

Puissances de 2

Un nénuphar envahit une mare. Sa surface double chaque jour. Au bout du vingtième jour, le nénuphar recouvre toute la surface de l'eau. Quel jour le nénuphar recouvrirait la moitié de la surface ?

Activité 1.

On note 2^n pour $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (avec n facteurs). Par exemple $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

1. Complète les tableaux suivants :

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2

2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}
...

2. Comment passer de 2^n à 2^{n+1} ?
3. Apprends par cœur les puissances de 2, de 2^1 à 2^{12} , de façon à pouvoir les réciter en moins de dix secondes.

Activité 2.

1. On remplit des cases avec des 0 et des 1. On énumère toutes les possibilités. Par exemple, avec 2 cases, on a 4 possibilités :

0	0	0	1	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

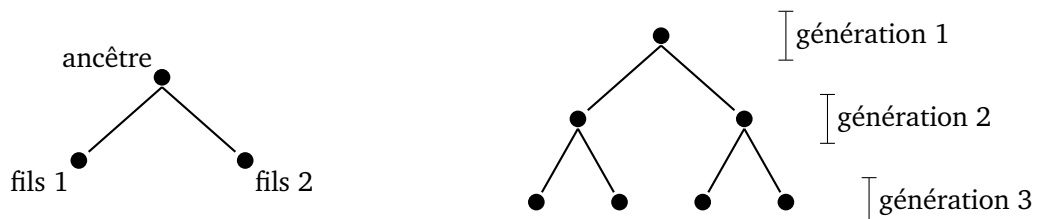
- (a) Trouve toutes les possibilités avec 3 cases :

--	--	--

. Combien y en a-t-il ?
 - (b) Trouve toutes les possibilités avec 4 cases :

--	--	--	--

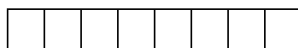
. Combien y en a-t-il ?
 - (c) Combien y a-t-il de possibilités lorsqu'il y a n cases ?
2. On représente l'arbre généalogique d'un ancêtre. Cet ancêtre a deux fils (figure de gauche), chacun de ses fils a aussi deux fils (figure de droite). À chaque fois les enfants ont deux fils.



- (a) Représente l'arbre généalogique jusqu'à la quatrième génération.
 - (b) Combien y a-t-il de personnes à la première génération ? Et à la deuxième, à la troisième, à la quatrième ? Et à la n -ième génération ?
 - (c) Combien y a-t-il de personnes en tout, de la première à la quatrième génération ? Et de la première à la dixième génération ?
3. Une sélectionneuse doit former une équipe à partir de plusieurs joueuses. Une équipe peut comporter 1 ou 2 ou 3... ou toutes les joueuses. Par exemple, si elle dispose de 3 joueuses, numérotées 1, 2 et 3, elle peut constituer 7 équipes différentes :
- l'équipe {1} formée de la seule joueuse numéro 1 ;
 - l'équipe {2} formée de la seule joueuse numéro 2 ;
 - l'équipe {3} formée de la seule joueuse numéro 3 ;
 - l'équipe {1, 2} formée de la joueuse numéro 1 et de la joueuse numéro 2 ;
 - l'équipe {1, 3} formée de la joueuse numéro 1 et de la joueuse numéro 3 ;
 - l'équipe {2, 3} formée de la joueuse numéro 2 et de la joueuse numéro 3 ;
 - l'équipe {1, 2, 3} formée de toutes les joueuses.
- (a) Énumère toutes les équipes possibles en partant de 2 joueuses. Combien y en a-t-il ?
 - (b) Énumère toutes les équipes possibles en partant de 4 joueuses. Combien y en a-t-il ?
 - (c) D'après toi, combien y a-t-il d'équipes possibles en partant de n joueuses ?

Activité 3.

Un *octet* est une quantité d'information qui correspond à une zone de stockage de 8 cases, chaque case pouvant contenir un 0 ou un 1 :



Il y a donc $2^8 = 256$ possibilités.

- Un octet permet par exemple de coder un entier compris entre 0 et 255.
- Un octet permet aussi de coder un caractère (code ASCII), par exemple le caractère numéro 65 désigne la lettre « A », le numéro 66 la lettre « B »...
- Un octet peut aussi coder 256 niveaux de gris (0 pour le noir, 255 pour le blanc et entre les deux, des nuances de gris).
- Avec trois octets, on peut coder plus de 16 millions de couleurs différentes : un octet pour le rouge (de 0 : pas du tout de rouge, à 255 : le maximum de rouge), un octet pour le vert et un octet pour le bleu (système RVB).

Comme les quantités de mémoire en jeu sont souvent énormes, on utilise les multiples :

- le *kilo-octet*, noté ko, pour 1000 octets ;
- le *méga-octet*, noté Mo, pour un million d'octets (donc 1 Mo = 1000 ko) ;
- le *giga-octet*, noté Go, pour un milliard d'octets (donc 1 Go = 1000 Mo) ;
- le *tera-octet*, noté To, pour mille milliards d'octets (donc 1 To = 1000 Go).

1. Calcule la quantité de mémoire nécessaire au stockage des données suivantes et exprime-la en utilisant le multiple le plus adapté :
 - (a) un texte de 3000 caractères (environ une page) ;

- (b) un dictionnaire de 40 000 mots, un mot étant en moyenne composé de 7 lettres ;
 - (c) une image noir et blanc de taille 800×600 pixels, chaque pixel étant coloré par un niveau de gris (parmi 256) ;
 - (d) une image couleur HD de taille 1024×768 pixels, chaque pixel étant coloré par un niveau de rouge (parmi 256), un niveau de vert (parmi 256) et un niveau de bleu (parmi 256) ;
 - (e) un film d'1h30, avec 25 images par secondes, chaque image étant une image couleur HD.
2. L'ancien usage était d'utiliser les puissances de 2 comme multiples des octets. Comme $2^{10} = 1024$ est proche de mille, on appelle *kibi-octet*, noté Kio, un ensemble de 1024 octets. De même un *mebi-octet*, noté Mio, c'est 1024 Kio ; un *gibi-octet* c'est 1024 Mio ; un *tébi-octet* c'est 1024 Gio.
- Exprime les quantités de mémoire de la question précédente à l'aide des multiples Kio, Mio, Gio ou Tio.
3. Cherche les quantités de mémoire approximatives, nécessaires pour stocker : une chanson ; un film ; une photo ; un livre de 300 pages. Cherche la quantité de stockage usuelle contenue dans un CD, un DVD, une clé USB, la mémoire vive d'un ordinateur, un disque dur.

Activité 4.

Pour réduire la taille des fichiers, on cherche souvent à les compresser. Par exemple si une image à un coin de ciel bleu, au lieu de répéter mille fois « pixel bleu, pixel bleu, pixel bleu... » on enregistre « toute cette zone est bleue ». Pour un film, lorsque deux images se suivent et se ressemblent, on enregistre seulement la différence. Le *taux de compression* c'est le rapport :

$$\text{taux de compression} = \frac{\text{taille du fichier compressé}}{\text{taille du fichier non compressé}}.$$

Par exemple, si l'image de départ était de 10 Mo et que l'image compressée est de 3,5 Mo alors le taux de compression est

$$\frac{3,5}{10} = 0,35 = 35\%.$$

1. Calcule les taux de compression suivants :
 - un fichier de musique de 7 Mo est encodé en un fichier mp3 de taille 1,4 Mo ;
 - le contenu d'un disque dur de 256 Go est archivé en un fichier de 48 Go ;
 - un document texte de 1,2 Mo est compressé en un fichier de 650 ko.
2. Une image au format original de 4 Mo est compressée au taux de 30%. Quelle est la taille du fichier compressé ?
3. Une page a été scannée puis compressée au taux de 13%. Le fichier compressé pèse 200 ko. Quelle est la taille du fichier original ?
4. Un film qui dure 1h20 est composé d'images 1024×768 pixels, avec les couleurs codées sur 3 octets. Il y a 25 images par seconde. Quel doit être le taux de compression pour stocker ce film sur un DVD d'une capacité de 4 Go ?