现代几何学导论

An Introduction to Modern Geometry

FDU Math

目录

序言

本讲义初稿完成于 2022 年 8 月，以复旦大学王志张老师在春季开设的微分几何课程的内容为主体. 时值囚于宿舍的特殊的一学期，考虑到本课程的内容不仅极为重要，而且抽象程度与跨度均较大，复旦大学 20 级英才班的几位同学在随后的暑假对教案进行了整理，并在一些地方有所补充，最终完成了对微分流形以及相关知识的完整梳理. 感谢王志张老师在线上课程期间提供的详细讲稿，以及几位同学的大量付出.

微分几何是主要研究曲率的一门学科，而实际上本课程的内容是微分流形的基础理论，是对现代微分几何的铺垫. 在大二上的几何拓扑选讲课程中接触过曲面的基本概念后，本课程中把视野从二维的曲面放宽到 n 维的微分流形，采用的视角则是流形的微分结构.

大致上我们可以几何学的对象建立一个有层次的认知：对于一个集合，我们赋予它合适的拓扑，得到了拓扑空间；若它满足某些拓扑性质，那么它就是拓扑流形，我们可以通过流形的同伦群同调群等拓扑不变量进行曲面的分类研究探讨，这是代数拓扑领域所进行的探索；进一步的则是在上面添加一个微分结构，得到了一个微分流形，这使得流形上的“微积分”成为可能，切丛、微分形式与其上代数结构等概念也由此产生，形成流形之上的代数结构，这也是本课程所在的层次，如果在这一层次进行更深入的研究，就走向了微分拓扑；进一步的则是在切空间上指定内积得到黎曼度量以及与之相容且无挠的 Levi-Civita 联络，给出了一个有度量结构的黎曼流形，这一对象在黎曼几何中进行研究；亦或是在微分结构上加之群结构形成李群，可以对共轭作用、群表示等代数问题进行进一步的探索.

但本课程学习中主要问题有二：实际授课过程中未能在大半学期领略微分流形概貌，导致各章节主题分布广泛而联系微薄，上课进度较快又缺乏基础知识的充足铺垫，主要概念介绍后亦未作深入；同时课程教学与绝大多数微分流形教材的侧重点不尽相同，也与作业（陈维桓《微分流形初步》上的习题）不够匹配. 针对这些问题，一方面我们对复流形等内容进行了单独的讲解，使每一部分具有更强的逻辑关联性，也在向量丛等章节引入了一些原先不具有的相关背景知识，使相关概念、定理的引入更为自然，同时在讲义中插入了少量习题以期起到辅助理解的作用；另一方面，我们编写了本课程的作业解答，请访问https://www.bananaspace.org/wiki/用户:Solution，在这一页面的“微分流形”一栏.

这里要特别介绍香蕉空间及 Solution 的页面. 香蕉空间是由若干位本科生自主研发的一款全新开放代码数学社区. 社区位于一个被称作 “Banana Space” 的在线空间，在这里，绑定电子邮箱的人将被授予 “编辑” 的资格，参与内容撰写. 你将扮演一位名为 “用户” 的神秘角色，在自由的访问中邂逅风格各异、思维独特的百科与讲义，借助它们一起击败未知，找寻潜藏的定理——同时，逐步发掘 “数学” 的真相.

香蕉空间用户 Solution 的主页则是 20 级的几位同学创建的复旦数学资源库，给各门课程编写讲义与习题选解，目前已经初具规模，且仍在不断扩充. 切勿错过这一宝藏，且大家都可以来一同参与编缉，把这个项目建设得越来越好.

这份讲义以王志张老师的讲稿为底本，参考了各种各样的资料，目前共四章内容.

第一章（簇与流形）首先给出了流形的概念，并通过研究流形之间的映射对子流形进行了分类；引入了单位分解定理，这个定理在后续章节中也发挥着重要的作用. 接着介绍了簇的概念以及簇与流形之间的关系. 最后专门讲了复流形.

第二章（向量丛和切丛）主要关注光滑向量丛及切丛，例举了向量丛上的运算，引入了导算子模的概念，从而给出了切空间的代数定义，同时对复向量丛展开部分讨论.

第三章（模和截面）引入截面的概念，注意到截面具有模结构，因此我们可以从代数角度研究其性质；给出了微分形式的代数定义，证明了导算子模和切丛是同构的. 最后定义了流形上微分形式的积分，并证明了 Stokes 定理，是微积分基本定理的高维推广.

第四章（De Rham 上同调）介绍了 de Rham 上同调，计算了一些简单的上同调群. De Rham 上同调是光滑流形上一个十分重要的概念，其赋予微分形式以代数结构. 最后给出了复流形上的相应概念：Doubeault 上同调，其中涉及到 Hodge 定理、Kähler 流形等复几何的基本知识.

可以看出来，本课程的涉及主题是非常宽泛的. 笔者认为有两方面比较重要：一是能够多角度地观察同一概念. 以切向量、切空间、切向量场为例，一方面给定流形 M 上点 p，则该点处的切向量可以看作 p 的邻域上的光滑函数构成的芽上的满足 Leibniz 条件的线性泛函，切向量全体就是 p 点的切空间，在局部坐标系下可以说明 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}_{i=1}^n$ 为其一组基，在 M 上每点处光滑的选定一个切向量便形成了一个向量场；另一方面，切丛可以视为以 M 为底空间的光滑向量丛的特定子丛，而给定的向量场则可以视为切丛的某一截面，点 p 的切空间则是切丛的底空间 M 上 p 的纤维 $\pi^{-1}(p)$. 两种不同的思路从不同的侧面切入刻画出了同一个对象，展示出不同数学对象之间的关联.

二是对于数学各个不同分支的知识的融会贯通也会产生更多深入的观察与洞见. 譬如视给定光滑流形 M 上的向量丛 (E, π, M) 上全体截面构成的集合为 $C(M)$-模时，这时候模的直和、直积、张量积、对偶等运算可以自然地移植过来. 同时，很容易想到：如果这是一个投射模会发生什么？由于投射模总是某个自由模的直和项，不难得出在丛的运算下向量丛 (E, π, M) 也是某个 M 上的平凡丛的直和项；同时亦可看出紧致无边流形上的向量丛上截面全体总是投射模，从而构建起了丛与投射模的关联性. 在代数几何中，对于代数簇上的向量丛截面全体构成投射模时是否一定自由的研究产生了许多有趣的结论.

事实上微分流形是无比重要的，因为这是现代几何学的奠基，是一切几何、拓扑领域的进阶学习的必备基础. 比如说，de Rham 上同调章节关注的微分形式，是几何中一个很重要的概念：微分形式可以定义在丛上，特别地，切丛的弯曲可以反映流形的弯曲；微分形式上也有重要的代数结构——上同调群，可以用来研究流形的一些基本性质，如 Gauss-Bonnet 定理和示性类理论. 此外，微分流形的知识对于物理同样不可或缺：电动力学中，Maxwell 方程的张量形式依赖于流形上的张量运算的高度熟练；规范场论中则需要众多李群与纤维丛的相关知识；广义相对论的学习则依赖于对后续课程黎曼几何中联络、测地线、曲率等概念的理解.

本讲义的意义在于，这是目前为止唯一的（至少在几乎处处的意义下）覆盖微分几何课程所讲内容的资料. 与这门课最相符的书是

苏竞存，流形的拓扑学，武汉大学出版社，

课程内容大致对应于该书第 1-3, 6-8 章，其表述较为抽象. 作业题除了上课布置的少量题目之外，还有

陈维桓，微分流形初步，高等教育出版社

1-4 章的绝大多数习题，弥补抽象的讲法造成的对微分流形的标准理论以及具体计算的忽略，以打下较坚实的基础. 不过由于上课内容不能涵盖其正文讲解，自行阅读正文是必要的，但快速翻看一遍一般难以有充分的领悟，面对不少习题时产生黔驴技穷之感，在这里是正常的现象.

以下两本书与本课程对微分流形理论的介绍有共通之处：

陈省身，陈维桓，微分几何讲义，北京大学出版社

的 1-3 章叙述简洁，内容上大致对应于本讲义第一到三章. 写得更简洁的是

Wells, Raymond O. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. GTM65. Springer，

其 Chapter 1 已讲述了差不多的内容. 对于第四章 de Rham 上同调，更进一步的了解可以阅读

Madsen, I. H., and Jørgen Tornehave. *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. Cambridge University Press.

此外，老师还推荐了

Warner, Frank W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. GTM94. Springer

以及

张筑生，微分拓扑新讲，北京大学出版社，

两本都是好书，尽管同本课程的相关性比起前面几本要小一些. 前者有世界图书出版公司的影印版，后者反而买不到. 以上这些是老师上课时推荐的参考书.

马天，流形拓扑学，科学出版社

和本课程的匹配度较高，更重要的是其讲解非常好，这里特别推荐.

如果打算把标准的微分流形的理论（大致相当于本讲义的第一、三章）迅速过一遍，合适的材料则是各种黎曼几何书的导引章节，会以形象具体的方式在较短的篇幅内介绍微分流形及基本的相关概念. 比如有

陈维桓，李兴校，黎曼几何引论（上册），北京大学出版社

的第一章，或是

白正国，沈一兵，水乃翔，郭孝英，黎曼几何初步，高等教育出版社

的第一章，或者

忻元龙，黎曼几何讲义，复旦大学出版社

的附录等等.

如果用知乎、豆瓣来搜索微分流形的参考书，大概会发现最广受推荐的是

Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. GTM218. Springer

和

Tu, Loring W. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer，

前者非常详细且厚重，适合查阅而不适合阅读，而后者有点简单又较厚，参考价值不大.

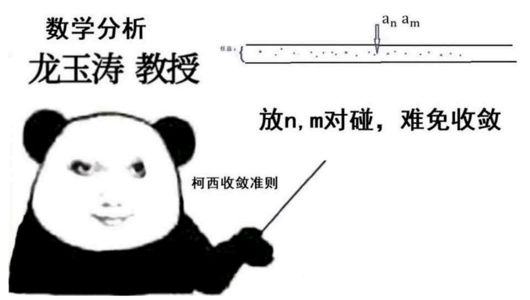
对于第二章丛的理论的深入探究可以看

Husemöller, Dale. Fibre Bundles. GTM20. Springer,

有关第四章 de Rham 上同调的经典之作当属

Bott, Raoul, and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. GTM82. Springer.

值得注意的是，上面两次出现的作者 Loring W. Tu 是台湾数学家杜武亮，和龙图没有关系.



龙图

最后，复流形的基本知识建议参考

Griffiths, Phillip, and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley

的 Chapter 0，更细致的讲解见

Huybrechts, Daniel. *Complex Geometry: An Introduction*. Universitext. Springer.

本讲义由多人共同完成，不同章节的水平参差不齐，且编写仓促，尚不够完善，也必定不乏错误与笔误. 如发现有误或对本讲义有改进的建议，可以向我们指出，或是联系我们直接参与修订的工作. 请询问 20 级英才班同学以获知编者信息.

2023 年 2 月于上海

第一章　簇与流形

1.1　光滑流形和拓扑流形

Definition　　局部坐标系

M 是一个拓扑空间，若 $U \subset M$ 是 M 的一个开子集，$\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 是一个同胚，则称 (U, φ) 是 M 的一个局部 (n 维) 坐标系 (坐标卡).

我们常记 $x^i(p) = (\varphi(p))^i$.

注 1.1.1. 回忆：Hausdorff 分离公理.

M 是一个拓扑空间，若 $\forall p, q \in M$, 存在 p, q 的邻域 U, V，使得 $U \cap V = \varnothing$，则称 M 满足 Hausdorff 分离公理，称 M 是 Hausdorff 空间.

Hausdorff 空间的子拓扑空间是 Hausdorff 空间.

注 1.1.2. 回忆：第二可数公理.

如果 M 是一个具有可数拓扑基的拓扑空间，则称 M 满足第二可数公理，称 M 是第二可数空间.

若 M 满足第二可数公理，则 M 的任意开覆盖有可数开子覆盖.

第二可数空间的子拓扑空间是第二可数的.

Definition　　拓扑流形

M 是一个 Hausdorff 空间，且 M 可被可数个 n 维坐标卡覆盖，则称 M 为 n 维拓扑流形.

一个等价定义：设 M 是一个 Hausdorff 和第二可数的拓扑空间，若 M 的每个点 p 都有一个开邻域 $U \subset M$，使得 U 和 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集是同胚的，则称 M 是一个 n 维拓扑流形.

练习 1.1.1. 证明：（1）第二可数的拓扑空间 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 必有可数子覆盖.（2）上述两个定义等价.

注 1.1.3. 不同教材对拓扑流形的拓扑要求有出入，此门课程中我们约定拓扑流形满足 Hausdorff 分离公理和第二可数公理.

练习 1.1.2. 证明拓扑流形 M 必定是局部紧致的，即在每一个点 $p \in M$，必有 p 的一个邻域 V，使得 $\overline{V}$ 是紧致的.

练习 1.1.3. 证明或否定：设 M 是一个第二可数的拓扑空间，M 的每个点 p 都有一个开邻域 $U \subset M$，使得 U 和 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开子集是同胚的，则 M 是 Hausdorff 的.

注 1.1.4. 对于拓扑流形 M，连通和道路连通等价，这是因为拓扑流形均是局部道路连通的.

练习 1.1.4. 设 X 是局部道路连通的拓扑空间，证明 X 的连通分支和道路连通分支相同.

Definition 紧流形
紧致的拓扑流形.

例 1.1.1. 球面 $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

定义 $U_z^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > 0\}$，定义 $\varphi_z^+ \colon U_z^+ \to \mathbb{R}^2$，$\varphi_z^+(x, y, z) = (x, y)$.

容易看出 φ_z^+ 是连续双射，且逆映射连续，即这是同胚. 于是 (U_z^+, φ_z^+) 是一个坐标卡.

同理可以定义 (U_z^-, φ_z^-)，(U_x^+, φ_x^+)，(U_x^-, φ_x^-)，(U_y^+, φ_y^+)，(U_y^-, φ_y^-).

这六个坐标卡构成 M 的一组开覆盖，于是 $\mathbb{S}^2$ 是一个拓扑流形.

类似地，$\mathbb{S}^n$ 也是拓扑流形.

例 1.1.2. 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$.

参见陈维桓《微分流形初步》，第 59 页.

例 1.1.3. 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$.

在 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中定义一个等价关系：设 $u, v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$，则 u 与 v 等价（记为 $u \sim v$）当且仅当存在非零复数 λ 使得 $u = \lambda v$. 定义 $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$.

记 $U_i = \{x \in \mathbb{CP}^n \mid x = [z_0, z_1, \cdots, z_n], (z_0, z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_i \neq 0\}$.

令 $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{C}^n$, $[z_0, z_1, \cdots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}\right)$，这个映射有意义，并且是同胚.

因此 $\mathbb{CP}^n$ 是拓扑流形.

Definition 设 M 是一个拓扑流形，(U, φ) 和 (V, ψ) 被称为是光滑 (resp. 解析) 相容的，如果满足：当 $U \cap V \neq \varnothing$ 时，我们有

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

$$\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

均为光滑 (resp. 解析 (全纯)) 映射.

Definition 光滑结构
设 $\mathscr{D} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 M 上一簇坐标卡，称 $\mathscr{D}$ 给出了 M 上的一个光滑结构，如果：

(1) $\mathscr{D}$ 中的坐标卡覆盖了 M;

(2) $\mathscr{D}$ 中的任意两个坐标卡都是光滑相容的;

(3) $\mathscr{D}$ 是极大的，即任何与 $\mathscr{D}$ 中的坐标卡均相容的坐标卡都在 $\mathscr{D}$ 中.

注 1.1.5. 将光滑改为解析，即可定义解析结构 (复结构). 类似可以定义 C^r 微分结构.

Definition　光滑流形、复流形

称带有光滑结构 (resp. 复结构) 的拓扑流形为光滑流形 (resp. 复流形).

流形的维数定义为某个坐标卡的维数: $\dim M = n$. (试说明定义是合理的, 即: 对 $m \neq n$, $\mathbb{R}^m$ 的任何开集不同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的任何开集). 当流形的维数 n 已知时, 我们也习惯用 M^n 表示流形.

注 1.1.6. 陈省身: 流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质.

容易验证: $\mathbb{S}^2$ 是光滑流形, $\mathbb{CP}^n$ 是复流形.

同一个拓扑流形上可以定义不同的光滑结构.

在 $\mathbb{R}$ 上定义坐标卡 $(\mathbb{R},\varphi)$, $\varphi(x) = x$, 记这个坐标卡生成的光滑结构为 $\mathscr{D}_1$.

在 $\mathbb{R}$ 上定义坐标卡 $(\mathbb{R},\psi)$, $\psi(x) = x^3$, 记这个坐标卡生成的光滑结构为 $\mathscr{D}_2$.

考虑 $\varphi\circ\psi^{-1} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi\circ\psi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ 在原点不可微, 故这两个光滑结构不相容.

在下一节我们会说明这两个光滑结构给出的流形是彼此光滑同胚的. 但需要注意, 不同的光滑结构所给出的光滑流形不一定是彼此光滑同胚的. Milnor 构造出了同胚于 $\mathbb{S}^7$ 但不微分同胚于附带通常的微分结构的 $\mathbb{S}^7$ 的 7 维怪球.

命题 1.1.1. 设 $\mathscr{D}_0$ 是 M 上满足光滑结构定义中 (1), (2) 的坐标卡集, 则在 M 上存在唯一的一个光滑结构 $\mathscr{D}\supset\mathscr{D}_0$.

证明. 设 $\mathscr{D}$ 是与 $\mathscr{D}_0$ 中每个成员都光滑相容的坐标卡的集合, 则 $\mathscr{D}_0\subset\mathscr{D}$. 因此条件 (1), (3) 对 $\mathscr{D}$ 均成立. 为证明 $\mathscr{D}$ 是光滑结构, 我们还需验证条件 (2), 即证明: 若 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 M 的两个坐标卡, 它们与 $\mathscr{D}_0$ 中的每个成员都是光滑相容的, 则它们彼此是光滑相容的.

不妨设 $U\cap V\neq\varnothing$(否则显然). 我们先证明: $\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 是光滑的.

事实上, $\forall p\in\varphi(U\cap V)$, 存在 (U_0,φ_0) 是包含点 $\varphi^{-1}(p)$ 的坐标卡, 因此存在点 $\varphi^{-1}(p)$ 的邻域 $U_1\subset U_0\cap(U\cap V)$, 使得 $\varphi_0\circ\varphi^{-1} : \varphi(U_1)\to\varphi_0(U_1)$ 是光滑映射, 且 $\psi\circ\varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_1)\to\psi(U_1)$ 也是光滑映射, 因此它们的复合 $\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U_1)\to\psi(U_1)$ 是光滑映射, 故其在 p 点光滑. 由 p 的任意性知 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 光滑.

同理 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 光滑, 故 (U,φ) 和 (V,ψ) 光滑相容. 故 $\mathscr{D}$ 是一个光滑结构.

接下来证明唯一性, 设 $\mathscr{D}_1$ 是另外一个包含 $\mathscr{D}_0$ 中每个成员的光滑结构, 则 $\mathscr{D}_1$ 的成员与 $\mathscr{D}_0$ 的每个成员都是光滑相容的, 由 $\mathscr{D}$ 的定义可知 $\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}$. 另一方面, 因为 $\mathscr{D}_1$ 的成员与 $\mathscr{D}_0$ 的每个成员都是光滑相容的, 由 $\mathscr{D}_1$ 的极大性知 $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_1$. 于是 $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}$.

Definition　子流形 (粗略)

$M, \widetilde{M}$ 是两个光滑 (复) 流形, 若 $M\subset\widetilde{M}$, 则称 M 为 $\widetilde{M}$ 的子流形.

注 1.1.7. 子流形不一定继承拓扑结构, 详见可微映射一节.

Definition 乘积流形

M^m, N^n 是两个光滑 (复) 流形，则 $M\times N$ 是 M 和 N 的乘积流形，$\{(U\times V, \varphi\times\psi)\}$ 构成一个覆盖 $M\times N$ 的坐标卡集，这里 $(U,\varphi), (V,\psi)$ 分别是 M, N 的光滑结构.

定义 $\varphi\times\psi : U\times V \to \varphi(U)\times\psi(V) \subset \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$, $\varphi\times\psi(x,y) = (\varphi(x),\psi(y))$.

容易验证该坐标卡集满足条件 (1), (2)，因此它唯一决定了一个光滑结构.

注意 $\dim(M\times N) = m+n$.

例 1.1.4. M 是光滑流形，$M\times\mathbb{R}$ 称为 M 上的平凡线丛，$M\times\mathbb{R}^n$ 称为平凡向量丛.

例 1.1.5. 环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.

特别地，考虑等距浸入 $\mathbb{S}^3\subset\mathbb{R}^4$ 的平坦环面，

$x\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$，$x(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi)$, $(\theta,\phi)\in\mathbb{R}^2$.

Definition 定向

设 M 是 n 维光滑流形，称 M 是可定向的，若存在一个容许的坐标卡集 $\mathscr{D} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 使得，当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时，有

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

的 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^i}{\partial x^j}\right) > 0.$$

称 $\mathscr{D} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 M 的一个定向.

Definition 带边流形

将光滑流形定义中，映射的像空间改为 $\mathbb{H}^n = \{(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid x^1\geq 0\}$.

具体定义参见陈维桓《微分流形初步》，第 114 页.

Definition 边界点、边界

称 $x\in M$ 为带边流形 M 的边界点，若存在局部坐标系 (U,φ)，使得 $(\varphi(x))^1 = 0$.

称边界点的集合为边界，记为 ∂M.

当 $\partial M = \varnothing$，即 $M = \mathring{M}$ 时，M 即是普通流形，强调这点时称之为无边流形.

例 1.1.6. $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭球 $\left\{\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2\leq 1\right\}$ 是一个带边流形.

定理 1.1.1. 设 M^m 是带边流形，且 $\partial M\neq\varnothing$. 则由 M 的微分结构可以诱导出 ∂M 上的微分结构，使得 ∂M 称为 $m-1$ 维的无边流形，且包含映射 $i\colon\partial M\to M$ 是嵌入.

1.2 可微映射

Definition 光滑映射

设 M^m, N^n 是两个光滑流形 (resp. 复流形)，设 $f : M \to N$ 是从 M 到 N 的映射. 对 M 上一点 $p \in M$，若存在 p 的局部坐标系 (U,φ) 和 $q = f(p) \in N$ 点的局部坐标系 (V,ψ)，使得

$$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

是光滑的 (resp. 解析的)，则称 f 在点 p 是光滑的 (resp. 解析的).

若 f 在 M 上处处光滑 (resp. 解析)，则称 f 是光滑映射 (resp. 解析映射).

注 1.2.1. 我们需要检查定义的合理性，即需验证定义不依赖于局部坐标系的选择. 这个验证是简单的，作光滑函数的复合即可.

Definition 光滑同胚

设 M, N 是两个光滑流形 (resp. 复流形)，设 $f\colon M \to N$ 是双射，若 f 和 f^{-1} 均光滑 (resp. 解析)，则称 M 和 N 光滑同胚 (resp. 解析同胚).

注 1.2.2. 若可微流形 M 只具有可微结构，相应可定义可微映射和微分同胚.

注 1.2.3. 我们把微分同胚 (解析同胚) 的对象等同，特别是嵌入子流形.

例 1.2.1. 我们来看上一节的一个例子.

在 $\mathbb{R}$ 上定义坐标卡 $(\mathbb{R},\varphi)$，$\varphi(x) = x$，记这个坐标卡生成的光滑结构为 $\mathscr{D}_1$，记光滑流形 $M_1 = (\mathbb{R},\mathscr{D}_1)$.

在 $\mathbb{R}$ 上定义坐标卡 $(\mathbb{R},\psi)$，$\psi(x) = x^3$，记这个坐标卡生成的光滑结构为 $\mathscr{D}_2$，记光滑流形 $M_2 = (\mathbb{R},\mathscr{D}_2)$.

考虑映射 $f\colon M_1 \to M_2$，使得 $f(x) = \sqrt[3]{x}, \forall x \in M_1$，则有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

这表明 f 是一个光滑同胚，即 M_1 与 M_2 光滑同胚.

Definition 光滑函数

M 是光滑流形，若 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是光滑映射，则称之为光滑函数.

M 是复流形，若 $f\colon M \to \mathbb{C}$ 是解析映射，则称之为解析函数.

注 1.2.4. 在光滑映射中取 N 为 $\mathbb{R}$ 即可定义光滑函数.

如果取 M 为 $\mathbb{R}$ 中的开区间 (a,b)，则称光滑映射 $f\colon (a,b) \to N$ 为光滑流形 N 中的光滑曲线 (有时也指 f 的像 $f(a,b)$).

注 1.2.5. 光滑流形 (resp. 复流形)M 的光滑 (resp. 解析) 函数全体构成了光滑函数环 $C^\infty(M)$(resp. 解析函数环 $\mathcal{O}(M)$).

例 1.2.2. $\mathrm{SL}(n)$ 和 $\mathrm{O}(n)$ 上的矩阵乘法是光滑的.

我们有光滑的矩阵乘法映射 $F\colon \mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$，$F(A,B)=AB$.

明确矩阵乘法在 $\mathrm{SL}(n)$ 和 $\mathrm{O}(n)$ 上是封闭的，如果记 G 为 $\mathrm{SL}(n)$ 或者 $\mathrm{O}(n)$，则 $F(G\times G)\subset G$. 因此 G 上的乘法映射 $F|_{G\times G}$ 是光滑的.

> **Definition　Lie 群**
>
> 设微分流形 G 上存在群结构，使得群上的运算 $(a,b)\mapsto ab^{-1}$ 是 $G\times G\to G$ 的光滑映射，则称 G 为 Lie 群.

练习 1.2.1. 验证：$(a,b)\mapsto ab^{-1}$ 是 $G\times G\to G$ 的光滑映射等价于 $a\mapsto a^{-1}$ 与 $(a,b)\mapsto ab$ 均是光滑映射.

例 1.2.3. 一些 Lie 群的例子.

特殊线性群 $\mathrm{SL}(n)=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\mid \det A=1\}\subset M_{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n^2}$.

赋予 $\mathrm{SL}(n)$ 以 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子拓扑结构，即 $\mathrm{SL}(n)$ 中的开集是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中开集与 $\mathrm{SL}(n)$ 的交. 下面我们赋予流形结构.

可以将 $\mathrm{SL}(n)$ 看成 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子簇，$f(a_{ij})=\det A=1$ 看成代数方程. 则 $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}=A_{ij}$，其中 A_{ij} 是代数余子式.

若 $J=0$，则 $\{\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\}=0$，即 $A_{ij}=0$，对任意 i,j 成立. 则 $1=\det A=\sum\limits_i a_{ij}A_{ij}=0$，矛盾.

则 $\mathrm{SL}(n)$ 上每一个点都是光滑点，因此是光滑流形.（参见 1.3 节）

正交变换群 $\mathrm{O}(n)=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\mid A\cdot A^t=I\}$ 参见王志张老师讲义.

练习 1.2.2. 举几个矩阵群之外的 Lie 群的例子.

我们介绍几个常用的性质，具体参见陈维桓《微分流形初步》，第二章.

引理 1.2.1. 设 U, V 是光滑流形 M 的两个开子集，$\overline{U}$ 是紧致的，并且 $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$，则存在光滑函数 $f\in C^\infty(M)$，使得 $f|_U\equiv 1$，$f|_V\equiv 0$.

更常用的形式是这样的. 注意到直接推论是 $M\setminus\overline{V}$，但因为光滑性我们可以推到 $M\setminus V$ 上.

推论 1.2.1. 设 U,V 是光滑流形 M 的两个开子集，$\overline{U}$ 是紧致的，并且 $\overline{U}\subset V$，则存在光滑函数 $f\in C^\infty(M)$，使得 $f|_U\equiv 1$，$f|_{M\setminus V}\equiv 0$.

注 1.2.6. 在解析范畴内，这个定理不成立. 即不存在全纯函数 ϕ 使得 $\phi|_U\equiv 1$ 且 $\phi|_{\mathbb{C}\setminus V}\equiv 0$.

利用这个引理，在点 x 处光滑的函数很容易扩充成定义在整个流形上的光滑函数.

定理 1.2.1. 设 U 是光滑流形 M 的一个开子集，$f\in C^\infty(U)$，则在 U 中任意点 $p\in U$，必有点 p 的一个邻域 $V\subset U$，以及光滑函数 $\tilde{f}\in C^\infty(M)$，使得

$$\tilde{f}|_V=f|_V.$$

证明. 利用流形的局部紧致性，可以取到 p 的邻域 V,W 使得，$\overline{V}$ 是紧致的，并且

$$p\in V\subset\overline{V}\subset W\subset\overline{W}\subset U.$$

由上一个引理知，存在光滑函数 $g \in C^\infty(M)$，使得 $g|_V \equiv 1$，$g|_{M\setminus W} \equiv 0$.

令 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & x \in U, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$ 在 U 上，$\tilde{f}$ 是两个光滑函数的乘积，因此 $\tilde{f}$ 在 U 上光滑. 在 $M \setminus W$ 上，$\tilde{f}|_{M\setminus W} \equiv 0$，因此在 $M \setminus W$ 光滑.

而 $M \setminus \overline{W}$ 与 U 构成 M 的开覆盖，故而 $\tilde{f}$ 在 M 上光滑.

在 V 上，因为 $g|_V \equiv 1$，所以我们有 $\tilde{f}|_V = f|_V$.

Definition　局部有限

设 Σ_0 是 M 的一个子集族. 如果 M 中每个点都有一个邻域，使得它仅与 Σ_0 中的有限个成员相交，则称子集族 Σ_0 是局部有限的.

Definition　加细

设 Σ_1 和 Σ_2 是 M 的两个开覆盖. 如果对于 Σ_1 中的任意成员 U，必能在 Σ_2 中找到一个成员 V，使得 $U \subset V$，则称 Σ_1 是开覆盖 Σ_2 的加细.

引理 1.2.2. 设 M 是光滑流形，则存在可数多个紧致子集 $\{K_n\}$，使得 $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$，并且它们构成 M 的覆盖，即 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

引理 1.2.3. 设 M 是光滑流形，则 M 的任意一个开覆盖 $\Sigma = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 必定有一个可数的、局部有限的加细开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i\}_{i\geq 1}$，且每个 $\overline{V}_i$ 是紧致的.

定理 1.2.2. 单位分解定理

设 M 是 n 维光滑流形，$\Sigma = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的任意一个开覆盖，则 Σ 必有一个可数的、局部有限的加细开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i\}_{i\geq 1}$，以及定义在 M 上的一族光滑函数 $\{f_i\}_{i\geq 1} \subset C^\infty(M)$，使得 $0 \leq f_i \leq 1$，$\operatorname{supp} f_i$ 是包含在 V_i 内的紧致子集，并且 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$.

证明. 由引理知存在可数的、局部有限的加细开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i\}_{i\geq 1}$，且每个 $\overline{V}_i$ 是紧致的.

我们将构造开覆盖 $\{W_i\}$ 使得 $\overline{W}_i \subset V_i$，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = M$.

$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$，$\bigcup_{i=2}^{\infty} V_i$ 是开集，不妨设其是 M 的真子集. 令 $K_1 = M \setminus \bigcup_{i=2}^{\infty} V_i \subset V_1$，则 K_1 是含于紧集 $\overline{V}_1$ 的闭集，故是紧致的.

$\forall p \in K_1$，有开集 Z_p 使得 $\overline{Z}_p \subset V_1$，故而存在有限覆盖 $\{Z_{p_1}, Z_{p_2}, \cdots, Z_{p_r}\}$ 使得 $W_1 := \bigcup_{i=1}^{r} Z_{p_i} \supset K_1$，且 $\overline{W}_1 \subset V_1$ 是紧致的，$W_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} V_i = M$.

类似地，可以找到 $W_2, \cdots, W_n, \cdots$，这就是我们想要的开集族.

同样地，有开覆盖 $\{X_i\}$ 使得 $\overline{X}_i \subset W_i$，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = M$.

由引理，存在光滑函数 f_i，使得 $f|_{X_1} \equiv 1$，$f|_{M\setminus\overline{W}_i} \equiv 0$. 因此 $\operatorname{supp} f_i \subset V_i$.

对于任何 $p \in M$，存在 X_i 包含 p，又因为局部有限，故只有有限项不为 0，因此 $0 < \sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) < \infty$，令 $\tilde{f}_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{\infty} f_i}$, 有 $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i = 1$，且 $\operatorname{supp} \tilde{f}_i \subset V_i$.

注 1.2.7. 光滑函数族 $\{f_i\}_{i\geq 1}\subset C^\infty(M)$ 称为从属于覆盖 Σ_0 的单位分解. 由于 $\operatorname{supp} f_i\subset V_i$, 且 $\{V_i\mid 1\leq i<\infty\}$ 是局部有限的，所以考虑 $p\in M$ 的一个邻域 W 使得 W 只与有限多个 V_i 相交，换言之，只有有限多个 f_i 在 p 点不为零，故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(p)$ 局部上都是有限和，不必担心收敛问题，而且是光滑的.

注 1.2.8. 在光滑范畴中才有单位分解，解析范畴中没有.

注 1.2.9. 这几个引理和定理都需要光滑流形 M 第二可数公理且 Hausdorff，在本课程中是约定好的.

Definition 映射的微分、秩

设 M^m, N^n 是光滑流形，$f\colon M\to N$ 是光滑映射. 设 $p\in M$，$q=f(p)\in N$，取 p，q 两点的局部坐标系 $(U,\varphi),(V,\psi)$.

定义 $\tilde f=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U)\subset\mathbb{R}^m\to\psi(V)\subset\mathbb{R}^n$，这是光滑映射. 称 $\tilde f$ 在点 $\varphi(p)$ 的 Jacobi 矩阵

$$J_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\tilde f^1}{\partial x^m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\tilde f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\tilde f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}$$

为 f 的微分.

记 f 的秩为 $\operatorname{rank}(J_f)$.

注 1.2.10. 微分同胚的 Jacobi 矩阵是满秩的.

Definition 浸入、淹没

设 $f\colon M^m\to N^n$ 是光滑映射，设 $p\in M$. 称 f 在 p 点为浸入 (resp. 淹没)，如果 f 在 p 点的秩是 m(resp. n).

如果 f 在每点都是浸入 (resp. 淹没)，称 f 是浸入映射 (resp. 淹没映射).

注 1.2.11. 显然，若 f 在 p 点是浸入 (resp. 淹没)，则有 $m\leq n$ (resp. $m\geq n$).

例 1.2.4. 典型的浸入与淹没.

典型浸入：$\alpha\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\ (m\leq n)$, $\alpha(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$.

典型淹没：$\beta\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\ (m\geq n)$, $\alpha(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$.

定理 1.2.3. 浸入的典型表示

设光滑映射 $f\colon M^m\to N^n$ 在点 $p\in M$ 附近是一个浸入 (则 $m\leq n$)，则存在点 p 的邻域 (U,φ) 和点 $q=f(p)$ 的邻域 (V,ψ)，使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\psi(V)$$

恰好是典型浸入 α.

证明. 我们取点 p 的局部坐标系 (U_1,φ_1)，点 q 的局部坐标系 (V_1,ψ_1)，满足 $f(U_1)\subset V_1$. 令 $\varphi(p)=0$, $\psi(q)=0$. 令 $\tilde f=\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1)\to\psi_1(V_1)$.

因为 $\operatorname{rank}(J_f)=m$，不妨设 $J_f=\begin{pmatrix} A_m \\ * \end{pmatrix}_{n\times m}$，其中 A_m 是一个 $m\times m$ 的非奇异方阵.

构造映射 $F\colon \varphi_1(U_1)\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^n$，$F(x,y)=\tilde{f}(x)+(0,y)$，其中 $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^{n-m}$，则 $J_F=\begin{pmatrix} A_m & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}$ 是满秩方阵.

因此 F 在点 $(0,0)$ 附近是微分同胚，即存在 $(0,0)$ 的邻域 $W\subset\mathbb{R}^n$ 使得 F 在 W 上是微分同胚. 令 $U=\varphi_1^{-1}(\{x\in W \mid x=(x^1,x^2,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\})$. 存在 q 点邻域 $V\subset V_1$，使得 $f(U)\subset V$.

令 $\varphi=\varphi_1$，$\psi=F^{-1}\circ\psi_1\colon V\to\mathbb{R}^n$. 考虑 p 的局部坐标系 (U,φ) 和 q 点局部坐标系 (V,ψ). 有

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=F^{-1}\circ\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}=F^{-1}\circ\tilde{f}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

$$x\in\mathbb{R}^m\mapsto\tilde{f}(x)\mapsto(x,0)\in\mathbb{R}^n$$

这是一个典型浸入.

定理 1.2.4. 淹没的典型表示

设光滑映射 $f\colon M^m\to N^n$ 在点 $p\in M$ 附近是一个淹没 (则 $m\geq n$)，则存在点 p 的邻域 (U,φ) 和点 $q=f(p)$ 的邻域 (V,ψ)，使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to\psi(V)$$

恰好是典型淹没 β.

证明类似浸入的情形，略去.

值得一提的是，这两个定理都是秩定理的特殊情形，这里介绍秩定理但不证明.（参见 John M. Lee, Introduction to Smooth Manifold, GTM 218, P81）

定理 1.2.5. 秩定理

设 M^m 与 N^n 是两个光滑流形，$f\colon M\to N$ 是一个秩为 r 的光滑映射. 对于 M 中任意点 $p\in M$，存在点 p 附近的局部坐标系 (U,φ) 和 $q=f(p)\in N$ 附近的局部坐标系 (V,ψ)，使得 $f(U)\subset V$，且

$$\tilde{f}(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0).$$

注 1.2.12. 这三个定理都是局部的.

命题 1.2.1. 微分同胚判据

$f\colon M\to N$ 是同维数微分流形之间的光滑映射，若 f 处处满秩，且 f 是一对一的满射 (即双射)，则 f 是微分同胚.

注 1.2.13. 此处一对一和满射都不可少. 反例:

缺少一对一 $f(t)=e^{2\pi it}$, $t\in\mathbb{R}$.

缺少满射: $f(t)=e^t$, $t\in\mathbb{R}$.

Definition　浸入子流形

若 $f\colon M\to N$ 是浸入映射，则称 $f(M)$ 为 N 的浸入子流形.

注 1.2.14. 浸入子流形不必是一对一的，即 $f(M)$ 可能有自交.

例 1.2.5. 有自交的 8 字形

$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，其定义为 $F(t) = (2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2}))$.

这是一个浸入，但不是单的.

(a) 有自交　　　(b) 无自交

8 字形

注 1.2.15. 若 $f\colon M \to N$ 是光滑映射，我们知道 N 中的开集的逆是 M 中的开集，即 $f(M)$ 从 N 继承的子空间拓扑要粗于 f 在 $f(M)$ 上诱导的拓扑.

Definition　正则子流形

$f\colon M^m \to N^n$ 是浸入映射，令 $N' = f(M) \subset N$，并在 N' 上赋予 N 的子空间拓扑. 我们称 $f(M)$ 是 N 的正则子流形，若对于 M 上任意点 p，存在 N 上的局部坐标系 (V, ψ)，使得 $\psi(f(p)) = 0$ 且

$$\psi(V \cap N') = \{(y_1, y_2, \cdots, y_m, 0, \cdots, 0) \in \psi(V)\}.$$

例 1.2.6. 无自交的 8 字形.

即将第一个 8 字形限制在 $(-\pi, \pi)$ 上后重新参数化.

$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，其定义为 $G(t) = (2\cos(2\arctan t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(\arctan t - \frac{\pi}{2}))$.

这是一个单一浸入子流形，但在 $(0,0)$ 点附近不满足正则条件，因此不是正则子流形.

例 1.2.7. 环面 $\mathbb{T}^2$.

考虑浸入映射 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$，使得

$$\varphi(t) = (at \mod 1, bt \mod 1).$$

若 $a : b$ 是有理数，这是一条在 $\mathbb{T}^2$ 中的紧致闭曲线，且是正则子流形.

若 $a : b$ 是无理数，这仍是浸入，但其在 $\mathbb{T}^2$ 上稠密，因此不是正则子流形.

例 1.2.8. 拓扑学家的正弦曲线.

$S = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的正则子流形.

但如果加上 $0 \times [-1, 1]$ (当然还需要重新参数化)，便不再是正则子流形 (比如考虑 $(0,0)$ 点附近)，但仍可能是浸入子流形. 具体参见陈维桓《微分流形初步》，P85.

Definition 嵌入子流形

设 $f\colon M\to N$ 为单浸入，赋予 $f(M)\subset N$ 子空间拓扑，若 f 是光滑同胚，则称 f 为嵌入，称 $f(M)$ 为嵌入子流形.

注 1.2.16. 嵌入子流形要求 f 诱导的拓扑结构和 $f(M)$ 作为 N 的子空间继承的拓扑结构相匹配.

注 1.2.17. 若 $M\subset N$ 是 N 的子集 (不一定是子拓扑空间)，称 M 是 N 的浸入 (resp. 正则、嵌入) 子流形，若包含映射 $i\colon M\to N$ 是浸入 (resp. 正则、嵌入).

即使 M 不是 N 的子集，若 $f(M)\subset N$ 是 N 的子流形，我们常常将 M 与 $f(M)$ 等同.

定理 1.2.6. 浸入局部上都是嵌入.

设 $f\colon M^m\to N^n$ 是浸入映射，对于 M 上任意点 $p\in M$，存在 p 的邻域 $U\subset M$，使得 $f|_U\colon U\to N$ 是一个嵌入.

证明. 应用典型表示即可证明.

定理 1.2.7. $f\colon M^m\to N^n$ 是单浸入，则 $f(M)$ 是 N 的正则子流形等价于 f 是嵌入.

证明. 证明摘自陈维桓《微分流形初步》，第 86 页.

若 $f\colon M\to N$ 是嵌入. 考虑 f 的典型表示，即存在点 p 附近的局部坐标系 (U,φ) 和点 $q=f(p)$ 附近的 (V,ψ) 使得 $f(U)\subset V$，且

$$\psi\circ f(U)=\{s\in\psi(V)\mid y^{\nu}(s)=0,m+1\le\nu\le n\}.$$

因为 f 是嵌入，所以 f 是微分同胚，则 $f(M)$ 的拓扑继承于 N. 这样，由于 $f(U)$ 是 $f(M)$ 的开子集，存在 N 中的开子集 W 使得 $f(U)=f(M)\cap W$. 不妨设 $W\subset V$. 于是

$$\psi(W\cap f(M))=\psi\circ f(U)=\{s\in\psi(V)\mid y^{\nu}(s)=0,\ m+1\le\nu\le n\}=\{s\in\psi(W)\mid y^{\nu}(s)=0,\ m+1\le\nu\le n\},$$

即说明 $f(M)$ 是 N 的正则子流形.

如果 $f(M)$ 是 N 的正则子流形. 我们要证明，逆映射 $f^{-1}\colon f(M)\subset N\to M$ 是连续的，即证明对于任意一点 $p\in M$ 的邻域 U，能够找到 N 在点 $q=f(p)$ 的邻域 V，使得

$$f^{-1}(f(M)\cap V)\subset U.$$

因为 $f(M)$ 是 N 的正则子流形，存在 N 在点 q 附近的局部坐标系 (V_1,ψ)，使得 $\psi(q)=0$ 且

$$\psi(V_1\cap f(M))=\{(y_1,y_2,\cdots,y_m,0,\cdots,0)\in\psi(V_1)\}.$$

考虑点 $\psi(q)$ 的邻域 $\psi(\tilde V)=\{s\in V_1:|y^{\alpha}|<\delta\}$，其中 δ 是一个充分小的正数. 由于 f 是连续的，存在点 p 的局部坐标系 $(\tilde U,\varphi)$，使得 $\tilde U\subset U$，$\varphi(p)=0$，且 $f(\tilde U)\subset\tilde V$.

于是我们可以写出 $\tilde f$ 的局部坐标表示：

$$\begin{cases}y^i=\psi^i\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m), & 1\le i\le m,\\ y^{\nu}=0, & m+1\le\nu\le n.\end{cases}$$

因为 f 是浸入，故 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)} \neq 0$. 因此存在 $\delta_1 < \delta$，使得反函数 g^i 存在:

$$x^i = g^i(y^1, \cdots, y^m),\ |y^i| < \delta_1. \tag{1}$$

令 $V_2 = \psi^{-1}(\{s \in \psi(\tilde{V}) \mid |y^\alpha| < \delta_1\})$，则 $q \in V_2 \subset \tilde{V}$. 我们有

$$\begin{aligned}\psi(f(M) \cap V_2) &= \psi(V_2) \cap \{s \in \psi(V_1) \mid y^\nu(s) = 0, m+1 \le \nu \le n\}\\ &= \{s \in \psi(V_2) \mid y^\nu(s) = 0, m+1 \le \nu \le n\}.\end{aligned} \tag{2}$$

我们要证：$f^{-1}(f(M) \cap V_2) \subset \tilde{U} \subset U$.

事实上，设 $x \in M$，且 $f(x) \in f(M) \cap V_2$，则 $|y^i(f(x))| < \delta_1, y^\nu(f(x)) = 0$.

由 (1) 式知存在点 $\tilde{x} \in \tilde{U}$，使得 $\tilde{x}^i = g^i(y^1(f(x)), \cdots, y^m(f(x)))$，因此

$$\psi^i \circ f(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^m) = y^i(f(x)) = \psi^i \circ f(x^1, \cdots, x^m).$$

又因为 $\varphi(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$，故有 $y^\nu(f(\tilde{x}) = 0$.

所以，$f(\tilde{x}) = f(x)$. 又因为 f 是单一的，故 $\tilde{x} = x$. 证毕.

定理 1.2.8. 设 $f\colon M \to N$ 是单浸入，若 M 是紧致的，则 f 是嵌入，从而 $f(M)$ 亦为正则子流形.

证明. 我们需要拓扑学引理：从紧致拓扑空间到 Hausdorff 拓扑空间的连续双射必是同胚.（概要：f(闭) = f(紧) = 紧 = 闭，具体证明见 James R. Munkres, *Topology*, 定理 26.6）

因为 f 是连续单射，故而 $f\colon M \to f(M)$ 是连续双射. $f(M)$ 作为 N 的子拓扑空间继承了 Hausdorff 结构，故应用引理知这是一个微分同胚，即 $f(M)$ 是 N 的嵌入子流形.

定理 1.2.9. 设 $f\colon M^m \to N^n$ 是光滑映射，其秩为 r. 那么对于 $q \in f(M)$，$f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-r$ 维闭正则子流形.

证明. 设 $A = f^{-1}(q) \neq \varnothing$. 由于 f 是光滑的，A 是闭集.

应用秩定理，对任意 $p \in A$，有 p 附近的局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$ 和 q 附近的局部坐标系 $(V, \psi; y^j)$，使得 $f(U) \subset V$，且 $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ 和 $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$，且对于 $f|_U$ 有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

这意味着 U 中只有前 r 个坐标分量均为 0 的点被 f 打成 q，即

$$\varphi(A \cap U) = \varphi \circ (f|_U)^{-1} \circ \psi^{-1}(0) = \{(0, \cdots, 0, x^{r+1}, \cdots, x^m)\}.$$

因此，$A = f^{-1}(1)$ 是 M 的 $m-r$ 维闭正则子流形.

推论 1.2.2. 设 M^m 和 N^n 是光滑流形，$m > n$，$f: M \to N$ 是光滑映射. 若 f 在点 $p \in M$ 是淹没，则对于 $q = f(p) \in N$，$f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-n$ 维闭的嵌入子流形.

注 1.2.18. Whitney 定理告诉我们，光滑流形 M^m 总是可以嵌入到 $2m$ 维的欧式空间.

在引入黎曼度量后，流形的浸入是否等距是一个重要的问题.

接下来我们从微分几何的角度介绍切空间的概念，该部分为补充内容，但忠于传统的微分流形讲法，在此时引入切空间应当是必要的. 需要指出的是，此处切向量和切空间的抽象定义有一定理解难度，更详细的内容建议参考陈维桓《微分流形初步》2.3 节来系统地学习. 我们将要用到 2.4 节定义的 C_p^∞，是在 p 的邻域光滑的函数的正向极限，可以暂且理解为在 p 的某邻域光滑的函数 f 的全体.

Definition 切向量

设 M 是一个 m 维光滑流形，$p \in M$. 所谓光滑流形 M 在 p 点的切向量 v 是指满足下列条件的一个映射 $v\colon C_p^\infty \to \mathbb{R}$:

(1) $\forall f, g \in C_p^\infty$, 有 $v(f+g) = v(f) + v(g)$;

(2) $\forall f \in C_p^\infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, 有 $v(\lambda f) = \lambda \cdot v(f)$;

(3) $\forall f, g \in C_p^\infty$, 有 $v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + v(f) \cdot g(p)$,

其中 C_p^∞ 指的是定义在点 $p \in M$ 的邻域内且在点 p 处光滑的函数全体.

条件 (1), (2) 说明 v 是从 C_p^∞ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，条件 (3) 称为 Leibniz 法则.

例 1.2.9. 光滑曲线的切向量.

设 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是光滑流形中经过点 x_0 的一条光滑曲线，$\gamma(0) = p$，则曲线 γ 确定了一个映射 $v\colon C_p^\infty \to R$，其定义是

$$v(f) = \left.\frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}, \ \forall f \in C_p^\infty,$$

其中 t 是曲线 r 的自变量.

请读者自己验证其良定性和是切向量. 我们称在 p 的切向量 v 为光滑曲线 γ 在点 $t = 0$ 处点切向量，记为 $\gamma'(0)$. 一般地，曲线 γ 在 t 处点切向量记为 $\gamma'(t)$.

注 1.2.19. 反过来，光滑流形 M 在点 p 的任意一个切向量都可以看作光滑流形 M 上经过点 p 的一条光滑曲线在该点的切向量. 这个的证明主要利用了常微分方程解的存在性，详细内容参见陈维桓《微分流形初步》定理 3.1.

Definition 切空间

设 M 是 m 维光滑流形，$p \in M$. 用 T_pM 表示 M 在点 p 处的全体切向量构成的集合，则在 T_pM 中有自然的线性结构，使得 T_pM 成为 m 维向量空间，我们称 T_pM 为光滑流形 M 在点 p 的切空间.

接下来真正要用到的实际上是切空间的这一描述：设 $(U, \varphi; x_i)$ 是 M 在 p 点的一个坐标系，则

$$T_pM = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\},$$

其中切向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是映射

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\colon C_p^\infty &\to \mathbb{R}; \\ f &\mapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

作为本节的结束，我们来证明黎曼度量的存在性，这一命题不但告诉我们光滑流形一定能实现为黎曼流形，而且其证明涉及到一个重要的技术：用单位分解定理把整个流形上的问题转化到单个局部坐标系上.

命题 1.2.2. 一个光滑流形 M 有一个黎曼度量 g，即对称、正定的光滑协变张量场. 具体来说，所谓黎曼度量就是在每点 $p \in M$ 的切空间 T_pM 上指定一个内积 $\langle\ ,\ \rangle_p$，使得对 M 的任何局部坐标系 $(U, \varphi; x^i)$，$g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_{\varphi^{-1}(x)}$ 是光滑函数.（$\langle\ ,\ \rangle_p$ 是内积即是说矩阵 $(g_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ 是对称正定阵）

证明. 首先我们考虑一个从属于 M 的由局部坐标系 $\{V_\alpha\}$ 组成的覆盖的单位分解 $\{f_\alpha\}$，

在每个 V_α 上有一个诱导自微分同胚 $\varphi\colon V_\alpha \to \mathbb{R}^n$ 的黎曼度量 $\langle\ ,\ \rangle_\alpha = \langle d\varphi\ , d\varphi\ \rangle$.

我们再定义 $\langle\ ,\ \rangle = \sum f_\alpha \langle\ ,\ \rangle_\alpha$ 即可.

练习 1.2.3. 有了黎曼度量 g，我们就能定义 M 上的光滑曲线 $\gamma\colon [a, b] \to M$ 的长度为

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 dt,$$

其中 $\|\cdot\|$ 就是 g 在切空间 $T_{\gamma(t)}M$ 上指定的内积给出的范数. 定义 M 上两点 p, q 之间的距离为

$$d(p, q) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma\text{是连接}p, q\text{的分段光滑的连续曲线}\}.$$

验证：（1）$d(p, q)$ 是 M 上的一个度量. （2）这一度量给出的拓扑就是流形 M 的拓扑.

1.3 欧氏空间中的代数簇与解析簇

Definition 簇

在数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 $\mathbb{K}^n$ 中，一族光滑函数 $F = \{f_i\}_{i\in\Lambda} \subset C^\infty(\mathbb{K}^n)$ 的零点集

$$Z_F = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f_i(x) = 0,\ \forall i \in \Lambda\}$$

称为簇.

我们对光滑函数做一些限制，即可得到代数簇与解析簇.

Definition 代数簇

若定义某簇的光滑函数全为多项式，即 $f_i \in K[x_1, \cdots, x_n]$，$\forall i \in \Lambda$.

Definition 解析簇

若定义某簇的光滑函数全为解析函数，即 $f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{K}^n)$，$\forall i \in \Lambda$.

注 1.3.1. 解析函数就是多元全纯函数，见命题1.4.1.

例 1.3.1. 列举一些熟知的代数簇. 如椭球面 $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$, 椭圆抛物面 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{a_i^2} - 2x_n = 0$ 等是 $\mathbb{R}^n$ 中的代数簇. 而复球面 $\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1, z_i \in \mathbb{C}$，Fermat 三次曲面 $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的代数簇. 而李群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$，$\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ 等也都是复代数簇.

我们也可以定义子簇.

Definition 子簇

若 Z' 是簇 Z 的子簇，即是说 $Z' \subset Z$ 且 Z' 也是簇.

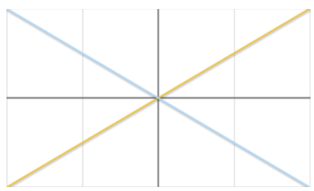
Definition 光滑点、奇异点

令 S 为 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的簇，由 $F = \{f_i\}_{i=1}^m$ 定义，则每一点有 Jacobi 矩阵

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

称点 p 光滑，即是说该点的 Jacobi 矩阵 $J_F(p)$ 满秩. 否则，称其为奇点（奇异点）.

例 1.3.2. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 由 $x^2 - y^2$ 定义的代数簇 Z，其形状为俩过原点的相交直线（如图）.



其 Jacobi 矩阵 $J_f = (2x, -2y)$，在 Z 上除去原点外均满秩. 故奇异点为原点，其余均为光滑点. 容易注意到，这些光滑点附近都存在邻域使得邻域内与簇的交集同胚于 $\mathbb{R}$ 的开集，但在奇异点上，任一邻域与簇的交集都包含一个"叉"，因而不可能与 $\mathbb{R}$ 中的开集同胚.

命题 1.3.1. 令 $Z \subset \mathbb{C}^n$ 是由解析函数 $F = \{f_i\}_{i=1}^k$ 定义的解析簇 $(k < n)$，p 是 Z 上的光滑点，则存在 p 的某个邻域 U 及其上的光滑函数 $w_1, \cdots, w_k$ 使得 $x_i = w_i(x_{k+1}, \cdots, x_n)$，并且此时自动成立 $w_i \in \mathcal{O}$.

证明. 此时，存在 p 的邻域 U 使得 $\det J_F|_U \neq 0$. 由隐函数定理，存在光滑函数 $w_1, \cdots, w_k$ 使得 $x_i = w_i(x_{k+1}, \cdots, x_n)$. 进一步地，依定义有

$$f_i(w_1(x_{k+1}, \cdots, x_n), \cdots, w_k(x_{k+1}, \cdots, x_n), x_{k+1}, \cdots, x_n) = 0.$$

f_j 都解析时，以 z_i 代替记号 x_i，对于 $k+1 \le \alpha \le n$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{C-R}}{=} \frac{\partial f_j(w_1(z_{k+1}, \cdots, z_n), \cdots, w_k(z_{k+1}, \cdots, z_n), z_{k+1}, \cdots, z_n)}{\partial \bar{z}_\alpha} \\ &= \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_\alpha} + \sum_l \frac{\partial f_j}{\partial w_l}\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}_\alpha} + \sum_l \frac{\partial f_j}{\partial \bar{w}_l}\frac{\partial \bar{w}_l}{\partial \bar{z}_\alpha} \\ &\overset{\text{C-R}}{=} \sum_l \frac{\partial f_j}{\partial w_l}\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}_\alpha}, \end{aligned}$$

加之 J_f 在 $\pi(U)$ 上满秩，即有 $\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0$. 由 l 与 α 的任意性即知 w_l 都解析.

注 1.3.2. 上述定理中，将“解析”换为“光滑”，则前半部分仍然成立. 证明完全相同.

注 1.3.3. 实则 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}; (w_1(x_{k+1},\cdots,x_n),\cdots,w_k(x_{k+1},\cdots,x_n),x_{k+1},\cdots,x_n) \mapsto (x_{k+1},\cdots,x_n)$ 给出了簇上（子空间拓扑意义下）p 处小邻域到 $\mathbb{R}^{n-k}$ 的开集的同胚.

可以证明，簇上的光滑点全体构成光滑流形.

命题 1.3.2. 令 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 是由光滑函数 $F = \{f_i\}_{i=1}^k$ 定义的簇 $(k < n)$，则簇上的光滑点全体构成一光滑流形.

证明. 光滑点全体必是开集（子空间拓扑意义下），因为 $\det J_F$ 是连续函数. 且上一命题的局部函数 $w_p^1,\cdots,w_p^k$ 定义了坐标卡（开集为 p 的邻域 U）的映射

$$\varphi_p : U \to \mathbb{R}^{n-k}, (w_p^1(y),\cdots,w_p^k(y),y) \mapsto y$$

只需证明对于任意不同的光滑点 p,q，坐标卡 (U,φ_p) 与 (V,ϕ_q) 是 C^∞ 相容的. 不妨设 $U \cap V \neq \varnothing$. 在 (V,ϕ_q) 内存在指标 $\Lambda = \{m_1,\cdots,m_k\}$ 使得 x_{m_i} 能被作用在 $y' = (\cdots,\hat{x}_{m_1},\cdots,\hat{x}_{m_k},\cdots)$ 的光滑函数 $\tilde{w}_i$ 表出. 那么取

$$\phi_q : V \to \mathbb{R}^{n-k}, (\tilde{w}_p^1(y'),\cdots,\tilde{w}_p^k(y'),y') \mapsto y'$$

考虑 $\varphi_p \circ \phi_q^{-1}$ 在 y' 分量 x_α 的作用：当 $\alpha \leq k$ 时，有 $\varphi_p \circ \phi_q^{-1}(x_\alpha) = w_p^\alpha(y)$；否则有 $\varphi_p \circ \phi_q^{-1}(x_\alpha) = x_\alpha$. 显然这是光滑的.

Definition　　正则函数

我们将数域限制为 $\mathbb{C}$（实际上在初步的代数几何中，我们考虑代数闭域）. 考虑代数簇 $Y \subset \mathbb{C}^n$，若函数 $f\colon Y \to \mathbb{C}$ 在 $p \in Y$ 处正则，则即是说存在不包含 p 点的子簇 $Y' \subset Y$，使得在 $Y \backslash Y'$ 上，存在处处非零的复多项式 $g,h \in \mathbb{C}[x_1,\cdots.x_n]$，使得 $f\,|_{Y\backslash Y'} = \dfrac{g}{h}$. 若 f 在 Y 上每点都正则，则称 f 为正则函数.

注 1.3.4. Zariski 拓扑.

事实上，Y 上的开集全部形如 $Y\backslash Y'$，因为这里定义的拓扑是 Zariski 拓扑，即闭集为全部零点集构成的代数. 在代数几何中，我们通常把 $\mathbb{C}^n$ 记为 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ 或 $\mathbb{A}^n$，称为仿射空间. 这里的 Zariski 拓扑是使多项式连续的最粗拓扑. 在复直线 $\mathbb{C}$ 上，由代数基本定理知，Zariski 拓扑就是余有限拓扑. 当然，Zariski 拓扑还可以类似定义在环的素谱上，由 Nullstellensatz 给出两个 Zariski 拓扑下空间的一一对应.

Definition　　代数簇的态射

若 Z,Y 分别为 $\mathbb{C}^n$ 与 $\mathbb{C}^m$ 中的代数簇，称 $\varphi\colon Z \to Y$ 为态射，若对于任意开集 $V = Y\backslash Y'$ 及 V 上的正则函数 $f\colon V \to \mathbb{C}$，有 $f \circ \varphi\colon Z \to \mathbb{C}$ 是正则函数.

注 1.3.5. 若 Z,Y 是光滑代数簇，则态射 $\varphi\colon Z \to Y$ 必然是全纯函数. 令 π_i 为 $\mathbb{C}^m$ 上打到第 i 个分量的函数. 显然 π_i 是正则函数. 取开集 $V = Z\backslash Z'$，则 $z_i \circ \varphi = \dfrac{g}{h} \in \mathbb{C}(x_1,\cdots,x_n)$ 是 V 上的全纯函数. 取局部坐标系 (U,ϕ)，其中 $U \subset V$，以及 Y 的局部坐标系 (W,ψ)，则下图交换：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "(\pi_1,\cdots,\pi_m)"] \arrow[d, "\psi"] & \mathbb{C}^m \arrow[dl, "\pi"] \\ U \arrow[r, dotted] & W & \end{tikzcd}$$

其中 π 是打到后 $m-k$ 个分量的投影. 故这诱导了 $U \to W$ 的全纯映射.

1.4 复流形

Complex manifolds are defined exactly the same way as smooth manifolds, except the local coordinate charts are required to take their values in $\mathbb{C}^n$ and to overlap holomorphically. But the similarity ends there. For example, on a compact complex manifold, the only global holomorphic functions are the constants, and the space of holomorphic sections of a holomorphic vector bundle is always finite-dimensional. While every smooth manifold can be embedded in some Euclidean space, only certain complex manifolds can be embedded in $\mathbb{C}^n$ or in complex projective space. There is a deep interplay between differential geometry and complex analysis, especially for Kähler manifolds, the ones on which the metric structure and the complex structure play together nicely.

Complex manifolds have deep and beautiful applications in many areas of mathematics. Here are a few examples:

Riemann surfaces (one-dimensional complex manifolds) are essential for understanding global properties of holomorphic functions in one complex variable.

Complex surfaces (two-dimensional complex manifolds) play a central role in attempts to classify 4-dimensional smooth manifolds.

Complex manifolds defined by algebraic equations are among the central objects of interest in algebraic geometry, and the study of their differential geometry has contributed important advances in algebraic geometry.

Calabi−Yau manifolds are complex manifolds that play a crucial role in string theory.

— John M. Lee

我们需要先有一点多复变函数的基础知识.

$\mathbb{R}^{2n}$ 上的点的余切空间的标准基为 $\{dx_i, dy_i\}_{1\le i\le n}$，而对于 $\mathbb{C}^n(\simeq \mathbb{R}^{2n})$ 上的点，余切空间的基取为

$$dz_i = dx_i + \sqrt{-1}dy_i,\ d\bar{z}_i = dx_i - \sqrt{-1}dy_i,$$

那么，切空间的对偶基就是

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\Big).$$

于是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上可微函数 f 的全微分 $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}dy_i$ 又写成

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}d\bar{z}_i := \partial f + \bar{\partial} f.$$

和单复变函数论一样，可以定义多元全纯函数的概念，而且同样有 Cauchy-Riemann 方程、关于每个变量复可微、解析三种等价的定义.

Definition　全纯函数

设 f 是定义在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上的连续可微复值函数，记为

$$f(z_1, \cdots, z_n) = u(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) + \sqrt{-1}v(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n),$$

其中 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$. 称 f 是全纯函数，若 f 满足以下三个等价的条件之一：

(1) Cauchy-Riemann 方程成立，即：$\forall 1 \le i \le n, \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_i}, \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

(2) f 关于每个 z_i 复可微，即：$\forall 1 \le i \le n, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0$.（或者说 $\bar{\partial} f = 0$）

(3) f 解析，即：$\forall w = (w_1, \cdots, w_n) \in U$，存在其邻域 V 使得 f 在 V 上等同于收敛的幂级数

$$\sum_{i_1, \cdots, i_n = 0}^{\infty} a_{i_1 \cdots i_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}.$$

（事实上 $a_{i_1 \cdots i_n} = \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} f}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}}$）

以 $\mathcal{O}(U)$ 表示全体 U 上的全纯函数的环.

下面验证这三个定义等价. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftarrow$ (3) 是简单的，(2) $\Rightarrow$ (3) 同一元情形的证明类似：

命题 1.4.1. 关于每个变量复可微的多复变函数 f 是解析的.

证明. $\forall w = (w_1, \cdots, w_n) \in U$, 使用 n 次一元 Cauchy 积分公式得到对 $z \in \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - w_i| < \epsilon_i \text{ 对} 1 \le i \le n\} \subset U$，成立 n 元 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{|\xi_i - w_i| = \epsilon_i} \frac{f(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

对于固定的 z，$\left|\frac{z_i - w_i}{\xi_i - w_i}\right| = \frac{|z_i - w_i|}{\epsilon_i} < 1$ 是常数，因此有一致收敛的幂级数

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)} \\
=&\frac{1}{(\xi_1 - w_1)(1 - \frac{z_1 - w_1}{\xi_1 - w_1}) \cdots (\xi_1 - w_1)(1 - \frac{z_1 - w_1}{\xi_1 - w_1})} \\
=&\sum_{i_1, \cdots, i_n = 0}^{\infty} \frac{(z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}}{(\xi_1 - w_1)^{i_1 + 1} \cdots (\xi_n - w_n)^{i_n + 1}}.
\end{aligned}$$

代入 n 元 Cauchy 积分公式，并交换求和与积分的次序，就得到 f 在 w 点解析.

Definition　设开集 $U \subset \mathbb{C}^n$，$f\colon U \to \mathbb{C}^m$ 是全纯函数是指 $f = (f_1, \cdots, f_m)$ 的每个分量 f_i 都全纯.

光滑的双射不一定是光滑同胚（即逆映射未必光滑），如 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$，然而全纯的双射的逆映射一定也全纯：

命题 1.4.2. 设全纯函数 $f\colon U \to V$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的开集 U, V 间的双射，则 f 是双全纯函数（即 f^{-1} 也是全纯函数）.

证明较困难，Cf. 沙巴特，复分析导论（第二卷），高等教育出版社，第 39,116 页，或 D. Huybrechts, *Complex Geometry: An Introduction*, Universitext, Springer, pp.13,17.

练习 1.4.1. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 的连通开集，证明：

（1）若 $f, g \in \mathcal{O}(U)$ 在一个非空开集上相等，则 $f = g$.

（2）若 $f \in \mathcal{O}(U)$ 在某点取到局部最大模，则 f 为常数.

Hint:（1）$V = \{z \in U \mid \forall (i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \dfrac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}(f-g)}{\partial z_1^{i_1}\cdots\partial z_n^{i_n}}(z) = 0\}$ 既开又闭.

（2）使用单复变函数的最大模原理.

现在我们开始讨论复流形，先回忆一下其定义.

Definition 复流形

设 M 是第二可数的 Hausdourff 空间，在 M 上给定了一族坐标卡 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 构成其开覆盖，其中 φ_α 是 U_α 到 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ 的同胚，当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时转移函数 $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 全纯，且这组坐标卡在此意义下极大，则称 M 是一个 n 维复流形. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 称为 M 的一个复结构，也称为解析结构.

显然，一个 n 维复流形也是一个 $2n$ 维光滑流形. 一维复流形又称为黎曼曲面.

Riemann 映射定理告诉我们任何复平面 $\mathbb{C}$ 的单连通区域双全纯等价于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 或就是 $\mathbb{C}$ 本身. 对于黎曼曲面，我们有如下的结论.

命题 1.4.3. 单连通黎曼曲面双全纯等价于 $\mathbb{D}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 之一.

证明见崔贵珍、程涛《复分析》，9.2 节.

下面给出命题1.3.2的复的版本：

命题 1.4.4. 解析簇 $Z = Z\{f_1, \cdots, f_k\} \subset \mathbb{C}^n$ 上的光滑点全体构成一复流形.

证明. 将命题1.3.2的证明中的光滑函数 $w_p^1, \cdots, w_p^k$ 换为全纯函数即可（这由命题1.3.1保证），其余步骤都一样.

复子流形的定义和光滑流形的正则子流形的定义相近：（注意复流形的子流形不一定是复子流形）

Definition 复子流形

复流形 M 的复子流形 N 是指局部同胚于 $\mathbb{C}^k$ 的开子集 N（其中 k 是固定的），即：$N \subset M$, 且 $\forall p \in M$，存在局部坐标系 (U, φ) 使得 $\varphi(p) = 0$ 且 $\varphi(N \cap U) = \{(y_1, \cdots, y_k, 0, \cdots, 0) \in \varphi(U)\}$.

容易验证，这等价于 M 局部是 $n-k$ 个满秩的全纯函数的零点集，即：$N \subset M$, 且 $\forall p \in M$，存在其邻域 U 及在 p 点满秩的全纯映射 $f : U \to \mathbb{C}^{n-k}$ 且 $N \cap U = \{z \in U \mid f(z) = f(p)\}$.

Definition 解析簇

复流形 M 的解析簇 V 是指 M 局部是若干个全纯函数的零点集，即：$\forall p \in U$，存在 p 在 M 中的邻域 U 使得 $V \cap U$ 是全纯函数组 $f_1, \cdots, f_k$ 在 U 中的公共零点集.

p 是 V 的光滑点是指在该点 $f_1, \cdots, f_k$ 满秩，否则就称为奇异点.

注 1.4.1. 复流形的光滑解析簇（即每点都光滑）就是复子流形.

以和光滑流形类似的方式，可以在复流形上给出全纯函数、全纯映射等概念.

Definition 全纯函数

复流形 M 的开集 U 上的全纯函数 f 是关于 U 上的局部全纯坐标皆全纯的映射，即：对 M 的任何坐标卡 (V, φ)，$f \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数.

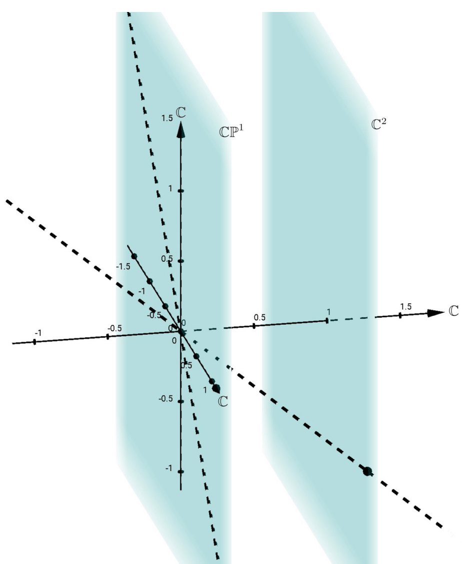
以 $\mathcal{O}(U)$ 表示 U 上的所有全纯函数构成的环.

例 1.4.1. $\mathbb{CP}^n$（见例1.1.3，其中转移函数 φ_i 全纯）是紧复流形，因为存在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的单位球面到 $\mathbb{CP}^n$ 的连续满射.

形式上，可以写

$$\mathbb{CP}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{C} - \{0\}} = \mathbb{C}^n + \mathbb{C}^{n-1} + \cdots + \mathbb{C}^1 + \{0\}.$$

其实际意义是 $\mathbb{CP}^n = \{ [z_1, \cdots, z_n, 1] \mid (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n\} \cup \{ [z_1, \cdots, z_{n-1}, 1, 0] \mid (z_1, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}\} \cdots \cup \{ [1, 0, \cdots, 0] \}$，或者说 $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1}$，即 $\mathbb{CP}^n$ 可通过把 $\mathbb{C}^n$ 的无穷远处紧化成 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 得到.



$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1$

注意到 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就是黎曼球面，因此 $\mathbb{CP}^1$ 同胚于 $\mathbb{S}^2$.

$\mathbb{CP}^n$ 中齐次多项式（存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f(tz_1, \cdots, tz_{n+1}) = t^m f(z_1, \cdots, z_{n+1})$ 的多项式 $f \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_{n+1}]$）的零点是良定的（注意：齐次多项式本身并不是 $\mathbb{CP}^n$ 上的函数，因为连通紧复流形上不存在非常数的全纯函数），因此齐次多项式 $f_1, \cdots, f_k$ 定义了 $\mathbb{CP}^n$ 中的仿射代数簇 $Z(f_1, \cdots, f_k)$.

周炜良证明了 $\mathbb{CP}^n$ 的解析簇一定是仿射代数簇，见 R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of Several Complex Variables*, Princeton Hall, 1965, pp.170.

命题 1.4.5. $\mathcal{O}(\mathbb{CP}^1)=\mathbb{C}$（即：$\mathbb{CP}^1$ 上的全纯函数只有常值函数）.

证明. 设 $f\in\mathcal{O}(\mathbb{CP}^1)$，因 f 在紧集 $\mathbb{CP}^1$ 有界，由 Liouville 定理，f 为常数.

练习 1.4.2. 对连通的紧复流形 M，$\mathcal{O}(M)=\mathbb{C}$.

然而在连通的紧复流形（作为光滑流形）上显然存在很多光滑函数，比全纯函数多得多.

Definition 全纯映射

设 M,N 为复流形，全纯映射 $f\colon M\to N$ 是指 f 关于 M 和 N 上的任何局部全纯坐标皆全纯，即：对任何 M 的坐标卡 (U,φ) 和 N 的坐标卡 (V,ψ)，$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(f^{-1}(V)\cap U)\to\psi(V)$ 是全纯函数.

Definition 双全纯等价

和复变函数中一样，复流形 M,N 之间的双全纯映射 f 是指 f 和 f^{-1} 皆为全纯映射. 此时称复流形 M,N 双全纯等价.

由命题1.4.2知复流形之间的全纯双射也一定是双全纯映射.

复流形 M 有多种不同的切空间：将 M 当作实流形，在 $p\in M$ 的切空间是 $T_{\mathbb{R},p}(M)=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i}\}$；把它复化，得到 $T_{\mathbb{C},p}(M)=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i}\}=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial z_i},\frac{\partial}{\partial \bar z_i}\}$；称其子空间 $T'_p(M)=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial z_i}\}$ 为全纯切空间，$T''_p(M)=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial \bar z_i}\}$ 为反全纯切空间. $T'_p(M)$ 与局部坐标系 $(z_1,\cdots,z_n)$ 的选取无关，因为 $T'_p(M)$ 是 $T_{\mathbb{R},p}(M)$ 的零化全体反全纯函数（即全纯函数的共轭）的子空间. 全纯切空间的意义在于，对于全纯映射 $f:M\to N$，切映射 f_* 满足 $f_*(T'_p(M))\subset T'_{f(p)}(N)$.

M 上每点有由标准的微分形式

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\cdots\wedge dz_n\wedge d\bar z_n=dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n$$

确定的定向，如果再说明局部的双全纯映射不改变定向，这就给出了复流形的一个标准定向.

命题 1.4.6. 复流形间局部的双全纯映射保持它们逐点的标准定向.

证明. 设 U,V 为复流形 M,N 的开子集，双全纯映射为 $f\colon U\to V$，$f(p)=q$，记 $T_{\mathbb{R},p}(M)=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$，$T_{\mathbb{C},p}(M)=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial z_i},\frac{\partial}{\partial \bar z_i}\right\}$，以及 $T_{\mathbb{R},q}(N)=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial v_i}\right\}$，$T_{\mathbb{C},q}(N)=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial w_i},\frac{\partial}{\partial \bar w_i}\right\}$.

设 $f_*\colon T'_p(M)\to T'_q(N)$ 关于 $\left\{\frac{\partial}{\partial z_i}\right\}$ 与 $\left\{\frac{\partial}{\partial w_i}\right\}$ 的矩阵为 J，那么 $f_*\colon T_{\mathbb{C},p}(M)=T'_p(M)\oplus T''_p(M)\to T_{\mathbb{C},q}(N)=T'_q(N)\oplus T''_q(N)$ 关于 $\left\{\frac{\partial}{\partial z_i},\frac{\partial}{\partial \bar z_i}\right\}$ 与 $\left\{\frac{\partial}{\partial w_i},\frac{\partial}{\partial \bar w_i}\right\}$ 的矩阵就是 $\begin{pmatrix}J&0\\0&\bar J\end{pmatrix}$，其行列式等于 $\det J\det\bar J>0$，这也等于 f_* 关于另一组基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$ 与 $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial v_i}\right\}$ 的矩阵（即 f 关于这两个坐标系的 Jacobi 矩阵）的行列式，故 f 保持定向.

推论 1.4.1. 复流形存在一个标准定向，且复流形间的双全纯映射保持该定向.

例 1.4.2. 给出二维环面 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 上所有互不等价的复结构. 所谓 M 上的两个复结构 $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ 是等价的，是指存在双全纯映射 $f\colon(M,\mathcal{U})\to(M,\mathcal{U}')$.

为此，引入复环面的概念. 设 $\{w_1,w_2\}$ 是 $\mathbb{C}$ 关于 $\mathbb{R}$ 的一组基，构造 $\mathbb{C}$ 的格

$$\Gamma=\{n_1w_1+n_2w_2\mid n_1,n_2\in\mathbb{Z}\},$$

$\mathbb{C}/\Gamma$ 称为一维复环面，记 π 为投影 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Gamma$. 对于 $[z]\in\mathbb{C}/\Gamma$，取 $z\in\mathbb{C}$ 的小的邻域 U 使得 U 中任两点之差不属于 Γ，那么 $\pi(U)\xrightarrow{\pi^{-1}}U$ 是同胚，且不同的同胚只相差一个平移故全纯相容，这说明了 $\mathbb{C}/\Gamma$ 是复流形. 二维实环面上的复结构均由某个复环面给出，这是因为其万有覆盖 $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ 上的复结构是互相等价的（回忆1.4.3）. 因此，下面分类互不等价的复环面即可.

设 $\mathbb{C}/\Gamma$ 和 $\mathbb{C}/\Gamma'$ 是两个复环面. 不难说明：存在全纯映射 $\tilde{f}\colon\mathbb{C}/\Gamma\to\mathbb{C}/\Gamma'$ 等价于存在整函数 f（即全纯函数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$）使得只要 $z_1-z_2\in\Gamma$ 就有 $f(z_1)-f(z_2)\in\Gamma'$（前 $\Rightarrow$ 后可用 Morera 定理说明扩展 $\tilde{f}$ 得到的 f 全纯），将后者简称为 f 同 Γ 与 Γ' 相容. 所以 $\mathbb{C}/\Gamma$ 和 $\mathbb{C}/\Gamma'$ 双全纯等价等价于存在同 Γ 与 Γ' 相容的整函数 f，且 f 诱导出的 $\tilde{f}$ 可逆.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\\ \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'}\\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}/\Gamma'\end{array}$$

不妨设 $\Gamma=\{n_1\tau+n_2\mid n_1,n_2\in\mathbb{Z}\}$ 且 $\tau\in$ 上半平面 $\mathbb{H}=\{\operatorname{Im}\tau>0\}$，这是因为，不妨设 $\frac{w_1}{w_2}\in\mathbb{H}$（否则对换 w_1,w_2），整函数 $f(z)=\frac{z}{w_2}$ 同 $\{n_1w_1+n_2w_2\mid n_1,n_2\in\mathbb{Z}\}$ 与 $\{n_1\tau+n_2\mid n_1,n_2\in\mathbb{Z}\}$ 相容. 因此，复环面 $\mathbb{C}/\Gamma$ 的结构由 $\tau\in\mathbb{H}$ 唯一确定. 以下只需研究哪些 $\tau\in\mathbb{H}$ 确定了的复环面是双全纯等价的.

设由 $\tau'\in\mathbb{H}$ 确定的复环面 $\mathbb{C}/\Gamma'$ 双全纯等价于 $\mathbb{C}/\Gamma$, 其中 $\Gamma'=\{n_1\tau'+n_2\mid n_1,n_2\in\mathbb{Z}\}$, 则存在整函数 f 使得对 $z_1-z_2\in\Gamma$ 有 $f(z_1)-f(z_2)\in\Gamma'$. 由 f 连续而 Γ' 离散得到, 对于很小的 h, $f(z_1+h)-f(z_2+h)=f(z_1)-f(z_2)$, 于是 $f'(z_1)=f'(z_2)$, 即 $f'(z)$ 是双周期函数, 因而有界, 由 Liouville 定理得 $f'(z)$ 是常数, 所以 $f(z)=az+b$. 不妨设 $f(z)=az$，那么

$$\tau=\frac{f(\tau)}{f(1)}=\frac{n_1\tau'+n_2}{m_1\tau'+m_2}\ \ (n_1,n_2,m_1,m_2\in\mathbb{Z}),$$

同理有

$$\tau'=\frac{n_1'\tau+n_2'}{m_1'\tau+m_2'}\ \ (n_1',n_2',m_1',m_2'\in\mathbb{Z}),$$

于是得到

$$\begin{pmatrix}n_1 & n_2\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1' & n_2'\\ m_1' & m_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

再根据

$$0<\tau-\bar{\tau}=\frac{n_1\tau'+n_2}{m_1\tau'+m_2}-\frac{n_1\overline{\tau'}+n_2}{m_1\overline{\tau'}+m_2}=\frac{(n_1m_2-n_2m_1)(\tau'-\overline{\tau'})}{|m_1\tau'+m_2|^2}$$

得 $\begin{vmatrix}n_1 & n_2\\ m_1 & m_2\end{vmatrix}>0$，因此 $\begin{pmatrix}n_1 & n_2\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\{M_{2\times2}(\mathbb{Z})\mid\begin{vmatrix}n_1 & n_2\\ m_1 & m_2\end{vmatrix}=1\}$.

反过来，对任意的 $\tau'\in\mathbb{H}$ 和 $\begin{pmatrix}n_1 & n_2\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，都有 $\tau=\dfrac{n_1\tau'+n_2}{m_1\tau'+m_2}\in\mathbb{H}$，且对于整函数 $f(z)=$

$(m_1\tau' + m_2)z$，由

$$\begin{pmatrix} f(\tau) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}$$

得到 f 是 Γ 到 Γ' 的双射，那么 f^{-1} 就能诱导出 $\widetilde{f^{-1}}\colon \mathbb{C}/\Gamma' \to \mathbb{C}/\Gamma$，且这是 $\tilde{f}$ 的逆映射.

因此结论是，一维复环面的参数空间可表达为 $\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，群作用为

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{n_1 z + n_2}{m_1 z + m_2}.$$

注 1.4.2. 更一般地，n 维复环面是一个 n 维复向量空间商掉由它的一组 $\mathbb{R}$-基自由生成的离散群，在光滑同胚的意义下，它们是一样的，都光滑同胚于 $(\mathbb{S}^1)^{2n}$. 特别地，一维复环面都和 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 光滑同胚.

可定向的二维紧曲面 S 上的不同复结构（相当于给定亏格 g 的互不等价的紧黎曼曲面）的参数空间又称为模空间. 如果定义改为双全纯映射要同伦于 id_S 才算等价，那么参数空间称为 Teichmüller 空间.

第二章　向量丛和切丛

2.1　向量丛

简而言之，向量丛就是在纤维上附加了向量空间结构的丛结构．为了对向量丛有更为深刻的了解，我们首先从丛以及一些相关的概念入手，并就丛之间的态射进一步深入。

Definition　　丛

已知空间 E，B 以及映射 $\pi\colon E \to B$，则称三元组的结构 $\xi = (E, \pi, B)$ 为丛．其中 E 和 B 分别称为全空间与底空间，π 称为丛投影．对于任意 $b \in B$，称空间 $\pi^{-1}(b)$ 为丛在 b 上的纤维．

可以发现，一般意义下的丛事实上并没有对空间本身做任何限制，由于投影映射未必为满射，某一元素的纤维也可能为空集.

例 2.1.1. $\xi = (B \times F, p, B)$ 中 p 为全空间到第一个分量的投影，该三元组构成 B 上的一个丛，称为**乘积丛**.

Definition　　子丛

已知丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 与 $\xi' = (E', \pi', B')$ 满足 $E' \subset E$，$B' \subset B$ 且 $\pi|_{E'} = \pi'$，则称 ξ' 为 ξ 的子丛．

Definition　　截面

已知丛 $\xi = (E, \pi, B)$，存在映射 $s\colon B \to E$ 满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$，则称 s 为 ξ 的一个截面．

截面映射 $s : B \to E$ 事实上相当于一个满足 $s(b) \in \pi^{-1}(b)$，$\forall b \in B$ 的映射，或者说将每个底空间的元素映到其纤维上的映射．也就是说，截面指的是在底空间每一点的纤维上“截出一点”的映射．自然地，截面存在就意味着丛投影为满射.

例 2.1.2. 当 $\xi' = (E', \pi', B')$ 为 $\xi = (E, \pi, B)$ 子丛时，对于 ξ 的一个截面 s，有 $s|_{B'}$ 是 ξ' 子丛当且仅当 $s(b') \in E'$，$\forall b' \in B'$．这一结论是显然的.

例 2.1.3. 乘积丛 $(B \times F, p, B)$ 的任意截面 s 都可以写成 $s(b) = (b, f(b))$，$\forall b \in B$ 的形式，且 $f\colon B \to F$ 由 s 唯一决定．此亦显然．注意到 (B, id_B, B) 也是 $(B \times F, p, B)$ 的子丛，从而也可以对前一例子加以佐证.

在对丛本身相关定义探讨的基础上，我们需要对丛上的态射进行进一步讨论.

Definition 丛态射

已知丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 与 $\xi' = (E', \pi', B')$，且存在映射 $u\colon E \to E'$ 与 $f\colon B \to B'$ 满足 $\pi' \circ u = f \circ \pi$，则称映射对 $(u, f)\colon \xi \to \xi'$ 为一个丛态射.

所述关系即要求如下所示交换图. 从图中可以看出，一方面可以把条件写成 $u(\pi^{-1}(b)) \subset (\pi')^{-1}(f(b))$，$\forall b \in B$，即 u 会把 $b \in B$ 的纤维映到 $f(b)$ 的纤维里去；另一方面，当 π 为满射时，满足条件的 f 会被 u 唯一决定.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

当丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 与 $\xi' = (E', \pi', B)$ 有相同的底空间 B 时，若映射 $u : E \to E'$ 使 (u, id_B) 为丛态射，即 $\pi = \pi' \circ u$ 则可简记该态射为 $u : \xi \to \xi'$，称为 B **上的丛态射**或 B**-态射** (**B-morphism**). 通过该情形下的交换图，可见 $u(\pi^{-1}(b)) \subset (\pi')^{-1}(b)$，$\forall b \in B$，即 u 是保纤维的，会将底空间上的元素的纤维映射到同一个元素的纤维上.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

例 2.1.4. 如若丛 $\xi' = (E', \pi', B')$ 是丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 的子丛，那么当 f 和 u 分别取底空间和全空间的包含映射时，(u, f) 会形成丛态射.

例 2.1.5. 考虑丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 的截面 $s\colon B \to E$，可将其视为由其自然诱导的 B-态射 $s\colon (B, id_B, B) \to (E, \pi, B)$（容易验证其符合条件），因而**从态射的性质均适用于截面**.

例 2.1.6. 已知丛态射 $(u, f)\colon (E, \pi, B) \to (E', \pi', B')$ 与 $(u', f')\colon (E', \pi', B') \to (E'', \pi'', B'')$，则 $(u', f') \circ (u, f)$ 也为丛态射. 由以下交换图证明显然.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\pi'"] & E'' \arrow[d, "\pi''"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \arrow[r, "f'"] & B'' \end{tikzcd}$$

由上述例子得到的结论我们可以定义：

Definition 丛范畴

我们将丛所构成的范畴记为 **Bun**. 其对象为全体丛，态射为丛态射，态射的复合取上例所示的丛态射的复合. 对于一个给定的空间 B，可定义 $\mathbf{Bun}_B$ 为 B 上的丛形成的子范畴，对象为以 B 为底空间的全体丛，而态射则取 B-同态.

由范畴的一般性质我们可以定义丛态射的同构:

Definition 丛同构

丛态射 $(u,f)\colon (E,\pi,B) \to (E',\pi',B')$ 为丛同构当且仅当存在丛态射 $(u',f')\colon (E',\pi',B') \to (E,\pi,B)$ 满足 $f'\circ f = \mathrm{id}_B$，$f\circ f' = \mathrm{id}_{B'}$，$u'\circ u = \mathrm{id}_E$ 且 $u\circ u' = \mathrm{id}_{E'}$. 相应地，称 (E,π,B) 与 (E',π',B') 构成丛同构. 由此亦可自然的定义 B-同构.

Definition 丛纤维

已知丛 $\xi = (E,\pi,B)$，空间 E 和 B 均有拓扑且 π 在相应拓扑下为连续映射. 若存在拓扑空间 F 满足对任意 $b\in B$，$\pi^{-1}(b)$ 与 F 同胚，则称 F 为丛 ξ 的纤维.

不难发现，丛纤维的存在自然保证了 π 为满射.

注 2.1.1. 请注意此“纤维”非彼“纤维”. 这里要求的丛上的纤维比丛定义中要求的底空间的元素的纤维要严格许多：它意味着整个丛的底空间中每一点的纤维都是拓扑上等价的，可以用一个统一的拓扑空间表示.

注 2.1.2. 这一定义开始，我们正式将拓扑性质纳入对丛的考量. 在后续部分，未加以说明的情况下，我们**默认考虑具有拓扑结构的丛**（即 E 与 B 均具有拓扑结构且 π 在该拓扑下连续.）

Definition 平凡性

称存在纤维 F 的丛 (E,π,B) 具有平凡性当且仅当 (E,π,B) 与乘积丛 $(B\times F,p,B)$ 构成 B-同构.

平凡性对于具有拓扑结构的丛非常重要，在平凡性下可以认为丛 (E,π,B) 的全空间可进行分解 $E = B\times F$，而丛投影 π 则变为自然的乘积投影 $p\colon B\times F\to B$，因此可以对具有这样性质的丛进行更深入的研究. 当然，在引入新的丛的概念前我们还需要一些准备工作.

Definition 丛的限制

已知丛 $\xi = (E,\pi,B)$ 且有集合 $A\subset B$. 令 $E' = \pi^{-1}(A)$，$\pi' = \pi|_{E'}$，则称 (E',π',A) 为 ξ 对 A 的限制，记作 $\xi|_A$.

Definition 局部同构

有相同底空间 B 的丛 ξ 与 η 为局部同构当且仅当对任意 $b\in B$，总存在 b 的开邻域 U 满足 $\xi|_U$ 与 $\eta|_U$ 为 U-同构.

Definition 局部平凡性

称存在纤维 F 的丛 (E,π,B) 具有局部平凡性当且仅当 (E,π,B) 与乘积丛 $(B\times F,\pi,B)$ 构成局部同构.

Definition 纤维丛

已知丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 有纤维 F（记为 (E, π, B, F)），且具有局部平凡性，则称 ξ 为纤维丛. 即对任意 $b \in B$ 都有其邻域 U，使得存在同胚 $\varphi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$，对自然投影 $p: U \times F \to U$ 有 $p = \pi \circ \varphi$. 这样的邻域以及其上的同胚构成的集 $\{U_i, \varphi_i\}$ 称为局部平凡化 **(local trivialization)**.

至此已经初步形成我们所期望研究的丛的雏形了：局部平凡性使得研究纤维丛在局部上可以视作 $U \times F$ 的形式. 而向量丛则是在此基础上进一步探讨赋予纤维线性结构下的情形.

Definition 向量丛

已知纤维丛 (E, π, B, F) 中 F 为 k 维的 $\mathbb{F}$-向量空间，且满足局部平凡化 $\{U_i, \varphi_i\}$ 中对任意 $b \in B$，存在其邻域 U_i 上的局部同胚 φ_i 使得 $\varphi_i|_{\{b\} \times \mathbb{F}^k} : b \times \mathbb{F}^k \to \pi^{-1}(b)$ 为线性同构，则称其为数域 $\mathbb{F}$ 上秩为 k 的拓扑向量丛（在不产生歧义时简称向量丛）.

Definition 向量丛 *

已知拓扑空间 E 与 B，以及它们之间的连续满射 $\pi: E \to B$ 满足：

1) 对于 B 上每一点 $b \in B$，$E_b := \pi^{-1}(b)$ 是一个 k 维的 $\mathbb{F}$– 向量空间 ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$).

2)（局部平凡性）对任何 $b \in B$，存在 b 的邻域 U 和同胚映射 $\varphi: U \times \mathbb{F}^k \to \pi^{-1}(U)$ 且满足：

   a. 对于自然的投影映射 $p: U \times \mathbb{F}^k \to U$ 有 $p(x, v) = \pi \circ \varphi(x, v)$ 成立.

   b. 对任意 $b \in U$，φ 在其上自然诱导的映射 $\varphi|_b : \mathbb{F}^k \to E_b$ 为线性同构.

满足以上条件的结构 (E, π, B) 称为数域 $\mathbb{F}$ 上秩为 k 的拓扑向量丛.

$$
\begin{tikzcd}
U \times F^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\
& U
\end{tikzcd}
$$

加 * 的定义为课上所给定义，读者可自行对比，两种定义除了符号差异和概念上的说法差异完全等价. 为了后续和课堂记录的一贯性，**后续内容会沿用加 * 的课堂定义以及相关记号**. 这一概念引入过程是想表现向量丛定义的每一部分并非凭空而来，而是从一般意义下的丛，到包含拓扑结构及局部平凡性的纤维丛再到赋予纤维以线性结构的向量丛，这是一个不断添加结构的过程，也可以在后续性质的讨论中反观到底是丛的哪一层结构导致了如此性质.

注 2.1.3. 本文仅考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的情形.

例 2.1.7. 当 (E, π, B) 为一维向量丛时我们通常称之为**线丛**.

至此我们已经给出了向量丛的完整定义，但在本课程所探讨的主题下还缺少对底空间的微分结构的考虑，因此需要引入进一步的概念.

> **Definition 光滑（全纯）向量丛**
>
> 在满足上述向量丛 * 的定义下，若满足以下新增的条件：
>
> 3) B 为光滑（全纯）流形，有局部平凡化 $\{U_i,\varphi_i\}$. 考虑 B 上开集 U_i，U_j 满足 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$，且其上有相应的同胚 $\varphi_i: U_i\times\mathbb{F}^k\to\pi^{-1}(U_i)$ 与 $\varphi_j: U_j\times\mathbb{F}^k\to\pi^{-1}(U_j)$. 定义 $\varphi_{ij}: U_i\cap U_j\to \mathrm{GL}(k,\mathbb{F})$ 有 $\varphi_{ij}(b)=\varphi_i^{-1}|_b\circ\varphi_j|_b$. 对于任何如此的 φ_{ij} 均为光滑（全纯）函数.
>
> 在此条件下我们称其为光滑（全纯）向量丛.

注 2.1.4. 出于本章节讨论对象，后续内容提到向量丛时，在不加声明情况下皆默认为实光滑丛. 此前的截面、丛态射、B-态射、丛同态、B-同态等概念在光滑（解析）向量丛上皆可在光滑性（解析性）的要求下进行考量与沿用. 值得注意的是，对于向量丛上的丛态射，会进一步要求其在每个纤维上构成**线性映射**.

在上述定义下容易由定义自然推得 E 为光滑（全纯）流形. 同时，其中 φ_{ij} 称为**转移函数**. 容易发现 $\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}=\varphi_{ik}$ 或者可记为 $\varphi_{ij}\circ\varphi_{jk}\circ\varphi_{ki}=1$，这一性质称为**上闭链条件**. 事实上，上闭链条件本身亦可以切丛的产生创造条件.

命题 2.1.1. 给定空间 B，已知存在开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 与符合上闭链条件的函数簇 $\{\varphi_{ij}: U_i\cap U_j\to \mathrm{GL}(k,\mathbb{F})\}$，则必存在一个数域 $\mathbb{F}$ 上的 k 维向量丛 (E,π,B) 以 B 为底空间且转移函数为 φ_{ij}.

证明. 取 $\mathscr{E}:=\{(i,b,v)\mid i\in I, b\in U_i, v\in\mathbb{F}^k\}$ 并在其上定义关系 $(i,b,v)\sim(j,b',v')\iff b=b'$ 且 $v=\varphi_{ij}(b)v'$，易证明其为等价关系. 取 $E:=\mathscr{E}/\sim$，$\pi: E\to B$ 满足 $\pi([i,b,v])=b$（良定性显然），其上拓扑以拓扑基 $\{i\times U\times V\mid i\in I, U\subset U_i \text{ 开集}, V\subset\mathbb{F}^k \text{ 开集}\}$ 生成，以下说明 (E,π,B) 即为符合条件的向量丛.

对于任意 $b\in B$，选定 $i\in I$ 满足 $b\in U_i$，首先考虑 $\pi^{-1}(b)$，可将其表示为 $\pi^{-1}(b)=\{[(i,b,v)]\mid v\in\mathbb{F}^k\}$，于其上赋予由 $\mathbb{F}^k$ 自然诱导赋予的线性结构（由商掉的等价关系之定义易知其于不同代表元下的良定性）可知 $\pi^{-1}(b)\cong\mathbb{F}^k$；其次定义 $\varphi_i: U_i\times\mathbb{F}^k\to\pi^{-1}(U_i)$ 满足 $\varphi_i(a,v)=[(i,a,v)]$. 局部平凡性所要求的交换图在给定定义下是自然成立的，连续性亦显然，因而只需证明其为局部微分同胚即可，容易说明 φ 为单射且为开映射，从而为到其值域上的局部微分同胚.

最后，由定义可知 $\varphi_{ij}=\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j$ 即其为转移函数，综上该构造符合题目要求.

当 M 为光滑（解析）流形且其上函数簇为光滑（解析）函数簇时，可同样的方式构造出光滑（解析）向量丛，过程类似，因此不再赘述. 可以发现，上闭链条件的意义在于等价关系的良定性（事实上等价关系决定了构造出的向量丛）与为满足条件（1）所赋予的线性结构的良定性. 接下来看两个简单的例子从而给出对非平凡的向量丛的直观印象.

例 2.1.8. 我们考虑两种 $\mathbb{S}^1$ 上的线丛.

1) **$\mathbb{S}^1$ 上的平凡线丛**：$(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R},\pi,\mathbb{S}^1)$

   从底空间产生的平凡丛即为与线性空间直接进行直积，显然此全空间即**圆柱面**.

2) **$\mathbb{S}^1$ 上的非平凡线丛**：$(\gamma(\mathbb{P}^1),\pi,\mathbb{P}^1)$

   由于 $\mathbb{P}^1\cong\mathbb{S}^1$，所以上式事实上给出了 $\mathbb{S}^1$ 上的向量丛.

   其中 $\gamma(\mathbb{P}^1)=\{([(\cos\theta,\sin\theta)],t\cos\theta,t\sin\theta)\mid t,\theta\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{R}^2$，或者等价地可以写成

$\{(\cos\theta, \sin\theta, t\cos(\frac{\theta}{2}), t\sin(\frac{\theta}{2})) \mid t, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. 虽然按照定义无法给出如同平凡线丛的整体上的平凡参数化，但依旧可以很容易的给出局部的平凡化从而确保其为线丛. 不难看出，这种情形下的全空间构成一个**莫比乌斯带**.

以上两种情形自然都符合局部平凡性，但这并不代表它们是同构的，在接下来的命题中我们将说明这一点.

命题 2.1.2. 上述例子中的两种线丛不构成 B-同构.

证明. 假设这两种向量丛之间存在同构 $g\colon (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \pi, \mathbb{S}^1) \to (\gamma(\mathbb{P}^1), \pi', \mathbb{P}^1)$. 首先取连续映射 $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \gamma(\mathbb{P}^1)$ 满足 $f(\theta, t) = ([\cos\theta\pi, \sin\theta\pi], t\cos\theta\pi, t\sin\theta\pi)$，不难发现 $f|_{[0,1)\times\mathbb{R}}$，$f|_{(0,1]\times\mathbb{R}}$ 与 $f|_{(0,1)\times\mathbb{R}}$ 均为单射. 另一方面取 $x_0 = \pi \circ g^{-1} \circ f(0,t) \in \mathbb{S}^1$（由丛态射的定义知该取法结果唯一，与 t 无关），定义映射 $k\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 满足 $k(\theta, t) = (x_0 e^{2\pi i\theta}, t)$. 以上分别尝试给出了两个全空间的参数化描述，且不难看出 $\pi' \circ k = \pi \circ f$.

在此基础上，可取 $p(\theta) := g \circ k(\theta, 1)$. 由先前分析，可分别取 $(\theta, u(\theta)) = f|^{-1}_{(0,1)\times\mathbb{R}} \circ p(\theta)$，$(\theta, u_1(\theta)) = f|^{-1}_{[0,1)\times\mathbb{R}} \circ p(\theta)$ 与 $(\theta, u_2(\theta)) = f|^{-1}_{(0,1]\times\mathbb{R}} \circ p(\theta)$ 均为良定的连续映射且 $u = u_1|_{(0,1)} = u_2|_{(0,1)}$. g 作为丛同构限制在纤维上时依旧为同构，因而不难知道 u，u_1 与 u_2 均非零，从而可不妨设它们均大于零. 与此同时，由定义不难发现 $f(0, u_1(0)) = f(1, u_2(1))$，即 $([1,0], u_1(0), 0) = ([-1,0], -u_2(1), 0)$，从而 $u_1(0) = -u_2(1)$ 与它们均为正数相矛盾，因而这两种线丛并不同构.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times\mathbb{R}} \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "f"] & \\
\gamma(\mathbb{P}^1) \arrow[dr, "\pi'"] & \mathbb{S}^1\times\mathbb{R} \arrow[l, "g"] \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

上述证明过程看似复杂，但思路却很简单：在 $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \pi, \mathbb{S}^1)$ 的某个底空间的点的纤维上找一个非零向量，绕着 $\mathbb{S}^1$ “旋转”一圈回到原处，然而考虑它在 g 下的像时，会发现该像在 $\gamma(\mathbb{P}^1)$ 上转一圈后必定会调转方向，从而产生了矛盾，上述证明过程中各种定义描述均是为了严谨地呈现这种想法.

这一例子已然证明了 $\mathbb{S}^1$ 上至少有两种不同的线丛. 事实上，在同构意义下 $\mathbb{S}^1$ 上的线丛有且仅有这两种，但由于需要示性类相关知识，就不进一步讨论这个问题了.

类似于光滑流形的定向，我们可以不费力地补充定义向量丛的定向.

Definition 向量丛的定向

考虑 n 维向量丛 $(E, \pi, B, \mathbb{F})$，我们称向量丛 E 是可定向的，如果对于任意的 $q \in B$，我们给 q 上的纤维 $\pi^{-1}(q)$ 一个定向 (作为 $\mathbb{F}$-向量空间)，并且要求线性同构 $(\varphi|_{q\times F^n})^{-1}\colon \pi^{-1}(q) \to q \times F^n$ 将 $\pi^{-1}(q)$ 上的定向映成 $\mathbb{F}^n$ 上的一个固定定向.

2.2　向量丛上的运算

本章节将会基于向量丛纤维上的线性结构阐释各类保持向量丛结构的运算，会涉及诸多线性代数知识，此处假定读者已经对相关代数知识有所了解，若否可参考 Roman, Steven. *Advanced Linear Algebra*. GTM135 等材料进行复习.

Definition　Whitney 和

已知向量丛 $\xi=(E,\pi,B)$ 与 $\xi'=(E',\pi',B)$，定义 $E\oplus E':=\{(v,v')\in E\times E'\mid \pi(v)=\pi'(v')\}$.

取 $\rho(v,v')=\pi(v)=\pi'(v)$，由此得到 $(E\oplus E',\rho,B)$ 称为 ξ 与 ξ' 的 **Whitney** 和.

不难发现，向量丛的 Whitney 和依旧是向量丛，维数为该向量丛对维数之和. 同时，在线性空间的视角下，对于任意 $b\in B$，$\rho^{-1}(b)=\pi^{-1}(b)\oplus\pi'^{-1}(b)$，这也是其命名的代数由来. 另一方面，在此基础上给定向量丛簇 $\{(E_i,\pi_i,B)\}_{i=1}^n$，可以由上述定义递归地得到该簇的 Whitney 和 $(\bigoplus\limits_{i=1}^{n}E_i,\rho,B)$. 此后定义的各类运算都有类似的性质，因而不再赘述，请读者自行完成验证.

同时，基于命题 2.1.1，我们可以采用另一种等价的定义方式：

在定义所给的一对丛中，设其转移函数分别为 $\{g_{ij}\}$ 与 $\{g'_{ij}\}$(适当加细使得它们划分相同)，规定 $g_{ij}\oplus g'_{ij}(u):=\begin{pmatrix} g_{ij}(u) & 0\\ 0 & g'_{ij}(u)\end{pmatrix}$，称以 $\{g_{ij}\oplus g'_{ij}\}$ 为转移函数在基 B 上生成的丛为 ξ 与 ξ' 的 Whitney 和.

容易验证，该定义给出了和先前定义一致的向量丛. 这一定义将会给我们在后续概念上的定义以启发.

Definition　张量积

已知向量丛 $\xi=(E,\pi,B)$ 与 $\xi'=(E',\pi',B)$，设转移函数分别为 $\{g_{ij}\}$ 与 $\{g'_{ij}\}$，规定 $g_{ij}\otimes g'_{ij}(u):=g_{ij}(u)\otimes g'_{ij}(u)$（这里取代数意义下的张量积），称以 $\{g_{ij}\otimes g'_{ij}\}$ 为转移函数在基 B 上生成的丛为 ξ 与 ξ' 的张量积.

注 2.2.1. 此处并没有采用与 Whitney 和类似的定义，而是受上面的启发从转移函数的角度进行定义，这是由于张量丛的全空间从一般意义下进行描述存在一定难度. 当然这并不代表其不可描述，可以从如何说明其上拓扑的角度入手，感兴趣的读者可以自行尝试.

Definition　外积

已知向量丛 $\xi=(E,\pi,B)$，设转移函数为 $\{g_{ij}\}$，规定 $\Lambda^k(g_{ij})(u):=\Lambda^k(g_{ij}(u))$，称以 $\{\Lambda^k(g_{ij})\}$ 为转移函数在基 B 上生成的丛为 ξ 的 k 阶外积.

Definition　对偶丛

已知向量丛 $\xi=(E,\pi,B)$，设转移函数为 $\{g_{ij}\}$，规定 $h_{ij}:=(g_{ij}^{-1})^t$，称以 $\{h_{ij}\}$ 为转移函数在基 B 上生成的丛为 ξ 的对偶丛.

注 2.2.2. 上述条件中对偶丛的定义是为了满足上闭链条件的同时切合代数意义下的对偶定义.

> **Definition 拉回**
>
> 已知向量丛 $\xi = (E, \pi, B)$ 与光滑映射 $f\colon A \to B$. 定义 $f^*(E) := \{(a, u) \mid a \in A, u \in E, f(a) = \pi(u)\}$ 与映射 $\tilde{\pi}\colon f^*(E) \to A$ 满足 $\tilde{\pi}(a, u) = a$. 称丛 $(f^*(E), \tilde{\pi}, A)$ 为 ξ 的拉回.

注 2.2.3. 当 ξ 的转移函数为 $\{g_{ij}\}$ 时，不难发现 $f^*(E)$ 的转移函数为 $\{g_{ij} \circ f\}$.

注 2.2.4. “拉回”操作与先前的运算有所不同，事实上将 B 上的丛移到了 A 上，从一下角度看更为清楚：定义 $\tilde{f}\colon f^*(E) \to E$ 满足 $\tilde{f}(a, u) = u$，有以下交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

同时，也可以发现 $\tilde{f}$ 在每个纤维上为线性同构.

推论 2.2.1. 已知空间 A 与 B 上的丛 $\xi' = (E', \pi', A)$ 与 $\xi = (E, \pi, B)$，则可以构造丛映射 $(f', f)\colon \xi' \to \xi$ 当且仅当存在光滑映射 $f\colon A \to B$ 使得存在 $g\colon \xi' \to (f^*(E), \tilde{\pi}, A)$ 为 $A-$ 态射.

证明. 充分性由下述交换图给出：

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\pi'"] & f^*(E) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

取 $f' = \tilde{f} \circ g$ 即可.

必要性则由以下构造给出：取 $g\colon \xi' \to (f^*(E), \tilde{\pi}, A)$ 满足 $g(x) = (\pi'(x), f'(x)) \in f^*(E)$，不难发现其为 $A-$ 态射.

注 2.2.5. 可以发现，“拉回”操作某种意义下可以视为将丛的信息进行简单化，从极端的视角来看，当 f 为常值映射时将直接形成一个 A 上的平凡丛；另一方面，对丛的拉回给出了以 f 为底空间映射时判断丛同构是否存在的相对更少必要信息.

注 2.2.6. 与拉回对应的还有相反的推出 (push-forward) 操作，利用 $f\colon A \to B$ 将 A 上的丛推到 B 上. 在 f 为微分同胚时，这样的操作自然可以定义（即是通过 f^{-1} 的拉回）. 然而，事实上这一操作并不总能自然地定义出来（读者可以尝试用先前的定义作类比进行一下定义以观察哪些环节存在问题)，不过却在一些特殊的丛上可以完成，这部分我们将在切丛的引入后进行进一步讨论.

2.3 丛的正合序列

在学习线性空间、线性映射时我们已经接触过正合列、商空间等概念，在本章尝试将此类概念延拓至丛上，并对其是否分裂等性质进行探讨. 在本章中，由于主要探讨相同底空间的丛的关系，本章在不产生歧义的情形下将采取以全空间代替丛本身的记号混用以精简描述.

这一部分的阐述离不开线性空间的正合列相关性质，因而本章先从线性空间相关概念开始复习.

Definition 线性空间的正合序列

已知一族线性空间 $\{V_i\}_{i\in I}$ 与相应的一族线性映射 $\{f_i\colon V_i \to V_{i+1}\}_{i\in I}$，构成如下序列：

$$\cdots \to V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \to \cdots$$

当满足 $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$ 对任意 $i \in I$ 成立时，称该序列为正合序列.

进一步地，对于以下形式的特殊正合列:

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to 0$$

我们称之为短正合列.

例 2.3.1. 已知线性空间 V 与其子空间 V'，不难发现以下短正合列:

$$0 \to V' \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/V' \to 0$$

注 2.3.1. 事实上，任何线性空间的短正合列都和上述例子有某种意义下的相通之处. 假设已知短正合列:

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to 0$$

不难发现有 $V_3 = V_2/\operatorname{im} f_1$，从而每个短正合列都可以对应于一个商空间. 同时，也可以看出例子中的简单情形在同构意义下可以涵盖一般的短正合列情况，因而后续讨论中可以采用例子中的短正合列以简化一般情形的讨论.

Definition 可裂短正合列

已知以下短正合列：

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to 0$$

如果可以构造分裂映射 $\lambda\colon V_3 \to V_2$ 满足 $f_2 \circ \lambda = \mathrm{id}_{V_3}$，则称该短正合列为可裂短正合列.

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \leftrightarrows V_3 \to 0$$

注 2.3.2. 对于线性空间上可裂的短正合列，不难给出同构 $F\colon V_2 \to V_1 \oplus V_3$ 满足 $F(v) = (f_1^{-1}(v - \lambda \circ f_2(v)), f_2(v))$，因而有 $V_2 \cong V_1 \oplus V_3 \cong V_1 \oplus V_2/f_1(V_1)$. 不难发现，该条件与可裂的定义等价. 更进一步地，对于先前讨论过的如下简单情形:

$$0 \to V' \xrightarrow{i} V \leftrightarrows V/V' \to 0$$

可以得到其等价于 $V \cong V' \oplus V/V'$，此情形下也将 λ 称为 π 的**提升**.

推论 2.3.1. 线性空间的短正合列一定可裂.

该命题的证明颇为显然，故不赘述. 这里关键的疑问是：对于向量丛上的线性结构，是不是同样存在正合列、短正合列？短正合列仍然总是可裂的？

> **Definition　　商丛**
>
> 已知丛 (E, π, B) 与其相同底空间的子丛 E'，定义 E 上等价关系 $v \sim v' \iff \pi(v) = \pi(v')$ 且在线性空间意义下有 $v - v' \in E'$. 由此得到空间 $E/E' := E/\sim$，且定义 $\tilde{\pi}([u]) = \pi(u)$，由此得到的向量丛 $(E/E', \tilde{\pi}, B)$ 称为 E 与 E' 的商丛.

注 2.3.3. 对于 n 维向量丛 E 与其 m 维子丛 E' 作商得到商丛 E/E'，考虑其局部平凡化. 取 $U \subset B$ 上 E 与 E' 均为平凡丛，即存在局部平凡化 $\varphi\colon U \times \mathbb{F}^n \to E$ 与 $\psi\colon U \times \mathbb{F}^m \to E'$. 任取 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基，且有 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 为 $\mathbb{F}^m$ 的一组基. 对任意 $b \in U$，我们取 $\lambda_{ij}(b)$ 满足 $\varphi^{-1} \circ i \circ \psi(b, e_i) = (b, \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(b) e_j)$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 可以发现，矩阵 $\{\lambda_{ij}(b)\}_{m \times n}$ 在 U 上秩恒为 m，从而可通过调整基的顺序并适当缩小 U 使得 U 上其左上角的 $m \times m$ 矩阵总是非退化的. 这种情形下，取 $\tilde{\varphi}: U \times \mathbb{F}^{n-m} \to E/E'$ 满足 $\tilde{\varphi}(b, e_i) = [\varphi(b, e_i)]$，$i = m+1, m+2, \cdots, n$. 在先前条件下由线性代数知识不难证明对于任意 $b \in U$ 它们构成了 $(E/E')_b$ 的一组基，从而该映射给出了商丛的局部平凡化. 自然地，由此可知 E/E' 维数为 $n - m$.

> **Definition　　丛的正合序列**
>
> 已知一族以同一空间 B 为底的向量丛 $\{E_i\}_{i \in I}$ 与相应的一族 $B-$ 态射 $\{f_i\colon E_i \to E_{i+1}\}_{i \in I}$，构成如下序列：
>
> $$\cdots \to E_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \to \cdots$$
>
> 当满足 $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$ 对任意 $i \in I$ 在任意纤维上成立时，称该序列为丛的正合序列.
>
> 进一步地，对于以下形式的特殊正合列：
>
> $$0 \to E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_3 \to 0$$
>
> 我们称之为丛的短正合列.

接下来我们考虑丛的短正合列是否分裂，不失一般性，对于丛 E 与其相同底空间的子丛 E'，我们考虑如下短正合列：

$$0 \to E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/E' \to 0.$$

命题 2.3.1. 当底空间 B 为仿紧微分流形时，向量丛的短正合列可裂.

证明. 这一定理的证明分为两部分，首先我们先忽略仿紧性的条件，证明一个较为简单的结论：向量丛的短正合列在局部上总是分裂的. 这一证明的思路源于先前对于商丛的局部平凡化的考虑.

考虑 $U \subset B$ 上可以做出注 2.3.3 中的平凡化，并沿用相应记号. 我们按照以下方式定义 $\lambda\colon E/E' \to E$：对于任意 $[u] \in E/E'$，设 $b = \tilde{\pi}([u])$，总可以写作 $[u] = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \lambda_i \tilde{\varphi}(b, e_i)$，从而我们可以定义 $\lambda([u]) = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \lambda_i \varphi(b, e_i)$. 不难证明其为 $B-$ 同态且满足 $\pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{E/E'}$，因而为分裂映射，从而在 U 上该短正合列可分裂.

进一步的，由仿紧性可知 B 存在单位分解 $\{U_i, \rho_i\}_{i \in I}$. 可以设在每个 U_i 上均取到上述可裂映射 λ_i，令 $\lambda = \sum\limits_{i \in I} \rho_i \lambda_i$. 由单位分解产生的覆盖的局部有限性易知其良定，并不难验证其满足分裂映射的性质，从而此时的丛短正合列可裂.

2.4 切丛

对于光滑流形 M 以及覆盖 M 的坐标卡 $\{(U_i,\psi_i)\}$，坐标系 U_i, U_j 之间的转移函数 $\psi_j\circ\psi_i^{-1}$ 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的光滑函数，记 $\varphi_{ji}=d(\psi_j\circ\psi_i^{-1})$ 为其 Jacobi 矩阵，也就是 $\dfrac{\partial(\psi_j\circ\psi_i^{-1})}{\partial x}$. 定义以切空间为纤维的向量丛为切丛.

Definition 切丛

设 M 是 n 维光滑流形，$\{(U_i,\psi_i)\}$ 是覆盖 M 的局部坐标系，称由 $\bigcup\limits_{p\in U_i} T_pM\to U_i\times\mathbb{R}^n$ 及转移函数 $\varphi_{ji}=d(\psi_j\circ\psi_i^{-1})$ 给出的向量丛为 M 的切丛，记为 TM.

练习 2.4.1. M 上的黎曼度量是什么向量丛的截面?

在 Remark32 中我们提到“推出”的概念，在此我们将其详细阐述.

Definition 推出

对于光滑流形 M,N，及光滑映射 $f\colon M\to N$，对于 $p\in M$，p 点对应的局部坐标卡为 (U_i,φ)，$f(p)$ 对应的局部坐标卡为 (V_α,ψ)，定义

$$\begin{aligned} df\colon TM&\to TN\\ [i,p,v]&\mapsto[\alpha,f(p),d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)}(v)]\end{aligned}$$

容易验证上述定义是良定的.

Definition 半序，正向集，正向系统，正向极限

称偏序 $\leq$ 为集合 I 上的半序，若 $\forall i,j\in I$，存在 k 满足 $i\leq k, j\leq k$.

称有半序关系 $\leq$ 的集合 I 为正向集.

设 I 是正向集，对于一族集合 $\{A_i\}_{i\in I}$，一族映射 $\{\phi_{ij}\colon A_i\to A_j,\ i\leq j\}$，称 $\{(A_i,\phi_{ij})\}_{i,j\in I}$ 为正向系统，若 $\phi_{ii}=\mathrm{id}_{A_i}$, $\phi_{jk}\circ\phi_{ij}=\phi_{ik}$.

设 $\{(A_i,\phi_{ij})\}$ 是一个正向系统，在 $\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i$ 上定义等价关系：对于 $x_i\in A_i, x_j\in A_j$，$x_i\sim x_j\Leftrightarrow\exists k, i\leq k, j\leq k$, $\phi_{ik}(x_i)=\phi_{jk}(x_j)$. $\operatorname{dirlim}\limits_i A_i:=\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i/\sim$ 称为 $\{A_i\}$ 的正向极限.

例 2.4.1. $I:=\{$ 光滑流形 M 中的开子集$\}$ 是正向系统.

包含关系是 I 上的半序：$U\leq V\Leftrightarrow U\supset V$.

对于 $U\in I$，$A_U:=C^\infty(U)$ 是环. 对于 $U\leq V$，定义 $i_{UV}\colon A_U\to A_V, f\mapsto f|_V$，则 $\{(A_U,i_{UV})\}_{U,V\in I}$ 是正向系统.

Definition 茎，芽

对于 M 上的点 p，定义 $C_p^\infty=\operatorname{dirlim}\limits_{p\in U}C^\infty(U)=\{[U,f]\mid P\in U, f\in C^\infty(U)\}$，称为茎，其中 $[U,f]$ 称为芽.

C_p^∞ 是环，其上的运算定义如下：

$$[U,f]+[V,g]=[U\cap V,f|_{U\cap V}+g|_{U\cap V}],[U,f]\cdot[V,g]=[U\cap V,f|_{U\cap V}\cdot g|_{U\cap V}].$$

注 2.4.1. $[U_1,f_1]=[U_2,f_2]\Leftrightarrow\exists W\subset U\cap V,f|_W=g|_W.$

命题 2.4.1. 记 $I_p\subset C_p^\infty$ 为在 p 点为 0 的光滑函数芽全体，则 $C_p^\infty/I_p\cong\mathbb{R}.$

证明. 定义 $\varphi\colon C_p^\infty\to\mathbb{R},[U,f]\mapsto f(p)$，可见映射 φ 是环同态.

由 $\ker\varphi=I_p$，且 φ 为满射，可见结论成立.

Definition　导算子

M 是光滑流形，U 是 M 的开子集，称映射 $D_U\colon C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ 为 $C^\infty(U)$ 上的导算子，若 D_U 满足：

(1) 线性：$D_U(af+bg)=aD_Uf+bD_Ug$，$a,b\in\mathbb{R},\ f,g\in C^\infty(U)$

(2) Leibniz 法则：$D_U(fg)=fD_U(g)+gD_U(f)$，$f,g\in C^\infty(U)$.

记 $\mathcal{F}(U)$ 为 $C^\infty(U)$ 上的导算子全体构成的集合，易见 $\mathcal{F}(U)$ 为 $\mathbb{R}$-线性空间，并且是 $C^\infty(U)$-模.

在 $\{\mathcal{F}(U)\}_{U\text{为}M\text{的开子集}}$ 上可定义正向系统：

$(\mathcal{F}(U),\phi_{UV})_{U,V\text{为}M\text{的开子集}},\phi_{UV}\colon\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V),V\subset U,D_U\mapsto D_U|_V.$

注 2.4.2. 在这里，$C^\infty(V)$ 并不是 $C^\infty(U)$ 的子集，我们不能简单地把 D_U 限制在 V 上或是 $C^\infty(V)$ 上，因此有必要给 $D_U|_V$ 一个合适的定义，这需要用到下面这个命题.

命题 2.4.2. 对于光滑流形 M，F 为 M 的闭子集，G 为 M 的开子集，$F\subset G$，则存在 $g\in C^\infty(M)$ 使得

$$F\subset\{g=1\}\subset\operatorname{supp}g\subset G.$$

证明. $G,M\backslash F$ 构成了 M 的开覆盖，由单位分解定理，存在单位分解 $\{\lambda_i\}_{i\geq1}$，定义

$$g=\sum_{\operatorname{supp}\lambda_i\subset G}\lambda_i,$$

$\forall i,\operatorname{supp}\lambda_i\subset G$ 或 $\operatorname{supp}\lambda_i\subset M\backslash F$，对于后者，$\lambda_i|_F=0$，于是，由 $\sum\lambda_i=1$，可见在 F 上 $g=1$.

注意到 $\operatorname{supp}g=\overline{\bigcup_{\substack{\operatorname{supp}\lambda_i\\ \subset G}}\operatorname{supp}\lambda_i}\subset\overline{G}$,

由单位分解的局部有限性，(1)g 在局部上是有限多个 C^∞ 函数的和，因此 $g\in C^\infty(M)$；(2) 对 $x\in\overline{G}\backslash G$，存在开邻域 V 只与有限多个 $\operatorname{supp}\lambda_i$ 相交，将这些指标构成的集合记为 K，则 $V\backslash(\bigcup_{i\in K}\operatorname{supp}\lambda_i)$ 为包含 x 的开集且与 $\bigcup_{\substack{\operatorname{supp}\lambda_i\\ \subset G}}\operatorname{supp}\lambda_i$ 不交，于是，$x\notin\overline{\bigcup_{\substack{\operatorname{supp}\lambda_i\\ \subset G}}\operatorname{supp}\lambda_i}$，因此 $\overline{\bigcup_{\substack{\operatorname{supp}\lambda_i\\ \subset G}}\operatorname{supp}\lambda_i}\subset G$.

下面我们可以给出 $D_U|_V$ 的定义了：设 $f\in C^\infty(V)$，对 $p\in V$，存在 p 的开邻域 W 使得 $\overline{W}\subset V$，于是存在 $\eta\in C^\infty(M)$，满足 $\eta|_W=1,\eta|_{M\backslash V}=0$.

于是可令 $\tilde{f}=\begin{cases}\eta f, & x\in V\\ 0, & x\notin V\end{cases}$，可见 $\tilde{f}|_W=f|_W$，且 $\tilde{f}\in C^\infty(U)$,

Definition $D_U|_V(f)(P) = D_U(\tilde{f})(P)$.

$D_U|_V(f) \in C^\infty(V)$；这是良定的，即

命题 2.4.3. 对 $p \in U, W \subset U$ 为 p 的开邻域，$f_1, f_2 \in C^\infty(U)$，满足 $f_1|_W = f_2|_W$，则 $D_U(f_1)(p) = D_U(f_2)(p)$.

证明. 取 p 的开邻域 W'，满足 $\overline{W'} \subset W$，则存在 $\eta \in C^\infty(M)$，满足 $\eta|_{W'} = 1, \eta|_{M\setminus W} = 0$，

则 $\eta f_1 = \eta f_2$，故 $D_U(\eta f_1) = D_U(\eta f_2)$.

限制在 W 上，利用 Leibniz 法则，得

$$\eta|_W D_U(f_1)|_W + f_1|_W D_U(\eta)|_W = \eta|_W D_U(f_2)|_W + f_2|_W D_U(\eta)|_W.$$

注意到 $f_1|_W = f_2|_W, \eta|_W = 1$，则 $D_U(f_1)|_W = D_U(f_2)|_W$，从而 $D_U(f_1)(p) = D_U(f_2)(p)$.

注 2.4.3. 有人可能以为这个命题自动是成立的. 事实上，导算子是定义在函数上，而不是定义在函数的取值上：如果 $f_1 \neq f_2$，$D_U(f_1)$ 和 $D_U(f_2)$ 就可能不相等，而这个命题表明 f_1, f_2 只要局部上相等，那么 $D_U(f_1), D_U(f_2)$ 也在局部上相等.

注 2.4.4. 至此我们确实可以验证 $\{\mathcal{F}(U)\}_{U\text{为}M\text{的开子集}}$ 是一个正向系统.

对 $p \in M$，可定义 $\mathcal{F}_p = \operatorname{dirlim}_{p\in U} \mathcal{F}(U)$，正如 $\mathcal{F}(U)$ 可以作用在 C^∞ 上，$\mathcal{F}_p$ 也能作用在 C_p^∞ 上，可以自然地定义

$$\begin{aligned}[U, D_U]\colon C_p^\infty &\to C_p^\infty; \\ [U, f] &\mapsto [U, D_U(f)].\end{aligned}$$

容易验证这是良定的.

Definition **切空间**

$T_pM := \mathcal{F}_p / J_p$ 称为 p 点的切空间，其中

$$J_p := \{[U, D_U] \mid D_U(f)(p) = 0, \forall [U, f] \in C_p^\infty\} \subset \mathcal{F}_p.$$

接下来，我们将在光滑流形上给出 $\mathcal{F}(U)$ 的描述.

引理 2.4.1. 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中一凸的开集，则对 $D \in \mathcal{F}(U)$，存在 $a_1, \cdots, a_n \in C^\infty(U)$，使得 $D = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

证明. 取 $a_i = D(x_i), i = 1, \cdots, n$，其中 x_i 为 $\mathcal{R}^n$ 的坐标函数.

下证 $\forall f \in C^\infty(U), D(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

首先，注意到 $D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$，故 $D(1) = 0$，从而 $\forall c \in \mathbb{R}, D(c) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x^1, \cdots, x^n) - f(x_0^1, \cdots, x_0^n) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))dt \end{aligned}$$

其中，当 $x^i = x_0^i, i = 1, \cdots, n$,

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))dt = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \cdots, x_0^n).$$

于是在上式两边作用 D，取 $x = x_0$，得 $D(f)(x_0^1, \cdots, x_0^n) = \sum\limits_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$，即证.

至此，可见

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(U) &= C^\infty(U)\frac{\partial}{\partial x^1} \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)\frac{\partial}{\partial x^n} \\
&\cong C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U), \\
[U, D] &= \sum_i [U, a_i]\frac{\partial}{\partial x^i}, \\
\mathscr{F}_p &= C_p^\infty \frac{\partial}{\partial x^1} \oplus \cdots \oplus C_p^\infty \frac{\partial}{\partial x^n}, \\
J_p &= I_p \frac{\partial}{\partial x^1} \oplus \cdots \oplus I_P \frac{\partial}{\partial x^n}, \\
T_pM &= \mathscr{F}_p / J_p = C_p^\infty / I_p \frac{\partial}{\partial x^1} \oplus \cdots \oplus C_p^\infty / I_p \frac{\partial}{\partial x^n}, \\
&\cong \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x^1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x^n}.
\end{aligned}$$

进一步，我们有如下命题：

命题 2.4.4. $I_p / I_p^2 \cong T_pM$.

证明. 考虑映射

$$\begin{aligned}
\varphi \colon I_p &\to T_pM; \\
[U, f] &\mapsto \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

该映射显然是满射，我们接下来只要证明 $\ker\varphi = I_p^2$.

事实上，在上述引理中，我们证明了

$$f(x^1, \cdots, x^n) - f(x_0^1, \cdots, x_0^n) = \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) g_i(x^1, \cdots, x^n),$$

其中 $g_i(x^1, \cdots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))dt$，特别地，$g_i(x_0^1, \cdots, x_0^n) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$.

不妨 $x^i(p) = 0, i = 1, \cdots, n$，由 $[U, f] \in I_p, f(\mathbf{0}) = 0$，则

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(\mathbf{x}),$$

于是 $[U, f] \in \ker\varphi \Leftrightarrow g_i(\mathbf{0}) = 0, i = 1, \cdots, n$.

若 $[U, f] \in \ker\varphi$，可设 $g_i(\mathbf{x}) = \sum\limits_j x^j h_{ij}(\mathbf{x})$, 则

$$[U, f] = \sum_{i,j} [U, x^i][U, x^j][U, h_{ij}] \in I_P^2,$$

即 $\ker\varphi \subset I_p^2$.

若 $[U,f] \in I_p^2$，则 $[U,f] = \sum\limits_k [U,\alpha_k][U,\beta_k]$，其中 $[U,\alpha_k],[U,\beta_k] \in I_P$, 即 $\alpha_k(\mathbf{0}) = \beta_k(\mathbf{0}) = 0$.

则存在 p 的开邻域 W，使得在 W 上 $f = \sum\limits_k \alpha_k\beta_k$，于是

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{0}) = \sum_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^i}(\mathbf{0})\beta_k(\mathbf{0}) + \frac{\partial \beta_k}{\partial x^i}(\mathbf{0})\alpha_k(\mathbf{0}) = 0$$

即 $[U,f] \in \ker\varphi$，从而 $I_p^2 \subset \ker\varphi$，即证.

注 2.4.5. I_p^2 是 $I_p \cdot I_p$ 的意思；回忆一下理想的乘积的定义：$IJ = \{\sum a_ib_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$. 我们将在下一章论证这种定义与切丛定义的等价性.

下面我们来描述**几何中的切空间**:

对光滑流形 $M \subset \mathbb{R}^n, p \in M$，考虑过 p 点的曲线 $\alpha\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M, \alpha(0) = p$，于是 α 在 p 点的切线为 $\alpha'(0) = (\alpha^{1\prime}(0),\cdots,\alpha^{n\prime}(0))$. p 点的切空间可视作 p 点的全体切线之集.

$\alpha'(0)$ 可视作导算子，即对 $f \in C_p^\infty$，$\alpha'(0)(f) = \dfrac{d}{dt} f \circ \alpha(t)|_{t=0}$.

设 $N \subset M$ 为 M 的子流形，$i\colon N \to M$ 为包含映射，诱导了切丛的同态：$TN \xrightarrow{i_*} TM$.

考虑拉回丛 $i^*(TM)$ 即可将 TM 限制在底空间 N 上，记 $i^*(TM) = TM|_N$，TN 可视作 $TM|_N$ 的子丛，定义 $\tau(N,M) = TM|_N/TN$，称为 N 在 M 中的法丛.

由分裂引理，我们可以得到:

命题 2.4.5. (切丛-法丛基本方程) $TM|_N \cong TN \oplus \tau(N,M)$.

例 2.4.2. $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的法丛.

利用几何中切空间的表述，我们可以将 $T(\mathbb{S}^n)$ 视作 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ 的子集 $T(\mathbb{S}^n) = \{(\mathbf{x},\mathbf{v}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = 0\}$，于是不难看出 $\tau(\mathbb{S}^n,\mathbb{R}^{n+1}) = \{(\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

考虑映射

$$\varphi\colon \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \tau(\mathbb{S}^n,\mathbb{R}^{n+1}),$$
$$(\mathbf{x},\lambda) \mapsto (\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}).$$

易见 φ 为同构，用 ϵ 表示 $\mathbb{S}^n$ 上的平凡线丛 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, 则 $\tau(\mathbb{S}^n,\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

其切丛-法丛基本方程可以表示为 $T(\mathbb{S}^n) \oplus \epsilon = (n+1)\epsilon = n\epsilon \oplus \epsilon$. 事实上，对于大多数 n，如 $n = 2$，$T(\mathbb{S}^n)$ 不是平凡的 (这可以用一些简单的代数拓扑知识证明)，于是在上式中消去率不成立.

例 2.4.3. 典则线丛 $\mathbb{P}^n$.

由定义，$\mathbb{P}^n$ 即为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中直线之集，于是我们可以将 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的直线作为 $\mathbb{P}^{n+1}$ 对应的向量空间.

具体来看，$\mathbb{P}^n$ 有开覆盖 $\{U_i\}_{i=0}^n$，其中

$$U_i = \{[x] = [x_0,\cdots,x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

定义

$$\begin{aligned} g_i\colon U_i\times\mathbb{R} &\to \gamma(P)^n \\ ([x],\lambda) &\mapsto ([x],\lambda(\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i})) \end{aligned}$$

容易验证这是良定的.

对应的转移函数为

$$g_{ij}\colon U_i\cap U_j\to \mathrm{GL}(1,\mathbb{R}),\ [x]\mapsto \frac{x_i}{x_j}.$$

例 2.4.4. $\mathbb{P}^{n-1}\subset\mathbb{P}^n$ 的法丛.

$\mathbb{S}^n=\{(x^0,\cdots,x^n)\mid\sum\limits_{i=0}^{n}(x^i)^2=1\}$.

由于 $\mathbb{P}^n=\mathbb{S}^n/(x\sim -x)$，我们先从 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{S}^n$ 入手.

$\mathbb{S}^{n-1}=\mathbb{S}^n\cap\{x^n=0\}$,

$T(\mathbb{S}^n)\mid_{\mathbb{S}^{n-1}}=\{(\mathbf{x},\mathbf{v})\mid \mathbf{x}\in\mathbb{S}^{n-1},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+1},\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=0\}$,

不难看出 $T(\mathbb{S}^{n-1})=\{(\mathbf{x},\mathbf{v})\mid \mathbf{x}\in\mathbb{S}^{n-1},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+1},\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=0,v^n=0\}$,

从而 $\tau(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{S}^n)=\{(\mathbf{x},\mathbf{v})\mid \mathbf{x}\in\mathbb{S}^{n-1},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+1},v^i=0,0\le i\le n-1\}$

于是容易看出 $\tau(\mathbb{S}^{n-1},S^n)\cong\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$.

在 $T(\mathbb{S}^{n-1})\oplus\tau(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{S}^n)=T(\mathbb{S}^n)$ 中商掉等价关系 $(\mathbf{x},\lambda)\sim(-\mathbf{x},-\lambda)$，可知

$$T(\mathbb{P}^{n-1})\oplus\gamma(\mathbb{P}^{n-1})=T(\mathbb{P}^n).$$

因此 $\tau(\mathbb{P}^{n-1},\mathbb{P}^n)=\gamma(\mathbb{P}^{n-1})$.

2.5 复向量丛、复切丛与近复结构

先前我们已经定义过复流形. 我们可以在复流形上定义复切丛:

Definition 复切丛

设 M 是一个 n 维复流形，$\{(U_i,\psi_i)\}_{i\in I}$ 是覆盖 M 的局部坐标系. 对局部同胚 $\psi_i\colon U_i\to\mathbb{C}^n$，$\psi_j\circ\psi_i^{-1}\colon\psi_i(U_i\cap U_j)\to\psi_j(U_i\cap U_j)$ 是全纯的，那么 Jacobi 矩阵 $\varphi_{ij}=\dfrac{\partial(\psi_j\circ\psi_i^{-1})}{\partial z}$ 也是全纯的. $\bigcup\limits_{p\in U_i}T'_pM\to U_i\times\mathbb{C}^m$ 与转移函数 φ_{ij} 给出了 M 上的一个全纯向量丛，称为复切丛，记作 $T'M$.

例 2.5.1. 考察 $\mathbb{CP}^1$ 上的典则复线丛的情况，也称为 Hopf 丛.

首先作为流形，$\mathbb{CP}^1\cong\mathbb{S}^2$. 其可以被两个坐标邻域覆盖

$$U_0=\{[z_0,z_1]\mid z_0,z_1\in\mathbb{C},z_0\neq 0\},$$

$$U_1=\{[z_0,z_1]\mid z_0,z_1\in\mathbb{C},z_1\neq 0\},$$

坐标映射为

$$\varphi_0\colon U_0\to\mathbb{C};\ [z_0,z_1]\mapsto\ \frac{z_1}{z_0},$$

$$\varphi_1\colon U_1\to\mathbb{C};\ [z_0,z_1]\mapsto \frac{z_0}{z_1}.$$

将 $\mathbb{S}^2$ 通过球极投影看作 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，则定义

$$\alpha\colon \mathbb{CP}\to\mathbb{S}^2;\ [z_0,z_1]\mapsto\begin{cases}\dfrac{z_1}{z_0}, & z_0\neq 0\\ \infty, & z_0=0\end{cases}.$$

由定义，典则线丛 $\gamma(\mathbb{CP}^1)$ 可以由迁移函数

$$g_{01}\colon U_0\cap U_1\to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C});\ [z_0,z_1]\mapsto \frac{z_0}{z_1}$$

来表示，且上闭链条件即

$$\begin{cases}g_{00}=g_{11}=1\\ g_{01}\circ g_{10}=1\end{cases}.$$

事实上，对 $n\in\mathbb{Z}$，$g_{01}^n\colon U_0\cap U_1\to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C});\ [z_0,z_1]\mapsto\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)^n$ 都是新的线丛. 其中 $n=0$ 即平凡丛，$n=1$ 即典则丛. $n=-2$ 的情况实则是切丛:

考虑切丛 $T'(\mathbb{CP}^1)$. 取流形的转移函数为

$$\varphi_{01}\colon \varphi_1(U_0\cap U_1)\to\varphi_0(U_0\cap U_1);\ z\mapsto\frac{1}{z}.$$

其导数为 $\varphi_{01}'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$. 此时，切丛的转移函数为

$$U_0\cap U_1\to U_1\to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C});\ [z_0,z_1]\mapsto\varphi_{01}'(\varphi_1([z_0,z_1]))=-\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2.$$

这实则改变流形局部坐标的符号，则该丛与 $\gamma^2(\mathbb{CP}^1)$ 无异. 故而有丛同构 $T'(\mathbb{CP}^1)\cong\gamma^2(\mathbb{CP}^1)$.

事实上，可以证明 $\gamma^n(\mathbb{CP}^1)$ 就是 $\mathbb{CP}^1$ 的全部全纯线丛，并且它们各不相同.

复切丛与实切丛在一定条件下可以互相转化. 这个过程称为**复化与实化**.

我们先讲实化. 首先我们观察复切丛 $T'M$. 这是一个复向量丛. 由于作为线性空间，$\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\sqrt{-1}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^2$，所以 $T'M$ 中诸坐标卡 $(U_i\times\mathbb{C}^n,\psi_i)$ 可视为 $(U_i\times\mathbb{R}^{2n},\widetilde{\psi_i})$，其中实化的 $\widetilde{\psi_i}$ 即 $\rho\circ\psi_i$，$\rho\colon\mathbb{C}^m\to\mathbb{R}^{2n}$ 为自然同构. 在不引起歧义的情况下，我们对 $\widetilde{\psi_i}$ 与 ψ_i 不做区分，记为 ψ_i.

此时 $\varphi_{ij}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 可相应地视为 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 中的元素，且显然都是光滑函数. 那么这时，显然 $\{(U_i\times\mathbb{R}^{2n},\psi_i)\}$ 与 $\{\varphi_{ij}\}$ 共同定义了复流形 M 上秩 $2n$ 的实向量丛，记作 $T_{\mathbb{R}}M$.

注 2.5.1. 这里的 $T_{\mathbb{R}}M$ 是光滑意义下的实切丛. 而在每点 $p\in M$ 上，其切空间有 $T_{\mathbb{R},p}M\cong\mathbb{R}^{2n}$. 此时，$T'M$ 是 $4n$ 维实流形. 由上述过程可看出，任意复切丛都可以被视为实切丛.

反之，我们希望由实切丛上的实结构诱导出复结构，以实现复化切空间. 令 $T_{\mathbb{C},p}=T_{\mathbb{R},p}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}^{2n}$: 设 $T_{\mathbb{R},p}=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}\}$，则 $T_{\mathbb{C},p}$ 中的元素形如 $\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum\limits_{i=1}^n\lambda_{n+i}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\otimes 1_{\mathbb{C}}$，其中 $\lambda_i\in\mathbb{C}$. 那么通过 $\lambda_i\otimes 1_{\mathbb{C}}\mapsto\lambda_i$，可认为

$$T_{\mathbb{C},p}=\{\sum_{i=1}^n\lambda_i\tfrac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n\lambda_{n+i}\tfrac{\partial}{\partial y_i}\mid\lambda_i\in\mathbb{C}\}.$$

我们要证明 $T_{\mathbb{C}}M=\bigcup\limits_{p\in M}T_{\mathbb{C},p}M$ 确实是一个复向量丛.

注 2.5.2. 由上述讨论，复向量丛必是光滑实向量丛. 而光滑向量丛当然不一定是全纯向量丛.

为了证明这件事，我们需要做一些准备.

Definition 近复结构

设 $E \to B$ 是秩 $2n$ 的光滑实向量丛. 令 $J\colon E \to E$ 为连续的丛自映射. 即下述图表交换. 若进一步地，该 J 满足对于任意 $b \in B$，有 $J_b = J|_b\colon E_b \to E_b$ 为线性映射，且满足 $J_b^2 = -\mathrm{id}$，则称 J 为向量丛 (E, B, π) 上的近复结构.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & B \end{tikzcd}$$

注 2.5.3. 有的教科书称此为“殆复结构”.

注 2.5.4. 对 $2n$ 维实线性空间 V 上的线性算子 A，若 $A^2 = -\mathrm{id}$，则存在 V 的基 $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$，使得在该基底下 A 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}$.

（对 $2n$ 归纳. 设 $2n-2$ 时正确，则取 $v \in V$，有 A-不变子空间 $W = \mathrm{span}(v, Av)$. 此时取商空间（$2n-2$ 维），在商空间上找相应的基底，再提升回去即可.）

我们有如下定理：

命题 2.5.1. **（光滑复结构的存在判据）**

对于向量丛 $\pi\colon E \to B$，有 (E, B, π) 是秩 n 复向量丛 $\Leftrightarrow$ (E, B, π) 是秩 $2n$ 实向量丛，且其上有近复结构.

证明. 令 (U, φ_U) 为 E 的局部平凡化，即 $\varphi_U\colon U \times \mathbb{R}^{2n} \to \pi^{-1}(U)$ 为局部丛同构.

$\Rightarrow$：将 $\mathbb{R}^{2n}$ 与 $\mathbb{C}^n$ 通过

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \mapsto (x_1 + \sqrt{-1}y_1, \cdots, x_n + \sqrt{-1}y_n)$$

等同. 定义 e_i 为第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的向量，则 $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ 构成 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一组基. 定义线性算子 J' 使得

$$\begin{cases} J'e_i = e_{n+i} \\ J'e_{n+i} = -e_i \end{cases},$$

其中 $1 \le i \le n$. 容易验证 $J'^2 = -\mathrm{id}$.

事实上，J' 是丛映射. 这只需验证如下图表交换：

$$\begin{tikzcd} U_i \times \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[d, "J'"'] & U_j \times \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "J'"] \\ U_i \times \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\varphi_{ij}"'] & U_j \times \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

将 φ_{ij} 通过

$$A+\sqrt{-1}B\mapsto\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}$$

看作 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ 中的元素，其中 $A,B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 这是因为 $\mathbb{C}^n$ 中的向量被写为 $u+\sqrt{-1}v$ 时，φ_{ij} 在其上的作用为

$$(A+\sqrt{-1}B)(u+\sqrt{-1}v)=Au-Bv+\sqrt{-1}(Bu+Av).$$

而 J' 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} & -I_n\\ I_n & \end{pmatrix}$. 则由直接计算得 $J'\varphi_{ij}=\begin{pmatrix}-B & -A\\ A & -B\end{pmatrix}$，且 $\varphi_{ij}J'=\begin{pmatrix}-B & -A\\ A & -B\end{pmatrix}$. 那么 J' 确实是丛映射. 那么记 $J|_U=\varphi\circ J'\circ\varphi^{-1}(U)\colon\pi^{-1}(U)\to\pi^{-1}(U)$，则 J 定义了 $\pi^{-1}(U)$ 上的近复结构. 剩余的事情则是对于 B 的开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ 中的开集 U_i 都有近复结构 $J|_U$，而由于坐标卡相容，所以这已经定义了全局的近复结构.

$\Leftarrow$：记 J 为相应的丛自映射，而其通过局部平凡化，在某一坐标区域 U 诱导的 $U\times\mathbb{R}^{2n}$ 的自映射记作 $J'|_U$，简记为 J'. 即使下图交换.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\varphi"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\ U_i\times\mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "J'"'] & U_j\times\mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

在 $U_i\times\mathbb{R}^{2n}$ 上，可取新基底 $\{e_1,\cdots,e_{2n}\}$，使得 J' 在 $\{e_1,\cdots,e_{2n}\}$ 上表示为 $\begin{pmatrix} & -I_n\\ I_n & \end{pmatrix}$ 令在 $U\times\mathbb{R}^{2n}$ 上的转移函数 $\widetilde{\varphi_{ij}}$ 表示为 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 那么由 $J'\widetilde{\varphi_{ij}}=\widetilde{\varphi_{ij}}J'$ 比较两边计算结果知 $C=-B$ 且 $A=D$. 那么 $\widetilde{\varphi_{ij}}$ 的矩阵表示皆为 $\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix}$.

那么 $A-\sqrt{-1}B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 此时将 $\mathbb{R}^{2n}$ 与 $\mathbb{C}^n$ 通过

$$(x_1+\sqrt{-1}y_1,\cdots,x_n+\sqrt{-1}y_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$$

等同. 那么 $\varphi(U_i\times\mathbb{R}^{2n})\cong\varphi(U_i\times\mathbb{C}^n)$ 与 $\varphi^{-1}\circ\varphi_{ij}\circ\varphi$ 定义了 E 上的复结构.

注 2.5.5. 上述判据还可表述为：$2n$ 阶实向量丛 E 容许复向量丛结构，当且仅当向量丛 $\mathrm{Hom}(E,E)$ 中存在截面 J，使得 $J^2=-\mathrm{id}$.

由这一判据，我们可以知道先前的 $T_{\mathbb{C}}M$ 是复向量丛. 这是因为 $T'M$ 是复向量丛，其实化具有近复结构

$$J\colon T_{\mathbb{R},p}M\to T_{\mathbb{R},p}M;\ \frac{\partial}{\partial x_i}\mapsto\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial y_i}\mapsto-\frac{\partial}{\partial x_i},\ \forall 1\le i\le n,$$

作 $\mathbb{C}$-线性延拓，就得到了 $T_{\mathbb{C}}M$ 上的近复结构

$$\tilde{J}\colon T_{\mathbb{C},p}M\to T_{\mathbb{C},p}M;\ \alpha+\sqrt{-1}\beta\mapsto J\alpha+\sqrt{-1}J\beta,\ \alpha,\beta\in T_{\mathbb{R},p}M,$$

此时仍有 $\tilde{J}^2=-\mathrm{id}$. 故 $T_{\mathbb{C}}M$ 是复向量丛.

不难发现 $T_{\mathbb{C}}M \cong T'M \oplus T''M$，其中近复结构 $\tilde{J}$ 限制在 $T'M$ 的纤维 $T'_pM = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ 上相当于乘上 $\sqrt{-1}$，限制在 $T''M$ 上相当于乘上 $-\sqrt{-1}$，因此 J 以及 $\tilde{J}$ 实际上不依赖于坐标 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 的选取. 注意到这一分解中只用到了近复结构存在，故能推广到近复流形上.

命题 2.5.2. 设 V 是实向量空间，V 上的线性变换 J 满足 $J^2 = -\mathrm{id}$，并 $\mathbb{C}$-线性延拓为 $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ 上的线性变换. 那么 V 可以分解为互相共轭的子空间的直和

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1},$$

且 J 作用在 $V^{1,0}$ 上相当于乘上 $\sqrt{-1}$，限制在 $V^{0,1}$ 上相当于乘上 $-\sqrt{-1}$.

证明. 取 $V^{1,0}, V^{0,1}$ 为 $\pm\sqrt{-1}$ 的特征子空间，即

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{C}} &= \ker(J - \sqrt{-1}) \oplus \ker(J + \sqrt{-1}), \\ v &= \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Big((J + \sqrt{-1})v - (J - \sqrt{-1})v\Big), \end{aligned}$$

直和是因为 $\ker(J - \sqrt{-1}) \bigcap \ker(J + \sqrt{-1}) \subset \ker(2\sqrt{-1}) = \{0\}$.

对于 $v = \alpha + \sqrt{-1}\beta \in V \oplus \sqrt{-1}V$，$J\bar{v} = J(\alpha - \sqrt{-1}\beta) = J\alpha - \sqrt{-1}J\beta = \overline{J\alpha + \sqrt{-1}J\beta} = \overline{Jv}$，所以 $Jv = -\sqrt{-1}v$ 就是 $J\bar{v} = \sqrt{-1}v$，即 $\ker(J + \sqrt{-1}) = \overline{\ker(J - \sqrt{-1})}$.

> **Definition　近复流形**
> 设 X 是一个微分流形，J 是切丛 TX 上的近复结构，称 (X, J) 为近复流形.

命题 2.5.3. 设 (X, J) 是近复流形，其复化的切丛 $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C}$ 能分解为复向量丛的直和

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X,$$

且近复结构 J 限制在 $T^{1,0}X$ 上相当于乘上 $\sqrt{-1}$，限制在 $T^{0,1}X$ 上相当于乘上 $-\sqrt{-1}$.

证明. 按上一命题，把每点的复化切空间分解成 $(T_pX)_{\mathbb{C}} = T_p^{1,0}X \oplus T_p^{0,1}X$，并令

$$T^{1,0}X = \ker(J - \sqrt{-1}) := \bigcup_{p \in X} T_p^{1,0}X,\ T^{0,1}X = \ker(J + \sqrt{-1}) := \bigcup_{p \in X} T_p^{0,1}X,$$

其中每个 $T_p^{1,0}X, T_p^{0,1}X$ 都是 n 维复向量空间. 不过要说明这的确是复向量丛，还需要下面技术性的引理.

引理 2.5.1. 设 $f\colon E \to F$ 是同一底空间 B 上的两个向量丛之间的丛映射，且对不同的 $b \in B$，$\ker f_b$ 的维数不变，则 $\ker f := \bigcup_{b \in B} \ker f_b$ 是 E 的子丛.

证明. 对 $b \in B$，有线性映射 $f_b\colon E_b \to F_b$. 设 $E_b = \mathbb{F}^n$，$F_b = \mathbb{F}^m$，记 $\dim\ker f_b \equiv n - k$，则 $\dim f_b(E_b) \equiv k$.

设 $\varphi_i\colon U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_i), \psi_i\colon U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi'^{-1}(U_i)$ 是丛 E, F 的局部平凡化，令 $\tilde{f} = \psi_i^{-1} \circ f \circ \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "f"] & \pi'^{-1}(U_i) \\ U_i \times \mathbb{F}^n \arrow[u, "\varphi_i"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & U_i \times \mathbb{F}^n \arrow[u, "\psi_i"] \end{tikzcd}$$

取 E 在 U_i 上的连续截面 $v_1, \cdots, v_n\colon U_i \to E$，使得对每个 $b \in U_i$，$v_1(b), \cdots, v_n(b)$ 是 E_b 的基（这样的 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 称为 E 在 U_i 上的标架），且 $v_{k+1}(b), \cdots, v_n(b)$ 是 $\ker \tilde{f}|_b$ 的基.

（设 A_b 是 f_b 的 Jacobi 矩阵, A_b 是秩为 k 的 $n\times m$ 的矩阵, 且系数关于 b 连续. 由高等代数的结论, 存在可逆方阵 P_b, Q_b 使得 $P_bA_bQ_b = \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$，且由于对矩阵 A_b 进行的初等变换是关于 b 连续的，回顾该结论的证明可知构造出的 P_b, Q_b 关于 b 连续. 取 $v_1(b) = Q_be_1, \cdots, v_n(b) = Q_be_n$，则 $A_bv_{k+l}(b) = P_b^{-1}\begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix}e_{k+l} = 0.$）

于是 $\ker f$ 的局部平凡化如下：

$$\begin{aligned} U_i \times \mathbb{F}^{n-k} \to \quad & U_i \times \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\varphi_i} \pi^{-1}(U_i), \\ (b, \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l e_l) \mapsto \quad & (b, \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l v_{k+l}) & \mapsto \varphi(b, \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l e_{k+l}). \end{aligned}$$

第三章　向量场和分次代数

3.1　截面和模

为了产生对丛与截面更深刻的理解，这里引入模这一代数概念尝试对其进行另一侧面的描述. 简单来说，模是环上的“向量空间”.

Definition　模

设 R 是含幺环，M 为 Abel 群，且存在二元运算：

$$R \times M \to M;$$
$$(a, x) \mapsto ax,$$

满足：

$$(1)\ a(x+y) = ax + by,$$
$$(2)\ (a+b)x = ax + bx,$$
$$(3)\ (ab)x = a(bx),$$
$$(4)\ 1x = x,$$

称 M 是环 R 上的模.

注 3.1.1. 严格意义上讲，上述条件定义了一个左 R-模. 类似地可定义右 R-模，但在本课程中，我们不区分左 R-模与右 R-模.

类似于向量空间，对于模我们也需模同态、子模、模同态等概念的引入.

Definition　模同态

设 M, N 均为 R-模，称映射 $f\colon M \to N$ 为模同态，若 f 保持“线性”运算，即

$$f(ax+by) = af(x) + bf(y), \quad \forall\, a, b \in R,\ x, y \in M.$$

将全体左 R-模视作对象，两左 R-模间的模映射视作态射，则可构造出左 R-模范畴，据此我们可以定义出模同构：

记 M, N 为两 R-模，若存在 $f \in \mathrm{Mor}(M, N)$，$f^{-1} \in \mathrm{Mor}(N, M)$，满足

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N,\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M,$$

则称模 M 与模 N 同构，记为 $M \cong N$.

Definition 子模

设 $N \subset M$ 为 M 的 Abel 子群，且对于 R-乘封闭（即 $RN \subset N$），称 N 为 M 的子模.

Definition 商模

设 N 是 M 的子模，定义商群 M/N 上的 R-乘运算

$$a\overline{m} = \overline{am}.$$

称带有此运算的 Abel 群 M/N 为 M 关于 N 的商模.

子模和商模关于 R-乘运算的性质直接继承自原 R-模，因此它们均为 R-模.

Definition 有限自由模

称 $M \cong \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n个} = nR$ 为有限自由模.

为了展示模的引入之意义，这里聚焦于切丛的截面，这也是本章重心之一.

Definition 向量场

向量场是切丛 $\pi\colon TM \to M$ 的截面.

回忆一下截面的概念：

设有向量丛 $\xi = (E, \pi, B)$，若映射 $s : B \to E$ 满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$，则称 s 为 ξ 的一个截面；若 s 是连续的（resp. 光滑的，解析的），则称其为连续截面（resp. 光滑截面，解析截面）；若向量场定义中的截面是连续的（resp. 光滑的，解析的），则称该向量场是连续的（resp. 光滑的，解析的）.

如此经过简单思考不难发现截面和模的定义间存在着有趣的联系. 设有向量丛 $\xi = (E, \pi, B)$，U 为 B 的开子集，定义

$$E(U) = \{s : U \to E \text{为全体连续截面（resp. 光滑截面，解析截面）}\}.$$

取 $A = C^0(U)$（resp. $C^\infty(U)$，$\mathcal{O}(U)$）为 U 上的连续函数环（resp. 光滑函数环，解析函数环）. 直接验证即知 $E(U)$ 是 A 上的模.

例 3.1.1. 平凡丛的截面

设 M 为光滑流形，$E \triangleq M \times \mathbb{R}^n$ 为平凡丛，U 为 M 的开集，$E(U)$ 为光滑截面全体，则 $\forall s \in E(U)$，有

$$s(x) = (x, a_1(x), \cdots, a_n(x))$$

由 s 的光滑性可知 $E(U) \cong \{n \text{ 元光滑向量值函数全体}\} \cong nC^\infty(U)$.

命题 3.1.1. 设 E_1, E_2 为 B 的全空间，U 为 B 的开集，$f\colon E_1 \to E_2$ 为丛态射，则 $\tilde{f}\colon E_1(U) \to E_2(U),\ s \mapsto f \circ s$ 是模同态.

证明. 记 π_1 为 $E_1 \to B$ 的丛投影，π_2 为 $E_2 \to B$ 的丛投影，则有 $\pi_2 \circ f = \pi_1$. $\forall s \in E_1(U)$，有 $\pi_1 \circ s = \mathrm{id}_B$. 因此，有 $\pi_2 \circ \tilde{f}(s) = \pi_2 \circ f \circ s = \pi_1 \circ s = \mathrm{id}_B$，即 $\tilde{f}(s) \in E_2(U)$.

由于 f 在纤维间是线性变换，$\forall\ a, b \in A,\ s_1, s_2 \in E_1(U)$，我们有

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(as_1 + bs_2)(x) &= f_x(a(x)s_1(x) + b(x)s_2(x)) \\
&= a(x)f_x(s_1(x)) + b(x)f_x(s_2(x)) \\
&= (a\tilde{f}(s_1) + b\tilde{f}(s_2))(x),
\end{aligned}
$$

故 $\widetilde{f}$ 是模同态.

取 $\mathcal{F}$ 为空间 B 上的丛范畴到左 A 模范畴的映射，其中 $\mathcal{F}(E) = E(U), \mathcal{F}(f) = \tilde{f}$，验证可知 $\mathcal{F}$ 就是两范畴间的协变函子，进而有以下推论：

推论 3.1.1. 若 f 是丛同构，则 $\tilde{f}$ 是模同构.

有了以上函子, 我们很自然地就会想到一个问题: 是否存在它的逆? 即, 是否对于模同态 $\tilde{f}\colon E_1(B) \to E_2(B)$，存在丛态射 $f\colon E_1 \to E_2$？ 为了解决这个问题，我们首先考虑以下引理：

引理 3.1.1. 若 $\tilde{f}\colon E_1(U) \to E_2(U)$ 为模同态，$V \subset U$ 为开子集，则 $\tilde{f}|_V\colon E_1(V) \to E_2(V)$ 为模同态.

证明. $\forall s \in E_1(V)$，记 $s_1, s_2 \in E_1(U)$ 为 s 的两个延拓，则 $\forall b \in V$，存在 $W \subset \overline{W} \subset V$ 为 b 的邻域及 $\eta \in C^\infty(B)$，满足 $\eta|_W = 1, \eta|_{B\setminus V} = 0$. 进而我们有 $\eta s_1 = \eta s_2$. 根据模同态的定义，我们有 $\tilde{f}(s_1)(b) = \eta(b)\tilde{f}(s_1)(b) = \tilde{f}(\eta s_1)(b) = \tilde{f}(\eta s_2)(b) = \eta(b)\tilde{f}(s_2)(b) = \tilde{f}(s_2)(b)$. 由 b 的任意性可知 $\tilde{f}(s_1)|_V = \tilde{f}(s_2)|_V$.

故 $\forall s \in E_1(V)$，取其延拓 $s' \in E_1(U)$，则函数 $\tilde{f}|_V\colon E_1(V) \to E_2(V), s \mapsto \tilde{f}(s')|_V$ 是良定的，且由 $\tilde{f}$ 线性可以直接得到 $\tilde{f}|_V$ 线性，换言之，$\tilde{f}|_V$ 是模同态.

有了这个引理，我们就可以证明以下命题：

命题 3.1.2. 若有模同态 $\tilde{f}\colon E_1(B) \to E_2(B)$，则存在丛态射 $f\colon E_1 \to E_2$.

证明. 对于两空间 E_1, E_2，存在底空间 B 的可数开覆盖 $\{V_i\}_{i=1}^\infty$，使得 $V_i \times \mathbb{R}^n$ 为 E_1 的局部平凡化，$V_i \times \mathbb{R}^m$ 为 E_2 的局部平凡化，即存在两同胚 $\varphi_i\colon V_i \times \mathbb{R}^n \to E_1$，$\varphi_i'\colon V_i \times \mathbb{R}^m \to E_2$，且 $\varphi_i(b, \cdot), \varphi_i'(b, \cdot)$ 均为线性变换.

令 $\tilde{f}_i := \tilde{f}|_{V_i}$，由引理可知这是一个模同态. 令 $e_l = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{l-1}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-l}) \in \mathbb{R}^n$，

$f_i(b, e_l) := (\varphi_i')^{-1}(\tilde{f}_i(\varphi_i(\cdot, e_l))(b))$，则我们有

$$
\begin{aligned}
\varphi_i' \circ f_i(b, e_l) &= \tilde{f}_i(\varphi_i(\cdot, e_l))(b) \\
&= \tilde{f}_i(\varphi_j \circ \varphi_{ji}(\cdot, e_l))(b) \\
&= \varphi_j' \circ f_j \circ \varphi_{ji}(b, e_l),
\end{aligned}
$$

也即 $\varphi_{ji}' \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ji}$. 鉴于此，我们取 $f|_{\varphi_i(V_i \times \mathbb{R}^n)} = \varphi_i' \circ f_i \circ \varphi_i^{-1}$，则 f 良定，且 f, f_i 满足交换图：

$$
\begin{tikzcd}
V_i \times \mathbb{R}^n \arrow[rrr, "f_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[dd, "\varphi_{ji}"] & & & V_i \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\varphi_i'"'] \arrow[dd, "\varphi_{ji}'"] \\
& E_1 \arrow[r, "f"] & E_2 & \\
V_j \times \mathbb{R}^n \arrow[rrr, "f_j"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & & & V_j \times \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\varphi_j'"]
\end{tikzcd}
$$

由定义可直接验证 f 为丛态射.

注 3.1.2. 同样地，若 $\tilde{f}\colon E_1(B)\to E_2(B)$ 为模同构，则 $f\colon E_1\to E_2$ 为丛同构.

Definition 导算子模

定义 $\mathcal{F}(U)=\{U\text{上的导算子全体}\}$，则 $\mathcal{F}(U)$ 是 $C^\infty(U)$ 模，称为导算子模.

命题 3.1.3. 设 M 为光滑流形，U 为 M 的开集，则 U 上的光滑向量场 $TM(U)\cong\mathcal{F}(U)$.

证明. 设 $\varphi_i=(x_1,\cdots,x_n)\colon M\to W_i\subset\mathbb{R}^n$ 为坐标函数，且 $d\varphi_i\colon W_i\times\mathbb{R}^n\to TM$ 为局部平凡化.

固定 $X\in TM(U)$，并记 $(v_1,\cdots,v_n)=p_2\circ(d\varphi_i)^{-1}\circ X\colon W_i\to\mathbb{R}^n$，则 $\forall k,\ v_k\in C^\infty(W_i)$.

定义 $D_X\colon C^\infty(M)\to C^\infty(M)$, $(D_Xf)(x)=\sum_{l=1}^n v_l(x)\dfrac{\partial(f\circ\varphi_i^{-1})}{\partial x_l}(x)$, $\forall x\in W_i$. 先证明 D_Xf 是良定的.

对另一个坐标函数 $\varphi_j=(y_1,\cdots,y_n)\colon M\to W_j\subset\mathbb{R}^n$，$d\varphi_j\colon W_j\times\mathbb{R}^n\to TM$，记 $(\widetilde{v}_1,\cdots,\widetilde{v}_n)=p_2\circ(d\varphi_j)^{-1}\circ X$，$(D_Xf)(y)=\sum_{l=1}^n v_l(y)\dfrac{\partial(f\circ\varphi_j^{-1})}{\partial y_l}(y)$. 若 $\varphi_i^{-1}(x)=\varphi_j^{-1}(y)$，则我们有

$$\widetilde{v}=(d\varphi_{ij})(v),$$

$$\widetilde{v}_l=\sum_{k=1}^n(d\varphi_{ji})_{lk}v_k,$$

进而有

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n\widetilde{v}_l\frac{\partial(f\circ\varphi_j^{-1})}{\partial y_l}&=\sum_{l=1}^n\widetilde{v}_l\frac{\partial}{\partial y_l}(f\circ\varphi_i^{-1}\circ\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})\\&=\sum_{l=1}^n\widetilde{v}_l\frac{\partial}{\partial x_m}(f\circ\varphi_i^{-1})(d\varphi_{ij})_{ml}\\&=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n(d\varphi_{ji})_{lk}v_k(d\varphi_{ij})_{ml}\frac{\partial}{\partial x_m}(f\circ\varphi_i^{-1})\\&=\sum_{k=1}^n v_k\frac{\partial(f\circ\varphi_i^{-1})}{\partial x_k},\end{aligned}$$

故 D_Xf 良定. 鉴于此，我们取映射 $F\colon TM(U)\to\mathcal{F}(U)$, $X\mapsto D_X$，该映射良定. 为了证明原命题，我们只需证明 F 是模同构即可.

假设 $D_X=D_Y$，则 $\sum v_i^1\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum v_i^2\frac{\partial}{\partial x_i}$，也即 $v_i^1=v_i^2$，故 $X=Y$，即 F 为单射.

$\forall D\in\mathcal{F}(U)$，记 $D|_{W_i}=\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，取 $X=(b,a_1(b),\cdots,a_n(b))$，则有 $F(X)=D$，即 F 为满射.

$\forall X,Y\in TM(U),f\in C^\infty(U)$，我们有

$$\begin{aligned}D_{X+Y}=\sum(v_X+v_Y)_i\frac{\partial}{\partial x_i}&=\sum\big((v_X)_i+(v_Y)_i\big)\frac{\partial}{\partial x_i}=D_X+D_Y,\\D_{fX}=\sum(fv)_i\frac{\partial}{\partial x_i}&=\sum fv_i\frac{\partial}{\partial x_i}=fD_X,\end{aligned}$$

即 F 为模态射.

而 F^{-1} 也为模态射，综上可知 F 为模同构.

接下来我们考虑模的一些运算.

Definition 直和

设 M_i 是 $R-$ 模，记 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 为 Abel 群的直和，则其也为 Abel 群. 定义二元运算：

$$R \times \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$
$$(a, (x_1, \cdots, x_n)) \mapsto (ax_1, \cdots, ax_n)$$

则 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 在以上运算下是 $R-$ 模.

此处可以对比回忆一下丛的 Whitney 和运算：

对于两向量丛 $(E, \pi, B), (E', \pi', B)$，$E \oplus E' = \{(v, v') \in E \times E' \mid \pi(v) = \pi'(v')\}$，并取丛投影 $\rho\colon E \oplus E' \to B$, $(v, v') \mapsto \pi(v)(= \pi'(v'))$，称这样的 $E \oplus E'$ 为 E, E' 的 Whitney 和.

命题 3.1.4. 设 E, F 是 B 上的光滑向量丛，U 是 B 的开子集，则

$$(E \oplus F)(U) = E(U) \oplus F(U).$$

证明. 令 $f\colon E(U) \oplus F(U) \to (E \oplus F)(U)$, $f(s_1, s_2)(b) = (s_1(b), s_2(b))$. 由 $\pi_E \circ s_1(b) = b = \pi_F \circ s_2(b)$ 得 $(s_1(b), s_2(b))$ 确实在 $(E \oplus F)(U)$ 中.

若 $f(s_1, s_2) = f(s_1', s_2')$，则 $\forall b \in U$, $f(s_1, s_2)(b) = f(s_1', s_2')(b)$，进而有 $(s_1(b), s_2(b)) = (s_1'(b), s_2'(b))$，即 $s_1 = s_1', s_2 = s_2'$，f 为单射.

$\forall b \in B$, 有 $E \oplus F|_b = E|_b \oplus F|_b$, 故可取 $p_1\colon E \oplus F \to E$, $p_1(E \oplus F|_b) = E|_b$, $p_2\colon E \oplus F \to F$, $p_1(E \oplus F|_b) = F|_b$, 且 $(p_1, p_2) = \mathrm{id}_{E \oplus F}$. $\forall s \in (E \oplus F)(U)$，取 $s_1 = p_1 \circ s$，$s_2 = p_2 \circ s$，则 $f(s_1, s_2) = s$，即 f 是满射.

Definition 张量积

设 M, N 是两 R-模，令 $F = \{\sum_{i=1}^{r} a_i(x_i, y_i) \mid a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N, r < +\infty\}$，则 F 是模. 设 $H \subset F$，且由以下元素生成：

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y) \quad (x, y + y') - (x, y) - (x, y')$$
$$(ax, y) - a(x, y) \quad (x, ay) - a(x, y)$$

定义 $M \otimes N = F/H$，称为 M, N 的张量积.

从泛性质的角度看，张量积是符合以下泛性质的模 $T(M, N)$：

存在双 $R-$ 模同态 $i : M \times N \to T(M, N)$，使得 $\forall$ 双 $R-$ 模同态 $f : M \times N \to W$，必存在 $R-$ 模同态 $\widetilde{f} : T(M, N) \to W$ 满足 $\widetilde{f} \circ i = f$，即下图交换：

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(M,N) \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

Definition 张量代数

设 M 为 R-模，称分次代数 $T(M) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i$ 为张量代数，其中 $M^i = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{i\text{个}}$，$M^0 = R$.

Definition 外代数

定义 $B=$ 由 $x\otimes x\,(x\in M)$ 生成的理想，称 $\wedge M=T(M)/B$ 为外代数，$\wedge^i(M)=M^i/(B\cap M^i)$ 为外代数的 i 次分支.

Definition 外积

对 $x,y\in T(M)$，称 $x\wedge y:=[x\otimes y]\in\wedge M$ 为 x,y 的外积.

由定义可以看出，若 $x,y\in M$，则 $x\wedge y=-y\wedge x$.

Definition 对偶模

称 $M^*=\mathrm{Hom}(M,R)$ 为 M 的对偶模.

例 3.1.2. 设 E 是 B 的光滑向量丛，$U\subset B$ 为开集，则 $(E(U))^*=\mathrm{Hom}(E(U),C^\infty(U))$.

命题 3.1.5. 设 E,F 为 B 的光滑向量丛，$U\subset B$ 为开集，则在局部平凡邻域中有

$$(E\otimes F)(U)=E(U)\otimes F(U),$$
$$(\wedge E)(U)=\wedge(E(U)),$$
$$E^*(U)=(E(U))^*.$$

证明. 记 $E=U\times\mathbb{R}^n$, $F=U\times\mathbb{R}^m$, $R=C^\infty(U)$.

(1) $E\times F=U\times(\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^m)\cong U\times\mathbb{R}^{nm}$，故 $(E\otimes F)(U)=nmR$.

另一方面，$E(U)\otimes F(U)=nR\otimes mR=nmR$，因此有 $(E\otimes F)(U)=E(U)\otimes F(U)$.

(2) $\wedge E=U\times(\wedge\mathbb{R}^n)=U\times\mathbb{R}^{2^n}$，故 $(\wedge E)(U)=2^nR$.

另一方面，$\wedge(E(U))=\wedge(nR)=2^nR$，因此有 $(\wedge E)(U)=\wedge(E(U))$.

(3) 记 e_i 为 $E(U)$ 的正规基，取 e_i^* 为 $E(U)$ 的对偶基，则有 $(E(U))^*=\sum_{i=1}^n Re_i^*\cong nR$.

另一方面，$E^*\cong U\times\mathbb{R}^n$，故 $E^*(U)=nR$，因此有 $E^*(U)=(E(U))^*$.

注 3.1.3. 事实上，以上式子对于 B 为紧致无边光滑流形、U 为 B 的开子集时均成立. 详细证明我们将留待介绍了投射模后再给出.

Definition 模的正合序列

设 M_i 是 $R-$ 模，$f_i:M_i\to M_{i+1}$ 是 $R-$ 模同态，称 (M_i,f_i) 是正合序列，若 $\ker f_i=\mathrm{im}f_{i-1}$.

$$\cdots\to M_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}M_{i+1}\to\cdots.$$

与丛对应，模的短正合列为以下形式的特殊正合列：

$$0\to M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\to 0.$$

命题 3.1.6. 若丛的短正合列分裂，则相应的模的序列正合.

证明. 设 $0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$ 为丛的短正合列，$0 \to E(U) \xrightarrow{\tilde{f}} F(U) \xrightarrow{\tilde{g}} G(U) \to 0$ 为对应的模的序列.

首先证明序列在 $E(U)$ 处正合，即 $\tilde{f}$ 为单射 由丛的短正合列，$\forall b \in U$，有 $f_b \colon E_b \to F_b$ 是单射. 假设 $\tilde{f}(s) = 0$，则 $f_b \circ s(b) = \tilde{f}(s)(b) = 0$，由 f_b 单可知 $s(b) = 0$，由 b 的任意性有 $s = 0$，即 $\tilde{f}$ 为单射.

再证明序列在 $F(U)$ 处正合，即 $\ker \tilde{g} = \mathrm{im} \tilde{f}$. $\forall b \in U$，由丛的正合性，$g_b \circ f_b = 0$. 故 $\forall s \in E(U)$，$\tilde{g}\tilde{f}(s)(b) = \widetilde{gf}(s)(b) = (gf)_b \circ s(b) = g_b \circ f_b \circ s(b) = 0 \circ s(b) = 0$，即 $\mathrm{im} \tilde{f} \subset \ker \tilde{g}$. $\forall b \in U$, $x \in \ker \tilde{g}$，我们有 $g_b \circ x(b) = \tilde{g}(x)(b) = 0$，即 $x(b) \in \ker g_b = \mathrm{im} f_b$，故存在 $y_b \in E_b$ 使得 $x(b) = f_b(y_b)$ 注意到 f 为光滑映射，则我们有 f_b 关于 b 光滑，进而可以取到光滑截面 y 满足 $x = \tilde{f}(y)$. 取 $y \in E(U)$, $y(b) = y_b$，则有 $x = \tilde{f}(y) \in \mathrm{im} \tilde{f}$. 综上有 $\mathrm{im} \tilde{f} = \ker \tilde{g}$.

最后证明序列在 $G(U)$ 处正合，即 $\tilde{g}$ 是满射. 由于丛的短正合列分裂，故存在丛态射 $\lambda \colon G \to F$ 使得 $g \circ \lambda = \mathrm{id}$，即 $\tilde{g} \circ \tilde{\lambda} = \mathrm{id}$，即 $\tilde{g}$ 是满射.

注 3.1.4. 从证明过程中可以看到，$E(U)$ 和 $F(U)$ 的证明不需要用到丛的短正合列分裂，仅有 $G(U)$ 处需要用到.

注 3.1.5. 当 E, F, G 是 B 上的光滑向量丛时，$0 \to E(U) \to F(U) \to G(U) \to 0$ 正合且分裂，且 $F(U) \cong E(U) \oplus G(U)$.

Definition 投射模

对于 R-模 M，如果存在 R-模 N，使得 $M \oplus N = nR$ 为一个有限自由模，则称 M 为一个投射模.

命题 3.1.7. 设 B 为一个紧致无边界的光滑流形，(E, π, B) 为一个光滑向量丛，则 $E(B)$ 为 $C^\infty(B)$ 上的投射模.

证明. 设 E 的秩为 n，E 的局部平凡化为 $\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i=1}^r$，其中 $\{U_i\}_{i=1}^r$ 为 B 的一个开覆盖. (由于 B 是紧的，所以 r 有限.) 假设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ 是从属于 $\{U_i\}_{i=1}^r$ 的单位分解 (即 $\mathrm{supp}\, \alpha_i \subset U_i$；如果这样的单位分解不存在，用 $\{U_i\}$ 的加细代替 $\{U_i\}$). 记

$$\begin{aligned} f^i \colon \pi^{-1}(U_i) &\to U_i \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \\ (b, \tilde{v}) &\mapsto (b, v) \ \mapsto v, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} s \colon E &\to B \times \mathbb{R}^{nr}; \\ u = (b, \tilde{v}) &\mapsto (b, \alpha_1(b) f^1(u), \alpha_2(b) f^2(u), \cdots, \alpha_r(b) f^r(u)). \end{aligned}$$

显然 s 是一个丛同态，且在每个纤维 $\pi^{-1}(b)$ 上，由于存在至少一个 $\alpha_i(b)$ 不为零，所以 s_b 为单射. 记 $G := B \times \mathbb{R}^{nr}/E$，则我们有以下短正合列. (单射 s_b 保证了 E 处是正合的，其余两处的正合性是简单的)

$$0 \to E \xrightarrow{s} B \times \mathbb{R}^{nr} \to G \to 0.$$

由于 B 是一个紧光滑流形，这一短正合列是可裂的，所以 $E \oplus G$ 丛同构于 $B \times \mathbb{R}^{nr}$. 进而 $E(B) \oplus G(B) = (E \oplus G)(B)$ 模同构于 $nrC^\infty(B)$，后者为一个有限自由模. 故 $E(B)$ 为 $C^\infty(B)$ 上的投射模.

注 3.1.6. 对于任何开集 $U \subset B$，$E(U) \oplus G(U) = (E \oplus G)(U)$ 仍成立，所以 $E(U)$ 也是投射模.

接下来，我们讨论向量丛的运算与“取截面运算” $E \mapsto E(U)$ 在什么情况下是可交换的.

命题 3.1.8. 设 B 是一个紧致无边界的光滑流形，$U \subset B$ 为开集，E, F 为 B 上的光滑向量丛，则有以下结论.

1. $\mathrm{Hom}(E(U), F(U)) = \mathrm{Hom}(E, F)(U)$，其中 $\mathrm{Hom}(E, F)$ 为“同态丛”，它在 $b \in B$ 上的纤维是 $E_b \to F_b$ 的线性变换全体，它的截面为丛同态；
2. $E(U) \otimes F(U) = (E \otimes F)(U)$;
3. $E^*(U) = (E(U))^*$;
4. $(\wedge^k E)(U) = \wedge^k(E(U))$.

注 3.1.7. 事实上，(1), (3) 并不依赖 $E(U)$ 为投射模这一条件，也即不需要 B 是紧的.

我们会先给出 (1) 和 (3) 的证明，再证明三个引理，最后证明 (2) 和 (4).

证明. (1) 首先，我们说明 $\mathrm{Hom}(E, F)(U)$ 是一个 $C^\infty(U)$-模. 对任意的 $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(E, F)(U)$，我们可以把 φ 写成如下形式，ψ 同理.

$$\begin{aligned}\varphi \colon U \to\ & \mathrm{Hom}(E, F);\\ b \mapsto\ & \varphi_b \colon E_b \to F_b;\\ & (b, v) \mapsto (b, \varphi_b(v)).\end{aligned}$$

则对任意的 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(U)$，可以定义 $\mathrm{Hom}(E, F)(U)$ 中的元素

$$\begin{aligned}\gamma_1\varphi + \gamma_2\psi \colon U \to\ & \mathrm{Hom}(E, F);\\ b \mapsto\ & \gamma_1(b)\varphi_b + \gamma_2(b)\psi_b : E_b \to F_b;\\ & (b, v) \mapsto (b, \gamma_1(b)\varphi_b(v) + \gamma_2(b)\psi_b(v)).\end{aligned}$$

然后，我们来构造所需的同构. 定义

$$\begin{aligned}F \colon \mathrm{Hom}(E, F)(U) \to\ & \mathrm{Hom}(E(U), F(U));\\ \varphi \mapsto\ & \tilde{\varphi} \colon E(U) \to F(U);\\ & s(b) \mapsto \varphi_b(s(b)),\end{aligned}$$

容易知道，F 是 $C^\infty(U)$-模同态. 以下说明 F 既是单射又是满射，进而确实是一个同构.

F 是单射：即如果对任意 $s \in E(U), b \in U$，都成立 $\varphi_b(s(b)) = 0$，那么 $\varphi \equiv 0$. 只要说明，对任意的 $b \in U$，以及 $v \in E_b$, 都存在 $s_v \in E(U)$ 使得 $s_v(b) = v$. (这样，就有 $\varphi_b = 0$，$\forall b \in U$，进而 $\varphi = 0$.) 由局部平凡性，可以在 b 的某个开邻域 $W \subset U$ 内找到这样的 $\tilde{s}_v \in E(W)$. 同时，存在函数 $f \in C^\infty(U)$，使得 f 在 b 的一个更小的开邻域 $V \subset W$ 上的取值恒为 1，在 $U \setminus W$ 上恒为 0. 则 $s_v := f\tilde{s}_v$ 可以延拓为 $E(U)$ 中的元素，且满足要求.

F 是满射：对 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(E(U), F(U))$，构造

$$\begin{aligned}&\varphi \colon E \to F;\\ &(b, v) \mapsto (b, \tilde{\varphi}(s_v)(b)),\end{aligned}$$

其中 $s_v \in E(U)$ 的构造同上，而在引理3.1.1 的证明中，我们已经说明了 φ 是良定的. 由于 $\tilde{\varphi}$ 是一个模同态，特别地，它是一个线性映射，所以对每个 $b \in U, \varphi_b \colon E_b \to F_b; v \mapsto \tilde{\varphi}(s_v)(b)$ 给出了一个 E_b 到 F_b 的线性变换，因为容易验证 $F(\varphi) = \tilde{\varphi}$，所以只要验证 φ_b 关于 b 是光滑的，就有 $\varphi \in \mathrm{Hom}(E, F)(U)$，故 F 是满射. 对每个 (b, v)，我们构造的 s_v 在 b 的某个邻域上的取值恒为 v，而 $\tilde{\varphi}(s_v)$ 给出了一个光滑函数，也即在局部上，φ 与常值函数的复合是一个光滑函数. 特别地，在 E 和 F 的局部上分别取定一组基 $\{e_i\}, \{\tau_j\}$ 之后，可以设 $\varphi(e_i) = A_{ij}\tau_j$，根据上文的讨论，$A_{ij}$ 是光滑的，即 φ_b 关于 b 光滑.

(3) 在第一章中，我们通过给出转移函数的方式直接定义了对偶丛，而在此处，我们给出另一个定义，并验证两者是等价的（也即转移函数是相同的）. 类似于线性空间的对偶空间，对偶丛 $E^* = \mathrm{Hom}(E, B\times\mathbb{R})$. 由 (1)，我们首先可以得到

$$E^*(U) = \mathrm{Hom}(E, B \times \mathbb{R})(U) = \mathrm{Hom}(E(U), (B \times \mathbb{R})(U)).$$

而作为 U 的截面全体，我们只需要考虑 U 中元素的纤维，所以 $(B \times \mathbb{R})(U) = (U \times \mathbb{R})(U) = C^\infty(U)$. 也即

$$E^*(U) = \mathrm{Hom}(E(U), (B \times \mathbb{R})(U)) = \mathrm{Hom}(E(U), C^\infty(U)) = (E(U))^*.$$

接下来，我们将证明对偶丛的转移函数确实与第一章的定义相同. 这一部分的本质应该只是线性代数.

设 E 有两个交集非空的局部平凡化 $V_i \times \mathbb{R}^n, V_j \times \mathbb{R}^n$，平凡丛 $B \times \mathbb{R}$ 有两个对应的局部平凡化 $V_i \times \mathbb{R}, V_j \times \mathbb{R}$. 对 $s \in E^*(U)$，记 $s_i = s|_{V_i}$，s_j 同理. 丛同态 s 给出了如下的交换图，其中 g_{ji} 是从 $V_i \times \mathbb{R}^n$ 到 $V_j \times \mathbb{R}^n$ 的转移函数.

$$\begin{array}{ccc} V_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{s_i} & V_i \times \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle g_{ji}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ V_j \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{s_j} & V_j \times \mathbb{R} \end{array}$$

分别给定 $V_i\times\mathbb{R}^n, V_j\times\mathbb{R}^n$ 的两组基，那么我们的习惯是将 s_i, s_j 写成两个行向量. 在这种写法下，根据交换图，有 $s_j \circ g_{ji} = s_i$. 而如果我们将 s_i, s_j 写成列向量的形式，即考虑它们的转置，那么就有 $s_j^T = (g_{ji}^T)^{-1} s_i^T$，而这就是第一章中对偶丛的定义.

引理 3.1.2. 设 B 是一个光滑流形，E, F 为 B 上的光滑向量丛，则

$$E \otimes F = \mathrm{Hom}(E^*, F).$$

证明. 我们通过证明两个向量丛的转移函数相同来说明同构.

设 E, F 分别有局部平凡化 $U \times \mathbb{R}^n, U \times \mathbb{R}^m$，及在 U 上的基底 $\{e_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^m$；以及另一个局部平凡化 $\tilde{U}\times\mathbb{R}^n, \tilde{U}\times\mathbb{R}^m$，及在 $\tilde{U}$ 上的基底 $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{w}_i\}_{i=1}^m$，且 $U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$. 在相交的部分上，可以设 $\tilde{e}_i = \sum_j a_{ij} e_j, \tilde{w}_l = \sum_k b_{lk} w_k$. 那么，对于 $U, \tilde{U}$ 上的对偶基 $\{e_i^*\}_{i=1}^n, \{\tilde{e}_i^*\}_{i=1}^n$，有 $\tilde{e}_i^* = \sum_j (a^{-1})_{ji} e_j^*$.

一方面，$E \otimes F$ 中的元素 φ 在两种基底下分别可以表示为

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{i,j} \varphi_{ij} e_i \otimes w_j &= \sum_{k,l} \tilde{\varphi}_{kl} \tilde{e}_k \otimes \tilde{w}_l \\ &= \sum_{k,l,s,t} \tilde{\varphi}_{kl} a_{ks} b_{lt} e_s \otimes w_t. \end{aligned}$$

故 $\varphi_{ij} = \sum_{k,l} a_{ki} \tilde{\varphi}_{kl} b_{lj}$.

另一方面，考虑 $\varphi \in \mathrm{Hom}(E^*, F)$. 在两种基底下，分别可以设 $\varphi(e_i^*) = \sum_j \varphi_{ij} w_j$，和 $\varphi(\tilde{e}_k^*) = \sum_l \tilde{\varphi}_{kl} \tilde{w}_l$，而我们可以用两种方式展开后一个式子.

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{e}_k^*) &= \sum_l \tilde{\varphi}_{kl}\tilde{w}_l = \sum_{l,m} \tilde{\varphi}_{kl} b_{lm} w_m \\ &= \varphi(\sum_n (a^{-1})_{nk} e_n^*) = \sum_n (a^{-1})_{nk}\varphi(e_n^*) = \sum_{n,s}(a^{-1})_{nk}\varphi_{ns} w_s.\end{aligned}$$

对比系数，有 $\sum_l \tilde{\varphi}_{kl} b_{ls} = \sum_n (a^{-1})_{nk}\varphi_{ns}$. 所以有 $\varphi_{ns} = \sum_{k,l} a_{kn}\tilde{\varphi}_{kl} b_{ls}$.

综上，我们可以看出，转移函数是相同的，因而成立 $E \otimes F = \mathrm{Hom}(E^*, F)$.

引理 3.1.3. 对于交换环 R，若 M_1, M_2 为两个有限投射 R-模，则 $\mathrm{Hom}(M_1, M_2) = M_1^* \otimes M_2$.

证明. 我们直接构造需要的同构映射，再验证它是同构.

对 $a^* \otimes b \in M_1^* \otimes M_2$，我们将它对应到 $\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ 中的一个元素，记号不变，定义为 $a^* \otimes b(m_1) = a^*(m_1)b, \forall m_1 \in M_1$. 容易知道这是一个模同态，接下来我们证明它是双射.

单射：假设

$$\sum_{i,j} c_{ij} a_i^* \otimes b_j(m_1) = \sum_{i,j} c_{ij} a_i^*(m_1) b_j = 0, \forall m_1 \in M_1,$$

我们要证明 $\sum_{i,j} c_{ij} a_i^* \otimes b_j$ 作为 $M_1^* \otimes M_2$ 中的元素是 0. 由于 M_2 是投射模，存在另一个投射模 N_2 及正整数 n_2 使得 $M_2 \oplus N_2 = n_2 R$. 设 $n_2 R$ 有一组基 $\{e_i\}_{i=1}^{n_2}$, 则 b_j 可以写成 $b_j = \sum_k b_{jk} e_k$, 其中 $b_{jk} \in R$, 于是有

$$\sum_{i,j} c_{ij} a_i^* \otimes b_j(m_1) = \sum_{i,j,k} c_{ij} a_i^*(m_1) b_{jk} e_k = 0, \forall m_1 \in M_1.$$

考虑每个 e_k 对应的系数，对任意的 k，有 $\sum_{i,j} c_{ij} a_i^*(m_1) b_{jk} = 0$，而我们可以把这个式子的左边写成 $(\sum_{i,j} c_{ij} b_{jk} a_i^*)(m_1)$. 由 m_1 的任意性，就有 $\sum_{i,j} c_{ij} b_{jk} a_i^* = 0$. 所以

$$\sum_{i,j} c_{ij} a_i^* \otimes b_j = \sum_{i,j,k} c_{ij} b_{jk} a_i^* \otimes e_k = 0.$$

满射：设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$，对任意的 $s \in M_1$，设 $\varphi(s) = \sum_i f^i e_i$，其中 $f^i \in R$，$\{e_i\}$ 同上，是 $n_2 R$ 的一组基. 由于 $n_2 R = M_2 \oplus N_2$，可以设 $e_i = v_i + w_i$，其中 $v_i \in M_2, w_i \in N_2$. 故 $\varphi(s) = \sum_i f^i v_i + \sum_j f^j w_j$，而前一项在 M_2 中，后一项在 N_2 中，故 $\varphi(s) = \sum_i f^i v_i$. 构造 M_1^* 中的元素

$$\begin{aligned} g^i\colon M_1 \to M_2 \hookrightarrow n_2 R &\xrightarrow{\mathrm{Proj}_i} R; \\ s \mapsto \varphi(s) \mapsto \varphi(s) &\mapsto f^i, \end{aligned}$$

其中 Proj_i 是到第 i 个分量的投影，则有 $\varphi(s) = \sum_i g^i(s) v_i = \sum_i g^i \otimes v_i(s)$. 由 m_1 的任意性，就有 $\varphi = \sum_i g^i \otimes v_i$.

引理 3.1.4. 对有限投射 R-模 M，成立 $M^{**} \cong M$.

证明. 因为 M 是有限投射模，存在 R-模 N 满足 $M \oplus N = nR$. 我们先说明 $M^* \oplus N^* = nR$，进而 M^* 也是一个有限投射模. 构造映射

$$F : (M \oplus N)^* \to M^* \oplus N^*; f \mapsto f_1 + f_2,$$

其中 $f_1\colon M \to R; m \mapsto f(m,0)$, $f_2\colon N \to R; n \mapsto f(0,n)$. 则 $f(m,n) = f_1(m) + f_2(n)$. 这是一个同构，所以

$$M^* \oplus N^* = (M \oplus N)^* = (nR)^* = nR.$$

其次，我们构造需要的同构映射. 设

$$\begin{aligned} i : M \to & M^{**}; \\ m \mapsto & m^{**} : M^* \to R; \\ & \qquad a^* \mapsto a^*(m), \end{aligned}$$

即 $i(m)(a^*) = m^{**}(a^*) = a^*(m), \forall a^* \in M^*$.

单射：如果存在 $m \in M$ 满足 $a^*(m) = 0, \forall a^* \in M^*$，由于 $M^* + N^* = (nR)^*$，对任意的 $\varphi \in (nR)^*$，$\varphi = a^* + b^*$，其中 $a^* \in M^*, b^* \in N^*$. 则 $\varphi(m) = a^*(m) + b^*(0) = a^*(m) = 0$. 取定 nR 的一组基 $\{e_i\}$，则 $m = \sum\limits_i m_i e_i$. 分别取 $\varphi = e_1^*, \cdots, e_n^*$，得到 $m_i = 0, \forall i$，即 $m = 0$.

满射：设 nR 有一组基 $\{e_i\}_{i=1}^n$，且 $e_i = v_i + f_i$，其中 $v_i \in M, f_i \in N$. 则 $\{e_i^{**}\}$ 是 $M^{**} \oplus N^{**} = (nR)^{**} = nR$ 的一组基，且 $e_i^{**} = v_i^{**} + f_i^{**}$. 对于任何 $\varphi \in M^{**}$，设 $\varphi = \sum\limits_i \varphi_i e_i^{**} = \sum\limits_i \varphi_i v_i^{**} + \sum\limits_i \varphi_i f_i^{**}$，而最后这个式子中的两项分别属于 M^{**} 和 N^{**}，所以 $\varphi = \sum\limits_i \varphi_i v_i^{**}$. 对任意的 $a^* \in M^*$，$\varphi(a^*) = a^*(\sum\limits_i \varphi_i v_i)$，故有 $\varphi = i(\sum\limits_i \varphi_i v_i)$.

证明（续）. (2) 根据以上引理和 (1), (3)，我们有

$$\begin{aligned} E(U) \otimes F(U) &\xlongequal{\text{引理3.1.4}} (E(U))^{**} \otimes F(U) \xlongequal{(3)} (E^*(U))^* \otimes F(U) \xlongequal{\text{引理3.1.3}} \mathrm{Hom}(E^*(U), F(U)) \\ &\xlongequal{(1)} \mathrm{Hom}(E^*, F)(U) \xlongequal{\text{引理3.1.2}} (E \otimes F)(U). \end{aligned}$$

具体来说，对于 $e \in E(U), f \in F(U)$，以上同构给出了如下的对应关系.

$$e \otimes f \mapsto e^{**} \otimes f \mapsto e^{**} \otimes f \mapsto \langle \cdot, e \rangle f \mapsto e \otimes f,$$

其中第二个 $e^{**} \otimes f$ 是一个函数: $a^* \mapsto a^*(e)f$.

(4) 首先，对于我们熟悉的线性空间 V，设 T^kV 和 $\wedge^k V$ 分别为它的 k 次张量积和 k 次外积，有

$$\begin{aligned} i\colon \wedge^k V \to & T^k V; \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto & \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}, \\ \pi\colon T^k V \to & \wedge^k V; \\ v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} \mapsto & v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} v_1 \wedge \cdots \wedge v_k. \end{aligned}$$

容易验证，这两个映射满足 $\pi \circ i = \mathrm{id}$，故 i 是单射. 记 $A_k = i(\wedge^k V) \subset T^k V$. 类似地，对 R-模 M，可以同上构造 i 和 π.

其次，我们考虑向量丛 E. 构造 $i\colon \wedge^k E \to T^k E$：对任意的 $b \in B$，取 $i_b\colon \wedge^k E_b \to T^k E_b$ 的定义与线性空间的情形相同，再令 $i(b, v) = (b, i_b(v))$. 由于 i_b 是单射，i 也是一个单射. 接下来我们证明 i 是一个丛映射. 根据丛映射的定义，对任意的线性映射 $f\colon E_b \to E_b$，我们需要验证如下交换图.

$$\begin{tikzcd} \wedge^k E_b \arrow[r, "i_b"] \arrow[d, "\wedge^k f"] & T^k E_b \arrow[d, "T^k f"] \\ \wedge^k E_b \arrow[r, "i_b"] & T^k E_b \end{tikzcd}$$

我们通过计算直接验证，对任意的 $v_1\wedge\cdots\wedge v_k\in\wedge^k E_b$，与上图相对应，有如下结果.

$$\begin{tikzcd}
v_1\wedge\cdots\wedge v_k \arrow[r, "i_b"] \arrow[d, "\wedge^k f"] & \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(k)} \arrow[d, "T^k f"] \\
f(v_1)\wedge\cdots\wedge f(v_k) \arrow[r, "i_b"] & \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}f(v_{\sigma(1)})\otimes\cdots\otimes f(v_{\sigma(k)})
\end{tikzcd}$$

于是我们证明了 i 是单的丛映射. 同理，我们可以构造 $\pi\colon T^kE\to\wedge^kE$，以及 i: $\wedge^k(E(U))\to T^k(E(U))$，$\pi\colon T^k(E(U))\to\wedge^k(E(U))$，并验证后面这个 i 是单射.

接下来，我们给出同构映射. 考虑下图.

$$\begin{tikzcd}
T^k(E(U)) \arrow[r, "\mathrm{id}_T"] \arrow[d, shift left, "\pi_1"] & (T^kE)(U) \arrow[d, shift left, "\pi_2"] \\
\wedge^k(E(U)) \arrow[r, "\mathrm{id}_\wedge"] \arrow[u, shift left, "i_1"] & (\wedge^kE)(U) \arrow[u, shift left, "i_2"] \\
v_1\wedge\cdots\wedge v_k \arrow[r, mapsto] & v_1\wedge\cdots\wedge v_k
\end{tikzcd}$$

其中，id_T 为 (2) 证明的同构；i_1,π_1,i_2,π_2 就是上文定义在不同对象上的 i,π，我们用下标加以区分，而 $i_1\colon(\wedge^kE)(U)\to(T^kE)(U)$ 是由 $i\colon\wedge^kE\to T^kE$ 诱导的，π_1 同理；$\mathrm{id}_\wedge$ 为自然的单射，且满足 $\mathrm{id}_\wedge=\pi_2\circ\mathrm{id}_T\circ i_1$. 只要证明它也是一个满射，那么 $\mathrm{id}_\wedge$ 就给出了我们需要的同构.

最后，我们来证明 $\mathrm{id}_\wedge$ 是满射. 对于 $s\in(\wedge^kE)(U)$，我们想要证明，对于 $\tilde{s}:=\mathrm{id}_T^{-1}\circ i_2(s)$，满足 $\tilde{s}=i_1\circ\pi_1(\tilde{s})$. 进而 $s=\pi_2\circ\mathrm{id}_T(\tilde{s})=\mathrm{id}_\wedge(\pi_1(\tilde{s}))$ 在 $\mathrm{id}_\wedge$ 的像集中. 一方面，我们有 $\pi_1\circ i_1\circ\pi_1(\tilde{s})=\pi_1(\tilde{s})$，所以 $i_1\circ\pi_1(\tilde{s})-\tilde{s}\in\ker\pi:=\tilde{B}$，而 $\tilde{B}$ 是由形如 $x\otimes x,\ x\in E(U)$ 的元素张成的子模，也即由形如

$$w_1\otimes\cdots\otimes w_i\otimes\cdots\otimes w_j\otimes\cdots\otimes w_k+w_1\otimes\cdots\otimes w_j\otimes\cdots\otimes w_i\otimes\cdots\otimes w_k$$

的元素 $C^\infty(U)$-生成的. 另一方面，对任意的 $b\in B$, $i_1\circ\pi_1(\tilde{s})|_b-\tilde{s}|_b\in A_k=i(\wedge^kE_b)$. 故 $i_1\circ\pi_1(\tilde{s})|_b-\tilde{s}|_b\in A_k\cap\tilde{B}_b=\{0\}$，进而 $\tilde{s}=i_1\circ\pi_1(\tilde{s})$，这就证明了 $\mathrm{id}_\wedge$ 是满射.

注 3.1.8. 我们也可以通过如下方式由 $s\in(E\otimes F)(U)$ 构造出 $\to E(U)\otimes F(U)$ 中的元素，但我并不确定这是一个同构. (wzz 未给出同构的证明)

设 $\mathcal{D}=\{U_i\}$ 为 E, F 的局部平凡开集. 则 $s|_{U_i}=\sum\limits_{k,l}C^i_{kl}a_k\otimes b_l$，其中 $a_k\in E(U_i), b_l\in F(U_i)$. 将 a_k, b_l 分别光滑延拓到 U 上，记为 $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_l$. 令 $\{\lambda_i\}$ 为从属于 $\mathcal{D}$ 的单位分解，则

$$s=\sum_i\lambda_is=\sum_i\lambda_is|_{U_i}=\sum_{i,k,l}\lambda_iC^i_{kl}a_k\otimes b_l=\sum_{i,k,l}\lambda_iC^i_{kl}\tilde{a}_k\otimes\tilde{b}_l\in E(U)\otimes F(U).$$

类似地，可以由 $s\in\wedge^k(U)$ 构造 $\wedge^k(E(U))$ 中的元素，因为在局部平凡开集 U_i 上，由 $s_i=\sum c_{i_1\cdots i_k}a_{i_1}\wedge\cdots\wedge a_{i_k}$，其中 $c_{i_1\cdots i_k}a_{i_1}\in C^\infty(U), a_{i_j}\in E(U)$.

在本节的最后，我们证明命题3.1.7的逆命题.

命题 3.1.9. 设 B 是一个紧致无边的光滑流形，$R:=C^\infty(B)$. 对任意的 R 上的有限投射模 M，存在 B 上的光滑向量丛 E 满足 $E(B)=M$.

证明. 首先，由于 M 是有限投射模，可以设 $M\oplus N=nR$. 我们通过确定纤维来构造平凡丛 $B\times\mathbb{R}^n$ 的两个子丛 E 和 F. 对任意的 $b\in B$，令

$$E_b:=\{v\in\mathbb{R}^n\mid\exists s\in M\text{ s.t. }s=(f_1,\cdots,f_n),v=(f_1(b),\cdots,f_n(b))\};$$
$$F_b:=\{v\in\mathbb{R}^n\mid\exists s\in N\text{ s.t. }s=(g_1,\cdots,g_n),v=(g_1(b),\cdots,g_n(b))\}.$$

其次，我们证明 $\dim E_b$ 在 B 上不变. 设 $M\oplus N=nR$ 的一组基是 $e_i=(\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1\text{个}},1,0,\cdots,0)$，及 $e_i=F_i+G_i$, 其中 $F_i=(f_1^i,\cdots,f_n^i)\in M, G_i=(g_1^i,\cdots,g_n^i)\in N$. 在 b 的纤维上, $\mathrm{span}\{e_i(b)\}=\mathbb{R}^n$, $\mathrm{span}\{F_i(b)\}=E_b$, $\mathrm{span}\{G_i(b)\}=F_b$, 故 $\dim E_b+\dim F_b=n$. 设 $m=\dim E_b$, 则 $\{F_i\}$ 中有 m 个线性无关, 不妨设为 $F_1,\cdots,F_m$, 则矩阵

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_1^m \end{pmatrix}$$

在 b 处满秩，进而在 b 的某个邻域 U 上满秩. 所以在 $b'\in U$ 上，有 $\dim E_{b'}\geq m$. 同理, 有 $\dim F_{b'}\geq \dim F_b=n-m$. 又因为在 b' 处仍成立 $\dim E_{b'}+\dim F_{b'}=n$，所以 $\dim E_{b'}=n$. 故在 U，进而在整个 B 上，$\dim E_b$ 不变.

再次, 我们证明 E 是一个丛, 也即证明转移函数光滑. 设 W 是使得 $\{F_i\}$ 中有 m 个元素 $F_{i_1},\cdots,F_{i_m}$ 线性无关的开集, 不妨设这 m 个线性无关的元素就是 $F_1,\cdots,F_m$. 则有局部平凡化 $\varphi\colon W\times\mathbb{R}^m\to E;(b,e_i)\mapsto F_i(b)$. 设 $\tilde{W}$ 也是一个具有相同性质的开集，其局部平凡化为 $\tilde{\varphi}\colon \tilde{W}\times\mathbb{R}^m\to E;(b,e_i)\mapsto \tilde{F}_i(b)$. 由于两个矩阵

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_m \end{pmatrix}$$

在 $W\cap\tilde{W}$ 都是满秩的，所以转移函数可以用这两个矩阵或其逆矩阵表示，进而是光滑的.

最后, 我们证明 $E(B)=M$. 根据上面的构造，有 $M\subset E(B)$. 接下来我们证明 $E(B)\subset M$. 设 $\{U_i\}$ 是 E 的局部平凡化邻域，$\{\lambda_i\}$ 为从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解，对任意的 $s\in E(B)$，$\lambda_i s\in E(U_i)$，故 $\lambda_i s=\sum\limits_k\alpha_k F_k$，$\alpha_k\in R$. 而 λ_i 有紧支集，所以每个 α_k 有紧支集，进而可以延拓到 B 上. 那么 $s_i\in M$，所以 $s=\sum\limits_i\lambda_i s\in M$.

3.2 微分形式

我们知道流形 M 上的微分是一个映射

$$\begin{aligned} d\colon C^\infty(M)&\to T^*M(M);\\ f&\mapsto df=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i. \end{aligned}$$

接下来，我们引入微分的更为一般的定义:

Definition 微分

设 A 是域 F 上的交换代数，M 是 A-模，称映射 $d\colon A\to M$ 为微分 (求导)，若

(1) d 保持加法：$d(a+b)=da+db$，$a,b\in A$,

(2) Leibniz 法则：$d(ab)=a\,db+b\,da$，$a,b\in A$,

(3) $da=0$，$a\in F$.

例 3.2.1. 对于 $A=C^\infty(U),F=\mathbb{R},M=T^*M(U)$，$d\colon C^\infty(U)\to T^*M(U)$ 是一个微分.

Definition 微分形式模

设 A 是域 F 上的交换代数，称 A-模 $\Omega_{A/F}$ 为微分形式模，若存在微分 $d\colon A \to \Omega_{A/F}$，且满足如下泛性质：

对任一 A 模 M 及微分 $d'\colon A \to M$，都存在唯一一个模同态 $f\colon \Omega_{A/F} \to M$，使得 $d' = f \circ d$.

下面我们给出微分形式模的抽象构造，即

命题 3.2.1. 微分形式模存在且唯一.

证明. 考虑集合 $M := \{\sum_{i=1}^{r} a_i db_i \mid a_i, b_i \in A, r \in \mathbb{N}\}$，在 M 上有自然的左 $A-$ 模结构.

设 H 为由 (1) $d(b+b') - db - db'$, $b, b' \in A$ (2) $d(bb') - bdb' - b'db$, $b, b' \in A$ (3) da, $a \in F$ 生成的子模. 令

$$\Omega_{A/F} = M/H, d\colon A \to \Omega_{A/F};$$
$$b \mapsto [db].$$

下面我们来验证 $(\Omega_{A/F}, d)$ 满足泛性质.

对于 $A-$ 模 N 及微分 $d'\colon A \to N$，定义

$$\varphi\colon \Omega_{A/F} \to N;$$
$$[\sum_{i=1}^{r} a_i db_i] \mapsto \sum_{i=1}^{r} a_i d' b_i.$$

可见 φ 为模同态，且 $d' = \varphi \circ d$.

不难看出 φ 的唯一性.

不难看出微分形式模是唯一的.

命题 3.2.2. 对于紧无边光滑流形 M，$(T^*M(M), d)$ 是微分形式模，即 $\Omega_{C^\infty(M)/\mathbb{R}} = \{\sum_{i=1}^{r} g_i df_i \mid g_i, f_i \in C^\infty(M)\}$.

证明. 显然 $\Omega_{C^\infty(M)/\mathbb{R}} \subset \{\sum_{i=1}^{r} g_i df_i \mid g_i, f_i \in C^\infty(M)\}$.

下面证明另一方向的包含关系.

对于 $w \in T^*M(M)$，设 $\{U_i\}_{i=1}^m$ 是 M 的有限开覆盖，(U_i, x_j^i) 为局部坐标系，λ_i 为从属于 U_i 的单位分解.

即 $w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} dx_j^i$，其中 $\operatorname{supp} a_{ij} \subset U_i, a_{ij} \in C^\infty(M)$，将 x_i 延拓为 $f_j^i \in C^\infty(M), f_j^i |_{U_i} = x_j^i$，则 $w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} df_j^i \in \Omega_{C^\infty(M)/\mathbb{R}}$，即证.

注 3.2.1. 从证明过程可以看出，对于存在有限局部坐标覆盖的流形，结论仍然成立.

Definition 导算子，导算子模

对于交换代数 A，称映射 $D\colon A \to A$ 为导算子，若 (1)$D(ab) = aDb + bDa$;(2)$D(\alpha a + \beta b) = \alpha Da + \beta Db$, $a, b \in A, \alpha, \beta \in F$.

导算子全体有自然的 $A-$ 模结构，称其为导算子模，记作 M.

对于交换代数 A，我们可以定义二元运算 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：

$$\Omega \times M \to A;$$
$$\langle \sum_{i=1}^{r} g_i df_i, D\rangle = \sum_{i=1}^{r} g_i Df_i.$$

于是 $\langle \sum_{i=1}^{r} g_i df_i, \cdot\rangle \in M^*$，即 $\Omega_{A/F} \subset M^*$.

命题 3.2.3. (外微分的延拓) 对光滑流形 M，记 $\Omega^k(M) = \Lambda^k T^*M$，存在唯一的 $d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$，满足：

(1) d 是线性的,

(2) $d \circ d = 0$,

(3) $d(w \wedge m) = dw \wedge m + (-1)^k w \wedge dm, w \in \Omega^k(M), m \in \Omega^l(M)$,

(4) 对于 $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$，$df$ 为 f 的微分.

证明. 对局部坐标系 U 及 $w = \alpha dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \in \Omega^k(U)$，定义 $dw = d\alpha \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$.

(1), (4) 显然成立.

(2)

$$\begin{aligned} d^2 w &= d\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

(3) 对于 $w = adx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, m = bdx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$,

$$\begin{aligned} d(w \wedge m) &= d(ab) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \\ &= da \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \wedge (b \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) + adb \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge (\wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) \\ &= dw \wedge m + (-1)^k a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge (db \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) \\ &= dw \wedge m + (-1)^k w \wedge dm. \end{aligned}$$

注 3.2.2. 上述定义不依赖于局部坐标的选取.

命题 3.2.4. 对于 $X_0, \cdots, X_k \in TM(U), w \in \Omega^k(U), w \in \Omega^k(U)$,

$$(k+1)!\langle dw, X_0, \cdots, X_k\rangle = \sum_{i=0}^{k} X_i \langle w, X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_k\rangle + \sum_{i<j} \langle w, [X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_k\rangle.$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 为 Lie 括号；在局部坐标系下,

$$\langle dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, X_1, \cdots, X_k\rangle := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle dx_{i_1}, X_{\sigma(1)}\rangle \cdots \langle dx_{i_k}, X_{\sigma(k)}\rangle.$$

证明. 证明参见陈维桓《微分流形初步》，第 188 页.

因为 wzz 老师 5 月 9 日的笔记难以理解, 所以第 2 节缺失部分内容.

我们可以借助微分形式给出光滑流形的定向的定义，请读者自行验证与第一章中定向定义的等价性.

Definition 定向

设 M 为 m 维光滑流形. 如果存在 M 上的一个处处不为零的连续的 m 次微分形式 ω，则称 M 是可定向的.

设 ω_1 和 ω_2 是各自给出 M 的定向的两个微分形式，则有 $\omega_2 = f\omega_1, f \in C^0(M)$. 若 $f > 0$, 则称 ω_1 和 ω_2 是等价的.

M 的一个定向即是选定 M 的 m 次微分形式的一个等价类.

3.3 Stokes 定理

Definition 支撑集

设 M 是 m 维有向光滑流形，$\omega \in A^r(M)$. ω 的支撑集为

$$\operatorname{supp}\omega = \overline{\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}}.$$

我们记 M 上所有具有紧支撑的 r 次外微分式的集合记作 $A_0^r(M)$. 这是 $A^r(M)$ 的 $C^\infty(M)$-子模.

我们可以将积分的概念引入到流形上. 这首先是一个线性映射

$$\int_M : A_0^m(M) \to \mathbb{R}.$$

先研究一种方便的情形: ω 的支集 $\operatorname{supp}\omega$ 被包含在 M 的一个坐标卡 $(U, \varphi; x^i)$ 中, 且坐标卡的定向与 M 的相符. 这意味着 $\omega|_{M\setminus U} = 0$, 且 ω 可被写为 $a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$, 其中 $a \in C^\infty(U)$. 容易发现 $\operatorname{supp}a = \operatorname{supp}\omega \subset U$. 由于 $\operatorname{supp}a$ 紧，故 Riemann 积分 $\int_{\varphi(U)} (a\circ\varphi^{-1})\,dx^1\cdots dx^m < \infty$，故我们可作如下定义:

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (a\circ\varphi^{-1})\,dx^1\cdots dx^m.$$

我们需要说明 $\int_M \omega$ 与坐标卡的选取是无关的. 设 $(V, \psi; y^i)$ 是另一个定向相符的坐标卡，使得 $\operatorname{supp}\omega \subset V$，则在 $U \cap V$ 上有

$$a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m = b\,dy^1\wedge dy^m = b\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.$$

故

$$a\circ\varphi^{-1} = ((b\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}))\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}.$$

由于 U 与 V 的定向都与 M 的定向相符，故 $\dfrac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0$. 由重积分换元公式，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\psi(V)}(b\circ\psi^{-1})\,dy^1\cdots dy^m&=\int_{\psi(U\cap V)}(b\circ\psi^{-1})\,dy^1\cdots dy^m\\&=\int_{\varphi(U\cap V)}(b\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})\cdot\left|\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|dy^1\cdots dy^m\\&=\int_{\varphi(U\cap V)}(a\circ\varphi^{-1})\,dx^1\cdots dx^m=\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})\,dx^1\cdots dx^m.\end{aligned}$$

例如 $\omega=0$ 时，依定义有 $\displaystyle\int_M\omega=0$.

现考虑一般情形. 设 $\omega\in A_0^m(M)$. 取与 M 定向相符的坐标卡 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$，其中 I 是指标集，且 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的局部有限覆盖. 在 U_α 上 φ_α 对应的局部坐标系为 $\{x_\alpha^i\}$，设

$$\omega\,|_{U_\alpha}=a_\alpha\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge x_\alpha^m,$$

其中 $a_\alpha\in C^\infty(U_\alpha)$. 考虑该覆盖从属的单位分解 $\{h_\alpha\}$，那么微分形式 ω 有分解

$$\omega=(\sum_{\alpha\in I}h_\alpha)\omega=\sum_{\alpha\in I}(h_\alpha\omega).$$

由于 ω 是紧支的，故 $\operatorname{supp}\omega$ 只与有限个 U_α 有交，故上式右端为有限和. 那么由线性有

$$\int_M d\omega=\sum_{\alpha\in I}\int_M d(h_\alpha\omega).$$

我们只需证明

$$\int_M d(h_\alpha\omega)=\int_{\partial M}i^*(h_\alpha\omega)$$

对任意 $\alpha\in I$ 成立即可. 注意到 $h_\alpha\omega$ 仍是紧支的，因为其支集在 $\operatorname{supp}\omega\cap\operatorname{supp}h_\alpha$ 中. 且由该式还知 $h_\alpha w$ 的支集还在 U_α 中. 这就把情况化归到了已讨论过的情形了. 我们可以定义积分为

$$\int_M\omega:=\int_M\sum_{\alpha\in I}h_\alpha\omega=\sum_{\alpha\in I}\int_M h_\alpha\omega=\sum_{\alpha\in I}\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}(h_\alpha a_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\,dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m.$$

同样地, 我们要验证这个值与 M 的覆盖的选取与单位分解无关. 这只需要些繁琐的计算. 设 (V_λ,ψ_λ) 是另一个与 M 定向相符的局部有限坐标卡集，且 g_λ 是从属于 $\{V_\lambda\}$ 的单位分解. 记 ψ_λ 在 V_λ 上决定的局部坐标系为 $\{y_\lambda^i\}$，并设 $\omega\,|_{V_\lambda}=b_\lambda dy_\lambda^1\wedge\cdots\wedge dy_\lambda^m$，其中 $b_\lambda\in C^\infty(M)$.

当 $U_\alpha\cap V_\lambda\neq\varnothing$ 时，由于两个坐标卡的定向都与 M 相符，在 $U_\alpha\cap V_\lambda$ 上 $\dfrac{\partial(y_\lambda^1,\cdots,y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}>0$. 那么

$$a_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}=(b_\lambda\circ\psi_\lambda^{-1}\circ\psi_\lambda\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot\frac{\partial(y_\lambda^1,\cdots,y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}.$$

由于 $\{g_\lambda\}$ 与 $\{h_\alpha\}$ 是单位分解，故

$$\begin{aligned}&\sum_\lambda\int_{\psi_\lambda(V_\lambda)}(g_\lambda b_\lambda\circ\psi_\lambda^{-1})\,dy_\lambda^1\wedge\cdots\wedge dy_\lambda^m\\&=\sum_\lambda\int_{\psi_\lambda(V_\lambda)}(\sum_\alpha h_\alpha\circ\psi_\lambda^{-1})\cdot(g_\lambda b_\lambda\cdot\psi_\lambda^{-1})\,dy_\lambda^1\wedge\cdots\wedge dy_\lambda^m\\&=\sum_\lambda\sum_\alpha\int_{\psi_\lambda(V_\lambda)}(h_\alpha g_\lambda b_\lambda\circ\psi_\lambda^{-1})\,dy_\lambda^1\wedge\cdots\wedge dy_\lambda^m.\end{aligned}$$

上式实为有限和，因为 $\mathrm{supp}(g_\lambda b_\lambda)$ 是紧的，且注意到 $\mathrm{supp}(h_\alpha g_\lambda b_\lambda) \subset U_\alpha \cap V_\lambda$. 这样就有

$$\begin{aligned}
&\sum_\lambda \int_{\psi_\lambda(V_\lambda)} (g_\lambda b_\lambda \circ \psi_\lambda^{-1})\, dy_\lambda^1 \wedge \cdots \wedge dy_\lambda^m \\
=& \sum_{\lambda,\alpha} \int_{\psi_\lambda(V_\lambda \cap U_\alpha)} (h_\alpha g_\lambda b_\lambda \circ \psi_\lambda^{-1})\, dy_\lambda^1 \wedge \cdots \wedge dy_\lambda^m \\
=& \sum_{\alpha,\lambda} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda)} (g_\lambda h_\alpha b_\lambda \circ \varphi_\alpha^{-1})\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \\
=& \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\sum_\lambda g_\lambda \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot (h_\alpha a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \\
=& \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (h_\alpha a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})\, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m.
\end{aligned}$$

上述计算证明了我们定义的 $\int_M \omega$ 与坐标卡集及单位分解的选取无关. 我们定义该数值为 m 次紧支微分形式 ω 在 M 上的**积分**.

显然，积分是线性的，即

$$\int_M \omega + \eta = \int_M \omega + \int_M \eta,$$

$$\int_M c\omega = c \int_M \omega,$$

其中 $\omega, \eta \in A_0^m(M)$, $c \in \mathbb{R}$.

当然，当微分形式的次数低于流形 M 维数时，我们仍然能定义其在 M 的 r 维有向子流形上的积分. 操作如下：若 $\omega \in A_0^r(M)$，其中 $r < m$，且 N 是 r 维有向光滑流形，$f\colon N \to M$ 是嵌入子流形，则 $f^*\omega \in A_0^r(N)$. 根据上述对积分的定义，算式 $\int_N \omega$ 是有意义的. 记

$$\int_{f(N)} \omega = \int_N f^*\omega.$$

练习 3.3.1. （1）设 M 一个 n 维有向黎曼流形，(U, x^i) 是符合定向的局部坐标系，记 $g = \det(g_{ij})$，证明 $\sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 与坐标系的选取无关，因而是 M 上的整体微分形式.

Hint: 取 T_p^*M 上关于基 $dx^1, \cdots, dx^n$ 的矩阵为 $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$ 的内积，$e_1, \cdots, e_n$ 是正的标准正交基，这一微分形式就是 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

（2）于是可以定义 M 上的紧支连续函数 f 的积分为

$$\int_M f \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

试说明存在 M 上的测度 v_g 使得

$$\int_M f dv_g = \int_M f \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

对于紧支外微分形式，一则非常重要的定理是如下的 Stokes 定理.

定理 3.3.1 (Stokes)**.** 设 M 是 m 维有向带边光滑流形，那么对于微分形式 $\omega \in A_0^{m-1}(M)$，有

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

证明. 取与 M 定向相符的坐标卡 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$，其中 I 是指标集，且 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的局部有限覆盖. 令 $\{h_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解，那么微分形式 ω 有分解

$$\omega = \Big(\sum_{\alpha\in I} h_\alpha\Big)\omega = \sum_{\alpha\in I}(h_\alpha\omega).$$

由于 ω 是紧支的，故 $\operatorname{supp}\omega$ 只与有限个 U_α 有交，故上式右端为有限和. 那么由线性有

$$\int_M d\omega = \sum_{\alpha\in I}\int_M d(h_\alpha\omega)$$

及

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \sum_{\alpha}\int_{\partial M} i^*(h_\alpha w).$$

我们只需证明

$$\int_M d(h_\alpha\omega) = \int_{\partial M} i^*(h_\alpha\omega).$$

对任意 $\alpha\in I$ 成立即可. 注意到 $h_\alpha\omega$ 仍是紧支的，因为其支集在 $\operatorname{supp}\omega\cap\operatorname{supp}h_\alpha$ 中. 且由该式还知 $h_\alpha\omega$ 的支集还在 U_α 中. 至此，我们只需证明 $\operatorname{supp}\omega$ 被包含在某坐标卡 (U,φ) 内的情形即可. 记该坐标卡为 U，且对 $p\in U$，令 $x^i(p) = (\varphi(p))^i$. 令 ω 在 U 上的局部坐标下表示为

$$\omega\mid_U = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} a_j\, dx^1\wedge\cdots\wedge\cdots\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中 $a_j\in C^\infty(U)$，且 $\operatorname{supp}a_j\subset U$，那么

$$d\omega\mid_U = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.$$

我们分两种情况讨论.

(1) $U\cap\partial M = \varnothing$.

此时 $U\subset \mathring{M}$，且 $i^*\omega = 0$. 故 $\int_M i^*\omega = 0$. 我们试图证明 $\int_M d\omega = 0$. 由于 ω 紧支，故不妨设 $\varphi(U)$ 是上半空间 $\mathbb{H}^m$ 中的有界开区域. 记闭方体 $Q_k = [-k,k]^m$，存在充分大的 $k\in\mathbb{R}$，使得 $\varphi(U)\subset\mathbb{H}^m\cap Q_k$. 那么 $\operatorname{supp}(a_j\circ\varphi^{-1})\subset\varphi(U)$. 由于 $\varphi(U)\backslash\operatorname{supp}(a_j\circ\varphi^{-1})$ 开，故 $a_j\circ\varphi^{-1}$ 可光滑延拓至 $\mathbb{H}^m\cap Q_k$ 上，且在 $\varphi(U)$ 上取值为 0. 由于 $U\subset\mathring{M}$，故 $\operatorname{supp}(a_j\circ\varphi^{-1})\subset\varphi(U)\subset\mathbb{H}^m$，从而延拓后的 $a_j\circ\varphi^{-1}$ 在 $\mathbb{H}^m\cap Q_k$ 的边界上取值为 0. 那么对于 $1\le j\le m-1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-k}^{k}\frac{\partial(a_j\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}dx^j &= (a_j\circ\varphi^{-1})(x^1,\cdots,x^{j-1},k,x^{j+1},\cdots,x^m) - (a_j\circ\varphi^{-1})(x^1,\cdots,x^{j-1},-k,x^{j+1},\cdots,x^m)\\ &= 0-0 = 0,\end{aligned}$$

而

$$\int_0^k \frac{\partial(a_m\circ\varphi^{-1})}{\partial x^m}dx^m = (a_m\circ\varphi^{-1})(x^1,\cdots,x^{m-1},k) - (a_m\circ\varphi^{-1})(x^1,\cdots,x^{m-1},0) = 0-0 = 0.$$

合并即得

$$
\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{H}^m \cap Q_k} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \int_{|x^i| \le k,\, i \ne j, m,\, x^m \ge 0} \left(\int_{-k}^{k} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^m \\
&\quad + (-1)^{m+1} \int_{|x^i| \le k,\, i \ne m} \left(\int_0^k \frac{\partial(a_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} = 0.
\end{aligned}
$$

(2) $U \cap \partial M \neq \varnothing$.

同 (1)，可取充分大的 $k \in \mathbb{R}$，使得 $\varphi(U) \subset \mathbb{H}^m \cap Q_k$. 且诸 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 有同 (1) 的在 $\mathbb{H}^m \cap Q_k$ 上的光滑延拓，且在 $\varphi(U)$ 外取值为 0.

与 (1) 不同的是，$a_j \circ \varphi^{-1}$ 在 $\mathbb{H}^m \cap Q_k$ 的边界上除了 $\partial\mathbb{H}^m \cap Q_k$ 上以外的点上取值均为 0. 那么，

$$
\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{H}^m \cap Q_k} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \int_{|x^i| \le k, i \ne j, m, x^m \ge 0} \left(\int_{-k}^{k} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^m \\
&\quad + (-1)^{m+1} \int_{|x^i| \le k, i \ne m} \left(\int_0^k \frac{\partial(a_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} = 0. \\
&= -\int_{|x^i| \le k, 1 \le i \le m-1} a_m \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{m-1}.
\end{aligned}
$$

而 $U \cap \partial M = \{p \in U \mid (\varphi(p))^m = 0\}$. 故对于边界流形 ∂M，$U \cap \partial M$ 具有诱导定向的局部坐标系，且由 $(-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}$ 给出，且 $x^m = 0$. 由于 $\operatorname{supp}(i^*\omega\,|_{\partial M}) \subset U \cap \partial M$，故

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial M} i^*\omega &= \int_{U \cap \partial M} i^*\omega = \int_{U \cap \partial M} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} a_j\, dx^1 \wedge \widehat{dx^j} \wedge dx^m \\
&= \int_{U \cap \partial M} (-1)^{m+1} a_m\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} = -\int_{\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^m} (a_m \circ \varphi^{-1})\, dx^1 \cdots dx^{m-1} \\
&= -\int_{\varphi(U) \cap Q_k} (a_m \circ \varphi^{-1})\, dx^1 \cdots dx^{m-1} \\
&= -\int_{|x^i| \le k,\, 1 \le i \le m-1} (a_m \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{m-1}.
\end{aligned}
$$

这即是说 $\displaystyle\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$.

我们可以定义带边区域的概念.

Definition 带边区域

对于 m 维光滑流形 M，D 是 M 的闭子集且内部非空，则对于任一点 $p \in D \backslash \mathring{D}$，若存在包含点 p 的坐标卡 (U, φ) 使 $U \cap D = \{p \in U \mid (\varphi(p))^m \ge 0\}$，则称 D 为 M 中的带边区域.

我们记 $\partial D = D\backslash\mathring{D}$ 为 D 的边界. 边界 ∂D 上自一个由 D 诱导的定向，而 D 上的定向由 M 诱导. 那么 Stokes 公式立刻有以下推论：

推论 3.3.1. 若 D 是 m 维有向光滑流形 M 中的带边区域, 则对于任意 $\omega \in A_0^{m-1}(M)$, 我们有 $\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega$.

微积分中的若干个公式都是 Stokes 公式的特殊情形：

例 3.3.1 (Green 公式)**.** 若 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是紧区域，定向与 $\mathbb{R}^2$ 一致. 设 P, Q 为 D 上的光滑函数，且可延拓为包含 D 的某开区域内的光滑函数. 令 $\omega = Pdx + Qdy$，则 $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$. 那么由 Stokes 公式，我们得到

$$\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

例 3.3.2 (Gauss 公式)**.** 若 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是紧区域，定向与 $\mathbb{R}^3$ 一致. 设 P, Q, R 为 D 上的光滑函数，且可延拓为包含 D 的某开区域内的光滑函数. 令 $\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$，则

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$$

由 Stokes 公式，我们得到

$$\int_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int_{\partial D}\omega = \int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

例 3.3.3 ($\mathbb{R}^3$ 上的 Stokes 公式)**.** 若 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是一块有向曲面，且边界 ∂S 是光滑简单闭曲线，定向由 S 诱导. 设 P, Q, R 为 D 上的光滑函数，且可延拓为包含 S 的某开区域内的光滑函数. 令 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$，则

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

那么由 Stokes 公式，我们得到

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + dz = \int_S\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

Stokes 定理有如下的重要推论，证明见陈维桓《微分流形初步》，第 253 页.

定理 3.3.2. (散度定理) 设 M 是有向带边紧黎曼流形，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 上的向外的单位法向量场. 对于 M 上的光滑切向量场 X,

$$\int_M \operatorname{div} X dv_g = \int_{\partial M}\langle X, \boldsymbol{n}\rangle dv_{\tilde{g}}.$$

其中 ∂M 有从 M 诱导的定向以及标准测度 $v_{\tilde{g}}$，$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的散度 $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}X^i)$，$\langle\ ,\ \rangle$ 是黎曼度量所指定的内积（下同）.

这一定理相当于 Newton-Leibniz 公式，起到了分部积分的作用. 为了让 $\langle\nabla f, X\rangle = X(f)$，$f \in C^\infty(M)$ 的梯度需定义为

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

下面的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 在几何分析中极其重要：

$$\Delta f = -\operatorname{div}\nabla f = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}).$$

在散度定理中取 $X = u\nabla v$ 以及 $u\nabla v - v\nabla u$，就得到了两个 Green 公式：

$$\int_M u\Delta v dv_g = \int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle dv_g - \int_{\partial M} u\langle \nabla v, \boldsymbol{n}\rangle dv_{\tilde{g}},$$
$$\int_M u\Delta v - v\Delta u dv_g = \int_{\partial M} -u\langle \nabla v, \boldsymbol{n}\rangle + v\langle \nabla u, \boldsymbol{n}\rangle dv_{\tilde{g}}.$$

练习 3.3.2. 称 $\Delta u = 0$ 的 $u \in C^\infty(M)$ 为调和函数. 证明无边紧黎曼流形 M 上的调和函数只有常数.

第四章　De Rham 上同调

4.1　代数铺垫

这一节我们介绍一些代数概念，为本章提供了抽象而统一的框架，尽管不是上课内容.

Definition　　范畴

一个范畴 C 由这些东西构成：

- 一族对象 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$；
- 任何两个对象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 之间的一族态射 $\mathrm{Mor}(X, Y)$，且对每个对象 X，存在一个恒等态射 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X, X)$；
- 复合运算 $\circ$：对任何三个对象 X, Y, Z，有

$$\circ\colon\ \mathrm{Mor}(X, Y) \times \mathrm{Mor}(Y, Z) \to \mathrm{Mor}(X, Z),$$

使

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),\ \ f \circ \mathrm{id} = f,\ \ \mathrm{id} \circ f = \mathrm{id}\,.$$

范畴之间的映射是函子.

Definition　　函子

范畴 C 到 D 的函子 F 既给每个对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 指定了一个 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$，又给每个 C 的态射 $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ 指定了一个 $F(f) \in \mathrm{Mor}(F(X), F(Y))$，使

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),\ F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}\,.$$

严格来说，上述的函子称为**协变函子**，而当 F 把箭头的方向反过来，就得到了如下一类函子.

Definition　　反变函子

范畴 C 到 D 之间的反变函子 F 既给每个对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 指定了一个 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$，又给每个态射 $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ 指定了一个 $F(f) \in \mathrm{Mor}(F(Y), F(X))$，使

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f),\ F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}\,.$$

Definition 链复形

一个环 R 上的链复形 C 是一列 R 模 C_k 以及一列 R-模同态 $\partial_k\colon C_k \to C_{k-1}$（称为 k 维边缘算子）排成一列

$$\cdots \to C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

满足 $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ 对每个 k 成立.

注意到对于链复形 C，$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ 就是说 $\mathrm{im}(\partial_{k+1}\colon C_{k+1} \to C_k) \subset \ker(\partial_k\colon C_k \to C_{k-1})$（也写作 $B_k(C) \subset Z_k(C)$）. 由此，我们有同调群的概念.

Definition 同调群

链复形 C 的 k 维同调群是商模

$$H_k(C) = \frac{\ker(\partial_k\colon C_k \to C_{k-1})}{\mathrm{im}(\partial_{k+1}\colon C_{k+1} \to C_k)},$$

其元素称为 k 维同调类；C_k 的子模 $\ker(\partial_k\colon C_k \to C_{k-1})$ 以及 $\mathrm{im}(\partial_{k+1}\colon C_{k+1} \to C_k)$ 的元素分别称为 k 维闭链以及 k 维边缘链.

Definition 链映射

链复形 C 到 D 的链映射 f 是一列同态 $f_k\colon C_k \to D_k$ 满足 $\partial_k \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k$，即下图交换.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] \arrow[d, "f_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "f_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] & D_k \arrow[r, "\partial_k"] & D_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由于 $\partial_k(f_k(c_k)) = f_{k-1}(\partial_k c_k)$，链映射 $f\colon C \to D$ 把闭链 c_k 映成了闭链 $f_k(c_k)$，边缘链 $\partial_k c_k$ 映成了边缘链 $\partial_k(f_k(c_k))$，于是诱导了同调群之间的同态 $f_{k*}\colon H_k(C) \to H_k(D), [c_k] \mapsto [f_k(c_k)]$.

练习 4.1.1. H_k 是什么范畴之间的函子？

Definition 链同伦

链映射 $f, g\colon C \to D$ 是链同伦的，记作 $f \simeq g$，是指存在一列同态 $P_k\colon C_k \to D_{k+1}$ 满足 $\partial_{k+1} \circ P_k + P_{k-1} \circ \partial_k = g_k - f_k$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] \arrow[d, shift right, "g_{k+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[dl, "P_k"'] \arrow[d, shift right, "g_k"'] \arrow[d, shift left, "f_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "P_{k-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{k-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] & D_k \arrow[r, "\partial_k"] & D_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

链同伦的链映射 f,g 诱导出的同调群之间的同态是相同的，这是因为对 $z_k \in Z_k(C)$，

$$g_{k*}([z_k]) - f_{k*}([z_k]) = [g_k(z_k) - f_k(z_k)] = [\partial_{k+1} \circ P_k(z_k) + P_{k-1} \circ \partial_k(z_k)] = [\partial_{k+1} \circ P_k(z_k)] = 0.$$

把链复形方向反过来，有上链复形的概念.

Definition 上链复形

一个环 R 上的上链复形 C 是一列 R 模 C^k 以及一列 R-模同态 $\partial^k : C^k \to C^{k+1}$（称为 k 维上边缘算子）排成一列

$$0 \xrightarrow{\partial^0} C^0 \xrightarrow{\partial^1} C^1 \cdots \to C^{k-1} \xrightarrow{\partial^{k-1}} C^k \xrightarrow{\partial^k} C^{k+1} \to \cdots,$$

满足 $\partial^{k-1} \circ \partial^k = 0$ 对每个 k 成立.

以同样的方式，不难自行给出上闭链、上边缘链、上同调群、上同调类、上链映射、上链同伦的定义.

4.2 单纯同调

Definition 单形

k-维单形 σ 是集合 $\sigma = \langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle = \{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,\ 0 \le \lambda_i \le 1\}$.

这里要求 $(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 仿射无关，即 $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \cdots, x_k - x_0$ 线性无关.

单形 $\langle x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\rangle$ 称为 σ 的面，$0 \le i_1 < \cdots < i_r \le k$.

进一步规定单形的方向：对于 k-单形 $\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$ 和 k 阶置换 τ，约定

$$\langle x_{\tau(0)}, x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(k)}\rangle = (-1)^{\tau}\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle.$$

那么 0 维单形就是点，1 维单形是向量，2 维单形是顺/逆时针的实心三角形，3 维单形是左/右手系的实心四面体.

Definition 链

设 S 是单形的集合，R 是含幺环. $F(S)$ 是 S 在 R 上的自由生成模

$$F(S) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_i \mid a_i \in R,\ \sigma_i \in S\}.$$

称 $F(S)$ 中的元素为链.

Definition 边缘算子

S_k 和 S_{k-1} 是 k-单形和 $(k-1)$-单形的集合. 定义边缘算子 ∂ 为

$$\begin{aligned}\partial\colon F(S_k) &\to F(S_{k-1})\\ \sigma &\mapsto \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\sigma_i\end{aligned}$$

关于 R 的线性扩张, 其中 $\sigma = \langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$ 是 k-单形, $\sigma_i := \langle x_0, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_k\rangle$, $\partial\sigma$ 称为 σ 的边缘.

命题 4.2.1.

$$\cdots \xrightarrow{\partial} F(S_k) \xrightarrow{\partial} F(S_{k-1}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} F(S_0) \xrightarrow{\partial} 0$$

是链复形, 即 $\partial^2 = 0$.(证明略)

Definition 单纯复形

向量空间 V 中的单纯复形 K 是一簇单形的集合 (这簇单形放在 V 中), 满足:

(1) 若 $\sigma \in K$, 则 σ 的面也属于 K.

(2) 若 $\sigma, \tau \in K$, 则 $\sigma \cap \tau$ 是 σ 和 τ 的公共面.

$|K|$ 是 K 对应的拓扑空间.

第二条的意思就是, 各个单形以仅在公共面相交的方式规则地排列在一起.

Definition 定向链模

在 $F(K)$ 中, 定义 I 是由

$$\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle - \operatorname{sgn}(\tau)\langle x_{\tau(0)}, x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(k)}\rangle$$

生成的子模, τ 是 k 阶置换, $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^\tau$ 由 τ 的奇偶性决定.

定义定向链模:

$$C(K) = F(K)/I.$$

用 $[\sigma] = [x_0, \cdots, x_k]$ 来表示 $C(K)$ 中的元素, 则有

$$[x_0, \cdots, x_k] = \operatorname{sgn}(\tau)[x_{\tau(0)}, x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(k)}],$$

这是我们想要的方向约定.

同样地定义边缘算子 ∂:

$$\begin{aligned}\partial\colon C_k(K) &\to C_{k-1}(K);\\ [x_0,\cdots,x_k] &\mapsto \sum_{i=1}^{k}(-1)^i[x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_k],\end{aligned}$$

且 $\partial^2=0$. 由此定义链复形:

$$\cdots\xrightarrow{\partial} C_k(K)\xrightarrow{\partial} C_{k-1}(K)\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial} C_0(K)\xrightarrow{\partial} 0.$$

$\partial^2=0$ 即 $\mathrm{im}\partial\subset\ker\partial$，换言之单纯复形的边缘一定是闭链. 对它们作商模，得到了单纯同调模，刻画的是 K 的闭链在多大程度上不是边缘链，也就是没有围出一个区域，比如说里面可能有个洞.

Definition R 上的拓扑空间 $|K|$ 上的**单纯同调模**是

$$H_k(K,R)=\frac{\ker(\partial\colon C_k\to C_{k-1})}{\mathrm{im}\,(\partial\colon C_{k+1}\to C_k)}.$$

令 $C^k(K)=\mathrm{Hom}(C_k(K),R)=(C_k(K))^*$，则 ∂ 诱导了

$$\begin{aligned}\partial^*\colon C^{k-1}&\to C^k;\\ f&\mapsto \partial^*f\colon \partial^*f([\sigma]):=f(\partial[\sigma]),\end{aligned}$$

则有 $(\partial^*)^2f[\sigma]=f(\partial^2[\sigma])=0$，因此有链复形:

$$0\to C^0(K)\xrightarrow{\partial^*}C^1(K)\xrightarrow{\partial^*}C^2(K)\xrightarrow{\partial^*}\cdots\xrightarrow{\partial^*}C^k(K)\xrightarrow{\partial^*}\cdots.$$

Definition R 上的拓扑空间 $|K|$ 上的**单纯上同调模**是

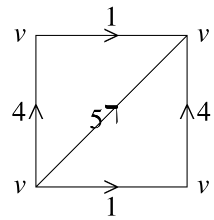
$$H^k(K,R)=\frac{\ker(\partial^*\colon C^k\to C^{k+1})}{\mathrm{im}\,(\partial^*\colon C^{k-1}\to C^k)}.$$

举例来说，考虑对于 2 维单纯复形 K，$H^1(K,R)$ 具体是什么.

所谓 $\sigma\in C^1(K)$，就是在 K 的每条边上写一个数（R 的元素），$\partial^*\sigma\in C^2(K)$ 的表达式为

$$\partial^*\sigma(\langle v_0,v_1,v_2\rangle)=\sigma(\langle v_0,v_1\rangle)+\sigma(\langle v_1,v_2\rangle)-\sigma(\langle v_0,v_2\rangle).$$

因此 $\partial^*\sigma=0$ 说的就是每个三角形两条边上的数加起来等于第三条边上的数，而存在 $\tau\in C^0(K)$ 使得 $\sigma=\partial^*\tau$ 意思是可以在 K 的每个顶点上标一个数，使得各线段的两个顶点上的数相减等于 σ 在线段上标的数. 因此 $H^1(K,R)$ 的含义就是定义在一个图的边上的函数如果绕一圈求和为 0，可以在多大程度上不能看作任何一张地图的这条边两端的高度之差，这相当于绕闭路径积分为 0 的函数在多大程度上可以不存在原函数这一问题的离散情况.



环面 $\mathbb{T}^2$ 的三角剖分的一个 1 维上闭链

自然地，可定义对偶：

$$
\begin{aligned}
C^k(K) \times C_k(K) &\to R; \\
(f, [\sigma]) &\mapsto f([\sigma]).
\end{aligned}
$$

这诱导出了

$$
\begin{aligned}
H^k(K,R) \times H_k(K,R) &\to R; \\
(\{f\}, \{[\sigma]\}) &\mapsto f([\sigma]).
\end{aligned}
$$

我们验证这一运算是良定的，即：(闭 + 恰当) (闭 + 恰当) = 闭 (闭).

对于 $f \in C^k(K)$ 满足 $\partial^* f = 0$, $g \in C^{k-1}(K)$, $[\sigma] \in C_k(K)$ 满足 $\partial[\sigma] = 0$, $[\tau] \in C_{k+1}(K)$,

$$
\begin{aligned}
(f + \partial^* g)([\sigma] + \partial[\tau]) &= f([\sigma]) + f(\partial[\tau]) + \partial^* g([\sigma]) + \partial^* g(\partial[\tau]) \\
&= f([\sigma]) + \partial^* f([\tau]) + g(\partial[\sigma]) + g(\partial^2[\tau]) \\
&= f([\sigma]).
\end{aligned}
$$

注 4.2.1. 当 $R = \mathbb{R}$ 时，若 $\dim H_k(K,\mathbb{R}) < +\infty$，$H^k(K,\mathbb{R}) = (H_k(K,\mathbb{R}))^*$ 与 $H_k(K,\mathbb{R})$ 同构. 其中 $H^k(K,\mathbb{R}) = (H_k(K,\mathbb{R}))^*$ 是因为：

- 上面指出了通过 $\{f\} \mapsto (\{f\}, \cdot)$（记为 h）可以把 $H^k(K,R)$ 的元素看作 $(H_k(K,R))^*$ 中的元素；
- 存在同态 $\tilde{h}\colon (H_k(K,R))^* \to H^k(K,R)$ 使 $h \circ \tilde{h} = \mathrm{id}$;
- 前两条说明 h 是满同态；而对 $R = \mathbb{R}$（或任何域），$H^k(K,\mathbb{R})$ 和 $(H_k(K,\mathbb{R}))^*$ 是相同维数的线性空间.

练习 4.2.1. 解释第二条理由.（*Hint:* 说明一个同态 $H_k(K,R) \to R$ 怎么延拓为同态 $C_k(K) \to R$）

4.3 奇异同调

Definition 标准单形

$\mathbb{R}^n$ 中的标准 k-单形，就是由 $(0, e_1, \cdots, e_k)$ 生成的单形，其中 e_1, $e_2, \cdots$, e_k 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底，记为 $\Delta_k = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \leq 1\}$.

记 $\Delta_k^i = \langle 0, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_k \rangle$.

Definition 奇异单形

设 X 是一个拓扑空间，奇异 k-单形是一个连续映射：

$$\sigma\colon \Delta_k \to X.$$

记 $\sigma^i = \sigma|_{\Delta_k^i}$.

Definition 定义 $S_k(X)$ 是 X 中奇异 k-单形全体在含幺环 R 上的有限自由生成模，即

$$S_k(X) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i\sigma_i \mid \sigma_i\text{是奇异单形，}a_i \in R\}.$$

Definition 边缘算子是

$$\partial\colon S_k(X) \to S_{k-1}(X)$$
$$\sigma \mapsto \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\sigma_i$$

关于 R 的线性扩张，$\partial\sigma$ 称为 σ 的边缘.

命题 4.3.1. $\partial^2 = 0$.

证明. 我们有 $\sigma_{ij} = \sigma_i|_{\Delta_k^j} = \sigma|_{\Delta_k^{ij}} = \sigma|_{\Delta_k^{ji}} = \sigma_{ji}$. 那么，

$$\begin{aligned}
\partial^2\sigma &= \partial\Big(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\sigma_i\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\partial\sigma_i\\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\Big(\sum_{j<i}(-1)^j\sigma_{ij} + \sum_{j>i}(-1)^{j-1}\sigma_{ij}\Big)\\
&= \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\sigma_{ij} + \sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}\sigma_{ij}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此有奇异链复形：

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_k(X) \xrightarrow{\partial} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \to 0.$$

Definition 奇异同调模

$$H_k(X,R) = \frac{\ker(\partial\colon S_k(X) \to S_{k-1}(X))}{\operatorname{im}(\partial\colon S_{k+1}(X) \to S_k(X))}.$$

类似之前操作，可定义奇异上同调.

令 $S^k(X,R)=\mathrm{Hom}(S_k(X,R),R)$，并定义上边缘算子 δ 为

$$\begin{aligned}\delta\colon S^k(X)&\to S^{k+1}(X);\\ \phi&\mapsto\delta\phi:\ \ \delta\phi(\sigma)=\phi(\partial\sigma),\end{aligned}$$

容易验证 $\delta^2=0$. 因此有奇异链复形:

$$0\to S^0(X,R)\xrightarrow{\delta}S^1(X,R)\xrightarrow{\delta}S^2(X,R)\xrightarrow{\delta}\cdots\xrightarrow{\delta}S^k(X,R)\xrightarrow{\delta}\cdots.$$

Definition **奇异上同调模**

$$H^k(X,R)=\frac{\ker(\delta\colon S^k\to S^{k+1})}{\mathrm{im}\,(\delta\colon S^{k-1}\to S^k)}.$$

有对偶:

$$\begin{aligned}H_k(X,R)\times H^k(X,R)&\to R;\\ (\sigma,\tau^*)&\mapsto\tau^*(\sigma).\end{aligned}$$

函子性:

若 $f\colon X\to Y$ 是连续映射，可诱导出 R-模同态:

$$\begin{aligned}f_\#\colon S_k(X)&\to S_k(Y);\\ \sigma&\mapsto f\sigma.\end{aligned}$$

由此可定义:

$$\begin{aligned}f_*\colon H_k(X,R)&\to H_k(Y,R);\\ [\sigma]&\mapsto[f_\#\sigma]=[f\sigma],\end{aligned}$$

满足:

(1) $f=\mathrm{id}\Rightarrow f_*=\mathrm{id}$.

(2) $Z\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}X\Rightarrow(gf)_*=g_*f_*$.

命题 4.3.2. $H_k(X,R)$ 是拓扑不变量.

证明. 设拓扑空间 X,Y 同胚，即有连续映射 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to X$ 满足 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$, $g\circ f=\mathrm{id}_X$,

则 $(f\circ g)_*=f_*g_*=\mathrm{id}$，$(g\circ f)_*=g_*f_*=\mathrm{id}$，故 $H_k(X,R)$ 与 $H_k(Y,R)$ 同构.

4.4 De Rham 上同调的定义

Definition **复形**

称一个二元对 (C,d) 为复形，如果

$$0\to C_0\xrightarrow{d}C_1\xrightarrow{d}C_2\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}C_k\xrightarrow{d}\cdots,$$

其中 $d\colon C_i\to C_{i+1}$ 是线性映射，C_i 是某个代数 A/F 上的模，且 $d^2=0$.

Definition　　de Rham 复形

设 M 是 m 维可微流形，$A^i(M)$ 是其上的 i 次微分形式，d 是外微分算子：

$$0 \to A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} A^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^m(M) \to 0.$$

Definition　　闭形式群、恰当形式群

$Z^k(M) = \ker(d) \cap A^k(M) = \ker(A^k(M) \xrightarrow{d} A^{k+1}(M))$ 被称作 k 阶闭形式群，群内元素被称作 k 次闭形式.

$B^k(M) = \mathrm{im}(d) \cap A^k(M) = \mathrm{im}(A^{k-1}(M) \xrightarrow{d} A^k(M))$ 被称作 k 阶恰当形式群或 k 阶边缘形式群，群内元素被称为 k 次恰当形式或 k 次恰当形式.

注意到 $d^2 = 0$ 等价于 $\mathrm{im}(d) \subset \ker(d)$，即恰当形式都是闭形式.

由于 $B^k(M) \subset Z^k(M)$，我们可以对其作商空间.

Definition　　de Rham 上同调群

称 $H^k_{\mathbb{R}}(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$ 为 k 阶 de Rham 上同调群.

$H^k_{\mathbb{R}}(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 上的模，$C^\infty(M)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的交换代数，因此 $H^k_{\mathbb{R}}(M)$ 实际上是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称作“群”是因为一般的上同调群是群（当然线性空间是加法群）. 约定 $A^{-1}(M) = 0$，即 $H^0_{\mathbb{R}}(M) = Z^0(M)$.

练习 4.4.1. 设 $M = (0, 1)$ 是 $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ 的子流形，求 $H^k_{\mathbb{R}}(M)$.

函子性：$M \to H^k_{\mathbb{R}}(M)$（反变函子）

光滑映射 $f : M \to N$ 诱导**拉回**映射 $f^* : A^*(N) \to A^*(M)$，进而诱导出 de Rham 上同调群的映射

$$\begin{aligned} H^k_{\mathbb{R}}(N) &\to H^k_{\mathbb{R}}(M); \\ [\omega] &\mapsto [f^*\omega], \end{aligned}$$

其中 $\omega \in A^k(N)$，$f^*\omega \in A^k(M)$ 的定义如下：

设向量场 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in TM(M)$，则 $\langle f^*\omega, X_1, \cdots, X_k\rangle = \langle \omega, f_*X_1, \cdots, f_*X_k\rangle$，其中 $f_*(v) = (df)(v)$，df 是 f 的 Jacobi 矩阵.

命题 4.4.1. d 和 f^* 可交换，即 $df^*\omega = f^*(d\omega)$.

证明. 取 M 的局部坐标系 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，则 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ 是 TM 的自然基底.

任意取出 $k+1$ 个自然基底，记作 $X_0,\cdots,X_k$. 我们有

$$\begin{aligned}
\langle df^*\omega, X_0, X_1, \cdots, X_k\rangle &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i\langle f^*\omega, X_0,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_k\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i\langle \omega, f_*X_0,\cdots,\widehat{f_*X_i},\cdots,f_*X_k\rangle(f(\cdot)) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i (f_*X_i)\langle \omega, f_*X_0,\cdots,\widehat{f_*X_i},\cdots,f_*X_k\rangle \\
&= \langle d\omega, f_*X_0,\cdots,f_*X_k\rangle \\
&= \langle f^*d\omega, X_0,\cdots,X_k\rangle,
\end{aligned}$$

因此 $df^* = f^*d$.

推论 4.4.1. 这也就是说 f^* 是 $A^*(N)\to A^*(M)$（作为上链复形）的上链映射，因此诱导出 $H^k_{\mathbb{R}}(N)\to H^k_{\mathbb{R}}(M)$ 的线性映射. 把推导过程具体写出来，就是对于 N 上的闭形式 ω，即 $d\omega=0$，有 $df^*\omega = f^*(d\omega)=0$，因此 $f^*\omega$ 是 M 上的闭形式；对于 N 上的恰当形式 $d\omega$，$f^*(d\omega) = df^*\omega$ 是 M 上的恰当形式.

这里补充 f^* 在局部坐标系下的表示式.

设 $x_1,\cdots,x_m$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 分别是 M 和 N 的局部坐标系. 定义 f^* 如下：

$$f^*(g) = g\circ f,$$
$$f^*\Big(\sum g^I dy_{i_1}dy_{i_2}\cdots dy_{i_k}\Big) = \sum (g^I\circ f)df_{i_1}df_{i_2}\cdots df_{i_k},$$

其中 $f_i = y_i\circ f$.

我们给出命题的局部坐标证明：

证明.

$$\begin{aligned}
df^*(g^I dy_{i_1}dy_{i_2}\cdots dy_{i_k}) &= d((g^I\circ f)df_{i_1}df_{i_2}\cdots df_{i_k}) \\
&= d(g^I\circ f)df_{i_1}df_{i_2}\cdots df_{i_k}, \\
f^*d(g^I dy_{i_1}dy_{i_2}\cdots dy_{i_k}) &= f^*\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^I}{\partial y_i}dy_i dy_{i_1}\cdots dy_{i_k}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\Big(\frac{\partial g^I}{\partial y_i}\circ f\Big)df_i\Big)df_{i_1}df_{i_2}\cdots df_{i_k} \\
&= d(g^I\circ f)df_{i_1}df_{i_2}\cdots df_{i_k}.
\end{aligned}$$

定理 4.4.1. de Rham 定理 $H^*_{\mathbb{R}}(M)$ 是拓扑不变量（同胚意义下不变），且 $H^*_{\mathbb{R}}(M)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间.

证明略，感兴趣的读者可以阅读 Bott Raoul, Loring Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. GTM 82.

4.5 De Rham 上同调的计算

（1） 星形邻域上的 de Rham 上同调.

Definition 星形区域

Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点的开区域，若 $\forall x \in \Omega$, 有 $tx \in \Omega, \forall t \in [0,1]$，则称 Ω 为星形区域.

引理 4.5.1. Poincáre 引理

若 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的星形区域，则 $H^k_{\mathbb{R}}(U) = 0$，$\forall k \geq 1$.

证明. 设 ω 是任意闭的 k-形式 ($k \geq 1$)，我们证明 ω 是恰当的.

令 $I = [0,1]$, 定义两个包含映射: $U \to I \times U$, $i_0 \colon x \mapsto (0,x)$ 和 $i_1 \colon x \mapsto (1,x)$.

定义同伦映射 $H \colon I \times U \to U, (t,x) \mapsto tx$. 显然，$H_1(x) = H(1,x) = x$，$H_0(x) = H(0,x) = O$. 因此 $H_1 = \mathrm{id}, H_0 = 0$（常值映射）. $H^* \colon A^k(U) \to A^k(I \times U), \omega \mapsto H^*\omega$.

我们在 U 上定义 $(k-1)$-形式 $I\omega$ 如下：

$$\langle I\omega, v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle(x) = \int_0^1 \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle(t,x)dt,$$

其中 $v_1, \cdots, v_{k-1}$ 是 U 上的切向量场，且都在 $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ 中选取，则有 $\langle v_i, v_j\rangle = 0$，$i \neq j$.

下证：$\omega = dI\omega + Id\omega$.

$$\begin{aligned}
\langle dI\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} v_i \langle I\omega, v_1, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rangle \\
&= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} v_i \int_0^1 \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rangle(t,x)dt, \\
\langle Id\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle &= \int_0^1 \langle H^* d\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_k\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle dH^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_k\rangle dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle dt + \sum_{i=1}^k (-1)^i v_i \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rangle dt, \\
\text{故}\langle dI\omega + Id\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(t,x)dt \\
&= \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(1,x) - \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(0,x) \\
&= \langle \omega, v_1, \cdots, v_k\rangle,
\end{aligned}$$

因此有 $dI\omega + Id\omega = \omega$. 若 ω 是闭的，即 $d\omega = 0$，则 $d(I\omega) = \omega$，即 ω 是恰当的.

注 4.5.1. 可微流形之间的光滑映射 $f, g \colon M \to N$ 称为同伦，如果有一个光滑映射

$$H \colon I \times M \to N,$$

使得 $H(0,x) = f(x)$，$H(1,x) = g(x)$. 则类似上面结论的证明，可说明对 k-形式 ω，

$$g^*\omega - f^*\omega = dI\omega + Id\omega.$$

则若 ω 闭，有 $g^*\omega$ 和 $f^*\omega$ 差一个恰当形式，即在同一个上同调类中.

证明. 设 ω 是任意闭的 k-形式 $(k \geq 1)$，我们证明 ω 是恰当的.

$H: I \times M \to M, H_1(x) = H(1, x) = g(x)$，$H_0(x) = H(0, x) = f(x)$.

$H^*: A^k(M) \to A^k(I \times M), \omega \mapsto H^*\omega$.

我们在 M 上定义 $(k-1)$-形式 $I\omega$ 如下：

$$\langle I\omega, v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle(x) = \int_0^1 \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle(t, x)dt,$$

其中 $v_1, \cdots, v_{k-1}$ 是 N 上的切向量场，

下证：$g^*\omega - f^*\omega = dI\omega + Id\omega$.

$$\begin{aligned}
\langle dI\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} v_i \langle I\omega, v_1, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rangle + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \langle I\omega, [v_i, v_j], \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, \widehat{v_j} \cdots\rangle \\
&= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} v_i \int_0^1 \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rangle(t, x)dt \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_0^1 \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, [v_i, v_j], \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, \widehat{v_j} \cdots\rangle dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Id\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle &= \int_0^1 \langle H^* d\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_k\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle dH^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_k\rangle dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle dt + \sum_{i=1}^k (-1)^i v_i \langle H^*\omega, \frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rangle dt \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_0^1 \langle H^*\omega, [v_i, v_j], \frac{\partial}{\partial t}, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, \widehat{v_j} \cdots\rangle dt \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^i \int_0^1 \langle H^*\omega, [\frac{\partial}{\partial t}, v_j], \widehat{\frac{\partial}{\partial t}}, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots\rangle dt.
\end{aligned}$$

注意到 $[\frac{\partial}{\partial t}, v_j] = 0$，于是

$$\begin{aligned}
\langle dI\omega + Id\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(t, x)dt \\
&= \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(1, x) - \langle H^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle(0, x) \\
&= \langle g^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle - \langle f^*\omega, v_1, \cdots, v_k\rangle.
\end{aligned}$$

(2) $M = \mathbb{R}^2 \backslash 0$ 或平环: $H^1_{DR}(M) \neq 0$.

证明. 取 $\omega = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy \in A^1(M)$.

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{-1}{x^2 + y^2} dy \wedge dx + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{1}{x^2 + y^2} dx \wedge dy - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} dx \wedge dy \\
&= \frac{2}{x^2 + y^2} dx \wedge dy - \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0,
\end{aligned}$$

故 $\omega \in Z^1(M)$.

若 $\omega = df$，其中 $f \in C^\infty(M)$，令 $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$，$L = \{x \geq 0, y = 0\}$，考虑 $0 < \theta < 2\pi$，即 $\mathbb{R}^2 \backslash L$.

注意到 $df = \omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = d\theta$，故有 $d(f-\theta) = 0$，进而 $f - \theta$ 是一个常数，记为 c. 故有 $f = \theta + c$，考虑两个点 P_n, Q_n，其中 P_n 从 L 上方逼近 L，Q_n 从 L 下方逼近 L，得到矛盾.

故 $[\omega] \neq 0$，进而 $H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 \backslash 0) \neq 0$.

命题 4.5.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开子集，U 有 k 个连通分支等价于 $H^0(U) = \mathbb{R}^k$.

证明.

$$
\begin{aligned}
F \colon H^0(U) &\to \mathbb{R}^k \\
f &\mapsto (f|_{U_1}, \cdots, f|_{U_k}),
\end{aligned}
$$

其中 $U_1, \cdots, U_k$ 是 U 的 k 个连通分支.

$df = 0$ 推出 $d(f|_{U_i}) = 0$, 即 $f|_{U_i} = c_i$ 是常数, 因此 F 良定. 容易验证 F 是双射, 故有 $H^0(U) = \mathbb{R}^k$ 成立. 另一方向显然.

注 4.5.2. $H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$

(3) 球面上的 de Rham 上同调：$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$

证明. 将 $\mathbb{S}^n$ 拆成两个 n 维开圆盘 D^+ 和 D^-，沿边界的管状邻域粘合成球面 $\mathbb{S}^n$. 设 $\omega \in Z^k(\mathbb{S}^n)$，则

$$\omega|_{D^+} = d\mu^+,\ \mu^+ \in A^{k-1}(D^+),$$

$$\omega|_{D^-} = d\mu^-,\ \mu^- \in A^{k-1}(D^-),$$

且因为在 $D^+ \cap D^-$ 上有 $\omega|_{D^+} = \omega_{D^-}$，故有 $d\mu^+ - d\mu^- = 0$，即 $d(\mu^+ - \mu^-) = 0$ 在“圆环” $D^+ \cap D^- = \mathbb{S}^{n-1} \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ 上.

$(\mu^+ - \mu^-)$ 在 $D^+ \cap D^-$ 上闭，故 $[\mu^+ - \mu^-] \in H^{k-1}(D^+ \cap D^-) = H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

接下来用归纳法证明命题.

若 $H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$, 则 $\mu^+ - \mu^- = d\eta, \eta \in A^{k-2}(D^+ \cap D^-)$. 将 η 延拓到 D^- 上成为 $\tilde{\eta}$, 则 $\tilde{\eta} \in A^{k-2}(D^-)$, 且 $\tilde{\eta}|_{D^+ \cap D^-} = \eta$.

令 $\mu = \begin{cases} \mu^+, & x \in D^+, \\ \mu^- + d\tilde{\eta}, & x \in D^-. \end{cases}$ 则有 $\mu \in A^{k-1}(\mathbb{S}^n)$，且仍有 $\omega = d\mu$，故有 $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$.

用完全类似的方法可以证明 $H^1(\mathbb{S}^2) = 0$，进而由归纳原理可以推出命题成立.

最后我们给出 de Rham 定理而不证明. 这一定理建立起了代数拓扑与微分几何之间的联系.

命题 4.5.2. 设 M 是光滑流形，有同构

$$H_{DR}^k(M) \simeq H^k(M;\mathbb{R}),$$

其中右边是 M 的奇异上同调. 这一同构由配对

$$\begin{aligned} H_{DR}^k(M) \times H_k(M;\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}, \\ ([\omega],[c]) &\mapsto \int_c \omega \end{aligned}$$

及同构 $H^k(M;\mathbb{R}) \simeq H_k(M;\mathbb{R})^*$ 给出.

4.6 Doubeault 上同调

在 2.5 节的最后，近复流形 (X,J) 的复化的切丛 $T_{\mathbb{C}}X$ 分解为了复向量丛的直和

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X.$$

构造复向量丛

$$\wedge^k X := \wedge^k (T_{\mathbb{C}}X)^* = \bigoplus_{p+q=k} (\wedge^p (T^{1,0}X)^* \otimes \wedge^q (T^{0,1}X)^*),$$

把各个张量丛记作

$$\wedge^{p,q}X := \wedge^p (T^{1,0}X)^* \otimes \wedge^q (T^{0,1}X)^*.$$

设 $w_1,\cdots,w_n$ 和 $\bar{w}_1,\cdots,\bar{w}_n$ 分别为 $(T^{1,0}X)^*$ 和 $(T^{0,1}X)^*$ 在 $U \subset X$ 上的标架，那么 $\wedge^{p,q}X$ 在 U 上的光滑截面 s 形如

$$s = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{IJ} w_I \wedge \bar{w}_J, \quad f_{IJ} \in C^\infty(U \to \mathbb{C}),$$

全体光滑截面 $\Gamma(\wedge^{p,q}X)$ 记作 $A^{p,q}(X)$. $d\colon A^{p,q}(X) \to A^{p+q+1}(X) := \bigoplus_{r+s=p+q+1} A^{r,s}(X)$ 作用在 s 上，得到

$$ds = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \Big(df_{IJ} \wedge w_I \wedge \bar{w}_J + f_{IJ} d(w_I \wedge \bar{w}_J) \Big).$$

对 $k = p+q$，$A^k(X) \to A^{p,q}(X)$ 的投影写为 $\pi^{p,q}$. 定义

$$\begin{aligned} \partial &= \pi^{p+1,q} \circ d\colon A^{p,q}(X) \to A^{p+1,q}(X), \\ \bar{\partial} &= \pi^{p,q+1} \circ d\colon A^{p,q}(X) \to A^{p,q+1}(X). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & & A^{p+1,q}(X) \\ A^{p,q}(X) \arrow[urr, "\partial"] \arrow[r, "d"] \arrow[drr, "\bar{\partial}"'] & A^{p+q+1}(X) \arrow[ur, "\pi_{p+1,q}"] \arrow[r] \arrow[dr, "\pi_{p,q+1}"] & \cdots \\ & & A^{p,q+1}(X) \end{tikzcd}$$

把 $\partial, \bar{\partial}$ 扩张成 $A^*(X) = \bigoplus_{p+q \le \dim X} A^{p,q}(X)$ 上的 $\mathbb{C}$-线性算子.

> **Definition 可积**
>
> 如果在 $A^*(X)$ 上 $d = \partial + \bar{\partial}$，称近复结构 J 是可积的.

练习 4.6.1. 验证这等价于在 $A^{1,0}(X)$ 上 $\pi^{0,2} \circ d = 0$.

注意到复流形 M 上自然的近复结构是可积的，这是因为对于

$$T_{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M,$$

$(T'M)^*$ 和 $(T''M)^*$ 上的局部标架分别是 $dz_1, \cdots, dz_n$ 和 $d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n$，那么对

$$s = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \in A^{p,q}(M),$$

有

$$\begin{aligned} ds &= \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} df_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ &= \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ &\in A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M). \end{aligned}$$

由此，$\partial s, \bar{\partial} s$ 的表达式为

$$\partial s = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

$$\bar{\partial} s = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

反过来, 有如下结论, 证明见 Hörmander, Lars. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. North Holland, 1990. 5.7 节.

定理 4.6.1. (Newlander-Nirenberg) 设 (X, J) 是可积的近复流形，则 X 上存在唯一的复结构 $\mathcal{O}$ 诱导出近复结构 J.

$$\begin{tikzcd}
 & & A^{p+2,q}(M) \\
 & A^{p+1,q}(M) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\bar{\partial}"'] & \\
A^{p,q}(M) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\bar{\partial}"'] & & A^{p+1,q+1}(M) \\
 & A^{p,q+1}(M) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\bar{\partial}"'] & \\
 & & A^{p,q+2}(M)
\end{tikzcd}$$

对复流形 M，由于 $0 = d^2 = (\partial + \bar\partial)^2 = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$，得到 $\partial^2 = 0,\ \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0,\ \bar\partial^2 = 0$ 在 $A^{p,q}(M)$ 上成立（见上图），因而也在整个 $A^*(M)$ 上成立．$\bar\partial^2 = 0$ 带来了 Doubeault 上同调.

Definition Doubeault 上同调群

$$0 \to A^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,n}(M) \to 0$$

是 n 维复流形 M 的 Doubeault 复形．(p,q) 阶 Doubeault 上同调群是向量空间

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = \frac{\ker\left(\bar\partial\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}(M)\right)}{\operatorname{im}\left(\bar\partial\colon A^{p,q-1}(M) \to A^{p,q}(M)\right)}.$$

Poincaré 引理是说 de Rham 上同调群局部上是 0；关于 Doubeault 上同调群也有类似的结论.

定理 4.6.2. ($\bar\partial$-Poincaré 引理)

设 Δ 是 $\mathbb{C}^n$ 的多圆盘 $\{w \in \mathbb{C}^n \mid \forall i, |w_i - z_i| < \epsilon_i\}$，其中 ϵ_i 可以是 $+\infty$．对 $q \geq 1$，$H^{p,q}_{\bar\partial}(\Delta) = 0$.

这一结论又称为 Grothendieck-Poincaré 引理，证明见 Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, P25-27.

接下来，就像在光滑流形上引入黎曼度量一样，我们在复流形上引入 Hermite 度量.

Definition Hermite 内积

设 V 是复向量空间，称 $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ 是 Hermite 内积，是指：
h 是 $\mathbb{R}$-双线性函数，对 $\lambda \in \mathbb{C}$, $h(\lambda x, y) = \lambda h(x,y)$，$h(y,x) = \overline{h(x,y)}$，对 $x \neq 0$, $h(x,x) > 0$.

Definition Hermite 流形

复流形 M 上的一个 Hermite 度量是指在每点 x 的切空间 T_xM 指定一个 Hermite 内积，该内积光滑地依赖于 x，即在局部坐标系 $(U,\varphi;z)$ 上 $h_{ij}(z) = \langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\rangle_{\varphi^{-1}(z)} \in C^\infty(M)$．有 Hermite 度量的复流形称为 Hermite 流形.

M 的 Hermite 度量在局部坐标系 $(U;z)$ 上表达为

$$ds^2 = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\bar z_j,$$

取 $(T'M)^*$ 的在 U 上的标架 $w_1, \cdots, w_n \in A^{1,0}(U)$ 使得

$$ds^2 = \sum_i w_i \otimes \bar w_j,$$

即在每点 $x \in M$，$w_1(x), \cdots, w_n(x)$ 是 $(T_xM)^*$ 关于内积 $\langle dz_i, dz_j\rangle = h^{ij}, (h^{ij})_{i,j} := (h_{ij})^{-1}_{i,j}$ 的正交基，这可以通过对 $dz_1, \cdots, dz_n \in (T_xM)^*$ 进行 Gram-Schmidt 操作得到．记

$$w_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i,$$

其中 α_i, β_i 是实的，那么

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_i (\alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i) \otimes (\alpha_i - \sqrt{-1}\beta_i) \\ &= \sum_i (\alpha_i \otimes \alpha_i + \beta_i \otimes \beta_i) + \sqrt{-1} \sum_i (-\alpha_i \otimes \beta_i + \beta_i \otimes \alpha_i). \end{aligned}$$

称它诱导的黎曼度量为

$$\operatorname{Re} ds^2 = \sum_i (\alpha_i \otimes \alpha_i + \beta_i \otimes \beta_i),$$

以及 Kähler 形式为

$$\omega = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} ds^2 = \sum_i \alpha_i \wedge \beta_i = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_i w_i \wedge \bar{w}_i = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

例 4.6.1. $\mathbb{C}^n$ 上有标准的 Hermite 度量

$$ds^2 = \sum_i dz_i \otimes d\bar{z}_i,$$

诱导了 Riemann 度量

$$\operatorname{Re} ds^2 = \sum_i (dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i),$$

其 Kähler 形式为

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

称双线性函数 $\langle\ ,\ \rangle \colon V \otimes W \to \mathbb{F}$ 是非退化的，若 $V \hookrightarrow W^*, v \mapsto \langle v,\ \rangle$ 与 $W \hookrightarrow V^*, w \mapsto \langle\ , w\rangle$ 均为单射.

引理 4.6.1. 对有限维线性空间 V, W, 双线性函数 $\langle\ ,\ \rangle \colon V \otimes W \to \mathbb{F}$ 是非退化的当且仅当 $V \hookrightarrow W^*, v \mapsto \langle v,\ \rangle$ 是同构.

证明. 当 $\langle\ ,\ \rangle$ 非退化，$\dim V \le \dim W^* = \dim W \le \dim V^* = \dim V$，因而 $\dim V = \dim W^*$，$V \overset{\simeq}{\hookrightarrow} W^*$.

当 $\langle\ ,\ \rangle$ 退化，要么 $V \hookrightarrow W^*, v \mapsto \langle v,\ \rangle$ 不是单射，要么 $W \hookrightarrow V^*, w \mapsto \langle\ , w\rangle$ 不是单射. 后者意味着存在 $w \neq 0$ 使得 $\langle\ , w\rangle \equiv 0$，那么 $v \mapsto \langle v,\ \rangle$ 无法取到对此 w 取值不等于 0 的线性映射，故不是满射.

于是可以如下给出的 Hodge-$*$ 算子:

Definition Hogde-$*$ 算子

设 V 是 n 维有向实内积空间，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的正的标准正交基. 令 $\{e_I \mid I = \{i_1 < \cdots < i_k\}\}$ 是 $\wedge^k V$ 的标准正交基，那么 $\wedge^k V$ 成为了一个内积空间. 对 $\psi \in \wedge^k V$，$*\psi \in \wedge^{n-k} V$ 是使得

$$\varphi \wedge *\psi = \langle \varphi, \psi \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

成立的 $*\psi$. $*$ 称为 Hodge-$*$ 算子.

Definition Hogde-$*$ 算子

设 V 是 n 维实内积空间，$V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 分别是 $V^{1,0}$ 和 $V^{0,1}$ 的标准正交基. 令 $\{e_I \wedge \bar{e}_J \mid I = (i_1 < \cdots < i_p), J = (j_1 < \cdots < j_q), p+q=k\}$ 是 $\wedge^k V_{\mathbb{C}}$ 的标准正交 $\mathbb{R}$-基，那么 $\wedge^k V_{\mathbb{C}}$ 成为了一个 Hermite 空间. 对 $\psi \in \wedge^k V_{\mathbb{C}}$，$*\psi \in \wedge^{2n-k} V_{\mathbb{C}}$ 是使得

$$\varphi \wedge *\bar{\psi} = \langle \varphi, \psi \rangle \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$$

成立的 $*\psi$. $*$ 称为 Hodge-$*$ 算子.

由 $\wedge^k V \times \wedge^{n-k} V \to \wedge^n V \simeq \mathbb{R}$ 是非退化的双线性函数，由引理得第一个定义中的 $*\psi$ 存在且唯一；第二个定义同理.

记 $\wedge^{p,q} V = \wedge^p V^{1,0} \otimes \wedge^q V^{0,1}$，由于对 $\varphi \in \wedge^{p,q} V, \psi \in \wedge^{n-p',n-q'} V, p+q = p'+q' = k, p \neq p'$ 有 $\varphi \wedge *\bar{\psi} = 0, \langle \varphi, \psi \rangle = 0$，可知 $*\colon \wedge^k V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \wedge^{p,q} V \to \wedge^{2n-k} V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \wedge^{n-p,n-q} V$ 实际上把每个 $\wedge^{p,q} V$ 映到了 $\wedge^{n-p,n-q} V$.

对于紧 Hermite 流形 M，先在每点 x 的 $T_x^{*p,q} M := \wedge^p (T_x' M)^* \otimes \wedge^q (T_x'' M)^*$ 上给出内积. 设 $w_1, \cdots, w_n \in A^{1,0}(U)$ 是 $(T'M)^*$ 的在 U 上的标架，使得 Hermite 度量成为

$$ds^2 = \sum_i w_i \otimes \bar{w}_i.$$

令 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \le i \le n}$ 是 $(T_x' M)^*$ 以及 $(T_x'' M)^*$ 的标准正交 $\mathbb{R}$-基，其中 $w_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i$. 规定 $\{w_I \wedge \bar{w}_J \mid I = \{i_1 < \cdots < i_p\}, J = \{j_1 < \cdots < j_q\}\}$ 是 $T_x^{*p,q} M$ 的正交基，且 $\|w_I \wedge \bar{w}_J\|^2 = 2^{p+q}$（取这个值是考虑到 $\|w_i\|^2 = \|\bar{w}_i\|^2 = \|\alpha_i\|^2 + \|\beta_i\|^2 = 2$）.

于是可以定义整个 $A^{p,q}(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^{*p,q} M$ 上的内积：对 $\varphi, \psi \in A^{p,q}(M)$，其内积为

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n = \int_M \varphi \wedge *\psi.$$

再定义 $\bar{\partial}\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}(M)$ 的伴随算子 $\bar{\partial}^*\colon A^{p,q+1}(M) \to A^{p,q}(M)$ 为

$$\bar{\partial}^* = - * \bar{\partial} * .$$

这是因为，对 $\varphi \in A^{p,q}(M), \psi \in A^{p,q+1}(M)$ 成立

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}\varphi, \psi) &= \int_M \bar{\partial}\varphi \wedge *\psi \\
&= -(-1)^{p+q} \int_M \varphi \wedge \bar{\partial} * \psi + \int_M \bar{\partial}(\varphi \wedge *\psi) \\
&= \int_M \varphi \wedge *(- * \bar{\partial} * \psi) \\
&= (\varphi, \bar{\partial}^* \psi).
\end{aligned}$$

其中由于 $\varphi \wedge *\psi \in A^{n,n-1}(M)$ 以及 ∂ 在 $A^{n,n-1}(M)$ 上为 0，由 Stokes 定理得 $\int_M \bar{\partial}(\varphi \wedge *\psi) = \int_M d(\varphi \wedge *\psi) = 0$.

注 4.6.1. 严格来说，这里的伴随算子和泛函分析中的伴随算子不同，后者要求 Hilbert 空间，即完备的内积空间（完备的定义见序言），而 $A^{p,q}(M)$ 不完备；也因此有必要给出 $\bar{\partial}^*$ 的表达式.

最后引入 $\bar{\partial}$-Laplace 算子

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q}(M),$$

并记

$$\mathscr{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^{p,q}(M) \mid \Delta_{\bar{\partial}}\varphi = 0\},$$

其元素称为 (p,q) 型 $\bar{\partial}$-调和形式. 注意到 $\Delta_{\bar{\partial}}\varphi = 0$ 当且仅当 $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}^*\varphi = 0$，这是因为

$$(\Delta_{\bar{\partial}}\varphi, \varphi) = (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\varphi, \varphi) + (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\varphi, \varphi) = (\bar{\partial}^*\varphi, \bar{\partial}^*\varphi) + (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\varphi) \geq 0.$$

现在终于可以给出 Hodge 定理了，证明见 Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, P84-100.

定理 4.6.3. 设 M 是 n 维连通紧 Hermite 流形, 则 $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ 是有限维线性空间. 记正交投影 $\mathscr{H}\colon A^{p,q}(M) \to \mathscr{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$, 存在线性算子 $G\colon A^{p,q}(M) \to A^{p,q}(M)$（称为 Green 算子）使得 $G(\mathscr{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)) = 0$, $\bar{\partial}G = G\bar{\partial}$, $\bar{\partial}^*G = G\bar{\partial}^*$，且

$$I = \mathscr{H} + \Delta_{\bar{\partial}}G.$$

Hodge 定理蕴含了 $A^{p,q}(M)$ 的正交分解

$$A^{p,q}(M) = \mathscr{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \oplus \bar{\partial}A^{p,q-1}(M) \oplus \bar{\partial}^*A^{p,q+1}(M).$$

这是因为，可以把 $\varphi \in A^{p,q}(M)$ 分解为

$$\varphi = \mathscr{H}\varphi + \bar{\partial}\bar{\partial}^*G\varphi + \bar{\partial}^*\bar{\partial}G\varphi.$$

且若 $\Delta_{\bar{\partial}}\varphi = 0$，则由 $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}^*\varphi = 0$ 得到

$$(\varphi, \bar{\partial}\psi) = (\bar{\partial}^*\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, \bar{\partial}^*\psi) = (\bar{\partial}\varphi, \psi) = 0.$$

此外，

$$(\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}^*\varphi) = (\bar{\partial}^2\varphi, \varphi) = 0.$$

对于黎曼流形同样有 Hodge 定理. 对 n 维紧黎曼流形 M，不难验证 $d\colon A^p \to A^{p+1}(M)$ 的伴随算子 $d^*\colon A^{p+1} \to A^p(M)$ 为

$$d^* = (-1)^{np+1} * d\, *,$$

使得

$$(d\varphi, \psi) = (\varphi, d^*\psi),$$

这里

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle\varphi, \psi\rangle dv_g = \int_M \varphi \wedge *\psi.$$

定义 Laplace 算子

$$\Delta = dd^* + d^*d\colon A^p(M) \to A^p(M),$$

并记

$$\mathscr{H}^p(M) = \{\varphi \in A^p(M) \mid \Delta\varphi = 0\},$$

其元素称为 p 次调和形式. 类似地有，$\Delta\varphi = 0$ 当且仅当 $d\varphi = d^*\varphi = 0$.

下面的 Hodge 定理无论是表述还是证明都与 Hermite 流形的 Hodge 定理相似，见伍鸿熙、陈维桓《黎曼几何选讲》第一章.

定理 4.6.4. 设 M 是 n 维连通可定向紧黎曼流形, 则 $\mathscr{H}^p(M)$ 是有限维线性空间. 记正交投影 $\mathscr{H}: A^p(M) \to \mathscr{H}^p(M)$, 存在线性算子 $G: A^p(M) \to A^p(M)$ (称为 Green 算子) 使得 $G(\mathscr{H}^p(M)) = 0$, $dG = Gd$, $d^*G = Gd^*$, 且

$$I = \mathscr{H} + \Delta G.$$

同样地, Hodge 定理蕴含了 $A^p(M)$ 的正交分解

$$A^p(M) = \mathscr{H}^p(M) \oplus dA^{p-1}(M) \oplus d^*A^{p+1}(M).$$

练习 4.6.2. (1) 对于紧 Hermite 流形 M, 证明 $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \cong \mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M)$. 这说明, 在每个 $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ 的上同调类中存在唯一一个 $\bar\partial$-调和形式.

(2) 给出可定向紧黎曼流形 M 上对应于 (1) 的结果.

(3) 设 M 是 n 维可定向紧黎曼流形, 证明 $H^p(M, \mathbb{R}) \cong H^{n-p}(M, \mathbb{R})$. 这是 Poincaré 对偶定理的特殊情形.

Definition　Kähler 流形

称 Hermite 流形 M 是 Kähler 流形, 若其 Hermite 度量 ds^2 的 Kähler 形式 $\omega = -\frac{1}{2}\operatorname{Im} ds^2$ 是闭的, 即 $d\omega = 0$. 此时 ds^2 称为 Kähler 度量.

例 4.6.2. $\mathbb{C}^n$ 是 Kähler 流形.

$\mathbb{CP}^n$ 是 Kähler 流形, 有 Kähler 形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial \log |w|^2 \in A^{1,1}(\mathbb{CP}^n),$$

其中在 $U_i = \{[z_1, \cdots, z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n \mid z_i \neq 0\}$, 上式的 $w = \left(\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}\right) := (w_1, \cdots, w_i, 1, w_{i+1}, \cdots, w_n)$. 由于对于全纯函数 f 有

$$\partial\bar\partial \log |f|^2 = \partial\bar\partial \log f - \bar\partial\partial \log \bar f = 0,$$

故 ω 与坐标系 U_i 的选取无关, 因而是整体的微分形式. ω 能给出 Hermite 度量 $2(\omega(\ , J\ ) - \sqrt{-1}\omega)$ (称为 Fubini-Study 度量), 是因为计算得到

$$\omega = \frac{1}{(1 + \sum |w_k|^2)^2} \sum_{i,j} \Big((1 + \sum |w_k|^2)\delta_{ij} - \bar w_i w_j\Big) dw_i \wedge d\bar w_j$$

是正定的. $d\omega = 0$ 则是因为

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\partial + \bar\partial)(\bar\partial - \partial)\log |w|^2 = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi} d(\bar\partial - \partial)\log |w|^2.$$

在 Kähler 流形 M 上, 可以得到 $\Delta_\partial = \Delta_{\bar\partial} = \frac{1}{2}\Delta$, 其中 $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$, 于是 $\bar\partial$-调和空间 $\mathscr{H}^k_{\bar\partial}(M)$ 就是复系数的 $\mathscr{H}^k(M)$. 由于 $\Delta_{\bar\partial}$ 是 $A^{p,q}(M) \to A^{p,q}(M)$ 的映射, 有

$$\mathscr{H}^k_{\bar\partial}(M) := \{\varphi \in A^k(M) \mid \Delta_{\bar\partial}\varphi = 0\} = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{H}^{p+q}_{\bar\partial}(M).$$

那么对于紧 Kähler 流形, 根据 de Rham 定理以及练习4.6.2 (1) (2), 得到

$$H^k(M, \mathbb{C}) = H^k(M, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong H^k_{DR}(M) \otimes \mathbb{C} \cong \mathscr{H}^k(M) \otimes \mathbb{C} = \mathscr{H}^k_{\bar\partial}(M) = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\bar\partial}(M).$$

这一分解实际上与特定的 Kähler 度量的选取无关. 这是因为设 $\mathscr{H}_1\varphi, \mathscr{H}_2\varphi$ 是 $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ 的同一上同调类 $[\varphi]$ 关于不同的 Kähler 度量在 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M), \mathscr{H}_2^{p,q}(M)$ 中的代表元，记 $\eta = \mathscr{H}_1\varphi - \mathscr{H}_2\varphi$，$d\eta = d\mathscr{H}_1\varphi - d\mathscr{H}_2\varphi = 0$ 表明 $\eta \perp d^* A^{k+1}(M)$，由 Hermite 流形的 Hodge 定理，$\eta \in \bar{\partial} A^{p,q-1}(M)$ 又表明 $\eta \perp \mathscr{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = \mathscr{H}^{p,q}(M) \otimes \mathbb{C}$，那么由黎曼流形的 Hodge 定理就得到 $\eta \in dA^{k-1}(M) \otimes \mathbb{C}$，即 $H^k_{DR}(M) \otimes \mathbb{C}$ 的上同调类 $[\eta] = 0$.

最后，我们已经能够叙述 Calabi-Yau 定理：

命题 4.6.1. 设 M 是 n 维紧 Kähler 流形，黎曼度量是 g_0，Kähler 形式为 ω_0. 对于 $f \in C^\infty(M)$，若

$$\int_M e^f \omega^n = \int_M \omega_0^n,$$

那么存在唯一的 Kähler 度量 g，对于其 Kähler 形式 ω 有

$$[\omega] = [\omega_0] \in H^2_{DR}(M), \quad \text{且 } \omega^n = e^f \omega_0.$$

这是方程形式的表述，以便使用偏微分方程的理论，而 Calabi 提出的猜想的表述则涉及到 Ricci 形式、第一陈类等本讲义未介绍的概念. 也就是说，尽管这份讲义到这里就结束了，现代几何学的大门实际上才刚刚开启.

练习 4.6.3. 证明 Calabi-Yau 定理.

附录

习题解答

1.1.1 （1）设 $\{B_i\}_{i\geq 1}$ 是 X 的一个可数基. 记 $\mathscr{B} = \{B_i \mid i \geq 1, \exists\, \alpha \in I \text{ s.t. } B_i \subset U_\alpha\}$，重排为 $\{B_{i_k}\}_{k\geq 1}$. 对每个 B_{i_k}，取定一个 $\alpha = \alpha_k$ 使得 $B_{i_k} \subset U_{\alpha_k}$.

$\{U_{\alpha_k}\}_{k\geq 1}$ 显然是可数的，只需要证明这是开覆盖. 对于任意 $x \in X$，存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in U_\alpha$. 由拓扑基的定义，存在 $i \geq 1$ 使得 $x \in B_i \subset U_\alpha$，进而存在 $k \geq 1$ 使得 $B_i = B_{i_k}$，则 $x \in B_{i_k} \subset U_{\alpha_k}$.

（2）显然第一个定义蕴含第二个定义.

假设 M 满足第二个定义，则 M 的每个点 p 的那个开邻域 U_p 构成了 M 的开覆盖，根据（1），存在其可数子覆盖 $\{U_{p_i}\}_{i\geq 1}$，这就是覆盖 M 的可数个坐标卡.

1.1.2　$\forall p \in M$，设 (U, φ) 是 p 所在的一个局部坐标系，那么有界开集 $W \ni \varphi(p)$ 的原像 $\varphi^{-1}(W)$ 就是 p 的一个预紧的邻域.

1.1.3 M 不一定是 Hausdorff 的. 考虑有两个原点的 $\mathbb{R}^n$，也就是 $M = \mathbb{R}^n \cup \{O'\}$，其开集为 $\mathbb{R}^n$ 本身的开集 U、以及 $\mathbb{R}^n$ 的含原点 O 的开集 V 添加 O' 或把 O 换成 O'，即 $V \cup \{O'\}$ 与 $(V\backslash\{O\}) \cup \{O'\}$. M 符合条件，但不存在分离 O, O' 的邻域.

1.1.4 假设 X 的连通分支 C 是不止一个道路连通分支的并，由 X 局部道路连通可得 C 的每个道路连通分支都是开集，与 C 连通矛盾.

1.2.1 略.

1.2.2 $\mathbb{R}^n$ 作为加法群，$\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 作为加法群，$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 作为乘法群.

1.2.3 （1）对称性以及三角不等式都是显然的，只需要说明对 $p \neq q$ 有 $d(p, q) > 0$. 设 (U, φ) 是含 p 的坐标系，取 ϵ 很小使 $q \notin \varphi^{-1}(B_\epsilon(\varphi(p)))$，由 g_{ij} 的连续性，在该区域 $\sum g_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \lambda|\zeta|^2$，因此任何连接 p, q 的分段光滑曲线 γ 的长度有一致的下界 $l(\gamma) \geq l(\gamma \cap \varphi^{-1}(B_\epsilon(\varphi(p))) \geq \lambda\epsilon$.

（2）局部上有 $\lambda|\zeta|^2 \leq \sum g_{ij}\zeta_i\zeta_j \leq \Lambda|\zeta|^2$，故一列点 p_n 依度量 d 收敛于点 p 等价于在一个坐标系上 p_n 依欧式距离收敛于 p，等价于 p_n 在 M 的拓扑下收敛于 p.

1.4.1 （1）考虑非空集合 $V = \{z \in U \mid \forall (i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \dfrac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}(f-g)}{\partial z_1^{i_1}\cdots\partial z_n^{i_n}}(z) = 0\}$，由 f 解析得 V 是开集，

而 V 也是闭集，因此 $V=U$.

（2）设 $B(w,r)\subset U$，由单复变函数的最大模原理，f 在每条过 w 的复直线上等于 $f(w)$，因此在整个 $B(w,r)$ 上为常数，再由唯一性定理得 f 是常数.

1.4.2 注意到 $f\in \mathcal{O}(M)$ 在 M 上某点取到最大模. 设 (U,φ) 是含该点的坐标系，对 $f\circ\varphi^{-1}$ 用上一题的结论.

2.4.1 是 $(TM\otimes TM)^*=T^*M\otimes T^*M$ 的截面，于是黎曼度量局部上也写成 $g_{ij}(x)dx_i\otimes dx_j$.

3.3.1 （1）设 $dx^i=\sum\limits_k a_i^k e_k$，则 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\det(a_i^k)\,e_1\wedge\cdots\wedge e_n$，且 $g^{-1}=\det(g^{ij})=\det(\langle dx^i,dx^j\rangle)=\det(\sum\limits_k a_i^k a_j^k)=\det\left((a_i^k)(a_j^k)^T\right)=\det(a_i^k)^2$.

（2）注意到 $f\mapsto\int_M f\sqrt{g}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 是 $C_c(M)$ 上的正线性泛函（即 $f\geq 0$ 则 $\int_M f\sqrt{g}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\geq 0$），应用 Riesz 表示定理.

3.3.2 $\Delta u=0$ 则 $0=\int_M u\Delta u dv_g=\int_M\langle\nabla u,\nabla u\rangle dv_g$，因此 $\nabla u=0$，那么 $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}=0$，$u$ 是常数.

4.1.1 H_k 是范畴 { 链复形, 链映射 } 到范畴 { 同调群, 同态 } 的协变函子.

4.2.1 设 p 是自由模 $C_k(R)$ 到其自由子模 $\ker(\partial_k)$ 的投影，则同态 $f\colon H_k(K,R)\to R$ 就能延拓成同态 $c_f\colon C_k(R)\xrightarrow{p}\ker(\partial_k)\xrightarrow{/\mathrm{im}(\partial_{k+1})}H_k(K,R)\xrightarrow{f}R$，且 $c_f\in\ker\partial_k^*$ 当且仅当 $(c_f,\mathrm{im}\partial_k)=0$、$c_f\in\mathrm{im}\partial_{k-1}^*$ 则 $(c_f,\ker\partial_{k-1})=0$ 确保了 $[c_f]\in H^k(K,R)$.

4.4.1 $H^0_{\mathbb{R}}(M)=Z^0(M)=\{f\in C^\infty(M)\mid df=0\}=\{(0,1)\text{上的常数函数}\}\simeq\mathbb{R}$.
对于 $fdx\in Z^1(M)=A^1(M)$，有 $F(x)=\int_{\frac12}^x f(t)dt$ 使 $dF=fdx$，于是 $H^1_{\mathbb{R}}(M)=0$.

4.6.1 由于在 $A^{1,0}(X)$ 上 $d=\partial+\bar\partial+\pi^{0,2}\circ d$，$d=\partial+\bar\partial$ 说明 $\pi^{0,2}\circ d=0$.
反过来，若 $\pi^{0,2}\circ d=0$，对于 $s=\sum fw_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_p}\wedge\bar w_{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar w_{j_q}\in A^{p,q}(X)$，由

$$df\in A^{1,0}(X)\oplus A^{0,1}(X),\ dw_{i_k}\in A^{2,0}(X)\oplus A^{1,1}(X),\ d\bar w_{j_k}=\overline{dw_{j_k}}\in\overline{A^{2,0}(X)}\oplus\overline{A^{1,1}(X)}=A^{0,2}(X)\oplus A^{1,1}(X)$$

得到

$$ds=\sum(df\wedge\cdots+\sum_k dw_{i_k}\wedge\cdots+\sum_l d\bar w_{j_k}\wedge\cdots)\in A^{p+1,q}(X)\oplus A^{p,q+1}(X).$$

4.6.2 （1）这一同构就是投影 $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)\to\mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M),\ [\varphi]\mapsto[\mathscr{H}\varphi]$.
由于对 $[\varphi]=0$，即 $\varphi=\bar\partial\psi$，有 $[\mathscr{H}\bar\partial\psi]=[\bar\partial\psi-\bar\partial\bar\partial^*G\bar\partial\psi-\bar\partial^*\bar\partial G\bar\partial\beta]=0$（因 $\bar\partial G\bar\partial=\bar\partial^2G=0$），这一映射是良定的.

单射是因为，对 $[\mathscr{H}\varphi]=0$，即 $\mathscr{H}\varphi=\bar\partial\psi$，有 $(\mathscr{H}\varphi,\mathscr{H}\varphi)=(\bar\partial^*\mathscr{H}\varphi,\psi)=0$，$\mathscr{H}\varphi=0$ 就是说 $\varphi\perp\mathscr{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M)$，而 $\bar\partial\varphi=0$ 说明 $\alpha\perp\bar\partial^*A^{p,q+1}(M)$，于是 $\varphi\in\bar\partial A^{p,q-1}(M)$，即 $[\varphi]=0$. 满射是明显的.

（2）对于可定向紧黎曼流形 M，$H^p_{DR}(M)\cong\mathscr{H}^p(M)$，证明同（1）.

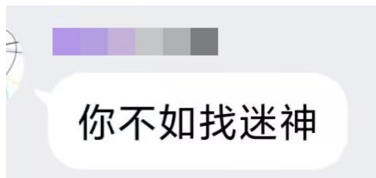
（3）注意到 $** = (-1)^{np+p}: A^p(M) \to A^p(M)$ 表明 $*: A^p(M) \to A^{n-p}(M)$ 是同构，而且由

$$*\Delta = (-1)^{np+1}(* d * d * + * * d * d) = (-1)^{np+1}(* d * d * + d * d * *) = \Delta *$$

得到 $*: \mathscr{H}^p(M) \to \mathscr{H}^{n-p}(M)$ 是同构. 根据 de Rham 定理，

$$H^p(M,\mathbb{R}) \cong H^p_{DR}(M) \cong \mathscr{H}^p(M) \cong \mathscr{H}^{n-p}(M) \cong H^{n-p}_{DR}(M) \cong H^{n-p}(M,\mathbb{R}).$$

4.6.3 见https://www.bananaspace.org/wiki/用户: 数学迷/Calabi−丘定理.



重点概念中英文对照表

中文	英文
伴随算子	adjoint operator
近复流形	almost complex manifold
近复结构	almost complex structure
解析函数	analytical function
底空间	base space
双全纯映射	biholomorphic map
边缘算子	boundary operator
边界，边界点	boundary, boundary point
丛	bundle
范畴	category
链复形	chain complex
闭形式	closed form
上链复形	cochain complex
上闭链条件	cocycle condition
上同调类	cohomology class
上同调群	cohomology group
逆向极限，极限，投射极限	colimit, inverse limit
紧支的	compactly supported
复流形	complex manifold
复结构	complex structure
反变函子	contravariant functor
坐标卡	coordinate chart
余切丛	cotangent bundle
余切空间	cotangent space
协变函子	covariant functor
链	cycle
de Rham 上同调	de Rham cohomology
导算子	derivation
导算子模	derivation module
可微（性）	differentiable (differentiability)
微分	differential
微分形式	differential form
微分流形	differentiable manifold
微分形式模，微分模	differential module
直积	direct product
直和	direct sum

散度	divergence
对偶丛	dual bundle
对偶模	dual module
嵌入	embed
嵌入子流形	embedded submanifold
恰当形式	exact form
正合列	exact sequence
外微分	exterior differential
面	face
纤维	fibre
纤维丛	fibre bundle
有限生成	finitely generated (abbr. f.g.)
标架	frame
自由模	free module
函子	functor
梯度	gradient
一般线性群	general linear group
芽	germ
整体的	global
分次代数	graded algebra
分次环	graded ring
调和形式	harmonic form
全纯函数	holomorphic function
全纯映射	holomorphic map
（反）全纯切空间	(anti)holomorphic tangent space
同调类	homology class
同伦	homotopy
浸入	immerse, immersion
浸入子流形	immersed submanifold
可积	integrable
李代数	Lie algebra
李群	Lie group
提升	lifting
正向极限，余极限，归纳极限	limit, direct limit
线丛	line bundle
局部坐标系	local coordinate system
局部截面	local section
局部平凡性	local triviality
局部平凡化	local trivialization

局部有限	locally finite
流形	manifold
带（无）边流形	manifold with (without) boundary
度量	metric
Mobius 带	Mobius band
模	module
模空间	moduli space
态射	morphism
法丛	normal bundle
（不）可定向的（性）	orientable, non-orientable (orientability)
定向	orientation
正交群	orthogonal group
单位分解	partition of unity
正向集	positive index, positive set
正向系统	positive system
乘积流形	product manifold
投影	projection
投射模	projective module
射影空间	projective space
拉回	pullback
推出	pushforward
商丛	quotient bundle
商模	quotient module
秩	rank
加细	refinement
正则函数	regular function
正则子流形	regular submanifold
黎曼度量	Riemannian metric
截面	section
短正合列	short exact sequence
单纯形，单形	simplex
单纯复形	simplicial complex
单纯同调群	simplicial homology group
奇异同调群	singular homology group
奇异点	singular point
奇异单形	singular simplex
光滑（性）	smooth (smoothness)
光滑流形	smooth manifold
光滑点	smooth point

光滑结构	smooth structure
光滑相容	smoothly compatible
特殊线性群	special linear group
分裂正合，裂正合，可裂正合	splitting exact
分裂映射	splitting map
茎	stalk
星形区域	star-shaped domain
子丛	subbundle
子流形	submanifold
淹没	submerge, submersion
子模	submodule
子簇	subvariety
支集，支撑集	support
切丛	tangent bundle
切空间	tangent space
典则线丛，重言丛	tautological bundle
张量代数	tensor algebra
张量积	tensor product
拓扑不变量	topological invariant
拓扑流形	topological manifold
环面	torus (pl. tori)
全空间	total space
转移函数	transition function
平凡性	triviality
簇	variety
向量丛	vector bundle
向量场	vector field
外代数	wedge algebra
外积，楔积	wedge product

2022 年期末试卷

1.（每小题 7 分，共 49 分）

(1) 什么是正则曲面？正则曲面上是否存在微分结构？

(2) 叙述曲面上奇点指标的定义，并证明它不依赖于局部共形映射的选取.

(3) 给出簇的光滑点的定义. 证明由 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 $f(x)=0$ 定义的簇是开的光滑流形.

(4) 写出复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 的定义，并给出 $\mathbb{CP}^n$ 上的一个复结构.

(5) 写出向量丛的 cocyle 条件，简要说明 cocyle 条件与向量丛的存在性的联系.

(6) 给出局部坐标系下外微分 $d: A^r(M)\to A^{r+1}(M)$ 的定义. 写出外微分所需满足的四条性质，并验证 d 的定义满足这四条性质.

(7) 什么是 de Rham 上同调？说明平面 $\mathbb{R}^2$ 去掉一个闭圆盘的 1 阶 de Rham 上同调群非平凡.

2.（10 分）

(1) 给出 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的单位球面 S^n 的标准微分结构.

(2) 定义映射 $f: S^n\to RP^n$ 如下：

$$f(x_1,\cdots,x_{n+1})=[(x_1,\cdots,x_{n+1})].$$

证明：f 是光滑映射，并且它的秩处处是 n.

3.（10 分）

设

$$\omega = Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy$$

是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2 次外微分式，且 $d\omega=0$. 令

$$\begin{aligned}\alpha =& \int_0^1 tA(tx,ty,tz)dt(ydz-zdy)\\ &+\int_0^1 tB(tx,ty,tz)dt(zdx-xdz)\\ &+\int_0^1 tC(tx,ty,tz)dt(xdy-ydx),\end{aligned}$$

验证 $d\alpha=\omega$.

4.（15 分）

(1) 给出 $C^\infty(U)$ 上的导算子的定义. 证明 $C^\infty(U)$ 上的导算子全体 $\mathcal{F}(U)$ 是 $C^\infty(U)$- 模.

(2) 切丛 TM 在 U 上的截面 $TM(U)$ 是 $C^\infty(U)$- 模.

(3) 证明 $TM(U)$ 与 $\mathcal{F}(U)$ 模同构.

5.（16 分）

定义层 $\mathcal{S}$ 是 X 的所有开集 U 到 Abel 群的映射. 对于开集 $V \subset U$，定义层上的限制映射 r_{VU}，满足以下条件:

$r_{UU} = id_U$,

对于 $U \subset V \subset W$，$r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$,

对于开集 $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ 与 $f_\alpha \in \mathcal{S}(U_\alpha)$, 其中 I 是指标集, 若满足 $r_{WU_\alpha}(f_\alpha) = r_{WU_\beta}(f_\beta)$, 其中 $W = U_\alpha \cap U_\beta$, 则存在 $f \in \mathcal{S}(U)$ 使得 $r_{U_\alpha U}(f) = f_\alpha$.

(1) 对照向量丛之间的态射的概念，试给出层之间的映射的定义. 进一步地，试给出层同构的定义.

(2) 设 E 是 X 上的向量丛，记 $E(U)$ 为 X 的开集 U 上的截面. 试证明 $E(U)$ 给出了 X 上连续函数环的模层.

(3) 定义 X 的所有开集 U 到 Abel 群 G 的摩天大楼层为

$$i_p(G)(U) = \begin{cases} G & p \in U, \\ 0 & p \notin U. \end{cases}$$

试说明它是层.

(4) 对于拓扑空间 X，证明其上的任何向量丛不与摩天大楼层同构.