ab/2l.$$

Подставив это значение λ в (1), найдем

$$v = 4\pi\hbar l/mab. \qquad (2)$$

Произведем вычисление по (2), предположив, что $v \ll c$. Считая электрон классической частицей, пренебрежем зависимостью его массы от скорости. Тогда $m = m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг и расчет дает

$$v = 4{,}5 \cdot 10^6 \text{ м/с}. \qquad (3)$$

• Так как в действительности масса движущегося электрона *не меньше* его массы покоя m_0, то истинное значение скорости v, определяемое по (2), будет *не больше*, чем вычисленное нами. Таким образом, предположение о том, что $v \ll c$, соответствует действительности и, значит, результат (3) правильный.

Замечание. Если бы полученный результат противоречил неравенству $v \ll c$, это означало бы, что электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, масса которой зависит от скорости. Тогда, чтобы получить ответ, надо подставить в (2) вместо m ее значение по формуле (18.2) и решить квадратное относительно v уравнение.

29-3. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ. Исходя из соотношения неопределенностей, найти наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

Решение. Как следует из соотношения неопределенностей (29.2), неточность координаты частицы

$$\Delta x \geqslant \frac{2\pi\hbar}{\Delta p_x}. \qquad (1)$$

Величина Δp_x неизвестна, однако сам импульс p (точнее: его среднее квадратичное значение) легко найти, поскольку нам известна средняя кинетическая энергия T электрона. Рассматривая электрон как нерелятивистскую частицу (так как $T \ll m_0c^2$), запишем выведенное в задаче № 29-1 соотношение между величинами p, T:

$$p = \sqrt{2mT}. \qquad (2)$$

Теперь сравним величины Δp_x, p. Поскольку импульс **p** — вектор, то формула (2) позволяет лишь вычислить модуль этого вектора, тогда как его направление остается неизвестным. Поэтому проекция p_x импульса на какую-либо фиксированную ось x оказывается неопределенной: ее величина лежит в интервале $(-p,\ p)$. Это значит, что неопределенность проекции импульса на ось x равна

$$\Delta p_x = 2\,p \text{ или } \Delta p_x \sim p,$$

т. е. величины Δp_x и p одного порядка. Поэтому заменив Δp_x в формуле (1) величиной p и учитывая соотношение (2), получим ответ:

$$\Delta x \geqslant \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}}. \qquad (3)$$

Произведя вычисления по (3), найдем

$$\Delta x \geqslant 10^{-10} \text{ м}.$$

Следовательно, наименьшая, допустимая соотношением неопределенностей неточность $(\Delta x)_{\text{мин}}$, с которой можно определить координату электрона в атоме водорода, есть величина порядка 10^{-10} м.

Замечание. Сравнив полученный результат с ответом к задаче № 28-1, видим что $(\Delta x)_{\text{мин}} = 2r$, где r — радиус первой боровской орбиты. Отсюда следует, что боровскую орбиту нельзя представлять как траекторию, по которой движется электрон, так как он может оказаться в любом месте атома, находящегося в определенном (в данном случае — невозбужденном) состоянии, а не только на расстоянии r от ядра. Из решения задачи № 29-8 видно, что r есть *наиболее вероятное* расстояние, на котором можно встретить электрон в атоме.

Б. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦ

Методические указания

1. Так как микрообъекты проявляют наряду с корпускулярными также и волновые свойства, состояние «частицы» в квантовой механике описывается волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$, зависящей от координат и времени. В курсе общей физики обычно рассматривают движение частиц лишь в постоянном во времени силовом поле (при этом потенциальная энергия U частицы не зависит явно от времени). В этом случае функция $\Psi(x, y, z, t)$ распадается на два сомножителя, один из которых зависит только от времени, другой — только от координат:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-iWt/\hbar} \cdot \psi(x, y, z).$$

Такая функция описывает монохроматическую стоячую волну де Бройля с амплитудой $\psi(x, y, z)$, квадрат модуля которой согласно (29.3) определяет вероятность dP пребывания частицы в данном элементе объема dV. Зная величину $\psi(x, y, z)$ как функцию координат [функцию $\psi(x, y, z)$ также называют волновой функцией], можно найти вероятность пребывания частицы в заданном объеме V по формуле

$$P = \int\limits_V |\psi|^2 \, dV,$$

где тройной интеграл берется по всей области изменения переменных x, y, z. Таким образом, знание волновой функции $\psi(x, y, z)$ позволяет решать задачи на вычисление вероятности пребывания частицы в данной области.

2. Волновая функция $\psi(x, y, z)$ может быть найдена путем решения уравнения Шредингера для стационарных состояний (29.4) (его называют также *амплитудным уравнением Шредингера*).

Решение уравнения Шредингера зависит от вида входящей в него функции $U(x, y, z)$. В связи с математическими трудностями, возникающими при решении уравнения, в курсе общей физики обычно ограничиваются одномерными задачами, когда $U = U(x)$; при этом рассматривают лишь случаи, в которых потенциальная энергия постоянна в определенных интервалах изменения координаты x, но испытывает скачки на их границах. Эти случаи соответствуют частице, находящейся в потенциальном ящике (см. рис. 29-1), а также движению частицы при наличии низкого или высокого потенциального барьера (рис. 29-2, 29-3).

При $U(x) = \text{const}$ уравнение (29.4) принимает вид

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0 \text{ при } U < W, \qquad (29.17)$$

где

$$k = \sqrt{2m(W - U)}/\hbar; \qquad (29.18)$$

$$\psi''(x) - k^2\psi(x) = 0 \text{ при } U > W, \qquad (29.19)$$

где

$$k = \sqrt{2m(U - W)}/\hbar. \qquad (29.20)$$

Уравнения (29.17), (29.19) — дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Из теории дифференциальных уравнений известно, что их общие решения соответственно для (29.17) и (29.19) таковы:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx; \qquad (29.21)$$

$$\psi(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}, \qquad (29.22)$$

где A, B, C, D — постоянные. Их значения (или соотношения между ними) находят, используя свойства волновой функции, обусловленные ее физическим смыслом: она должна быть однозначной, конечной и непрерывной во всей области изменения x; ее производная $\psi'(x)$ также должна быть непрерывной. Кроме того, волновая функция

должна отвечать условию нормировки, которое для одномерной задачи имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1.$$

3. Из перечисленных свойств волновой функции следует, что волновое число k и, значит, полная энергия частицы W могут иметь во многих случаях не любые значения, а лишь ряд определенных значений: k_1, k_2, k_3, ..., W_1, W_2, W_3, ... Эти *уровни энергии* W_i можно найти, исследуя полученное решение уравнения Шредингера для ψ-функции. В отдельных случаях, например когда частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, уровни энергии можно определить, не решая уравнения Шредингера, а лишь используя указанные выше свойства волновой функции, рассматривая ее как амплитуду стоячих волн де Бройля (см. задачу № 29-4).

Решение задач

29-4. Электрон находится в одномерном бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной l (рис. 29-1). Вычислить наименьшую разность двух соседних энергетических уровней (в электронвольтах) электрона в двух случаях: 1) $l = 10$ см; 2) $l = 10$ Å.

Решение. Задачу можно было бы решить с помощью уравнения Шредингера (29.4), однако необходимости в этом нет, достаточно использовать лишь некоторые свойства волновой функции.

Так как внутри потенциального ящика (при $0 \leqslant x \leqslant l$) потенциальная энергия электрона $U = 0$, то его полная энергия есть кинетическая энергия T. Согласно закону сохранения энергии, при движении электрона $T = \text{const}$. Следовательно, сохраняется и импульс электрона $p = \sqrt{2mT}$. Учитывая два возможных направления движения электрона вдоль оси x, запишем для проекций импульса на ось x:

$$p_{x1} = p; \; p_{x2} = -p.$$

Согласно соотношению де Бройля, двум, отличающимся лишь знаком проекциям p_x импульса соответствуют две плоские монохроматические волны де Бройля, распространяющиеся в противоположных направлениях вдоль оси x. В результате их интерференции возникнут *стоячие волны* де Бройля, характеризующиеся стационарным, т. е. не зависящим от времени, распределением вдоль оси x амплитуды колебаний. Эта амплитуда и есть волновая функция $\psi(x)$, квадрат которой согласно формуле (29.3) определяет плотность вероятности пребывания электрона в точке с координатой x.

Так как потенциальный ящик бесконечно глубок ($U = \infty$ при $x < 0$ и $x > l$), электрон не может оказаться за его пределами. Поэтому $\psi(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > l$. Отсюда в силу свойства непрерывности волновой функции следует

$$\psi(0) = 0, \; \psi(l) = 0.$$

Таким образом, амплитуда колебаний в стоячей волне де Бройля равна нулю в точках $x = 0$, $x = l$, т. е. здесь находятся узлы стоячей волны. Поскольку расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины волны, то в потенциальном ящике могут быть лишь волны де Бройля, длина которых удовлетворяет условию

$$l = n\lambda_n/2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

т. е. на ширине ящика l должно укладываться целое число полуволн*. Отсюда

$$\lambda_n = 2\, l/n. \tag{1}$$

Из соотношения (1) делаем вывод, что в потенциальном ящике существуют *уровни энергии* частицы. Действительно, полная энергия электрона в ящике с учетом (29.1) равна

$$W = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\lambda^2}.$$

Подставив сюда значение λ из (1), получим

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\, n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Так как отношение уровней энергии $W_1 : W_2 : W_3 \ldots = 1 : 4 : 9\ldots$, то наименьшая разность уровней

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ml^2} - \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ml^2}. \tag{3}$$

Произведя вычисление по (3), найдем для двух случаев:
1) $\Delta W = 1{,}8 \cdot 10^{-35}$ Дж $= 1{,}1 \cdot 10^{-16}$ эВ;
2) $\Delta W = 1{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 1{,}1$ эВ.

29-5. Частица находится в основном состоянии ($n = 1$) в одномерном потенциальном ящике шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < l$). Найти вероятность пребывания частицы в областях: $0 < x < l/3$ и $l/3 < x < 2l/3$.

Решение. Вероятность dP пребывания частицы в интервале dx выразим через плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ при помощи формулы (29.3), которая для данного случая одномерной задачи примет вид

$$dP = |\psi(x)|^2\, dx.$$

Отсюда вероятность найти частицу в области $0 < x < l/3$ выразится интегралом:

$$P_1 = \int_0^{l/3} |\psi(x)|^2\, dx. \tag{1}$$

* Аналогичная ситуация встречалась уже в задаче № 20-3 при рассмотрении упругих волн в стержне. Данный случай соответствует стержню, закрепленному на концах.

Так как частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, то, положив $n = 1$, по формуле (29.5) получим для собственной волновой функции:

$$\psi(x) = \sqrt{2/l}\,\sin(\pi x/l).$$

Подставив это значение $\psi(x)$ в (1), найдем

$$P_1 = \frac{2}{l}\int_0^{l/3} \sin^2\frac{\pi x}{l}\, dx.$$

Используя соотношение $\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, вычислим интеграл:

$$P_1 = \frac{1}{l}\left[\int_0^{l/3} dx - \int_0^{l/3} \cos\frac{2\pi x}{l}\, dx\right] = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{3} - \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0,195.$$

Вероятность P_2 пребывания частицы в области $l/3 < x < 2\,l/3$ (т. е. в средней трети ящика) можно вычислить тем же способом, которым мы нашли вероятность P_1. Но можно поступить проще. Если сложить вероятности P_1, P_2, P_3 пребывания частицы соответственно в первой, второй и третьей частях ящика, то получим вероятность пребывания частицы во всем ящике, которая равна единице, как вероятность достоверного события. Учитывая при этом, что в силу симметрии ящика $P_1 = P_3$, получим

$$P_2 = 1 - 2P_1 = 0{,}61.$$

29-6. Пучок электронов с энергией $W = 25{,}0$ эВ встречает на своем пути потенциальный барьер высотой $U = 9{,}0$ эВ (рис. 29-2). Определить коэффициент отражения R и коэффициент пропускания D волн де Бройля для данного барьера.

Решение. В силу неравенства $U < W$ данный потенциальный барьер является *низким*. Поэтому для вычисления коэффициента отражения R воспользуемся формулой (29.6). Чтобы найти входящие в нее волновые числа k_1, k_2, выразим длины волн де Бройля λ_1, λ_2, соответствующие областям I, II, через импульсы p_1, p_2 электрона, а последние — через его кинетические энергии. При этом учтем, что в области I кинетическая энергия равна полной энергии W (так как $U = 0$), а в области II она, согласно закону сохранения энергии, равна $W - U$. Тогда получим

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{p_1} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW}}, \tag{1}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{p_2} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(W-U)}}. \tag{2}$$

Отсюда

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar},$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{2m(W-U)}}{\hbar}.$$

Подставив эти значения k_1, k_2 в формулу (29.6) и произведя сокращение, имеем

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{W} - \sqrt{W-U}}{\sqrt{W} + \sqrt{W-U}}\right)^2 = \left(\frac{5-4}{5+4}\right)^2 = \frac{1}{81}.$$

Чтобы найти коэффициент пропускания D, выясним смысл коэффициентов R, D с корпускулярной точки зрения. Пусть за некоторый промежуток времени к барьеру подлетело n электронов. Из них n' электронов отразилось от барьера, а n'' электронов прошло через барьер. Тогда

$$R = n'/n; \quad D = n''/n.$$

Так как $n' + n'' = n$, то

$$R + D = 1.$$

Отсюда находим

$$D = 1 - R = 1 - 1/81 = 80/81.$$

29-7. Пучок электронов с энергией $W = 25$ эВ встречает на своем пути потенциальный барьер высотой $U = 26$ эВ (рис. 29-3). Определить относительную плотность вероятности η пребывания электрона в области II на расстоянии $x = 1{,}0$ Å от границы областей I, II (т. е. отношение плотности вероятности пребывания электрона в точке $x = 1{,}0$ Å к плотности вероятности его пребывания на границе областей при $x = 0$).

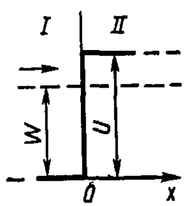


Рис. 29-3

Р е ш е н и е. Здесь в отличие от предыдущей задачи дан *высокий* ($U > W$) потенциальный барьер бесконечной ширины. Несмотря на то, что в этом случае коэффициент отражения $R = 1$, т. е. *все* падающие на барьер электроны отражаются, существует вероятность обнаружить электрон и в области II, за барьером. Чтобы найти эту вероятность, надо решить уравнение Шредингера (29.4). В данном случае одномерной задачи оно запишется с учетом неравенства $U > W$ так:

$$\psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U - W)\,\psi(x) = 0.$$

Решение этого уравнения (см. стр. 312) дается формулой (29.22). Из нее следует: если $x \to \infty$, то $\psi \to \infty$. Но волновая функция по своему физическому смыслу должна оставаться конечной при всех значениях x. Следовательно, $C = 0$. Поэтому из (29.22) с учетом (29.20) получим

$$\psi(x) = De^{-kx} = De^{-\sqrt{2m(U-W)}\,x/\hbar}.$$

Значит, плотность вероятности пребывания частицы в точке x равна

$$|\psi(x)|^2 = D^2\, e^{-2\sqrt{2m(U-W)}\,x/\hbar}.$$

Отсюда относительная плотность вероятности

$$\eta = \frac{|\psi(x)|^2}{|\psi(0)|^2} = e^{-2\sqrt{2m(U-W)}\,x/\hbar}.$$

Выразим числовые значения величин, входящих в формулу, в единицах СИ: $\hbar = 1{,}06 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $U - W = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж, $x = 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ м. Произведя вычисление, найдем

$$\eta = 0{,}3.$$

В СТРОЕНИЕ АТОМОВ

Методические указания

1. В зависимости от значения орбитального квантового числа l состояния электрона в атоме записывают различными буквами. Значениям $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ соответствуют буквы $s, p, d, f, g, h, \ldots$ (далее по алфавиту); перед ними указывают значение главного квантового числа n. Например, электрон в состоянии с $n = 2$ и $l = 1$ обозначается символом $2p$.

2. Решение задач на определение результирующих орбитального M_L и спинового M_S моментов импульса многоэлектронного атома связано с вычислением возможных значений квантовых чисел L и S, входящих в формулы (29.13), (29.14). При этом руководствуются следующими правилами:

а) так как каждая из величин M_L и M_S равна нулю для заполненных оболочек атома*, то последние не учитываются при вычислении L и S;

б) квантовое число L принимает все целочисленные значения, заключенные между наибольшим и наименьшим значениями векторной суммы $\Sigma \mathbf{l}_i$, где l_i — квантовые числа отдельных электронов, определяющие, согласно (29.9), их моменты импульса M_l. Так, для двух электронов с квантовыми числами l_1 и l_2 имеем

$$L = l_1 + l_2,\ l_1 + l_2 - 1,\ \ldots,\ |l_1 - l_2|; \qquad (29.23)$$

в) квантовое число S получается целым или полуцелым в зависимости от того, четным или нечетным является число N электронов в атоме. Число S принимает все целые или полуцелые значения, заклю-

* Оболочку составляют электроны с одинаковыми числами n и l.

ченные между наибольшим и наименьшим значениями модуля алгебраической суммы Σm_{si}, где m_{si} — спиновые квантовые числа электронов, равные $\pm 1/2$. Так, для двух электронов $S = 1/2 + 1/2 = 1$ или $S = 1/2 - 1/2 = 0$, для трех электронов $S = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$ или $S = 1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$ и т. д.;

г) при вычислении значений L и S важно следить, чтобы полученный результат не противоречил *принципу Паули*, согласно которому в атоме не может быть хотя бы двух электронов, обладающих одинаковой совокупностью четырех квантовых чисел n, l, m_l, m_s. Например, если при определении возможных значений полного момента импульса двух эквивалентных электронов (т. е. электронов с одинаковыми числами n и l) для числа L выбрано максимальное значение в ряду (29.23), равное $l_1 + l_2$, то при этом число S может иметь только одно значение: $S = 0$.

Действительно, равенство $L = l_1 + l_2$ означает, что орбитальные моменты импульса двух эквивалентных электронов не только равны по модулю, но и имеют одинаковую ориентацию. Поэтому квантовые числа m_l у этих электронов будут совпадать. Но тогда их спиновые числа, как это следует из принципа Паули, должны иметь противоположные знаки, откуда $S = 1/2 - 1/2 = 0$.

3. Следует помнить об условности *векторной модели атома*, в которой момент импульса $\mathbf{M}$ электрона изображают на чертеже как вектор, приписывая ему, таким образом, определенное направление в пространстве. Между тем согласно законам квантовой механики всегда существует некоторая неопределенность направления вектора $\mathbf{M}$. Так, например, если модуль вектора $\mathbf{M}_l$ и его проекция M_{lz} на заданное направление z выражаются формулами (29.9) и (29.10), то остальные проекции M_{lx}, M_{ly} остаются неопределенными. Вектор $\mathbf{M}_l$ может с равной вероятностью иметь любое направление, при котором образуемый им с осью z угол α находится из соотношения $\cos\alpha = M_{lz}/M_l$.

Решение задач

29-8. Атом водорода находится в $1s$-состоянии. Определить наиболее вероятное расстояние электрона от ядра.

Решение. Прежде всего уточним понятие наиболее вероятного расстояния, так как из законов теории вероятности следует, что вероятность обнаружить электрон на любом наперед заданном расстоянии от ядра *равна нулю*.

$1s$-состояние электрона в атоме водорода описывается собственной волновой функцией $\psi(r)$, зависящей только от расстояния r до ядра и выражаемой формулой (29.7). Тогда вероятность найти электрон в элементарном объеме dV, находящемся на расстоянии r от ядра, согласно (29.3) равна

$$dP = |\psi(r)|^2\, dV. \qquad (1)$$

В силу сферической симметрии функции $\psi(r)$ элементарным объемом dV, все точки которого удалены на расстояние r от ядра, будет шаровой слой радиуса r и толщиной dr, т. е.

$$dV = 4\pi r^2 dr. \qquad (2)$$

Подставив в (1) значения $\psi(r)$ по (29.7) и dV по (2), получим

$$dP = \frac{4}{a^3} e^{-2r/a} r^2\, dr. \qquad (3)$$

Величина $w(r) = \frac{dP}{dr}$, измеряемая отношением вероятности обнаружить частицу в шаровом слоем к толщине этого слоя, называется *линейной плотностью вероятности* в шаровом слое. Тогда на основании (3) запишем

$$w(r) = \frac{4}{a^3} e^{-2r/a} r^2. \qquad (4)$$

Функция $w(r)$ имеет максимум при некотором расстоянии $r = r_в$ (см. ниже), которое и называют *наиболее вероятным*.

Чтобы вычислить $r_в$, применим обычный метод исследования функций на экстремум. Найдем $r_в$ из условия $w'(r) = 0$. Произведя дифференцирование, получим

$$2re^{-2r/a} - \frac{2r^2}{a} e^{-2r/a} = 0.$$

Отсюда

$$r_в = a.$$

Таким образом, искомое расстояние совпадает с радиусом первой боровской орбиты.

29-9. Определить возможные значения орбитального момента импульса M_l электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения $\varepsilon = 12{,}09$ эВ.

Решение. Орбитальный момент импульса M_l электрона определяется квантовым числом l по формуле (29.9). Так как ряд возможных значений l ограничен величиной $n - 1$, найдем главное квантовое число n с помощью формулы (29.8), которую перепишем, учитывая, что при $n = 1$ $W_1 = -13{,}6$ эВ:

$$W_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ эВ}.$$

Энергия возбуждения ε есть квант энергии, поглощенный атомом при переходе из основного состояния ($n = 1$) в возбужденное. Следовательно,

$$W_n - W_1 = \varepsilon.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в электронвольтах, получим

$$-\frac{13{,}6}{n^2}+13{,}6=12{,}09,$$

откуда $n = 3$. Следовательно, $l = 0,\ 1,\ 2$.

Теперь по (29.9) найдем возможные значения M_l:

$$\text{при } l=0 \quad M_l=0;$$

$$\text{при } l=1 \quad M_l=\hbar\sqrt{2}=1{,}49\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с};$$

$$\text{при } l=2 \quad M_l=\hbar\sqrt{6}=2{,}60\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}.$$

29-10. Используя векторную модель атома, вычислить наименьший угол α, который может образовать вектор $\mathbf{M}_l$ орбитального момента импульса электрона в атоме с направлением внешнего магнитного поля. Электрон в атоме находится в d-состоянии.

Решение. Проекция вектора $\mathbf{M}_l$ на направление внешнего магнитного поля определяется формулой (29.10). Поэтому, учитывая также соотношение (29.9), можно найти искомый угол из условия

$$\cos\alpha=\frac{M_{lz}}{M_l}=\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}. \tag{1}$$

Так как d-состоянию электрона соответствует $l = 2$, то $m_l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$. Наименьшему значению α соответствует наибольшее значение квантового числа m_l в формуле (1). Положив $m_l = 2$, получим:

$$\cos\alpha=2/\sqrt{2\cdot 3}=0{,}82,\quad \alpha=35^\circ\ 10'.$$

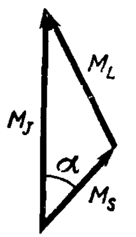


Рис 29 4

29-11. Атом кроме заполненных оболочек имеет три электрона (s, p, d) и находится в состоянии с максимально возможным для этой конфигурации полным моментом импульса Определить, используя векторную модель атома, угол между спиновым ($\mathbf{M}_S$) и полным ($\mathbf{M}_J$) моментами импульса атома.

Решение. Полагая, что в данном атоме существует нормальная спин-орбитальная связь, изобразим в соответствии с формулой (29.15) векторный треугольник моментов импульсов $\mathbf{M}_S$, $\mathbf{M}_L$, $\mathbf{M}_J$ (рис. 29-4). Согласно теореме косинусов получим для искомого угла

$$\cos\alpha=\frac{M_J^2+M_S^2-M_L^2}{2M_S M_J}, \tag{1}$$

и задача сводится к определению величин M_L, M_S, M_J.

Из формулы (29.16) видно, что величина M_J будет наибольшей при наибольшем значении квантового числа J. Последнее равно сумме наибольших значений квантовых чисел L и S:

$$J_{\text{макс}}=L_{\text{макс}}+S_{\text{макс}}. \tag{2}$$

Так как полный момент импульса заполненной электронной оболочки равен нулю, то будем рассматривать только три данных электрона. Соответствующие им квантовые числа l равны: $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2$. Следовательно, $L_{\text{макс}} = l_1 + l_2 + l_3 = 3$.

Чтобы найти максимальное значение S, сложим спиновые квантовые числа трех электронов: $S_{\text{макс}} = {}^1/_2 + {}^1/_2 + {}^1/_2 = {}^3/_2$. Подставив в (2) значения $L_{\text{макс}}$ и $S_{\text{макс}}$, получим $J_{\text{макс}} = 9/2$.

Теперь по формулам (29.13), (29.14), (29.16) вычислим:

$$M_L=\sqrt{48}\,\hbar/2;\quad M_S=\sqrt{15}\,\hbar/2;\quad M_J=\sqrt{99}\,\hbar/2.$$

Подставив эти значения M_L, M_S, M_J в (1) и произведя вычисление, найдем:

$$\cos\alpha = 0{,}857;\ \alpha = 31^\circ.$$

§ 30. РАДИОАКТИВНОСТЬ. ПОГЛОЩЕНИЕ γ-ЛУЧЕЙ

Основные формулы

Закон радиоактивного распада: число радиоактивных ядер — dN, распадающихся за промежуток времени между t и $t + dt$, пропорционально этому промежутку dt и числу ядер N, еще не распавшихся к моменту t, т. е.

$$-dN = \lambda N dt, \tag{30.1}$$

где λ — постоянная радиоактивного распада. Интегрируя (30 1), получим

$$N=N_0\,e^{-\lambda t}, \tag{30.2}$$

где N_0 — число радиоактивных ядер в момент $t = 0$.

Период полураспада T, т. е. промежуток времени, за который распадается половина начального числа ядер, и постоянная распада λ связаны соотношением

$$T\lambda = \ln 2. \tag{30.3}$$

Активность препарата измеряется числом ядер, распадающихся в единицу времени:

$$a=-\frac{dN}{dt}=\lambda N. \tag{30.4}$$

Если радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2, то число ядер радиоизотопа A_2 изменяется со временем по закону

$$N_2(t)=N_1(0)\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\,(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}), \tag{30.5}$$

где N_1 (0) — число ядер радиоизотопа A_1 в момент $t = 0$.

Интенсивность узкого пучка монохроматических γ-лучей, прошедших сквозь слой вещества толщиной x, уменьшается по закону

$$I=I_0\,e^{-\mu x}, \tag{30.6}$$

где I_0 — интенсивность излучения, падающего на слой, μ — линейный коэффициент ослабления.

Методические указания

1. При решении задач на явление радиоактивности надо различать два случая:

а) имеет место радиоактивный распад *изолированного* вещества. Тогда пользуются законом радиоактивного распада в форме (30.2). Если из условия задачи следует, что время распада Δt пренебрежимо мало по сравнению с периодом полураспада T данного радиоизотопа ($\Delta t \ll T$), то число нераспавшихся ядер N можно считать практически постоянным в течение всего времени Δt и равным их начальному числу N_0. Тогда число распавшихся ядер ΔN можно находить по формуле (30.1), записав ее в виде

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$$

(знак «−» опущен, так как здесь под ΔN подразумевается положительная величина $N_0 - N$);

б) происходит распад одного радиоактивного вещества (дочернего), взятого в смеси с другим радиоактивным веществом (материнским), из которого оно возникает. В этом случае пользуются соотношением (30.5), выражающим закон изменения со временем числа ядер дочернего вещества.

Обратим внимание на особый случай: если период полураспада T_1 материнского вещества существенно превышает период полураспада T_2 дочернего вещества, т. е. $T_1 \gg T_2$, то по истечении некоторого промежутка времени устанавливается радиоактивное равновесие между этими веществами. При этом число ежесекундно распадающихся ядер дочернего вещества равно числу вновь образующихся ядер этого же вещества в результате распада ядер материнского вещества. Так как активности обоих веществ становятся одинаковыми, то из (30.4) и (30.3) получаем

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

2. В некоторых задачах требуется найти число атомов N, содержащихся в данной массе m некоторого радиоизотопа $^A_Z X$ (здесь под X подразумевается химический символ данного элемента, Z — атомный номер, равный числу протонов в ядре, A — массовое число, равное суммарному числу протонов и нейтронов, т. е. числу нуклонов в ядре). Для этого пользуются соотношением

$$N = N_A \nu = N_A (m/\mu), \qquad (1)$$

где N_A — постоянная Авогадро, ν — число молей, содержащихся в данном препарате, μ — молярная масса изотопа.

Напомним, что между молярной массой μ изотопа и его относительной атомной массой M_r существует соотношение

$$\mu = 10^{-3}\, M_r \text{ кг/моль}.$$

Вычисляя по (1), следует иметь в виду, что для всякого изотопа величина M_r выражается числом, весьма близким к его массовому числу A, т. е. $\mu \approx 10^{-3} A$ кг/моль.

Решение задач

30-1. Зная постоянную распада λ ядра, определить вероятность P того, что ядро распадется за промежуток времени от 0 до t.

Решение. Выясним, что́ следует понимать под искомой вероятностью P. Процесс радиоактивного распада носит статистический характер. Это значит: если многократно повторять опыты с радиоактивным препаратом, содержащим достаточно большое начальное число ядер N_0, то за промежуток времени от 0 до t распадется каждый раз одна и та же доля ядер $\Delta N/N_0$. Эта величина, характеризующая относительную частоту события — распада ядра, и принимается за вероятность P распада ядра в течение данного промежутка времени. Таким образом,

$$P = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0},$$

где N — число нераспавшихся ядер к моменту t. Подставив в это равенство вместо N его значение по закону радиоактивного распада (30.2) и произведя сокращение, получим ответ:

$$P = 1 - e^{-\lambda t}.$$

30-2. Определить, сколько ядер в $m_0 = 1{,}0$ мг радиоизотопа церия $^{144}_{58}Ce$ распадается в течение промежутков времени: 1) $\Delta t = 1$ с; 2) $\Delta t = 1$ год. Период полураспада церия $T = 285$ сут.

Решение. Задача решается с помощью закона радиоактивного распада.

1. Так как $\Delta t \ll T$, то можно считать, что в течение всего промежутка Δt число нераспавшихся ядер остается практически постоянным и равным их начальному числу N_0. Тогда для нахождения числа распавшихся ядер ΔN применим закон радиоактивного распада в форме (30.1), записав его так:

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

или, учитывая (30.3),

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Delta t.$$

Чтобы определить начальное число ядер (атомов) N_0, умножим постоянную Авогадро N_A на число молей ν, содержащихся в данном препарате:

$$N_0 = N_A \nu = N_A (m_0/\mu), \qquad (1)$$

где m_0 — начальная масса m_0 препарата, μ — молярная масса изотопа $^{144}_{58}Ce$, численно равная (приблизительно) его массовому числу. С учетом (1) получим

$$\Delta N = \frac{\ln 2 \cdot N_A m_0 \Delta t}{T \mu}. \qquad (2)$$

Выразим числовые значения величин, входящих в формулу (2), в единицах СИ $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $m_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ кг; $\Delta t = 1$ с, $T = 285 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $\mu = 0{,}144$ кг/моль. Произведя вычисление с учетом, что $\ln 2 = 0{,}693$, найдем

$$\Delta N = 1{,}2 \cdot 10^{11}.$$

2. Так как теперь Δt, T — величины одного порядка, то дифференциальная форма (30.1) закона радиоактивного распада здесь неприменима. Поэтому для решения задачи воспользуемся интегральной формой (30.2) закона, справедливой для любого промежутка Δt. Тогда получим

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}),$$

или, учитывая (30.3) и (1),

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu} (1 - e^{-(\ln 2)\, t/T}).$$

Так как $e^{\ln 2} = 2$, то уравнение принимает более простой вид:

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu} (1 - 2^{-t/T}). \quad (3)$$

Произведя вычисление по (3), найдем

$$\Delta N = 2{,}5 \cdot 10^{18}.$$

30-3. Радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2. Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа A_1, найти, через сколько времени активность радиоизотопа A_2 достигнет максимума?

Решение. Активность препарата, определяемая соотношением (30.4), пропорциональна числу наличных ядер N этого препарата. Поэтому активность a радиоизотопа A_2 достигнет максимума тогда, когда максимальным будет число ядер N_2 этого радиоизотопа. Закон изменения со временем числа ядер N_2 выражается формулой (30.5). Для отыскания промежутка времени t, которому соответствует максимум функции $N_2(t)$, продифференцируем эту функцию по времени и приравняем нулю производную:

$$N_2'(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Решив это уравнение относительно t, найдем искомое время:

$$t = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

30-4. Найти активность радона, образовавшегося из $m_0 = 1{,}00$ г радия $^{226}_{88}Ra$ за одни сутки. Найти также максимальную активность радона. Периоды полураспада радия и радона соответственно равны $T_1 = 1{,}6 \times 10^3$ лет, $T_2 = 3{,}8$ сут.

Решение. Используя соотношения (30.4), (30.5), запишем для искомой активности

$$a_2 = \lambda_2 N_2 = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Входящие сюда величины $N_1(0)$, λ_1, λ_2 выразим через данные m_0, μ, T_1, T_2 по (30.3) и формуле (1) задачи № 30-2. Тогда, произведя сокращение, имеем

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1 - T_2} (e^{-(\ln 2)\cdot t/T_1} - e^{-(\ln 2)\cdot t/T_2}), \quad (1)$$

где N_A — постоянная Авогадро. Это общая формула, выражающая закон изменения со временем активности одного радиоизотопа (дочернего), полученного в процессе распада другого (материнского). В данном случае формулу (1) можно упростить, если учесть вытекающие из условия соотношения $T_1 \gg T_2$ и $T_1 \gg t$. Из первого неравенства следует, что можно пренебречь величиной T_2 в разности $T_1 - T_2$. В силу второго неравенства можно принять за единицу первый член, стоящий в скобках. Тогда найдем

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1} (1 - e^{-(\ln 2)\cdot t/T_2}). \quad (2)$$

Произведя расчет по (2), получим

$$a_2 = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0{,}83) \text{ расп/с, или } a_2 = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0{,}83)}{3{,}7 \cdot 10^{10}} \text{ Ки} = 0{,}17 \text{ Ки}$$

Чтобы вычислить максимум активности $(a_2)_{макс}$ радона, можно, используя результат предыдущей задачи, найти промежуток времени $t_{макс}$, в течение которого активность радона достигнет максимума, а затем по формуле (1) определить величину $(a_2)_{макс}$, соответствующую времени $t_{макс}$. Однако можно поступить проще. Анализируя приближенную формулу (2), полученную с учетом неравенств $T_1 \gg T_2$, $T_1 \gg t$, видим, что с ростом времени t величина, стоящая в скобках, приближается по экспоненте к единице. Следовательно,

$$(a_2)_{макс} = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ расп/с} = 1{,}0 \text{ Ки}.$$

Замечание. Последнее равенство можно переписать, учитывая (30.4), так:

$$(a_2)_{макс} = N_1(0)\, \lambda_1 = a_1(0),$$

т. е. максимальная активность радона, возникающего при распаде радия, равна начальной активности самого радия.

Полученный результат легко понять, если учесть два обстоятельства: 1) вследствие весьма большой величины T_1 число нераспавшихся ядер радия в течение промежутка $t_{макс}$ остается практически постоянным. Поэтому остается постоянной и активность радия; 2) максимальной активности радона соответствует состояние *радиоактивного равновесия*, которое установится между радием и радоном через промежуток $t_{макс}$. При этом число ежесекундно распадающихся ядер радия (из каждого ядра радия образуется одно ядро радона) равно числу распадающихся атомов радона, а это и означает равенство активностей этих элементов.

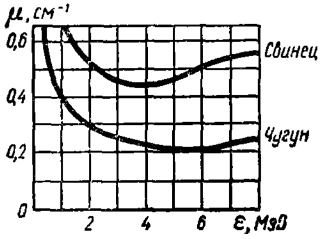


Рис 30-1

30-5. Интенсивность узкого пучка монохроматических γ-лучей после прохождения через слой свинца толщиной $x = 2{,}00$ см уменьшается в 2,9 раза, а после прохождения через слой чугуна такой же толщины — в 1,6 раза. Используя зависимость линейного коэффициента ослабления μ γ-лучей от энергии ε γ-квантов (рис. 30-1), определить энергию γ-квантов в данном пучке.

Решение. Чтобы воспользоваться данным графиком, необходимо сначала найти коэффициент ослабления μ. Из формулы (30.6) имеем

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I}. \qquad (1)$$

Подставив $x = 2{,}00$ см и $I_0/I = 2{,}9$ и произведя вычисление, получим для свинца $\mu_{св} = 0{,}54$ см$^{-1}$. Этой величине $\mu_{св}$ соответствуют на графике два значения энергии γ-квантов: $\varepsilon_1 = 1{,}8$ МэВ и $\varepsilon_2 = 7{,}0$ МэВ.

Подставив в (1) $x = 2{,}00$ см и $I_0/I = 1{,}6$, вычислим величину μ для чугуна: $\mu_{чуг} = 0{,}23$ см$^{-1}$. Теперь по графику находим: $\varepsilon_1 = 4{,}0$ Мэв и $\varepsilon_2 = 7{,}0$ МэВ.

Так как в обоих случаях через различные вещества проходят *одни и те же* γ-лучи, то для энергии γ-квантов следует принять значение $\varepsilon = 7{,}0$ МэВ.

§ 31. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Основные формулы

Энергия связи ядра, т. е. энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы без сообщения им кинетической энергии, вычисляется по формуле

$$\Delta W = c^2 \Delta m, \qquad (31.1)$$

или

$$\Delta W = c^2 [Zm_p + (A - Z) m_n - m_я], \qquad (31.2)$$

где Δm — дефект массы * ядра, представляющий собой разность между суммой масс покоя частиц, составляющих ядро, и массой покоя ядра, Z — атомный номер (или зарядовое число), равный числу протонов в ядре, A — массовое число (суммарное число нуклонов в ядре), m_p, m_n, $m_я$ — массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

Энергия ядерной реакции (или тепловой эффект реакции)

$$Q = c^2 (\Sigma m - \Sigma m'), \qquad (31.3)$$

где Σm, $\Sigma m'$ — суммы масс покоя частиц соответственно до и после реакции.

Методические указания

1. Решение задач на ядерные реакции основано на применении законов сохранения: 1) электрического заряда, 2) суммарного числа нуклонов, 3) энергии, 4) импульса. Первые два закона позволяют правильно записывать ядерные реакции даже в тех случаях, когда одна из частиц — участников реакции или ее продуктов — не дана. (Очевидно, записав реакцию, мы тем самым определяем неизвестную частицу.) С помощью вторых двух законов находят кинетические энергии частиц — продуктов реакции, а также направления их разлета.

Процесс столкновения бомбардирующей частицы с ядром — мишенью, при котором частица поглощается ядром, рассматривают как *неупругий удар* и применяют при этом закон сохранения импульса, как и в соответствующих задачах механики (см. § 3).

В законе сохранения энергии, записанном для ядерных реакций (в отличие от случаев, рассмотренных в § 3), под полной энергией подразумевается полная *релятивистская* энергия, определяемая формулой (18.3). Эта энергия mc^2 равна сумме энергии покоя частицы m_0c^2 и ее кинетической энергии T. Согласно закону сохранения полной релятивистской энергии,

$$\Sigma m_0 c^2 + \Sigma T = \Sigma m_0' c^2 + \Sigma T', \qquad (31.4)$$

где Σm_0c^2 — сумма энергий покоя частиц до реакции, ΣT — сумма их кинетических энергий. Справа стоят величины, относящиеся к частицам после реакции.

2. Поскольку в справочных таблицах приводятся значения масс атомов, а не ядер, то удобнее вычислять энергию связи ядра не по (31.2), а по формуле

$$\Delta W = c^2 [Zm_{^1H} + (A - Z) m_n - m_a], \qquad (31.5)$$

где $m_{^1H}$ — масса атома водорода ^{1}H, m_a — масса данного атома. Обе формулы эквивалентны, так как, обозначив массу электрона m_e, можно записать

$$Zm_{^1H} - m_a = Z(m_p + m_e) - (m_я + Zm_e) = Zm_p - m_я.$$

При вычислении энергии реакции Q по (31.3) также заменяют массы покоя ядер массами атомов. Эта замена не повлияет на величину разности, стоящей в скобках, так как уменьшаемое и вычитаемое

* Термином «дефект массы» обозначают также другую величину δ, равную разности между массой атома m_a (выраженной в углеродных единицах массы) и массовым числом A, т. е. $\delta = m_a - A$.

при этом возрастают на одну и ту же величину $m_e\Sigma Z$, где ΣZ — суммарное зарядовое число всех частиц (до или после реакции).

3. Чтобы, вычисляя по формулам (31.1) — (31.5), получать значения энергии в мегаэлектронвольтах (МэВ), надо подставить в формулу взятые из справочных таблиц значения масс, выраженные в атомных единицах массы (а. е. м.), а коэффициент c^2, представляющий собой квадрат скорости света в вакууме, положить равным

$$c^2 = 931 \text{ МэВ/а.е.м.}$$

4. Обычно при ядерных реакциях энергия Q, выражаемая по (31.3), измеряется величинами порядка 10 МэВ, а энергия покоя даже самого легкого ядра — ядра водорода ^1H (т. е. протона) — равна 938 МэВ. Отсюда следует, что, вычисляя скорости частиц — ядер или отдельных нуклонов, их можно заведомо считать классическими в следующих случаях: 1) если данные частицы являются продуктами ядерной реакции, вызванной столкновением медленных частиц; 2) если речь идет об определении порога реакции (см. задачу № 31-4).

Вместе с тем энергия ядерной реакции, как правило, превышает энергию покоя легких частиц — электронов и позитронов, равную 0,511 МэВ. Поэтому, находя скорости или импульсы этих частиц (если они являются продуктами реакции), следует пользоваться релятивистскими формулами (18.5), (18.6).

Решение задач

31-1. Определить удельную энергию связи для ядра $^{17}_{8}O$.

Решение. *Удельную энергию связи* ядра, равную отношению его энергии связи ΔW к массовому числу (числу нуклонов в ядре) A, найдем с помощью формулы (31.5):

$$\frac{\Delta W}{A} = \frac{c^2\,[Zm_{^1H} + (A-Z)\,m_n - m_a]}{A}.$$

Взяв из таблиц значения масс атомов водорода ^1H, кислорода ^{17}O и нейтрона n в атомных единицах массы и учитывая, что $c^2 = 931$ МэВ/а.е.м., произведем вычисление:

$$\frac{\Delta W}{A} = \frac{931\,[8\cdot 1{,}00783 + (17-8)\cdot 1{,}00867 - 16{,}99913]}{17}\text{ МэВ} = 7{,}76\text{ МэВ}.$$

31-2. Найти энергию связи нейтрона в ядре $^{17}_{8}O$.

Решение. *Энергией связи* частицы в ядре называется та энергия, которую надо затратить, чтобы отделить частицу от ядра без сообщения ей кинетической энергии. Если отделить нейтрон n^1_0 от ядра $^{17}_{8}O$, то в соответствии с законом сохранения заряда и числа нуклонов останется ядро $^{16}_{8}O$. Затраченную для отрыва энергию ΔW можно найти по формуле (31.1), если за Δm принять изменение массы системы в результате отрыва нейтрона. Тогда для энергии связи нейтрона получим

$$\Delta W = c^2\,[m_{^{16}O} + m_n) - m_{^{17}O}],$$

где $m_{^{16}O}$, $m_{^{17}O}$, m_n — соответственно массы покоя ядер кислорода ^{16}O, ^{17}O и нейтрона. Очевидно, разность, стоящая в квадратных скобках, не изменится, если заменить массы ядер изотопов ^{16}O, ^{17}O массами их атомов, значения которых приведены в таблицах. Тогда найдем ответ:

$$\Delta W = 931\,[(15{,}99491 + 1{,}00867) - 16{,}99913]\text{ МэВ} = 4{,}14\text{ МэВ}.$$

31-3. Определить энергию реакции $^{10}B\,(n,\,\alpha)\,^7Li$, протекающей в результате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора. Найти также кинетические энергии продуктов реакции.

Решение. Реакция $^{10}B\,(n,\,\alpha)\,^7Li$ состоит в следующем. Ядро бора $^{10}_{5}B$, поглотив медленный нейтрон ^1_0n, превращается в промежуточное ядро $^{11}_{5}B$. Последнее, будучи возбужденным, испускает α-частицу (т. е. ядро гелия ^4_2He), превращаясь в ядро лития ^7_3Li. В развернутом виде реакция записывается так:

$$^{10}_{5}B + {}^1_0n \to (^{11}_{5}B) \to {}^7_3Li + {}^4_2He.$$

Энергию реакции Q найдем по формуле (31.3), которая в данном случае дает:

$$Q = c^2\,[(m_{^{10}B} + m_n) - (m_{^7Li} + m_{^4He})].$$

Заменив (как и в предыдущей задаче) массы покоя ядер атомов массами покоя самих атомов, значения которых даны в таблицах, получим

$$Q = 931\cdot(10{,}01294 + 1{,}00867 - 7{,}01601 - 4{,}00260)\text{ МэВ} = 2{,}80\text{ МэВ}.$$

Чтобы найти кинетические энергии продуктов реакции — ядра лития ^7Li и α-частицы, применим закон сохранения релятивистской энергии, записанный в форме (31.4) с учетом (31.3):

$$\Sigma T + Q = \Sigma T'. \qquad (1)$$

Из условия задачи следует, что величиной ΣT можно пренебречь. Тогда получим для суммы кинетических энергий частиц ^7Li и ^4He:

$$T_{Li} + T_{He} = Q. \qquad (2)$$

Чтобы составить второе уравнение, связывающее неизвестные T_{Li}, T_{He}, применим закон сохранения импульса. Полагая суммарный импульс частиц до реакции равным нулю, приходим к выводу, что и после реакции он должен быть равен нулю:

$$\mathbf{p}_{Li} + \mathbf{p}_{He} = 0.$$

Отсюда для модулей импульсов имеем

$$p_{Li} = p_{He}.$$

Переходя от импульсов частиц к их кинетическим энергиям, найдем [см. формулу (1) задачи № 29-1]

$$m_{Li}T_{Li} = m_{He}T_{He}. \qquad (3)$$

Решив систему (2), (3), найдем:

$$T_{\text{Li}} = Qm_{\text{He}}/(m_{\text{Li}} + m_{\text{He}}); \quad T_{\text{He}} = Qm_{\text{Li}}/(m_{\text{Li}} + m_{\text{He}}).$$

Округлив значения масс ядер m_{Li}, m_{He} до целых чисел, получим:

$$T_{\text{Li}} = 4\,Q/11 = 1{,}02 \text{ МэВ}; \quad T_{\text{He}} = 7Q/11 = 1{,}78 \text{ МэВ}.$$

31-4. Найти порог ядерной реакции $^{12}\text{C}\,(d,\ n)\,^{13}N$.

Решение. Эта реакция, происходящая при поглощении ядром углерода ^{12}C дейтона d, в развернутом виде запишется так:

$$^{12}_{6}\text{C} + {}^{2}_{1}\text{H} \to ({}^{14}_{7}\text{N}) \to {}^{13}_{7}\text{N} + {}^{1}_{0}n,$$

где $^{14}_{7}\text{N}$ — промежуточное ядро, которое сразу же после образования испускает нейтрон, превращаясь в ядро $^{13}_{7}\text{N}$.

Порогом ядерной реакции называют ту наименьшую кинетическую энергию бомбардирующей частицы (в «лабораторной» системе отсчета), при которой становится возможной ядерная реакция*. Для определения порога реакции снова запишем уравнение (1) задачи № 31-3:

$$\Sigma T + Q = \Sigma T',$$

или, так как мишень — ядро ^{12}C — предполагается неподвижным,

$$m_d v^2/2 + Q = \Sigma T', \tag{1}$$

где $m_d v^2/2$ — кинетическая энергия дейтона, минимальное значение которой нужно найти. Очевидно, ему соответствует минимальное значение $\Sigma T'$. Чтобы вычислить это значение, учтем следующее.

Если некоторому состоянию системы соответствует минимальная кинетическая энергия в одной инерционной системе отсчета, то этому же состоянию будет соответствовать ее минимум и в любой другой инерциальной системе отсчета (хотя значение самого минимума будет разным в различных системах). Действительно, из уравнения (31.4), выражающего закон сохранения полной релятивистской энергии, следует, что при минимальном значении $\Sigma T'$ величина $\Sigma m_0' c^2$ будет максимальной. Но последняя не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, поскольку и масса покоя, и скорость света в вакууме — величины, инвариантные относительно выбора инерциальной системы отсчета.

Вместе с тем известно, что в системе отсчета, связанной с центром инерции системы частиц, минимальное значение величины $\Sigma T'$ равно нулю *при нулевой относительной скорости* частиц ^{13}N и n. Значит, этому же состоянию системы соответствует минимум величины $\Sigma T'$ и в «лабораторной» системе отсчета, в которой мы решаем задачу.

Тот факт, что порогу реакции соответствует равенство нулю относительной скорости частиц ^{13}N, n, означает, что в этом случае распад промежуточного ядра ^{14}N происходит без изменения кинетической энергии системы. Следовательно, минимум величины $\Sigma T'$ равен

* Понятие порога относится только к эндотермическим реакциям, когда энергия реакции (тепловой эффект) $Q < 0$.

кинетической энергии промежуточного ядра, которую оно приобрело в процессе образования из дейтона и ядра ^{12}C. Тогда из (1) получим

$$\frac{m_d v^2}{2} + Q = \frac{(m_{^{12}\text{C}} + m_d)\,V^2}{2}, \tag{2}$$

где $m_{^{12}\text{C}}$ — масса ядра ^{12}C, m_d — масса дейтона, $(m_{^{12}\text{C}} + m_d)$ — приближенное значение массы промежуточного ядра, V — его скорость.

Второе уравнение, связывающее неизвестные v, V, запишем, применив закон сохранения импульса для неупругого соударения дейтона с ядром ^{12}C:

$$m_d v = (m_{\text{C}} + m_d)\,V. \tag{3}$$

Исключив из системы (2), (3) величину V, найдем

$$\frac{m_d v^2}{2} = -Q\,\frac{m_{\text{C}} + m_d}{m_{\text{C}}}.$$

Подставив вместо величины Q ее значение по (31.3), получим ответ:

$$\frac{m_d v^2}{2} = c^2\,[(m_{^{13}\text{N}} + m_n) - (m_{^{12}\text{C}} + m_d)]\,\frac{m_{^{12}\text{C}} + m_d}{m_{^{12}\text{C}}}.$$

Заменив массы ядер, стоящие в квадратных скобках, массами атомов (взяв их значения из таблиц) и округлив до целых чисел значения масс в дроби $(m_{\text{C}} + m_d)/m_{\text{C}}$, выполним вычисление:

$$\frac{m_d v^2}{2} = 931 \cdot [(13{,}00574 + 1{,}00867) -$$

$$-(12{,}00000 + 2{,}01410)] \cdot \frac{14}{12} \text{ МэВ} = 0{,}34 \text{ МэВ}.$$

31-5. Позитрон с кинетической энергией $T = 0{,}75$ МэВ налетает на покоящийся свободный электрон. В результате аннигиляции возникает два γ-фотона с одинаковыми энергиями. Определить угол θ между направлениями их разлета.

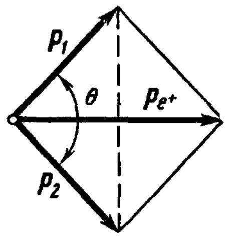


Рис. 31-1

Решение. Процесс аннигиляции электрона e^- и позитрона e^+ происходит по схеме

$$e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$$

и подчиняется законам сохранения энергии и импульса.

Согласно закону сохранения импульса, импульс позитрона $\mathbf{p}_{e^+}$ равен векторной сумме импульсов γ-фотонов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ (рис. 31-1):

$$\mathbf{p}_{e^+} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

При этом

$$p_1 = p_2 = \varepsilon/c, \tag{1}$$

где ε — энергия каждого γ-фотона (по условию, их энергии одинаковы). Таким образом, для угла θ с учетом (1) получим

$$\cos(\theta/2) = \frac{p_{e^+}}{2p_1} = \frac{p_{e^+}c}{2\varepsilon}. \tag{2}$$

Чтобы из (2) вычислить угол θ, надо определить импульс позитрона p_{e^+} и энергию ε каждого γ-фотона. Импульс позитрона найдем, зная его кинетическую энергию T. Поскольку величина T превышает энергию покоя позитрона $m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ, то позитрон следует рассматривать как релятивистскую частицу. В этом случае импульс ее выражается через кинетическую энергию формулой (2) задачи № 29-1.

Энергию γ-фотона ε определим с помощью закона сохранения релятивистской энергии (31.4). Учтем при этом, что масса покоя фотонов равна нулю: $\Sigma m_0' = 0$, а полная энергия фотонов есть их кинетическая энергия, т. е. $\Sigma T' = 2\varepsilon$. Учитывая, кроме того, что электрон и позитрон обладают одинаковой массой покоя m_0, получим

$$2m_0c^2 + T = 2\varepsilon. \tag{3}$$

Подставив в (2) значение 2ε из (3) и значение импульса p_{e^+}, определяемое формулой (2) задачи № 29-1, найдем

$$\cos(\theta/2) = \frac{c\sqrt{2m_0T(1+T/2m_0c^2)}}{T+2m_0c^2},$$

или после упрощений

$$\cos(\theta/2) = 1/\sqrt{1+2m_0c^2/T}. \tag{4}$$

Вычислив по (4), получим

$$\cos(\theta/2) = 0{,}651, \quad \theta = 99°.$$