



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

**Estudio de estructuras de banda  
prohibida electromagnética (EBG) para  
la reducción de acoplamiento mutuo  
entre antenas microstrip**

Tesista:

Federico Luna

[federicoluna@protonmail.com](mailto:federicoluna@protonmail.com)

Director:

Dr. Ing. Walter Gustavo Fano

[gustavo.gf2005@gmail.com](mailto:gustavo.gf2005@gmail.com)

Co-directora:

Ing. Silvina Boggi

[silvinaboggi@gmail.com](mailto:silvinaboggi@gmail.com)

**TESIS DE GRADO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica



dia de mes de año



*“Study hard what interests you the most in the most undisciplined, irreverent and original manner possible.”*

Richard Feynman



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ingeniería  
Departamento de Electrónica

por Federico Luna

## *Resumen*

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## *Abstract*

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

## *Agradecimientos*

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Índice general</b>	<b>viii</b>
<b>1. Introducción: Fundamentos de electromagnetismo</b>	<b>1</b>
1.1. Reseña histórica . . . . .	1
1.2. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	2
1.2.1. Campos en medios materiales . . . . .	3
1.2.2. Análisis de automodos . . . . .	5
1.2.3. Condiciones de borde . . . . .	6
1.2.3.1. Campos sobre una superficie dieléctrica . . . . .	6
1.2.3.2. Campos sobre una superficie conductora eléctrica . . . . .	6
1.2.3.3. Campos sobre una superficie conductora magnética . . . . .	6
1.3. Ecuación de onda . . . . .	7
1.3.1. Incidencia de una onda plana sobre una interfaz . . . . .	9
1.3.2. Ángulo de Brewster y ángulo crítico . . . . .	12
1.4. Guias de ondas . . . . .	15
1.5. Ondas de superficie . . . . .	16
1.6. Líneas de transmisión . . . . .	26
1.6.1. Línea <i>microstrip</i> . . . . .	28
1.7. Antenas . . . . .	30
1.7.1. Regiones de campo . . . . .	30
1.7.2. Diagramas de radiación . . . . .	30
1.7.3. Impedancia de entrada . . . . .	31
1.7.4. Arreglos de antenas . . . . .	31
1.7.5. Acoplamiento mutuo . . . . .	32
1.7.6. Antenas Microstrip . . . . .	33
1.7.6.1. Modelo de líneas de transmisión . . . . .	34
1.7.6.2. Modelo de cavidades multimodo . . . . .	35
1.7.7. Acoplamiento mutuo en antenas Microstrip . . . . .	37
<b>2. Fundamentos de estructuras de EBG</b>	<b>41</b>

---

2.1. Introducción: Metamateriales, materiales periódicos y EBGs . . . . .	41
2.2. Celdas unitarias de cristales bidimensionales . . . . .	44
2.3. Teorema de Bloch-Floquet . . . . .	47
2.4. Relación y diagrama de dispersión . . . . .	48
<b>3. Estudio y diseño de estructuras de banda prohibida electromagnética 55</b>	
3.1. Modelos analíticos de estructuras uniplanares de banda prohibida electromagnética . . . . .	55
3.2. Técnicas numéricas de onda completa . . . . .	57
3.3. Análisis de campos y modos para distintas estructuras . . . . .	59
3.3.1. Metamaterial formado por parches cuadrados unidos por finas trazas <i>microstrip</i> . . . . .	59
3.3.1.1. Análisis de un diagrama de dispersión típico . . . . .	63
3.3.1.2. Efecto de la variación del ancho del puente <i>microstrip</i> . .	64
3.3.1.3. Efecto del escalamiento de la celda unitaria . . . . .	66
3.3.1.4. Efecto de la variación del tamaño del parche metálico . .	68
3.3.1.5. Variación de la longitud de los puentes . . . . .	68
3.3.1.6. Efecto de la variación del ancho del sustrato dieléctrico .	69
3.3.2. Celda de Yang . . . . .	72
3.4. Modelado por líneas de transmisión . . . . .	72
3.4.1. TMM . . . . .	72
3.4.2. TLM . . . . .	72
3.5. Estudio de estructuras mediante TLM . . . . .	72
3.5.1. Algoritmo utilizando programación orientada a objetos . . . . .	72
<b>4. Aplicación de EBGs en estructuras microstrip 81</b>	
4.1. Introducción . . . . .	81
4.2. Criterios y técnicas utilizados para aumentar el ancho de banda de las antenas microstrip . . . . .	83
4.3. Diseño de la antena microstrip . . . . .	85
4.4. Elección del metamaterial . . . . .	86
4.5. Estudio del efecto sobre el acoplamiento mutuo . . . . .	86
4.6. Estudio del efecto de la distancia sobre el ancho de banda . . . . .	86
<b>5. Resultados experimentales 87</b>	
5.1. Construcción del prototipo . . . . .	87
5.2. Banco de medición . . . . .	87
5.3. Resultados . . . . .	87
<b>6. Conclusiones 89</b>	
<b>Apéndices 91</b>	
<b>A. Incertezas en la instrumentación 93</b>	
A.1. Analizador vectorial de redes . . . . .	93
A.2. Analizador de espectros . . . . .	96
<b>Bibliografía 99</b>	





*Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi.  
Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at,  
lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed  
accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio  
metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut  
massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque  
penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus.  
Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis.  
Pellentesque cursus luctus mauris.*



# Capítulo 1

## Introducción: Fundamentos de electromagnetismo

### 1.1. Reseña histórica

Las bases de la teoría electromagnética clásica para el dominio macroscópico fueron formuladas por James Clerk Maxwell en 1873, en base al conocimiento previo desarrollado por Gauss, Ampère y Faraday, entre otros. Entre 1885 y 1887, Oliver Heaviside simplificó las expresiones e introdujo la notación vectorial actual, facilitando así el modelado de guías de ondas y líneas de transmisión [1].

En base a estos trabajos, Heinrich Hertz diseñó, entre 1887 y 1891, una serie de experimentos que validaron la teoría de ondas electromagnéticas propuesta por Maxwell. En 1886, Hertz construyó la primer antena dipolo, y en 1888, la primer antena parabólica, alimentada por un dipolo de 450 MHz, dando el puntapié inicial para el desarrollo de la radio durante la primera mitad del siglo XX [2].

El primer análisis de la propagación de ondas electromagnéticas en guías de ondas metálicas, publicado por Lord Rayleigh en 1897, y el posterior estudio teórico del comportamiento de ondas en guías dieléctricas por Debye y Hondros, en 1910, sentaron los cimientos para que durante la década de 1930 comenzaran trabajos experimentales en transporte de ondas electromagnéticas en los laboratorios Bell [2].

Los conjuntos de antenas se popularizaron a partir de la aparición de la antena de Yagi-Uda en 1926, formada por elementos lineales que dan lugar a una fase fija. Durante la Segunda Guerra Mundial surgieron los conjuntos de antena de fase variable [3], y las guías de ondas y las antenas tomaron un lugar prioritario entre los ingenieros, matemáticos y

físicos de la época, lo que permitió el desarrollo de métodos de análisis para facilitar la formulación de problemas con condiciones de borde complejas.

Recién finalizada la Segunda Guerra Mundial se comenzaron a fabricar circuitos *microstrip*. En 1953, G. A. Deschamps presentó el primer trabajo sobre antenas con la misma tecnología, y la primer patente en ese sentido se registró en 1955 [4]. Aún así, recién en la década del '70 comenzaron a utilizarse en aplicaciones prácticas, principalmente debido a la aparición de sustratos con bajas tangentes de pérdida, la mejora en técnicas de fotolitografía, y la optimización de modelos teóricos [5], que permitieron solucionar los problemas de dispersión y aparición de modos indeseados. Sin embargo, la simplificación constructiva trajo aparejados problemas de acoplamiento mutuo, que debieron ser abordados por técnicas de filtrado y blindaje.

## 1.2. Ecuaciones de Maxwell

La teoría electromagnética propuesta por Maxwell, y simplificada por Heaviside, se reduce a cuatro ecuaciones diferenciales lineales vectoriales e interdependientes que, en notación diferencial, quedan expresadas como se observa a la izquierda de la ecuación 1-1 [1]:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Faraday} & \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M} \\ \text{Ampère} & \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \text{Gauss} & \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} - \vec{M} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico, en  $(V/m)$ ;  $\vec{H}$  es el campo magnético, en  $(A/m)$ ;  $\vec{D}$  es la densidad de flujo eléctrico, en  $(C/m^2)$ ;  $\vec{B}$  es la densidad de flujo magnético, en  $(Wb/m)$ ;  $\vec{M}$  es la densidad de corriente magnética, en  $(V/m)$ , y se considera por completitud y simetría;  $\vec{J}$  es la densidad de corriente eléctrica, en  $(A/m^2)$ ; y  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica, en  $(C/m^2)$ .

De las ecuaciones 1-1 se deduce que las fuentes de campo electromagnético son la densidad de carga eléctrica  $\rho$  y las corrientes  $\vec{M}$  y  $\vec{J}$ . Además, es posible deducir<sup>1</sup> la ecuación de continuidad:

---

<sup>1</sup>Para ello se debe aplicar la divergencia a la ecuación de Ampère, y recordar que  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ .

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad} \quad (1-2)$$

A partir de las ecuaciones de Maxwell (1-1), y considerando relaciones constitutivas que no varían en el tiempo ni en función de la frecuencia (no hay dispersión), y donde no hay cargas libres ni corrientes ( $\rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$ ), donde el material es isótropo y macroscópico, y donde no se consideran pérdidas, es posible, utilizando la linealidad de dichas ecuaciones, separar el comportamiento en el tiempo y en el espacio, expandiendo los campos en modos armónicos, y expresándolos como combinaciones lineales de los mismos. Los modos, entonces, resultan de un patrón espacial ( $\vec{H}(\vec{r})$  o  $\vec{E}(\vec{r})$ ) multiplicado por un patrón temporal, este último expresado en forma de exponencial compleja o fasorial.

Dado que la mayor parte del análisis se realiza sobre campos de comportamiento armónico y en régimen permanente, la dependencia del tiempo de las ecuaciones de Maxwell se suele simplificar, y la dependencia temporal,  $e^{j\omega t}$ , se suele dejar implícita, dado que resulta común para todos los términos. Así, las derivadas respecto del tiempo resultan más sencillas, y los vectores de campos se vuelven funciones vectoriales complejas dependientes sólo de coordenadas espaciales [2]. El resultado de esta simplificación se observa en el lado derecho de la ecuación 1-1.

Bajo estas consideraciones, resulta claro que las configuraciones posibles de campo son transversales: Para cualquier campo magnético  $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{a} \exp(j\vec{\beta} \cdot \vec{r})$ , la ecuación de la divergencia del campo magnético obliga a que  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ .

### 1.2.1. Campos en medios materiales

Un campo eléctrico aplicado sobre cualquier material dieléctrico genera una polarización de sus átomos y/o moléculas, creando momentos dipolares eléctricos (o alineándolos, si en el material existían previamente), y dando lugar a un vector de polarización adicional,  $\vec{P}_e$ , que genera un decrecimiento en el campo eléctrico presente en el material. En el mismo sentido, un campo magnético aplicado sobre un medio material podría ser capaz de alinear los momentos dipolares magnéticos en un material magnético, produciendo un vector de polarización magnética  $P_m$ . Si el medio es, además, lineal e isotrópico, dichas polarizaciones son proporcionales al campo aplicado, de forma que  $\vec{P}_e = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$  y  $\vec{P}_m = \chi_m \vec{H}$ , con  $\chi_e$  y  $\chi_m$  las susceptibilidades eléctrica y magnética, respectivamente. Dado que las mismas toman valores complejos, los medios materiales poseen permitividades eléctricas y permeabilidades magnéticas también complejas, asociadas a las pérdidas

debidas al amortiguamiento causado por los momentos dipolares respectivos [6]. Las relaciones constitutivas resultan, entonces:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e = \epsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E} = (\epsilon' - j\epsilon'') \vec{E} \quad (1-3a)$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{P}_m) = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} = (\mu' - j\mu'') \vec{H} \quad (1-3b)$$

Si, además, el material posee una conductividad  $\sigma$ , la aplicación de un campo eléctrico da lugar a la aparición de una densidad de corriente  $\vec{J}$ , que en algunos casos, cuando  $\sigma$  es independiente del campo eléctrico aplicado, de la dirección del mismo y de la posición, se puede expresar según la ley de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{Ley de Ohm} \quad (1-4)$$

La ecuación de Ampère de 1-1 queda, entonces, expresada como

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} = j\omega \epsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} = j\omega \epsilon' \vec{E} + (\omega \epsilon'' + \sigma) \vec{E} \quad (1-5a)$$

$$= j\omega \left( \epsilon' - j\epsilon'' - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \quad (1-5b)$$

La relación entre la parte imaginaria y la parte real de la corriente total de desplazamiento se conoce como tangente de pérdidas [1]:

$$\tan \delta = \frac{\omega \epsilon'' + \sigma}{\omega \epsilon'} \quad \text{Tangente de pérdidas} \quad (1-6)$$

Cuando el material no es homogéneo, los coeficientes  $\epsilon$  y  $\mu$  dependen de la posición. Si, además, el material es anisotrópico, como en el caso de los cristales y gases ionizados, las relaciones expresadas antes entre los vectores de polarización ( $\vec{P}_e$  y  $\vec{P}_m$ ) y los campos no se cumplen, sino que deben ser expresadas como tensores de rango 2 (diadas), como se muestra en la ecuación 1-7, explicitando así su dependencia de la dirección [2]. Si, además, el material no es lineal, los coeficientes  $\epsilon_{ij}$  y  $\mu_{ij}$  pueden ser funciones de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  respectivamente.

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

### 1.2.2. Análisis de automodos

Las ecuaciones del rotor de las ecuaciones de Maxwell (1-1) pueden ser desacopladas<sup>2</sup>, de manera que resulte la siguiente ecuación:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}) \quad (1-12)$$

Una expresión similar se puede obtener para el campo eléctrico. Sin embargo, es posible también obtener el campo eléctrico a partir de la ecuación de divergencia, una vez resuelta la ecuación 1-12:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \quad (1-13)$$

La ecuación 1-12 es una ecuación de autovalores: El lado izquierdo puede ser considerado un operador,  $\hat{\Theta}$ , de manera que resulte:

$$\hat{\Theta} \vec{H}(\vec{r}) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}(\vec{r}) \quad (1-14)$$

Donde los autovectores son los valores que toma  $\vec{H}(\vec{r})$ , es decir, los patrones espaciales, y los autovalores son  $(\omega/c)^2$ , proporcionales a las frecuencias de esos modos. El operador  $\hat{\Theta}$  es linealEs posible demostrar que, además, el operador es hermítico, lo que permite deducir que: los autovalores serán siempre no-negativos, y por lo tanto las frecuencias  $\omega$  serán siempre reales; cualesquiera dos modos armónicos de diferentes frecuencias serán siempre ortogonales, y los modos que comparten frecuencia, los modos degenerados, surgen por las simetrías e invariancias del medio; y que se cumple el teorema variacional, que indica que los autovalores más pequeños coinciden con los modos de menor energía [7]., de manera que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución. Este acercamiento a las ecuaciones de Maxwell permite resolver problemas tridimensionales, especialmente los relacionados a estructuras resonantes cerradas y estructuras periódicas.

---

<sup>2</sup>El desacople se realiza de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) = 0 \quad (1-8)$$

$$\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) + j\omega \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1-9)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = -\nabla \times (j\omega \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})) = -j\omega \epsilon_0 \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \quad (1-10)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right) = -j\omega \epsilon_0 \mu \vec{H}(\vec{r}) \quad (1-11)$$

### 1.2.3. Condiciones de borde

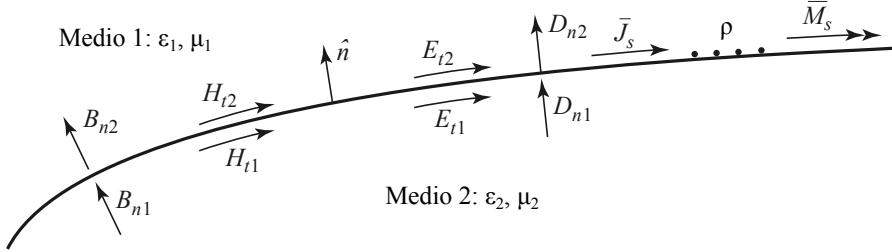


FIGURA 1.1: Corrientes, campos y carga superficial en una interfaz general entre dos medios [1].

Si se considera una interfaz entre dos medios, como la que se muestra en la figura 1.1, a partir de las ecuaciones de Maxwell y los teoremas integrales, se pueden deducir las siguientes condiciones de borde:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (1-15a)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1-15b)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\bar{M}_s \quad (1-15c)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (1-15d)$$

#### 1.2.3.1. Campos sobre una superficie dieléctrica

Dado que en una interfaz entre dos dieléctricos no hay carga eléctrica ni densidades de corriente, las ecuaciones 1-15 establecen que las componentes normales de los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  se conservan, y que las componentes tangenciales de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  también lo hacen.

#### 1.2.3.2. Campos sobre una superficie conductora eléctrica

Si el conductor no tiene pérdidas ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), todos los campos deben ser cero en su interior<sup>3</sup>. Considerando, además, que  $\bar{M}_s = 0$ , la componente tangencial del campo eléctrico,  $E_t$  desaparece sobre la superficie del conductor. Dado que la diferencia entre las componentes normales del campo magnético está dada por  $\vec{J}_s$ , y el campo magnético debe anularse en el conductor, la densidad de corriente superficial está dada únicamente por el campo magnético externo al conductor. En el mismo sentido, la densidad de carga superficial  $\rho_s$  es la expresión, sobre la superficie del conductor, de la componente normal de  $\vec{D}$ .

#### 1.2.3.3. Campos sobre una superficie conductora magnética

Dado que la superficie conductora magnética representa el caso dual al de la superficie conductora eléctrica, en este caso se espera que la componente tangencial de  $\vec{H}$  se anule sobre la superficie, mientras que la componente tangencial del campo eléctrico dé lugar a corrientes magnéticas sobre la misma.

<sup>3</sup>La profundidad de penetración, definida en secciones siguientes, se anula.

### 1.3. Ecuación de onda

Al considerar una región del espacio lineal, isotrópica y homogénea, se puede calcular el rotor de la primera ecuación de Maxwell y aplicar la segunda<sup>4</sup>, lo que da como resultado las expresiones de la ecuación 1-16:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = j\omega \mu \vec{J} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} + \nabla \times \vec{M} \quad (1-16a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{M} - \nabla \times \vec{J} \quad (1-16b)$$

De estas ecuaciones, se observa que el campo magnético está determinado por la componente rotacional de la corriente eléctrica, mientras que el campo eléctrico está determinado por todas las componentes de la misma. De manera análoga, se cumple la relación inversa para el caso de la corriente magnética.

Si, además, la región del espacio es libre de fuentes, se deducen las ecuaciones de Helmholtz para ambos campos, donde  $\gamma$  es el número de onda, en unidades de  $(1/m)$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} &= 0 && \text{Helmholtz} \\ \nabla^2 \vec{H} + \gamma^2 \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1-17)$$

Para el caso sin pérdidas se puede expresar como  $\gamma = \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ , mientras que si se considera que existen pérdidas óhmicas, su efecto puede ser tenido en cuenta si  $\gamma$  asume un valor complejo:

$$\gamma = -j\alpha + \beta = j\omega \sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} - j\sigma\epsilon/\omega \quad (1-18)$$

Para el caso de un buen conductor:

$$\gamma = -j\alpha + \beta = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\sigma/(\omega\epsilon)} = (1+j) \sqrt{\omega\mu\sigma/2} \quad (1-19)$$

lo que nos permite definir la profundidad de penetración como

$$\delta_s = -1/\alpha = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (1-20)$$

---

<sup>4</sup>Se deberá utilizar la identidad  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$ , donde  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$ . Aplicando, además, lo mismo para el campo magnético, y considerando que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ :

$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -j\omega \mu \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \vec{M} \\ \nabla \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} &= -j\omega \mu \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \vec{M} \\ \frac{\nabla \rho}{\epsilon} - \nabla^2 \vec{E} &= \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} - j\omega \mu \vec{J} - \nabla \times \vec{M} \\ \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} &= j\omega \mu \vec{J} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} + \nabla \times \vec{M} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{H} &= j\omega \nabla \times \vec{D} + \nabla \times \vec{J} \\ \nabla \nabla \cdot \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} &= j\omega \epsilon \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{J} \\ \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{H} &= j\omega \epsilon (-j\omega \vec{B} - \vec{M}) + \nabla \times \vec{J} \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{H} &= j\omega \epsilon \vec{M} - \nabla \times \vec{J} \end{aligned}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

En coordenadas cartesianas, para resolver las ecuaciones 1-17 resulta sencillo aplicar el método de separación de variables<sup>5</sup>, que da lugar a ecuaciones cuya solución es de la forma  $e^{\pm j\beta_i i}$ , con  $i = x, y$  o  $z$ , respectivamente. Las soluciones con un signo positivo en el exponente corresponden a ondas que viajan en la dirección negativa  $(-x, -y, -z)$ , mientras que las que tienen un signo negativo corresponden a ondas que viajan en la dirección positiva. Dado que ambas soluciones son válidas y posibles, en función de las condiciones de borde, en general la expresión de la propagación de los campos electromagnéticos quedará establecida como la suma de ambas, afectadas por un factor de amplitud dependiente de la coordenada evaluada.

Para el caso de ondas que viajan en la dirección positiva

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0 e^{-j(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} \quad (1-21)$$

donde se consideró que  $\vec{E}_0 = A\hat{x} + B\hat{y} + C\hat{z}$ ,  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  y

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \gamma^2 \quad (1-22)$$

Al expresar la divergencia del campo eléctrico de la ecuación 1-21, se obtiene<sup>6</sup>:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} = -j\vec{\gamma} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} = 0 \quad (1-23)$$

De lo que se puede deducir que  $\vec{\gamma} \cdot \vec{E}_0 = 0$ , de modo que el campo eléctrico, en una onda plana, es siempre perpendicular a la dirección de propagación.

De la ecuación de Faraday de 1-1, considerando espacio libre de cargas, se puede deducir que, para una onda plana en un medio sin pérdidas, el campo magnético es siempre ortogonal al campo eléctrico y a la dirección de propagación, y que los campos están relacionados de forma que [6]:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \pm \frac{\hat{\beta} \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{\eta} \quad (1-24)$$

donde  $\eta$  es la impedancia de onda, que tiene la forma

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad \text{Impedancia de onda} \quad (1-25)$$

Para el caso con pérdidas, y considerando que la dirección de propagación es  $z$ , las componentes  $x$  e  $y$  se comportan como:

---

<sup>5</sup>En coordenadas cartesianas,  $\nabla^2 E = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$ . Reemplazando las coordenadas  $E_i$  de  $\vec{E}$ , para  $i = x, y, z$  por funciones  $f(x), g(y), h(z)$  independientes entre sí, se obtiene que  $\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{h''(z)}{h(z)} + \beta_0^2 = 0$ . Como las funciones  $f, g$  y  $h$  son independientes, se deduce que  $\frac{f''(x)}{f(x)} = -\beta_x^2$ ,  $\frac{g''(y)}{g(y)} = -\beta_y^2$  y  $\frac{h''(z)}{h(z)} = -\beta_z^2$ .

<sup>6</sup>Aplicando  $\nabla \cdot (f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \vec{A}$  a la expresión, resulta  $\nabla \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \nabla e^{-j\vec{\beta}\vec{r}} + e^{-j\vec{\beta}\vec{r}} \nabla \cdot \vec{E}_0$ , donde  $\nabla \cdot \vec{E}_0 = 0$

$$E_i(z) = E_i e^{-j\gamma z} = E_i e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad i = x, y$$

Si el medio es el vacío, la impedancia intrínseca se denota  $\eta_0$  y tiene un valor de  $377 \Omega$ , mientras que para otros materiales está determinada por su permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, y puede ser compleja si hay pérdidas.

La velocidad de fase se define como  $v_p = \omega/\beta$ , que para el caso sin pérdidas queda como  $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , y que para el caso particular del vacío, se expresa como  $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Así, la velocidad de fase en cualquier medio material sin pérdidas resulta  $c/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ .

La longitud de onda,  $\lambda$ , es la distancia espacial entre dos máximos sucesivos, por lo que se expresa como  $\lambda = 2\pi/\beta = v_p/f$ .

### 1.3.1. Incidencia de una onda plana sobre una interfaz

Una onda electromagnética incidente sobre una superficie en un ángulo arbitrario puede analizarse descomponiendo el problema en dos casos canónicos de polarización<sup>7</sup>: perpendicular (TE, transversal eléctrico) o paralela (TM, transversal magnético) al plano de incidencia, que es el formado por el rayo incidente y la normal a la interfaz. El problema de la incidencia perpendicular a la interfaz combina ambos casos.

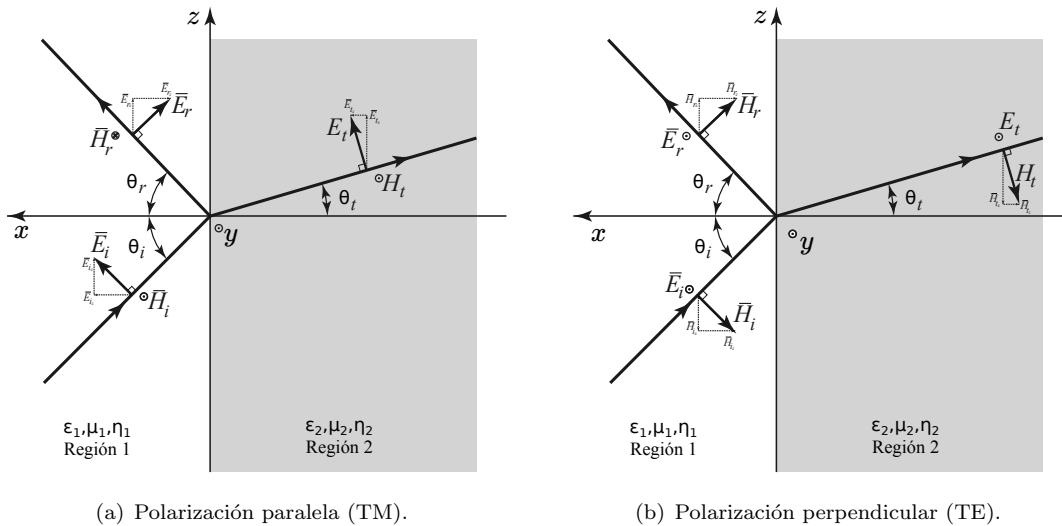


FIGURA 1.2: Incidencia oblicua para los dos casos de polarización analizados.

Los campos eléctrico y magnético incidentes, según el sistema de coordenadas definido en la figura 1.2, pueden ser expresados, en forma general, usando las expresiones 1-21 y 1-24, y considerando que no hay pérdidas, como indican las ecuaciones 1-26:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{-j\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}} \quad \vec{H}_i = \frac{\hat{\beta}_1 \times \vec{E}_0}{\eta_1} e^{-j\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}} \quad (1-26)$$

<sup>7</sup>La polarización es la dirección del campo eléctrico. En nuestro análisis, se considera polarización lineal, de modo que el campo eléctrico siempre puede ser representado por vectores colineales.

	TM	TE
$\vec{E}_i$	$E_0 (\hat{z} \cos \theta_i + \hat{x} \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$	$E_0 \hat{y} e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$
$\vec{H}_i$	$\frac{E_0}{\eta_1} \hat{y} e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$	$\frac{E_0}{\eta_1} (-\hat{z} \cos \theta_i - \hat{x} \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$
$\vec{E}_r$	$E_0 \Gamma (\hat{z} \cos \theta_r - \hat{x} \cos \theta_r) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \sin \theta_r)}$	$E_0 \Gamma \hat{y} e^{-j\beta_1(z \sin \theta_r + x \cos \theta_r)}$
$\vec{H}_r$	$-\frac{E_0 \Gamma}{\eta_1} \hat{y} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \sin \theta_r)}$	$\frac{E_0 \Gamma}{\eta_1} (\hat{z} \cos \theta_r - \hat{x} \sin \theta_r) e^{-j\beta_1(z \sin \theta_r + x \cos \theta_r)}$
$\vec{E}_t$	$E_0 T (\hat{z} \cos \theta_t + \hat{x} \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$	$E_0 T \hat{y} e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$
$\vec{H}_t$	$\frac{E_0 T}{\eta_1} \hat{y} e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$	$\frac{E_0 T}{\eta_2} (-\hat{z} \cos \theta_t - \hat{x} \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$
$\Gamma$	$\frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$	$\frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_t}$
$T$	$\frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$	$\frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_t}$

TABLA 1.1: Campos incidentes, transmitidos y reflejados, y coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia oblicua de una onda plana sobre una interfaz dieléctrica.

donde  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ .  $\hat{\beta}_1$  es la dirección de propagación de la onda plana, y  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1} = j\omega\mu/\gamma$  es la impedancia de onda de región de incidencia.

Se define al coeficiente de reflexión  $\Gamma$  como la relación entre la magnitud del campo reflejado y del campo incidente,  $E_r/E_i$ . De la misma manera, el coeficiente de transmisión  $T$  es la relación entre el módulo del campo transmitido al segundo medio y el campo incidente desde el primer medio,  $E_t/E_i$ , de manera que  $1 + \Gamma = T$  y que  $(1 - \Gamma)/\eta_1 = T/\eta_2$ .

Usando estos coeficientes, a partir de las ecuaciones 1-26, y teniendo en cuenta las condiciones de borde descriptas en la sección 1.2.3, se pueden calcular los campos reflejados y transmitidos. Para los dos casos canónicos analizados, los campos incidentes, reflejados y transmitidos se resumen en la tabla 1.1, así como los coeficientes de reflexión y transmisión.

Si se fuerza la continuidad de las componentes tangenciales de los campos sobre la interfaz para ambos casos,  $\vec{E}_i^{tg} + \vec{E}_r^{tg} = \vec{E}_t^{tg}$  y  $\vec{H}_i^{tg} + \vec{H}_r^{tg} = \vec{H}_t^{tg}$ , se obtienen las expresiones 1-27 para el modo TM, y 1-28 para el modo TE.

$$\begin{aligned} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} + \Gamma \cos \theta_r e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= T \cos \theta_t e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \\ \frac{1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= \frac{T}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \end{aligned} \quad (1-27)$$

$$\begin{aligned} e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} + \Gamma e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= T e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \\ -\frac{1}{\eta_1} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} \cos \theta_r e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= -\frac{T}{\eta_2} \cos \theta_t e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \end{aligned} \quad (1-28)$$

En estas ecuaciones se observa que a ambos lados de las igualdades, las expresiones son funciones de la posición sobre la interfaz. Para que la condición de borde se cumpla en todos sus puntos, la variación en  $z$  debe ser la misma en todos los términos, de forma que el efecto de la variación sea anulado:  $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_1 \sin \theta_r = \beta_2 \sin \theta_t$ . De esta consideración se deriva la Ley de Snell (asumiendo que  $\mu_1 = \mu_2$ ), expresada en la ecuación 1-29. En la gráfica de la figura 1.3 se puede observar el comportamiento del ángulo de refracción según en ángulo de incidencia la incidencia sobre una interfaz entre aire y FR4, en sentidos opuestos.

$$\theta_i = \theta_r \quad (1-29a)$$

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t \xrightarrow{\eta=\omega\mu/\beta} \eta_2 \sin \theta_i = \eta_1 \sin \theta_t \quad (1-29b)$$

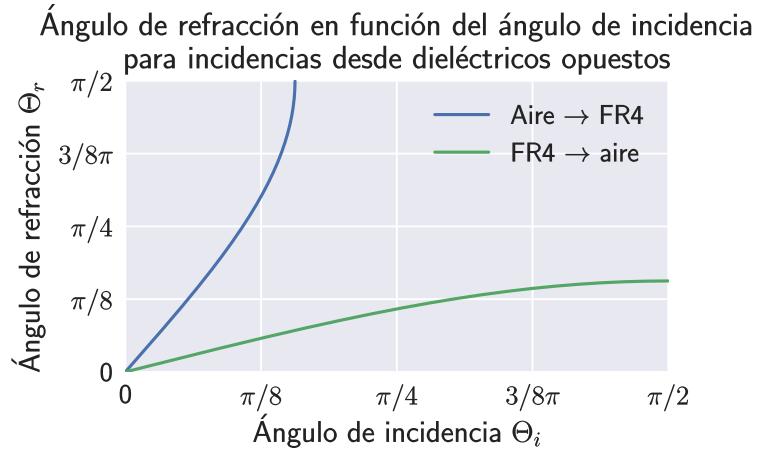
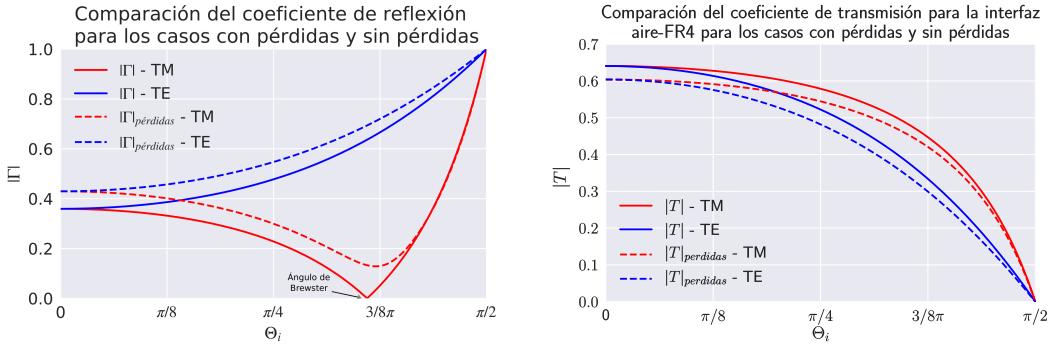


FIGURA 1.3: Ángulo de refracción en función del ángulo de incidencia, según la ley de Snell.

Utilizando estas expresiones, y a partir de las ecuaciones 1-27 y 1-28, se obtienen las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión de la tabla 1.1. Resulta importante destacar que, para el caso de incidencia perpendicular ( $\theta_i = 0$ ), los coeficientes quedan simplificados a  $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$  y  $T = (2 \eta_2)/(\eta_2 + \eta_1)$ .

Los coeficientes de transmisión y reflexión para incidencia oblicua, en ambas polarizaciones, se pueden graficar en función del ángulo incidente, teniendo en cuenta las ecuaciones de Snell para expresar el ángulo de transmisión en función del ángulo de incidencia. Estas gráficas se muestran, para la interfaz aire-FR4, en la figura 1.4, donde, además, teniendo en cuenta la constante de propagación compleja de la ecuación 1-18, se graficó también el caso con pérdidas, donde se observa, en general, una mayor reflexión y, por tanto, menor transmisión. Para ángulos de incidencia rasantes, la transmisión es mínima y la reflexión es máxima.

Resulta ilustrativo, además, graficar el comportamiento según el ángulo de incidencia de la misma interfaz, pero en el sentido dieléctrico-aire. Este gráfico se observa en la figura 1.5, donde los coeficientes de transmisión pueden ser mayores al porque el ángulo en el segundo medio es menor al de incidencia, permitiendo conservar el flujo de energía por unidad de área.



(a) Coeficiente de reflexión entre aire y FR4 en función de  $\theta_i$ . (b) Coeficiente de transmisión entre aire y FR4 en función de  $\theta_i$ .

FIGURA 1.4: Coeficientes de transmisión y reflexión para el caso en que el medio de incidencia es aire, y el medio de transmisión es FR4.

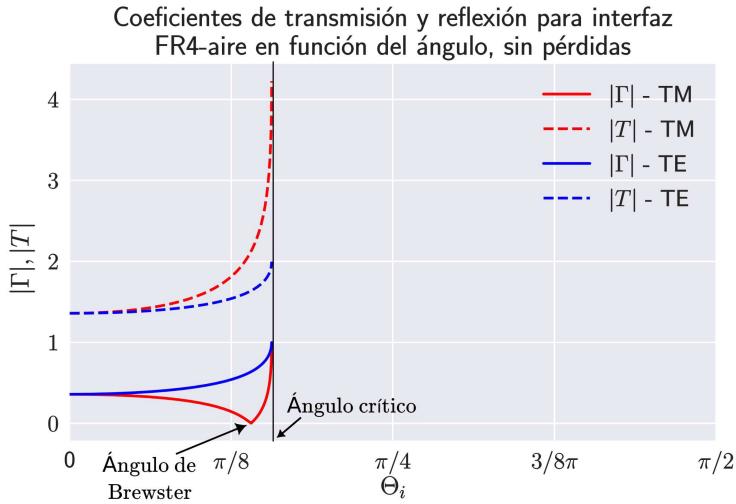


FIGURA 1.5: Comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso de incidencia FR4-aire.

### 1.3.2. Ángulo de Brewster y ángulo crítico

Se conoce como ángulo de Brewster al ángulo de incidencia  $\theta_i$  necesario para que se produzca reflexión nula ( $\Gamma = 0$ ) en una interfaz, cuando sobre ella incide una onda plana en forma oblicua. Este efecto se da únicamente para la polarización TM, es decir, cuando existe componente de campo eléctrico en la dirección normal a la interfaz, por lo que suele ser utilizado como mecanismo para lograr polarización de una onda electromagnética.

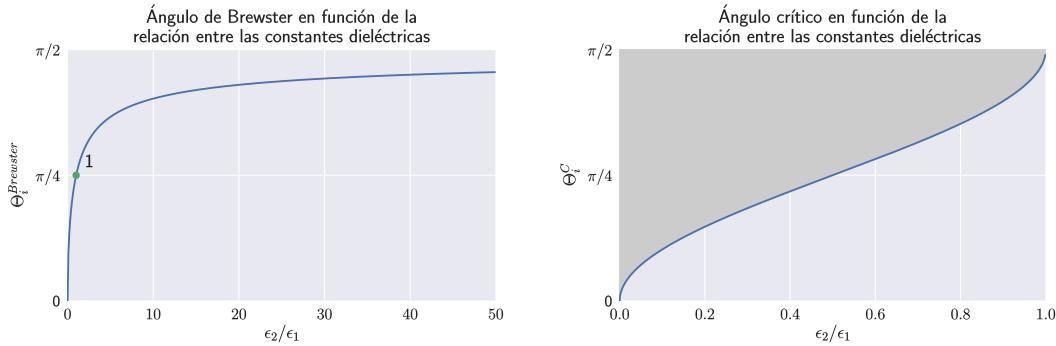
Si se anulan los coeficientes de reflexión mostrados en la tabla 1.1, y se utilizan las ecuaciones 1-29, se puede deducir que la polarización TE no presenta ángulo de Brewster<sup>8</sup>, aunque sí lo hace la polarización

<sup>8</sup>Para lograr reflexión nula en TE se requiere que  $\sin \theta_i / \sin \theta_t = \cos \theta_i / \cos \theta_t = \eta_1 / \eta_2$ , lo cual es imposible.

TM<sup>9</sup>, cuando  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ . Aplicando esta condición en la Ley de Snell (ecuación 1-29b) se obtiene la expresión del ángulo de Brewster:

$$\tan \theta_B = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (1-30)$$

Como se observa en la figura 1.6(a), el ángulo de Brewster tiende a  $90^\circ$  cuando la permeabilidad eléctrica del segundo medio es mucho mayor a la del primero, lo que significa que para evitar reflexiones, el ángulo de incidencia debe ser rasante. Cuando se da el caso contrario, en que la permeabilidad eléctrica del medio incidente es mayor a la del medio de transmisión, el ángulo de Brewster se vuelve menor a  $45^\circ$ , de lo que se deduce que una incidencia *casi* perpendicular a la interfaz, y en consecuencia con polarización *cercana* a TEM (aunque no exactamente TEM) lograría evitar la reflexión. El ángulo de  $45^\circ$  cuando las permeabilidades eléctricas de ambos medios son iguales es meramente anecdótico, ya que si no existen diferencias entre los dos medios que forman la interfaz, la misma no existe, y por lo tanto no hay onda reflejada para *ningún* ángulo de incidencia.



(a) Ángulo de Brewster en función de  $\epsilon_2/\epsilon_1$ .      (b) Ángulo crítico y rango de reflexión total en función de  $\epsilon_2/\epsilon_1$ .

FIGURA 1.6

En la figura 1.4 se puede observar el comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión alrededor del ángulo de Brewster para polarización TM, cuando no se consideran pérdidas. Para polarización TE, el ángulo de Brewster no existe, y una situación similar se da cuando existen pérdidas en los materiales, incluso para polarización TM. En la figura 1.5 también se puede observar el fenómeno de ángulo de Brewster, aunque debido a la dirección de la onda incidente, el mismo es mucho menor.

En ángulo crítico se define como el ángulo de incidencia para el cual la onda incidente es totalmente reflejada, y la onda transmitida no se propaga a la segunda región.

Si se observan las expresiones del coeficiente de transmisión de la tabla 1.1, el único valor de  $\theta_i$  para el cual la transmisión es nula es  $\pi/2$ , es decir, incidencia rasante. Sin embargo, a partir de la ecuación 1-29b, se obtiene que  $\sin \theta_t = \eta_2/\eta_1 \sin \theta_i$ . Se puede observar que en los casos en que  $\eta_2 > \eta_1$  es

<sup>9</sup>Para lograr reflexión nula en TM se requiere que  $\sin \theta_i / \sin \theta_t = \cos \theta_t / \cos \theta_i = \eta_1 / \eta_2$ , lo cual no supone una contradicción. Multiplicando la ecuación 1-29b y el valor de  $\Gamma$  para polarización TM, se obtiene que  $\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \theta_t \cos \theta_t$ , ó  $\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_t$ , que se satisface cuando  $2\theta_i = \pi - 2\theta_t$ , de modo que  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ .

possible que el ángulo de transmisión alcance el valor  $\pi/2$  antes de que lo haga en ángulo de incidencia. El ángulo crítico, entonces, surge de la expresión 1-31, graficada en la figura 1.6. En la gráfica se puede observar que si  $\epsilon_2 = \epsilon_1$ , el único ángulo para el que hay reflexión completa es el rasante. A medida que disminuye la relación entre las permeabilidades dieléctricas, el valor del ángulo crítico disminuye, hasta que el valor de la permitividad dieléctrica del segundo medio es mucho mayor a la del primero, lo que vuelve a las impedancias de onda muy disimiles, generando que haya reflexión total para cualquier ángulo de incidencia.

$$\sin \theta_i^c = \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_t|_{\theta_t=\pi/2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \implies \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (1-31)$$

Para ángulos mayores a  $\theta_c$ , las expresiones del coeficiente de reflexión se vuelven complejas y de módulo 1, por lo que toda la energía electromagnética es reflejada, y la onda transmitida tiene un comportamiento evanescente, como se muestra en la figura 1.7. En la ecuación 1-31 se observa que si  $\theta_i > \theta_c$ , el ángulo  $\theta_t$  pierde significado físico, debido a que  $\sin \theta_t$  debería ser mayor a 1 para cumplir la ecuación.

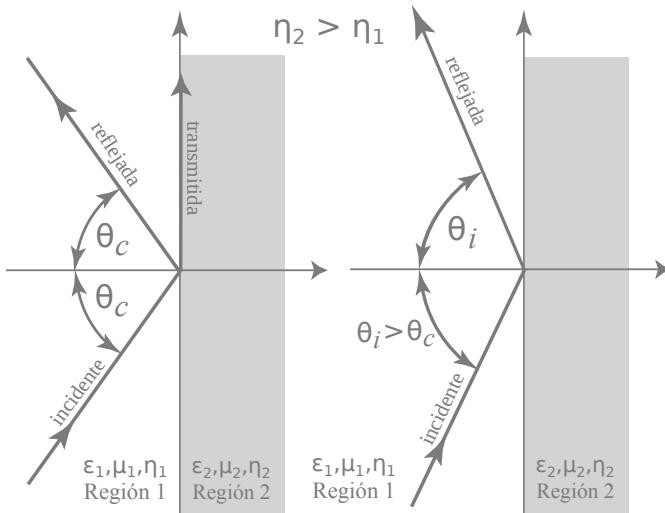


FIGURA 1.7: Ilustración del comportamiento de una onda plana durante la incidencia con ángulo crítico y con ángulo mayor al  $\theta_c$ .

Se debe notar que en el argumento anterior no se consideró la polarización de la onda incidente, por lo que la reflexión completa se puede dar tanto en modo TM como en modo TE, siempre y cuando la incidencia se produzca desde el medio ópticamente más denso al menos denso [6], como se muestra en la figura 1.5. Sin embargo, resulta útil expresar el comportamiento de los campos.

Para el caso de una onda incidente con una polarización lineal arbitraria como la expresada en la ecuación 1-26, se debe considerar que la componente longitudinal a la interfaz del vector de onda  $\vec{\gamma}$  se mantendrá constante, de modo que  $\gamma_{2z} = \gamma_{1z} = \gamma_1 \sin \theta_i$ . La componente transversal a la interfaz, en cambio, será  $\gamma_{2x} = \gamma_2 \cos \theta_t = \gamma_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \gamma_{2x}$ . Dado que para el caso en que el ángulo incidente es mayor al ángulo crítico se requiere que  $\sin \theta_t > 1$ , el valor de  $\gamma_{2x}$  será imaginario,  $-i\alpha$ <sup>10</sup>. De esta forma, para

<sup>10</sup>El signo negativo se desprende de la imposibilidad física de un crecimiento exponencial del valor del campo, lo cual descarga la posibilidad de que el signo sea positivo

direcciones de campos arbitrarias, y teniendo en cuenta el hecho de que el vector  $\vec{\gamma}$  se desarrolla sobre el plano de incidencia:

$$\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{-j\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{r}} = \vec{E}_2 e^{-j(\gamma_{2x}x + \gamma_{2z}z)} = \vec{E}_2 e^{-j(\beta z - j\alpha x)} = \vec{E}_2 e^{-j\beta z} e^{-\alpha x} \quad (1-32a)$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}, t) = \vec{H}_2 e^{-j\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{r}} = \vec{H}_2 e^{-j(\gamma_{2x}x + \gamma_{2z}z)} = \vec{H}_2 e^{-j(\beta z - j\alpha x)} = \vec{H}_2 e^{-j\beta z} e^{-\alpha x} \quad (1-32b)$$

Se observa que en la dirección perpendicular a la interfaz hay un comportamiento evanescente o exponencial decreciente de la onda transmitida, mientras que existe propagación en la dirección paralela a la interfaz, dando lugar a lo que se conoce como onda de superficie.

La ecuación del módulo del vector de onda (1-22) resulta redefinida como  $\beta_x^2 - \alpha_z^2 = \gamma_2^2$ , de donde se deduce que  $\alpha_z = \sqrt{\gamma_x^2 \sin^2 \theta_i - \gamma_2^2}$ .

## 1.4. Guias de ondas

Suponiendo una guía de ondas de forma arbitraria en la que la energía electromagnética se propaga en la dirección  $z$ , los campos eléctrico y magnético se pueden expresar como la suma de sus componentes longitudinales (en la dirección  $z$ ) y sus componentes transversales (en el plano  $xy$ ), con constantes  $\gamma_z$  y  $\gamma_t$ , respectivamente, de modo que  $\gamma_z + \gamma_t = \gamma$ , y dependientes sólo de la posición en el plano transversal, de manera que:

$$\vec{E}(x, y, z) = [\vec{e}_{xy}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)] e^{-j\gamma z} \quad (1-33)$$

Aplicando las ecuaciones rotacionales de Maxwell (Faraday y Ampère en la ecuación 1-1), considerando una región libre de cargas y un comportamiento armónico de los campos, así como un comportamiento sin pérdidas ( $\gamma_z = \beta_z$ ), se puede deducir que las componentes transversales quedan en términos de las componentes longitudinales [6]:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j}{\gamma_t^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & H_y &= \frac{-j}{\gamma_t^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_x &= \frac{-j}{\gamma_t^2} \left( \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & E_y &= \frac{j}{\gamma_t^2} \left( \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \beta_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1-34)$$

donde se definió  $\gamma_t^2 = \gamma^2 - \beta_z^2$  como el número de onda de corte, siendo  $\gamma = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , que para el caso sin pérdidas es, además,  $\gamma = \beta = 2\pi/\lambda$ , el número de onda en el material que rellena la línea de transmisión.

Cuando no existen componentes de campo en la dirección de propagación,  $z$ , según las ecuaciones 1-34, no existen campos en las direcciones transversales si  $\gamma_t \neq 0$ . La indeterminación generada por el hecho de que  $\gamma_t$  se anula da como resultado que  $\beta_z = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \beta$ , de modo que no existe número de onda de corte, y haciendo que la impedancia de onda sea  $\eta$ . A este modo de propagación sobre una guía de ondas se lo llama TEM (transversal electromagnético). Los campos transversales satisfacen que el Laplaciano es 0, de modo que se comportan como un campo electrostático, y este es el motivo por el cual no pueden existir ondas TEM en guías de ondas de un único conductor.

Cuando la componente  $z$  del campo eléctrico se anula, el modo de propagación se denomina TE (transversal eléctrico), y pueden utilizarse las relaciones descriptas en la ecuación 1-34 para obtener el resto de los campos. La impedancia de onda, en este caso, resulta  $Z_{TE} = \gamma\eta/\beta_z$ , dependiente de la frecuencia.

Cuando la componente  $z$  del campo magnético se anula, el modo de propagación es TM (transversal magnético), y con el mismo procedimiento que antes, se puede hallar su impedancia de onda, que resulta  $Z_{TM} = \beta_z\eta/\gamma$ .

## 1.5. Ondas de superficie

Existen estructuras abiertas que son capaces de mantener el campo electromagnético íntimamente ligadas a ellas, de forma que el mismo decaiga exponencialmente con la distancia a las mismas (comportamiento evanescente), y simultáneamente permiten propagación de energía en una dirección  $z$  (con un decrecimiento inverso a la raíz cuadrada de la distancia, debido a la expansión del frente de onda), dando lugar a lo que se conoce como ondas de superficie [8]. Estas estructuras se denominan guías de ondas superficiales, y pueden consistir en planos conductores recubiertos de dieléctrico, en planos corrugados o en simples interfaces entre dos medios distintos. Uller inauguró el campo en 1903, y luego Zenneck y Sommerfeld, entre 1907 y 1909, las utilizaron para explicar la propagación de ondas en la superficie terrestre, aunque este último utilizó la expresión “ondas de superficie” para referirse al efecto conjunto de ondas espaciales y ondas de superficie [8], que no se corresponde completamente con la definición actual. Recién en la década de 1950 se realizaron estudios teóricos de importancia, que permitieron hallar aplicaciones y nuevas estructuras que permiten la propagación de este tipo de ondas.

En la actualidad existen numerosos tipos de ondas de superficie, entre las que se destacan las ondas Zenneck (utilizadas en bajas frecuencias, cuando los medios intervinientes poseen altas pérdidas), las ondas de tipo resonante (que surgen cuando una onda incide sobre un material periódico), las ondas de superficie no lineales (que se generan en medios no lineales), los plasmones (utilizados en altas frecuencias, cuando los medios tienen bajas pérdidas) y las ondas de Dyakonov (donde al menos uno de los materiales es anisotrópico).

Para este trabajo, resultan de importancia las ondas de Zenneck, ya que permiten explicar el comportamiento de las ondas sobre una placa dieléctrica fina que posee un plano conductor en una de sus caras. Una representación tridimensional de las mismas se puede observar en la figura 1.8.

Si se considera que una onda plana incide con ángulo de Brewster en modo TM sobre una interfaz entre dos medios de bajas pérdidas ( $\epsilon'' \ll \epsilon'$ ), cada uno con una permitividad eléctrica  $\epsilon_i$  y una permeabilidad magnética  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ , como indica la figura 1.9, no existirá energía reflejada. De esta forma, toda la energía incidente es entregada a la interfaz, y se obtienen las expresiones 1-35. Con el fin de simplificar dichas ecuaciones, se considera que el medio 1 es aire, de modo que  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\mu_1 = \mu_0$  y, en consecuencia,  $\eta_1 = \eta_0$ .

$$H_{1y} = Ae^{-j(z \underbrace{\gamma_1 \sin \theta_i}_{\gamma_z} - x \underbrace{\gamma_1 \cos \theta_i}_{\gamma_{x2}})}, \quad x > 0 \quad j\omega\epsilon E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (1-35a)$$

$$H_{2y} = ATe^{-j(z \underbrace{\gamma_2 \sin \theta_t}_{\gamma_z} - x \underbrace{\gamma_2 \cos \theta_t}_{\gamma_{x2}})}, \quad x < 0 \quad j\omega\epsilon E_z = -\frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (1-35b)$$

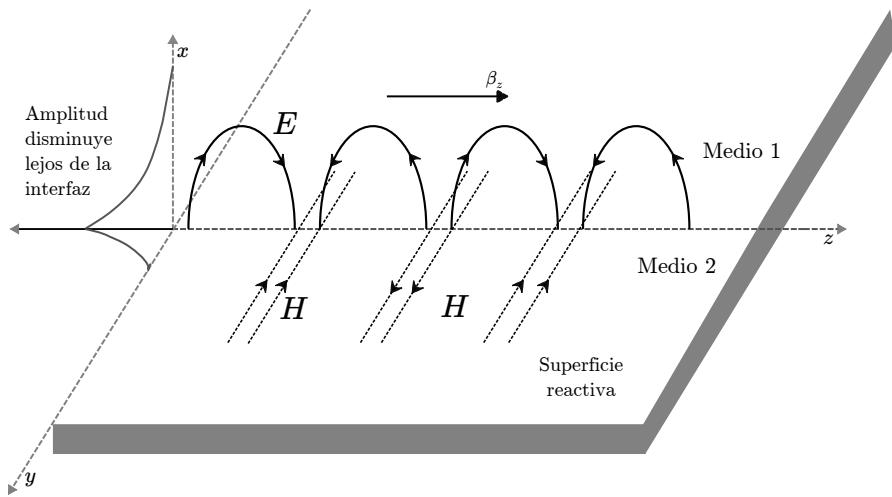


FIGURA 1.8: Representación gráfica del comportamiento de una onda de superficie sobre una interfaz reactiva.

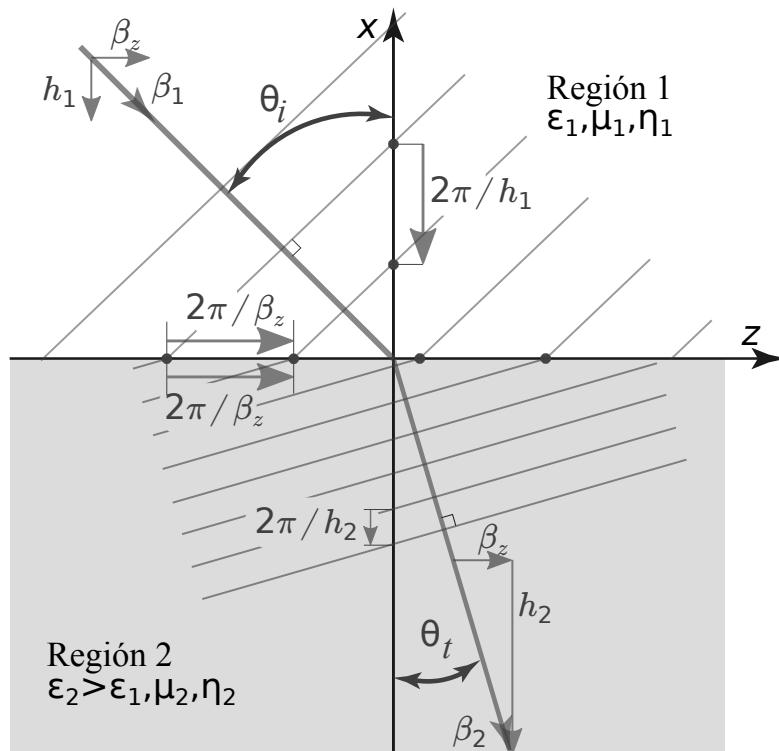


FIGURA 1.9: Ilustración del comportamiento de una onda plana durante la incidencia con ángulo de Brewster. Las rectas paralelas representan los frentes de onda, es decir, son rectas de fase constante. Es importante destacar que la longitud de onda paralela a la interfaz,  $2\pi/\beta_z$ , se mantiene constante a ambos lados, dado que sobre la interfaz se intersecan las rectas de fase constante.

La componente longitudinal de los vectores de onda,  $\gamma_z$ , es igual a ambos lados de la interfaz, como se muestra en la figura 1.9, de modo que es  $\gamma_1 \sin \theta_t = \gamma_z = \gamma_2 \sin \theta_i$ . Las componentes normales a la interfaz, que llamaremos  $\gamma_{x_i}$ ,  $i = 1, 2$ , deben cumplir la expresión de la ecuación 1-36, y están también mostradas en la figura 1.9.

$$\gamma_{x_1}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_1^2 \quad \gamma_{x_2}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_2^2 \quad (1-36)$$

Las impedancias de onda en ambas regiones se obtienen como la relación entre los campos tangenciales a la interfaz sobre la que se incide, de modo que:

$$Z_1 = \frac{E_{z_1}}{H_{y_1}} = \eta_0 \cos \theta_i \implies Z_1 = \frac{\gamma_{x_1}}{\gamma_1} \eta_0 \quad (1-37a)$$

$$Z_2 = \frac{E_{z_2}}{H_{y_2}} = \eta \cos \theta_t \implies Z_2 = \frac{\gamma_{x_2}}{\gamma_2} \eta \quad (1-37b)$$

Para poder considerar que toda la energía de la onda incidente se transmite desde el primer medio al segundo, debe suceder que las impedancias de onda a ambos lados de la interfaz sean iguales ( $Z_1 = Z_2$ ). Igualando las ecuaciones 1-37a y 1-37b, se deduce<sup>11</sup> que, en forma general, si el medio sobre el que se incide tiene pérdidas, entonces  $\gamma_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2}$  son complejos. De esta manera,  $\gamma_{x_1} = \beta_{x_1} - j\alpha_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2} = \beta_{x_2} - j\alpha_{x_2}$ , lo que significa que además de avanzar en fase, la onda pierde energía, pues tiene un comportamiento evanescente, de modo que el vector de Poynting tiene una componente en la dirección perpendicular a la interfaz, que se atribuye al consumo de energía de la misma [8]. A mayores pérdidas, mayor será la inclinación del vector de Poynting resultante respecto de la interfaz. Como  $\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_{z_1} + \vec{\gamma}_{x_1}$ , la constante de propagación,  $\gamma_{z_1} = \beta_{z_1} - j\alpha_{z_1}$ , posee también un valor complejo.

El campo magnético queda determinado por:

$$H_y = \begin{cases} Ae^{-j\beta_z z - \alpha_{z_1} z + j\beta_{x_1} x - \alpha_{x_1} x}, & x > 0 \\ Ae^{-j\beta_z z - \alpha_{z_2} z + j\beta_{x_1} x + \alpha_{x_2} x}, & x < 0 \end{cases} \quad (1-38)$$

Se observa que los planos de fase constante, en el aire, son los correspondientes a las exponenciales imaginarias de la ecuación anterior,  $\beta_z z - \beta_{x_1} x = cte$ , y se muestran en la figura 1.9. Los planos de amplitud constante se obtienen considerando las exponenciales decrecientes de las expresiones, de forma que  $\alpha_{z_1} z + \alpha_{x_1} x = cte$ , que para el caso analizado en la figura 1.9, son rectas con pendiente negativa (no mostradas en la figura).

Para bajas pérdidas,  $\alpha_{z_i}$ ,  $i = 1, 2$ , será pequeño, por lo que habrá baja atenuación para la onda que se desplaza en dirección  $z$ , pero debido a que  $\alpha_{x_1}$  y/o  $\alpha_{x_2}$  también serán bajas, la energía no estará concentrada cerca de la interfaz.

Si se considera una superficie con una impedancia de onda para polarización TM normalizada respecto de  $\eta_0$ ,  $Z_s = R_s + jX_s$ , independiente del ángulo de incidencia, entonces, al igualar la impedancia de

<sup>11</sup>Al igualar las expresiones de las impedancias de onda, se obtiene  $\frac{\gamma_{x_1} \eta_0}{\gamma_1} = \frac{\gamma_{x_2} \eta_2}{\gamma_2}$ . Recordando que  $\gamma_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ,  $\gamma_2 = \omega\sqrt{\mu_0(\epsilon' - j\epsilon'')}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  y  $\eta = \sqrt{\mu_0/(\epsilon' - j\epsilon'')}$ , se deduce que la relación entre  $\gamma_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2}$  es compleja:  $\gamma_{x_1} (\epsilon' - j\epsilon'') = \gamma_{x_2} \epsilon_0$ , de modo que en forma general se puede considerar que tanto  $\gamma_{x_1}$  como  $\gamma_{x_2}$  son complejos.

onda a la impedancia de superficie, y teniendo en cuenta las igualdades de la ecuación 1-37, resulta, en el caso TM:

$$\gamma_{x_1} = \gamma_1 \frac{Z_1}{\eta_0} = \gamma_1 Z_s = \gamma_1 R_s + j\gamma_1 X_s \quad (1-39)$$

$$\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z = \sqrt{(\gamma_1^2 - \gamma_{x_1}^2)} = \gamma_1 \sqrt{1 + X_s^2 - R_s^2 - 2jR_sX_s} \quad (1-40)$$

La gráfica de las componentes real e imaginaria de  $\gamma_z$  se muestra en la figura 1.10. Se puede observar que, cuando la reactancia es inductiva (valores positivos de  $X_s$ ),  $\alpha_z$ , presenta valores positivos, por lo que habrá atenuación en la dirección de propagación  $z$  ([a] en la figura)<sup>12</sup>. A mayor reactancia, habrá una mayor disminución de la amplitud del campo a medida que aumenta el valor de  $z$ , aunque la mayor variación en el coeficiente de atenuación se observa con la variación de la resistencia,  $R_s$ , cuando existe un comportamiento reactivo apreciable ([b] en la figura).

Si la reactancia es nula, un valor de  $\beta_z$  se obtiene sólo si la resistencia es muy baja o nula ([c] en la figura). A partir de un umbral de resistencia de superficie, dependiente de los medios materiales, cuando no existe comportamiento reactivo, no hay propagación de onda de superficie ( $\beta_z = 0$ , [d] en la figura).

El comportamiento de  $\gamma_{x_1}$ , descripto en la ecuación 1-39 también regula el comportamiento de la onda de superficie, dado que si la magnitud de la parte imaginaria de  $\gamma_{x_1}$ ,  $\alpha_{x_1}$ , es muy pequeña, la onda no estará lo suficientemente cerca de la interfaz para ser guiada por ella. Un valor alto de  $\alpha_{x_1}$  se da cuando la reactancia,  $X_s$  es inductiva ( $X_s > 0$ ), lo cual coincide con el requisito para  $\alpha_{z_i}, i = 1, 2$ . Dicho de otra forma, la reactancia de superficie es la responsable del decrecimiento exponencial de la onda al aumentar la distancia con la interfaz que funciona como guía.

Analizando la ecuación 1-40, se deduce que un producto  $R_sX_s$  pequeño dará lugar a atenuaciones pequeñas en la onda de superficie, de modo que para que se propague una onda sobre la interfaz, si se establece  $X_s$  grande para obtener un valor de  $\beta_z$  grande, se deben disminuir el comportamiento resistivo tanto como sea posible ([e] en la figura).

La velocidad de propagación se obtiene directamente de la componente real de  $\gamma_z$  que, si  $R_s$  es pequeño y  $X_s$  es grande, resulta, a partir de la expresión 1-40,  $\beta_z = \beta_1 \sqrt{1 + X_s^2}$ , de forma que la velocidad de propagación es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c}{\sqrt{1 + X_s^2}} \quad (1-41)$$

En los casos en que la componente reactiva de la impedancia de superficie es grande, el valor de la velocidad de propagación es menor al de la luz (denotado como [f] en la figura).

Cuando la interfaz es de tipo aire-conductor, la componente inductiva de la impedancia de superficie (relacionada a la profundidad de penetración) resulta igual a la componente resistiva, de forma que [6]:

<sup>12</sup>Esto se debe a que si el campo eléctrico en la dirección  $y$  se escribe como se indica en la ecuación 1-35,  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_{z_i}, i = 1, 2$  y  $\gamma_{x_1} = \beta x_1 + j\alpha_{x_1}$ , el exponente se expresa como  $-j(\beta_z - j\alpha_{z_1})z + j(\beta_{x_1} + j\alpha_{x_1})x$ . Para dirección de propagación  $z$ , con  $z > 0$ , la componente de atenuación del exponente de la expresión dada resulta en  $-\alpha_{z_i}z, i = 1, 2$ . Para que el comportamiento resulte decreciente,  $\alpha_{z_i}$  debe ser mayor a 0.

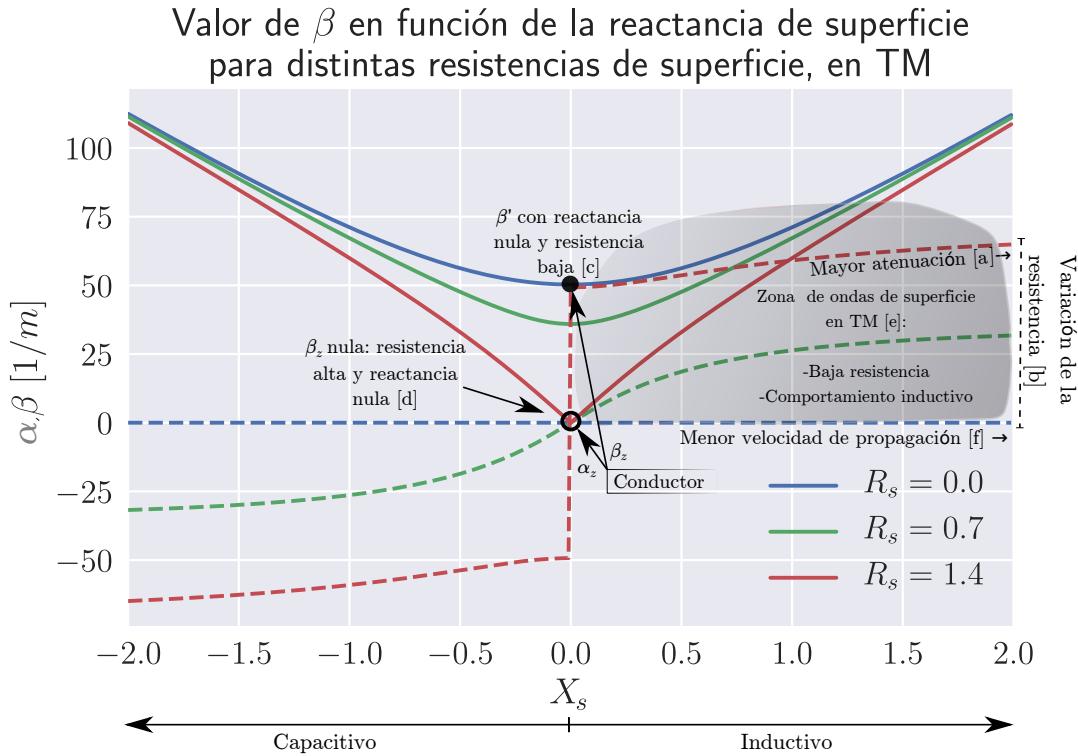


FIGURA 1.10: Comportamiento de la constante de propagación superficial  $\gamma_z$  en función de la resistencia y reactancia superficial para el caso de incidencia TM. Las líneas punteadas representan la parte imaginaria de  $\gamma_z$ , y las líneas completas representan la parte real, de forma que  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z$ .

$$\eta = \frac{1+j}{\sigma\delta} \quad (1-42)$$

Aplicando las ecuaciones 1-37, se obtiene que

$$\gamma_x = \gamma_1(1+j)\sqrt{\frac{\gamma_1}{2\sigma Z_0}} \quad (1-43)$$

$$\gamma_z = \gamma_1\sqrt{1 - \frac{j\gamma_1}{\sigma Z_0}} \approx \gamma_1 - \frac{j\gamma_1^2}{2\sigma Z_0} \quad (1-44)$$

En general, un plano conductor soporta ondas de superficie, y la atenuación en la dirección de propagación es muy baja (ver figura 1.10), pero no es capaz de lograr una atenuación en la dirección normal al mismo tal que la energía se mantenga concentrada en la superficie para poder ser utilizada como guía de ondas. Esto se debe a que dado que  $\alpha_{x_2}$  también es despreciable, especialmente debido a la alta conductividad del metal. Para lograr que la energía de la onda decaiga rápidamente lejos de la interfaz es necesario aumentar considerablemente la reactancia de la superficie, para lo que se suele agregar al conductor una capa dieléctrica, que además no aumenta considerablemente la resistividad.

Para el caso de ondas de superficie en modo TE, los campos están dados por la ecuación 1-45. La impedancia de onda, en tanto, queda expresada como indica la ecuación 1-46. Considerando que, para

evitar reflexiones, la impedancia de superficie tiene que ser igual a la impedancia de onda, se obtiene la expresión para la constante de propagación en el sentido perpendicular a la interfaz mostrada en la ecuación 1-47, donde nuevamente la impedancia de superficie del conductor es  $Z_s = R_s + jX_s$ .

$$E_y = Ae^{j\gamma_x x - j\gamma_z z} \quad j\omega\mu_0 H_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad j\omega\mu_0 H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (1-45)$$

$$Z_1 = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{\omega\mu_0}{\gamma_{x_1}} = -\frac{\eta\gamma_1}{\gamma_{x_1}} \quad (1-46)$$

$$\gamma_{x_1} = -\frac{\gamma_1}{Z_s} = -\gamma_1 \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} - j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2} \quad (1-47)$$

Se observa que para que el valor de  $\alpha_{x_1}$  resulte positivo, de manera que se dé un decrecimiento exponencial desde la superficie, el valor de  $X_s$  tiene que ser negativo, por lo que el comportamiento de la superficie tiene que ser capacitivo.

La segunda condición para la existencia de ondas de superficie, la propagación de los campos, está asegurada si  $\gamma_z$  es positivo, y si la atenuación en la dirección de propagación, parametrizada por  $\alpha_z$ , es baja. La expresión de  $\gamma_z$  para el caso TE resulta, a partir de 1-47:

$$\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z = \sqrt{(\gamma_1^2 - \gamma_{x_1}^2)} = \frac{\gamma_1}{R_s^2 + X_s^2} \sqrt{1 + X_s^2 - R_s^2 + 2jR_sX_s} \quad (1-48)$$

Gráficas de la expresión anterior se muestran en la figura 1.11, donde se pueden observar valores de  $\beta_z$  y  $\alpha_{z_1}$  en función de la reactancia  $X_s$ , para algunos valores de resistencia de superficie  $R_s$ . Resulta importante destacar que para valores en que  $X_s$  es negativa (reactancia capacitiva), el valor de  $\alpha_z$  es físicamente realizable, ya que da lugar a un decrecimiento exponencial, y no a un incremento. Por otro lado, al contrario que en el caso de las ondas TM, a medida que la reactancia capacitativa aumenta en módulo, la constante de propagación tiende a estabilizarse en lugar de crecer linealmente, aunque sí decrece la constante de atenuación  $\alpha_z$ . Cuando la resistencia de superficie es muy baja, los valores de  $\beta_z$  para reactancia  $X_s$  nula tienden a ser muy altos. Cuando los valores de resistencia aumentan ligeramente, al igual que en el caso TM, el valor de  $\beta_z$  se vuelve nulo, lo que obliga a presentar un comportamiento capacitivo para la propagación de ondas de superficie en modo TE.

Entre las distintas formas de lograr que una interfaz conductor-aire permita el guiado de ondas de superficie, una de las más efectivas consiste en el recubrimiento de la superficie metálica por una capa dieléctrica fina, como se muestra en la figura 1.12.

Para el caso TM, si se considera que el campo magnético tiene la forma de la ecuación 1-49 en el espacio libre circundante a la estructura, entonces el campo magnético en el interior del dieléctrico resultará de la forma expresada en la ecuación 1-50, donde se cumple que  $\gamma_{x_1}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_1^2$  y  $\gamma_{x_2}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_2^2 = \epsilon_r \gamma_1^2$ .

$$H_{1y} = Ae^{j\gamma_{x_1} x - j\gamma_z z}, \quad x > t \quad (1-49)$$

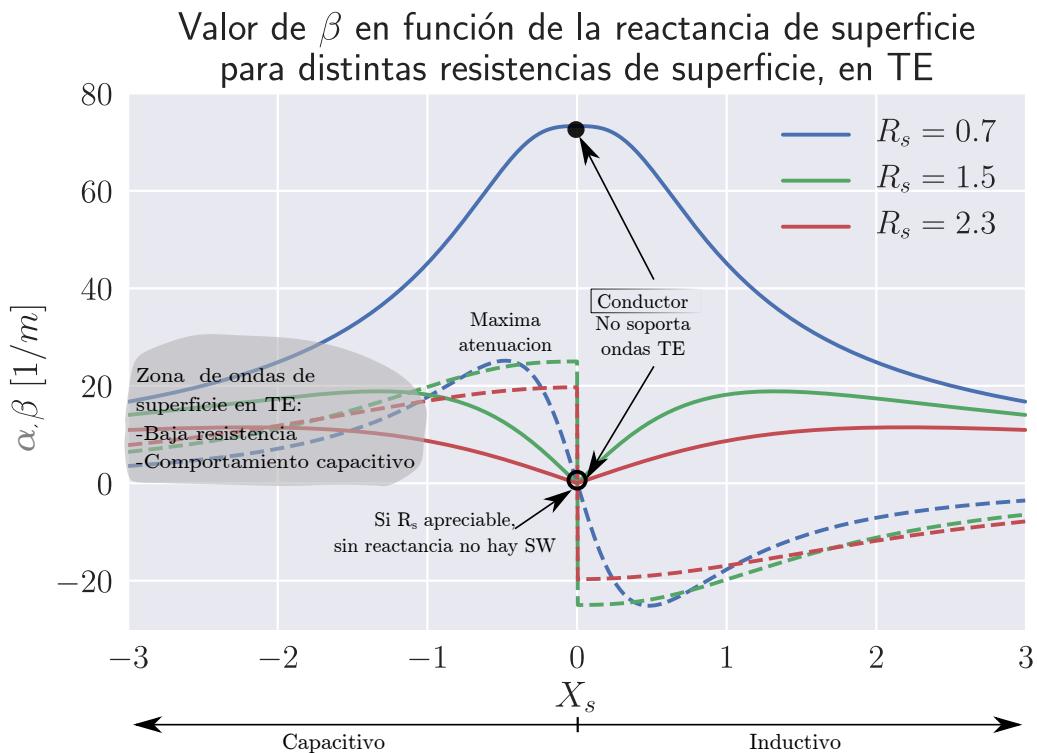


FIGURA 1.11: Comportamiento de la constante de propagación superficial  $\gamma_z$  en función de la resistencia y reactancia superficial para el caso de incidencia TE. Las líneas punteadas representan la parte imaginaria de  $\gamma_z$ , y las líneas completas representan la parte real, de forma que  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z$ .

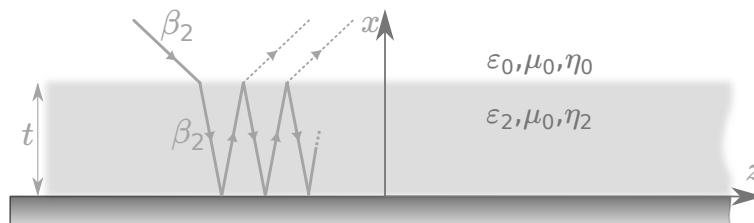


FIGURA 1.12: Incidencia sobre un conductor recubierto por un dieléctrico.

$$H_{2y} = [Be^{j\gamma_{x_2}x} + Ce^{-j\gamma_{x_2}x}]e^{-j\gamma_z z}, \quad 0 \leq x \leq t \quad (1-50)$$

Dado que en toda interfaz las componentes tangenciales de los campos se conservan, y a que las componentes tangenciales del campo eléctrico sobre el conductor se anulan, se deduce que  $H_{2y}$  es un coseno, y se obtienen<sup>13</sup> las expresiones 1-51 y 1-52.

<sup>13</sup>De la ecuación 1-49 se deriva el campo eléctrico, utilizando la ecuación de Ampère. Al establecer la condición que indica que sobre la interfaz con el conductor no existe campo eléctrico paralelo a la superficie del mismo (se asume un conductor perfecto), se concluye que el valor de B y de C en la ecuación 1-50 coinciden. Aplicando la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los campos

$$\gamma_{x_2} \tan(\gamma_{x_2} t) = -j\gamma_{x_1} \epsilon_{r_2} \quad (1-51)$$

$$\gamma_1^2(\epsilon_{r_2} - 1) = \gamma_{x_2}^2 - \gamma_{x_1}^2 \quad (1-52)$$

Considerando que  $\gamma_{x_1}$  es puramente imaginario positivo<sup>14</sup>, la ecuación 1-52 se puede expresar como  $\gamma_1^2(\epsilon_{r_2} - 1) = \gamma_{x_2}^2 + |\alpha_{x_1}|^2$ . Si se multiplica esta nueva expresión por  $t^2$  y a la expresión 1-51 por  $t$ , se obtienen dos expresiones que dan lugar a un sistema de ecuaciones trascendentales que se pueden resolver gráficamente, dado que representan una esfera de radio  $\gamma_1 t \sqrt{\epsilon_{r_2} - 1}$  y una tangente:

$$\begin{cases} (\gamma_{x_2} t)^2 + (\alpha_{x_1} t)^2 = (\epsilon_{r_2} - 1)(\gamma_1 t)^2 \\ \gamma_{x_2} t \tan(\gamma_{x_2} t) = |\alpha_{x_1}| \epsilon_{r_2} t \end{cases} \quad (1-53)$$

Para el caso TE, la solución es similar, y en este caso las expresiones resultan (considerando, nuevamente, que  $\gamma_{x_1}$  es puramente imaginario positivo, es decir,  $\gamma_{x_1} = \alpha_{x_1}$ ):

$$\begin{cases} (\gamma_{x_2} t)^2 + (\alpha_{x_1} t)^2 = (\epsilon_{r_2} - 1)(\gamma_1 t)^2 \\ \gamma_{x_2} t \cot(\gamma_{x_2} t) = -|\alpha_{x_1}| \epsilon_{r_2} t \end{cases} \quad (1-54)$$

Las soluciones se pueden obtener gráficamente para ambos casos, mediante la intersección de las curvas correspondientes a las ecuaciones del sistema. Las gráficas, para distintas frecuencias, se muestran en la figura 1.13. Se puede observar que, dado que  $|\alpha_{x_1}|t$  no puede tomar valores negativos, las intersecciones que se dan en esas condiciones no son válidas como soluciones del sistema planteado, bajo las hipótesis consideradas.

A medida que aumenta la frecuencia, el valor del radio de los círculos aumenta. Se observa que siempre existe, al menos, un modo TM de propagación sobre el plano de tierra, dado que todas las intersecciones entre las curvas ocurren para valores de  $|\alpha_{x_1}|t$  mayores a 0, como se muestra en la figura 1.13(c). Para frecuencias en que el radio del círculo genera que el mismo intersecte a más secciones de la curva tangente, aparecerían modos de propagación superiores.

---

sobre la interfaz aire-dieléctrico, se obtiene una relación entre los valores de A y B. Queda expresado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -j\gamma_{x_1} e^{-j\gamma_{x_1} t} & -2\gamma_{x_2}/\epsilon_{r_2} \sin(\gamma_{x_2} t) \\ -e^{-j\gamma_{x_1} t} & 2 \cos(\gamma_{x_2} t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que la solución no sea trivial, el determinante de la matriz del sistema tiene que ser nula, lo que da como resultado  $\gamma_{x_2} \tan(\gamma_{x_2} t) = -j\gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}$ .

<sup>14</sup>Un análisis general requiere considerar  $\gamma_{x_1}$ ,  $\gamma_{x_2}$  y  $\epsilon_2$  como complejos, de manera que se puedan tener en cuenta las pérdidas. Para simplificar el desarrollo, se puede asumir que, dado que se trata de ondas de superficie, la parte imaginaria de  $\gamma_{x_1}$  deberá ser negativa, de manera que a mayor distancia de la interfaz, la intensidad de los campos decrezca exponencialmente. La parte real de  $\gamma_{x_1}$ , si bien puede existir, a efectos del estudio del comportamiento de la onda de superficie en la dirección de propagación, puede obviarse. Por otro lado, si se considera que el ancho del dieléctrico,  $t$ , es muy pequeño, de forma que se pueda considerar que  $\tan(\gamma_{x_2} t) \approx \gamma_{x_2} t$ , entonces la expresión 1-51 resulta aproximadamente  $\gamma_{x_2}^2 t = -j\gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}$ . Asumiendo, por lo explicado antes, que  $\gamma_{x_1}$  es valor puramente imaginario positivo, el valor de  $\gamma_{x_2}$ , obtenido de  $\gamma_{x_2}^2 t = \gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}$ , deberá ser real. Al argumento no descarta la existencia de valores complejos de  $\gamma_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2}$ , sino que permite una validación intuitiva del desarrollo posterior.

Para el caso TE, se observa que para frecuencias bajas no existe solución válida, como se muestra en la figura 1.13(d), por lo que no hay un modo fundamental TE por debajo de la frecuencia de corte, que se da para  $f_c = c/(4t\sqrt{\epsilon_r} - 1)$ , que en el caso graficado es de aproximadamente 25 GHz.

Para el caso de FR4, en el rango de frecuencias de interés para este trabajo, no existe, entonces, propagación de ondas de superficie de polarización TE, por lo que el análisis del modo TM reviste mayor importancia.

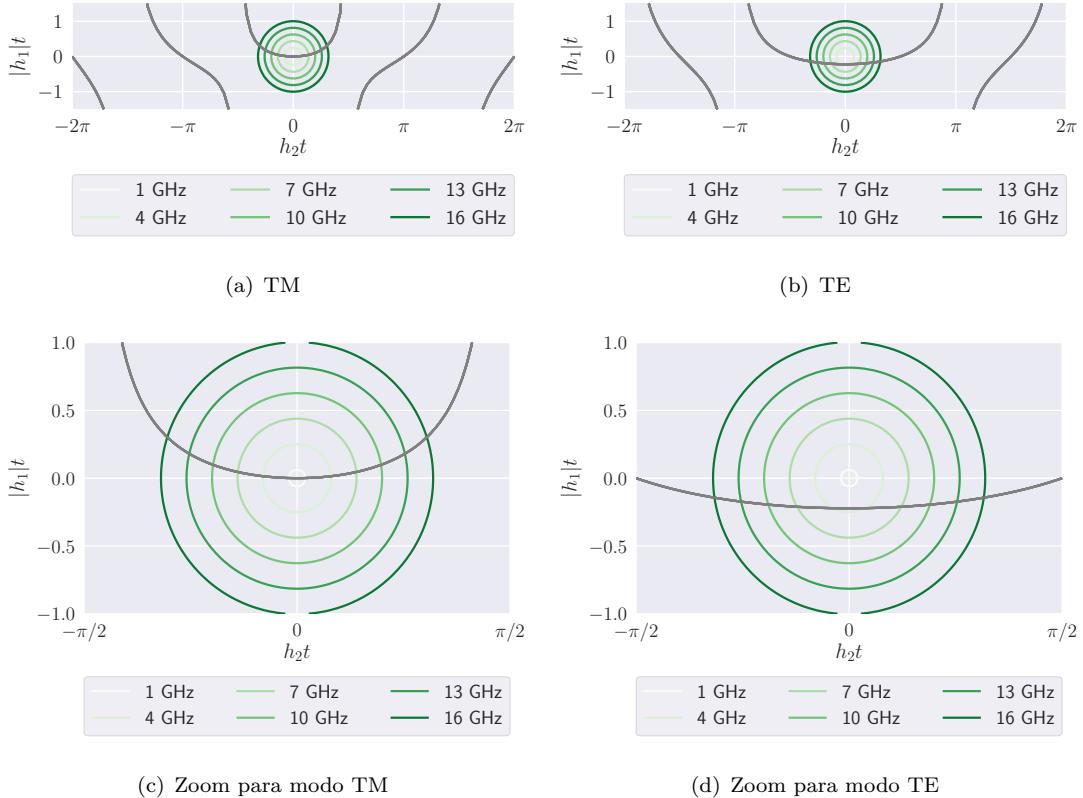


FIGURA 1.13: Curvas de los sistemas de ecuaciones que describen la existencia de ondas superficiales TM y TE, para distintas frecuencias, resuelto para el caso en que el dieléctrico es FR4 ( $\epsilon_r = 4,5$ ).

Obtenidos los valores de  $\gamma_{x_1}$  ( $\alpha_{x_1}$ ) y  $\gamma_{x_2}$ , se obtienen los campos del modo correspondiente de la onda de superficie [1]. En particular, para el análisis del comportamiento de la impedancia, las expresiones de los campos tangenciales a la interfaz resultan de mayor interés, dado que permiten obtener las impedancias de onda en el aire y el dieléctrico, como se indica en las expresiones 1-55a y 1-55b.

$$H_{y_1} = A e^{j\gamma_{x_1}(x-t)-j\gamma_z z}, \quad E_{z_1} = \frac{A\gamma_{x_1}}{\omega\epsilon_0} e^{j\gamma_{x_1}(x-t)-j\gamma_z z} \implies Z_1 = \frac{\gamma_{x_1}}{\omega\epsilon_0} = j \frac{\alpha_{x_1}}{\omega\epsilon_0} \quad (1-55a)$$

$$H_{y_2} = 2B \cos(\gamma_{x_2} x) e^{j\gamma_z z}, \quad E_{z_2} = \frac{-2B\gamma_{x_2} \sin(\gamma_{x_2} x) e^{-j\gamma_z z}}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}} \implies Z_2 = \frac{j\gamma_{x_2} \tan(\gamma_{x_2} x)}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}} \quad (1-55b)$$

Normalizando respecto de la impedancia intrínseca del vacío,  $\eta_0$ , se obtiene, considerando  $\theta_t$  el ángulo de transmisión desde el aire al dieléctrico que recubre el plano conductor,:

$$\frac{Z_1}{\eta_0} = j \frac{\alpha_{x_1}}{\omega \epsilon_0 \eta_0} = j \frac{\gamma_1 \cos \theta_i}{\omega \epsilon_0 \eta_0} = j \cos \theta_i \quad (1-56)$$

$$\frac{Z_2}{\eta_0} = j \frac{\gamma_{x_2} \tan \gamma_{x_2} x}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{r_2} \eta_0} = j \frac{\gamma_2 \cos \theta_t \tan(\gamma_2 x \cos \theta_t)}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{r_2} \eta_0} = j \frac{\cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \tan(\gamma_2 x \cos \theta_t) \quad (1-57)$$

Una onda incidente desde el aire, para evitar reflexiones y, por lo tanto, radiación desde la superficie que soporta una onda de superficie, debe estar adaptada a la impedancia de superficie que presenta el dieléctrico, que resulta de evaluar  $Z_2/\eta_0$  en la superficie:

$$Z_s^{TM} = j \frac{\cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \tan(\gamma_2 t \cos \theta_t) \quad (1-58)$$

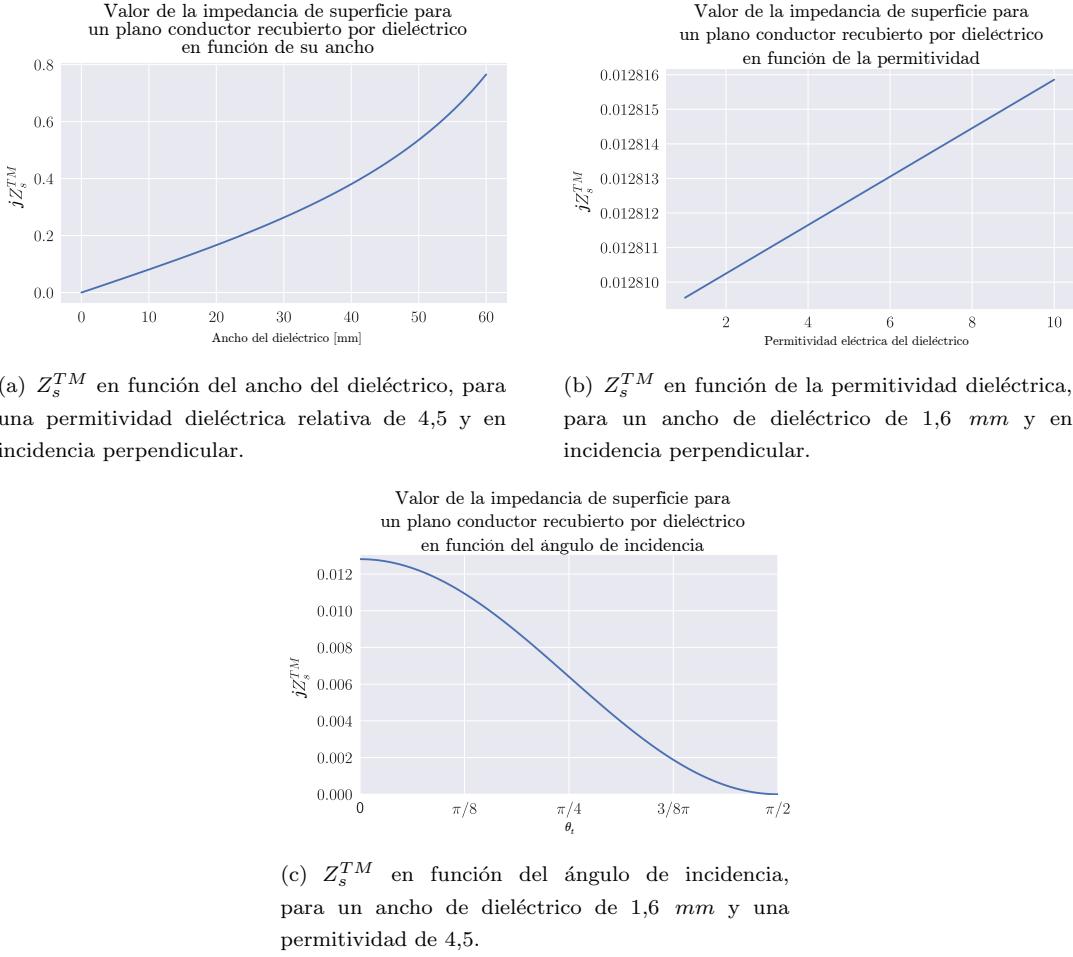


FIGURA 1.14: Valor de la impedancia de superficie en función de sus parámetros.

Esta impedancia es puramente imaginaria positiva<sup>15</sup>, por lo que tiene un comportamiento inductivo, permitiendo la formación de ondas de superficie en modo TM, dado que la constante de atenuación

<sup>15</sup>Si el dieléctrico presentara pérdidas, existiría también un término real [8], por lo que, además de facilitar la propagación de ondas de superficie, si el dieléctrico tiene bajas pérdidas, no aumenta la resistencia de superficie. Además, esta componente inductiva se debe sumar al efecto producido por

$\alpha_{x_i}, i = 1, 2$  logra que el campo se concentre cerca de la superficie. Los valores de  $\beta_z$  y  $\alpha_z$  no se ven modificados, pues el aporte del dieléctrico a la reactancia no es lo suficientemente alto. El ángulo  $\theta_t$  se obtiene de las relaciones de Snell (1-29b), por lo que se deduce que, al contrario que en el caso del conductor sin recubrimiento dieléctrico, el comportamiento es dependiente del ángulo de incidencia, como se muestra en la figura 1.14(c). Por otro lado, en la figura 1.14(a) se puede observar que el valor de la impedancia crece a medida que aumenta el ancho del dieléctrico, volviéndose más inductiva, de forma similar a la que se da cuando aumenta la permitividad (figura 1.14(b)).

Para el caso TE, los campos paralelos a la superficie son:

$$\begin{aligned} E_{y_1} &= Ae^{-j\gamma_{x_1}(x-t)-j\gamma_z z}, & H_z &= -\frac{A\gamma_{x_1}}{\omega\mu_0}e^{-j\gamma_{x_1}(x-t)-j\gamma_z z} \\ \implies Z_1 &= -\frac{\gamma_{x_1}}{\omega\mu_0} & (1-59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{y_2} &= A \sec(\gamma_{x_2} t) \cos(\gamma_{x_2} x) e^{-j\gamma_z z}, & H_{z_2} &= -\frac{A\gamma_{x_2} e^{j\gamma_z z}}{j\omega\mu_0} \sec(\gamma_{x_2} t) \sin(\gamma_{x_2} x) \\ \implies Z_2 &= \frac{j \cot(\gamma_{x_2} x)}{\gamma_{x_2} \omega\mu_0} & (1-60) \end{aligned}$$

Siguiendo la misma metodología que en el caso TM, igualando ambas impedancias, se obtiene:

$$Z_s^{TE} = j \frac{\cot(\gamma_2 \cos \theta_t)}{\gamma_2 \cos \theta_t \omega\mu_0} \quad (1-61)$$

## 1.6. Líneas de transmisión

La teoría de líneas de transmisión representa el paso intermedio entre el estudio de campos electromagnéticos y de circuitos impresos, permitiendo considerar el fenómeno de propagación de ondas como una extensión de la teoría de circuitos (aplicable cuando la longitud eléctrica del circuito es mayor a la longitud de onda de operación), o como una solución particular de las ecuaciones de Maxwell [1].

Las líneas de transmisión son redes de parámetros distribuidos, donde las corrientes y las tensiones, en contraposición a los circuitos de parámetros concentrados, pueden variar en magnitud y fase, debido a la dimensión física del circuito. El análisis de una línea se puede llevar a cabo estableciendo el comportamiento de los trozos infinitesimales que la componen, dispuestos en cascada para formar la estructura final, de forma que cada uno de ellos se pueda modelar utilizando circuitos de parámetros concentrados independientes de la frecuencia, estableciendo, entonces, impedancias  $Z'$  ( $\Omega/m$ ) y admitancias  $Y'$  ( $S/m$ ) por unidad de longitud, como se muestra, de forma general, en la figura 1.15.

La impedancia y la admitancia por unidad de longitud se pueden expresar como indica 1-62. Se debe tener en cuenta que los subíndices R y L se deben al comportamiento de "mano izquierda"<sup>16</sup> o "mano derecha"s asociado a cada componente. Si  $L'_R$  y  $C'_R$  son nulos, existe sólo un comportamiento "de mano

---

la componente inductiva de la impedancia de superficie del conductor, debida a la existencia de una profundidad de penetración.

<sup>16</sup>La expresión "material de mano izquierda" fue utilizada por primera vez por físico ruso Viktor Velesago en 1967, cuando propuso la posibilidad de la existencia de materiales en que la propagación de ondas se daría de forma que el campo eléctrico, el campo magnético y el vector de propagación formaran una triada de mano izquierda [9].

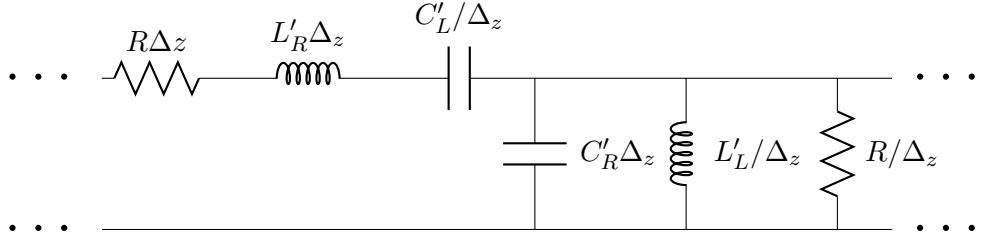


FIGURA 1.15: Circuito equivalente de porción de línea de transmisión.

izquierda”, donde las velocidades de fase y de grupo son antiparalelas, y donde tanto la permitividad eléctrica  $\epsilon$  como la permeabilidad magnética  $\mu$  son negativas, de forma que el índice de refracción también lo sea, dando lugar a una propagación de ondas en sentido inverso. Cuando  $L'_L$  y  $C'_L$  son nulos, el comportamiento es denominado ”de mano derecha”, y es el que corresponde a propagación de onda comúnmente analizada. Las componentes que corresponden al comportamiento de mano izquierda son, por sí solas, de existencia física imposibles, dado que las que generan comportamiento de mano derecha aparecen naturalmente por efectos constructivos. Las resistencias del circuito, por otro lado, representan las pérdidas dieléctricas y conductoras.

$$Z' = j \left( \omega L'_r - \frac{1}{\omega C'_L} \right) \quad Y' = j \left( \omega C'_R - \frac{1}{\omega L'_L} \right) \quad (1-62)$$

Una descripción completa del análisis del caso general, que describe el comportamiento de numerosos metamateriales, se puede consultar en [9]. En adelante se analizará únicamente el caso tradicional, de mano derecha, ya que es el que se aplica al tipo de estructura analizado en este trabajo.

Considerando una línea de transmisión que representa un comportamiento puramente de mano derecha, obteniendo el circuito equivalente de un infinitesimal de línea de la figura 1.15, aplicando las leyes de Kirchhoff, dividiendo por  $\Delta z$  y aplicando el límite para  $\Delta z \rightarrow 0$ , para obtener expresiones diferenciales, se obtienen las ecuaciones del telegrafista, expresadas en la ecuación 1-63, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia [6]. La solución simultánea de ambas ecuaciones tiene un comportamiento de onda, expresado en 1-64, donde  $\gamma$  es la constante de propagación, cuyo valor se expresa en 1-65.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) \end{array} \right. \quad (1-63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(z)}{dz^2} + \gamma^2 V(z) &= 0 \\ \frac{d^2I(z)}{dz^2} + \gamma^2 I(z) &= 0 \end{aligned} \quad (1-64)$$

$$\gamma = -j\alpha + \beta = \sqrt{-(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (1-65)$$

Las ecuaciones de onda tienen como solución la superposición de una onda en dirección  $+z$  y otra en dirección  $-z$ , tanto para la tensión como para la corriente, con velocidad de fase  $\omega/\beta$ . La relación entre

las componentes de onda que viajan en dirección positiva se conoce como impedancia característica,  $Z_0$ , definida, según los parámetros de una línea de transmisión, en la ecuación 1-66.

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \text{Impedancia característica} \quad (1-66)$$

Cuando una línea de transmisión es terminada en una impedancia arbitraria  $Z_L$ , se producen fenómenos de transmisión y reflexión de potencia, de manera análoga al caso de incidencia de campos electromagnéticos sobre interfaces entre medios de impedancias intrínsecas diferentes, analizado en la sección 1.3.1. Existe, también en este caso, un coeficiente de reflexión  $\Gamma$ , definido como la relación entre la tensión reflejada y la tensión incidente, como indica la ecuación 1-67. Cuando el coeficiente de transmisión es nulo, se dice que la carga está adaptada, de modo que  $Z_L = Z_0$ .

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1-67)$$

Si se generaliza el concepto de coeficiente de transmisión a cualquier punto de la línea, y no únicamente al nodo donde se coloca la carga  $Z_L$ , se obtiene el coeficiente de reflexión para cualquier punto  $l$  de la línea a partir del que corresponde al nodo de carga, ubicado en la posición 0, como se indica en la ecuación 1-68.

$$\Gamma(l) = \Gamma e^{-2j\gamma l} = \Gamma e^{-2j\beta l} e^{-2\alpha l} \quad (1-68)$$

La impedancia de entrada también varía con la distancia a la carga, de forma que:

$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l} \quad (1-69)$$

En la figura 1.16 se puede observar una gráfica de  $\Gamma$  y  $Z_{in}$  en función de la distancia a la carga, para una línea de impedancia característica  $Z_0$  de  $50 \Omega$ , con una carga de  $100 \Omega$ , considerando pérdidas y constante de propagación arbitrarias.

### 1.6.1. Línea *microstrip*

Algunas de las líneas de transmisión más comunes están basadas en tecnologías de circuitos impresos, entre las que se destacan las *striplines* (donde el dieléctrico circundante al conductor es homogéneo), las líneas *microstrip* (donde el dieléctrico circundante es aire en la mitad superior, y un dieléctrico de mayor permitividad en la mitad inferior), y las guías de ondas coplanares (donde el plano de tierra y la línea de señal comparten la misma cara del sustrato). Algunas de ellas son esquematizadas en la figura 1.17. Los costos de fabricación de las mismas suelen ser muy bajos, y ofrecen comodidades para la implantación de componentes discretos, aunque en muchos casos se generan modos indeseados, que pueden ser disminuidos manteniendo el espesor del sustrato en valores despreciables respecto de la longitud de onda, lo que los vuelve frágiles. Además, los sustratos dieléctricos suelen presentar pérdidas

Variación de la impedancia de entrada y el coeficiente de reflexión, según la distancia a la carga.

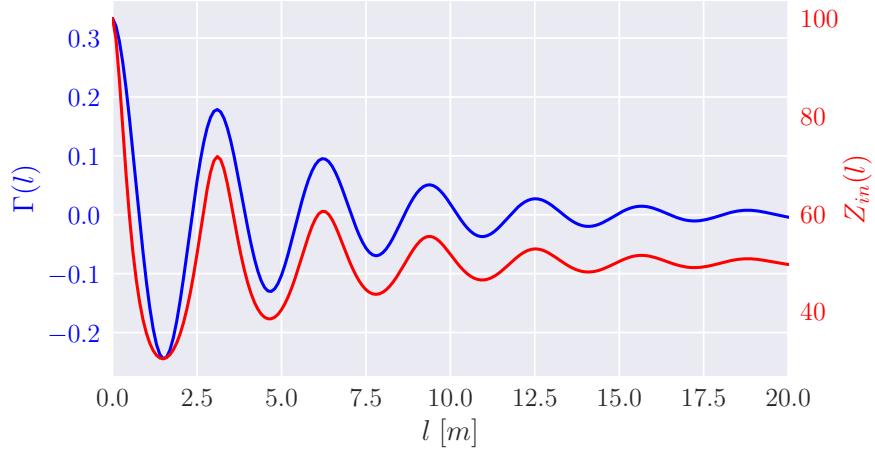


FIGURA 1.16: Impedancia de entrada y coeficiente de reflexión en función de la distancia a la carga, en una línea de transmisión de  $50\Omega$ .

que modifican el comportamiento de la señal. Las principales aplicaciones se relacionan con el diseño de filtros microondas, acopladores direccionales, transformadores de impedancia, planos de tierra y redes de distribución de energía de circuitos impresos e integrados [10].

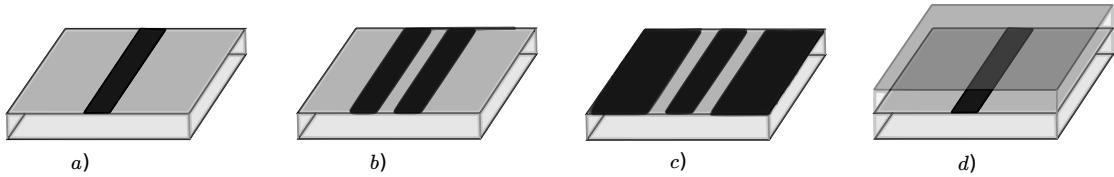


FIGURA 1.17: Tecnologías de líneas de transmisión planares. De izquierda a derecha: *Microstrip*, *twinstrip*, línea coplanar y *stripline*.

Las *striplines*, debido a la homogeneidad del dieléctrico, soportan modos TEM. Las líneas *microstrip*, en cambio, sólo pueden presentar modos TE y TM, aunque en frecuencias bajas tienen un comportamiento que puede denominarse cuasi-TEM, dado que la mayor parte del campo se concentra en el dieléctrico<sup>17</sup>. Un diagrama simplificado de los campos y los parámetros de una línea *microstrip* se muestran en la figura 1.18

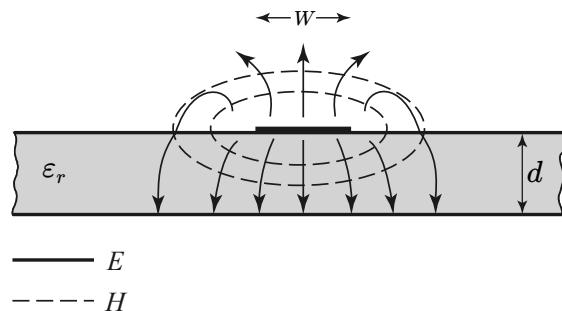


FIGURA 1.18: Campos de una línea *microstrip* [Basado en representación de [1]].

<sup>17</sup>Un comportamiento puramente TEM impediría el cumplimiento de la condición de fase en la interfaz, dado que las velocidades de propagación en ambos medios es distinta [1]

En general, para simplificar el análisis, se considera que la cinta *microstrip* es una *stripline*, donde el dieléctrico tiene una constante dieléctrica efectiva, menor a la constante dieléctrica del sustrato, pero mayor a la del aire, dependiente del ancho del sustrato, el ancho del conductor y la frecuencia de trabajo. La expresión de esta constante es la siguiente:

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left( 1 + 12 \frac{h}{W} \right)^{-1/2} \right) \quad (1-70)$$

## 1.7. Antenas

Una antena es un dispositivo que actúa como fuente de ondas electromagnéticas. Es una interfaz entre el espacio libre y un dispositivo de guiado (como una guía de ondas o una línea de transmisión), y puede ser modelada como una carga que, en general, está adaptada. Su función es recibir o transmitir energía, usualmente optimizando algunas direcciones, y suprimiendo o disminuyendo su valor en otras, para lo que se utilizan distintas tecnologías, entre las que se destacan las antenas de hilo, de apertura y *microstrip*, muchas veces dispuestas en arreglos y con componentes reflectores [11]. En este trabajo resultarán de mayor importancia las regiones más cercanas al radiador, y el control del comportamiento de los campos en las mismas modificará el comportamiento en la región de Fraunhofer.

### 1.7.1. Regiones de campo

El espacio que rodea a una antena se suele dividir en tres regiones: Campo cercano reactivo (donde predominan los campos reactivos), campo de radiación cercano (Fresnel, donde la distribución angular de energía depende de la distancia a la antena) y campo lejano (Fraunhofer, donde la distribución angular de energía es, en términos prácticos, independiente de la distancia al elemento radiante). En general, se considera que la región de campo lejano se encuentra a distancias mayores a  $2D^2/\lambda$ , donde D es la máxima dimensión de la antena, y  $\lambda$  es la longitud de onda de trabajo.

### 1.7.2. Diagramas de radiación

El diagrama de radiación es una representación gráfica o función matemática que representa las propiedades de radiación de una antena como función de las coordenadas espaciales. En general, se especifica para la región de campo lejano, y en función de las coordenadas direccionales  $\theta$  y  $\phi$ , que representan el ángulo de elevación y el azimutal, respectivamente, para una orientación arbitraria del radiador.

En general, se calcula el patrón de potencial o el patrón de campo eléctrico, y se los normaliza respecto de su máximo valor, para luego graficarlos en escala logarítmica o en decibeles.

Sobre el patrón se distinguen lóbulos, clasificados como principal (en la dirección de mayor radiación) y menores (en otras direcciones). El diagrama de radiación de una antena isotrópica, de ser físicamente realizable, se correspondería con una esfera, dado que no existen direcciones privilegiadas. Cuando no existen lóbulos distinguibles en un dado plano, lo cual es común en antenas con simetría cilíndrica, el comportamiento se denomina omnidireccional.

### 1.7.3. Impedancia de entrada

La impedancia de entrada de una antena es la que presenta a la línea de transmisión o guía de ondas que la alimenta. En general tiene una componente resistiva y una componente reactiva, de manera que  $Z_A = R_A + jX_A$ . En general,  $R_A$  tiene dos componentes:  $R_r$ , la resistencia de radiación, y  $R_L$ , la resistencia de pérdidas. Como en general no coincide con la impedancia característica de la línea de transmisión que la alimenta, se aplican métodos de adaptación de impedancias.

### 1.7.4. Arreglos de antenas

Un arreglo de antenas es un conjunto de antenas dispuestas geométricamente, y alimentadas de manera tal que conformen un único sistema radiante. El primer conjunto de antenas usado extensivamente fue la antena Yagui-Uda, inventada en 1926, cuya fase no puede variarse electrónicamente. Recién durante la Segunda Guerra Mundial se inventaron los conjuntos de antena de fase variable, y a partir de 1950, con la invención de los defasadores de ferrita, la modificación de fase completa fue posible [3].

El análisis más sencillo del comportamiento de conjuntos de antenas se presenta al analizar uno formado por antenas de iguales propiedades, cuyas amplitudes y fases pueden ser modificados, tanto en transmisión (a través de mecanismos de desfasaje) como en recepción (debido a diferencias e camino y circuitos de desfasaje). En general, el diagrama de radiación se puede calcular en base a la multiplicación del patrón de uno de los elementos y el patrón del arreglo, para el cual se asumen puntos de radiación isotrópicos en la posición de las antenas [11].

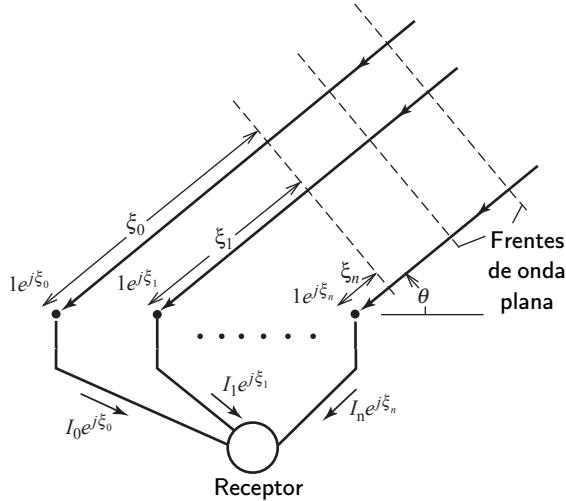


FIGURA 1.19: Incidencia de una onda plana sobre un arreglo de antenas [Basado en la representación del fenómeno en [11]].

El factor de *array*, reemplazando cada elemento por radiadores isotrópicos, se obtiene considerando que una onda plana incide con ángulo  $\theta$  sobre el conjunto, como se muestra en la figura 1.19. Cada elemento es excitado con una fase  $\xi_i$ , debida a la diferencia de caminos y a las diferencias entre las líneas de transmisión de cada antena, de modo que:

$$AF = I_0 e^{j\xi_0} + I_1 e^{j\xi_1} + \dots = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n d \cos(\theta)} = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn\Phi} \quad (1-71)$$

Normalizando y simplificando la expresión, la misma queda:

$$f(\Phi) = \frac{\sin(N\Phi/2)}{N\sin(\Phi/2)} \quad (2\pi - \text{periódica}) \quad (1-72)$$

con N la cantidad de elementos radiantes. Se observa que si hay una mayor cantidad de elementos radiantes, los lóbulos, tanto secundarios como primarios, tiende a aumentar. Además, al mismo tiempo, la cantidad de lóbulos secundarios también crece (hay N-1 lóbulos secundarios), al mismo tiempo que disminuye la altura de los mismos [3].

### 1.7.5. Acoplamiento mutuo

Cuando se considera acoplamiento mutuo entre los elementos del *array*, la multiplicación del patrón de radiación por el patrón del arreglo ya no es válida. Los elementos interaccionan entre sí y alteran sus corrientes, y por lo tanto sus impedancias. La radiación de una antena induce corrientes sobre las antenas cercanas, que también radian e influyen sobre la corriente de la primera antena. Es un efecto de campo cercano.

La impedancia de entrada de un elemento aislado en el espacio se denomina “Impedancia de elemento aislado”, o simplemente impedancia de antena. La impedancia de entrada de una antena que está dispuesta en un ambiente con elementos activos se denomina “impedancia activa”, y varía según las excitaciones a las que se someta al arreglo de antena. En general, la caracterización de los elementos radiantes sometidos a efectos de acoplamiento mutuo consisten en la obtención de la “impedancia pasiva”, que se logra excitando un elemento y conectando a cargas adaptadas los demás.

Hay 3 efectos responsables del acoplamiento mutuo en arreglos de antenas:

- Acoplamiento espacial entre elementos.
- Acoplamiento espacial por *scattering* en elementos cercanos.
- Acoplamiento por la red de alimentación, que puede ser minimizado usando técnicas de acoplamiento apropiadas en cada elemento.

Si el acoplamiento en la red de alimentación se minimiza, se puede considerar que cada antena está alimentada independientemente con una tensión  $V_m^g$ , cuyo generador tiene una impedancia asociada  $Z_m^g$ . Sobre la antena se genera una diferencia de tensión  $V_m$ , y una corriente  $I_m$ , que incluye los efectos de acoplamiento. Un *array* de N elementos es entonces una red de N puertos, representada por la ecuación 1-73, donde todos los elementos que pertenecen a la diagonal de la matriz  $Z$  son las impedancias de elemento aislado, mientras que los elementos fuera de la diagonal representan las impedancias mutuas  $Z_{mn}$ , que no es más que la tensión impresa sobre el elemento  $m$  por la corriente  $n$ , cuando todos los demás terminales están a circuito abierto ( $Z_{mn} = V_m/I_n|_{I_i=0 \forall i \neq n}$ , lo que significa que la corriente es nula para todo el cuerpo de la antena). En general estos cálculos se realizan de forma numérica, tras las correspondientes simulaciones, y considerando a las antenas en modo transmisor [12].

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{12} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{1N} & Z_{2N} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix}}_Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (1-73)$$

Si suponemos que la antena no excitada tiene una impedancia de carga  $Z_j^g$  sobre sus terminales (y que el generador de esa antena está apagado,  $V_j^g = 0$ ), la corriente generada sobre el elemento  $j$  debido a la radiación del elemento  $i$  será tal que  $V_j = -Z_j^g I_i$ , por lo que:

$$V_j = -Z_j^g I_j = Z_{jj} I_j + \sum_{i=1, i \neq j}^N Z_{ji} I_i \quad (1-74)$$

En el caso en que se consideren sólo dos antenas, de la ecuación 1-74 para dos elementos, podemos obtener la expresión de la corriente en el segundo elemento, que da lugar a la expresión de la impedancia total vista por el primer elemento, por efecto propio y de la radiación del segundo, como muestra la ecuación 1-75, donde se asumió que la matriz  $Z$  es simétrica, y que permite deducir la ecuación 1-76, que es la impedancia de entrada de cada elemento, en función de impedancias mensurables.

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = -Z_2^g I_2 = Z_{22} I_2 + Z_{21} I_1 \end{cases} \quad (1-75)$$

$$I_2 = \frac{-Z_{21} I_1}{Z_{22} + Z_2^g} = \frac{-Z_{12} I_1}{Z_{22} + Z_2^g} \implies \frac{V_1}{I_1} = Z_1 = Z_{11} - \frac{(Z_{12})^2}{Z_{22} + Z_2^g} \quad (1-76)$$

### 1.7.6. Antenas Microstrip

Las antenas *microstrip* cumplen varias de las especificaciones más importantes que imponen las diversas aplicaciones de antenas: Pueden ser pequeñas, tienen bajo peso, son económicas y fáciles de fabricar, y tienen bajo perfil, lo que permite adaptarlas a numerosos diseños. Suelen, sin embargo, tener un alto Q, ya que funcionan debido a sus propiedades resonantes, suelen tener baja eficiencia, son de baja potencia, y presentan polarización impura.

En general, el diseño de una antena *microstrip* se realiza de forma tal que el máximo de radiación se concentre en la dirección normal al parche (*broadside*), aunque también es posible lograr radiación en dirección paralela al mismo (*end-fire*), dependiendo de la geometría elegida. El sustrato elegido para la fabricación suele influir en el ancho de banda y la eficiencia: Una mayor permitividad dieléctrica genera una menor eficiencia, un menor ancho de banda y un menor acoplamiento con elementos cercanos, debido a que los campos se encuentran contenidos en el sustrato.

Existen múltiples formas de alimentación de una antena *microstrip*, entre las que se destacan la línea microstrip de alimentación, que suele dar lugar a radiación espuria y a polarización cruzada, debido a la asimetría que impone; y la conexión directa de cable coaxil, donde el conductor central del mismo se conecta en un punto del parche, y la malla se conecta al plano de tierra que funciona como reflector, ubicado en la cara opuesta del sustrato.

Existen varios métodos de análisis de antenas *microstrip*, entre los que se destacan, por su sencillez, el modelo de líneas de transmisión y el modelo de cavidades resonantes, principalmente aplicables a parches rectangulares, que son los de interés en este trabajo. Sin embargo, estos métodos no consideran acoplamiento mutuo ni ondas de superficie, por lo que resultan incompletos [13].

### 1.7.6.1. Modelo de líneas de transmisión

El modelo de líneas de transmisión es el más sencillo y el que ofrece una mayor intuición física, ya que usa los conceptos fundamentales de líneas *microstrip*. Consiste en considerar a la antena como dos aperturas radiantes de ancho  $W$  y altura  $h$  separadas una distancia  $L$  por una línea de transmisión de impedancia característica conocida  $Z_0$ , cada una de las cuales puede ser representada, en el modelo, como una conductancia  $G$  y una susceptancia  $B$ , como se indica en la figura 1.20, donde la admitancia y la susceptancia se obtienen del modelo de apertura radiante, que puede consultarse en [11].

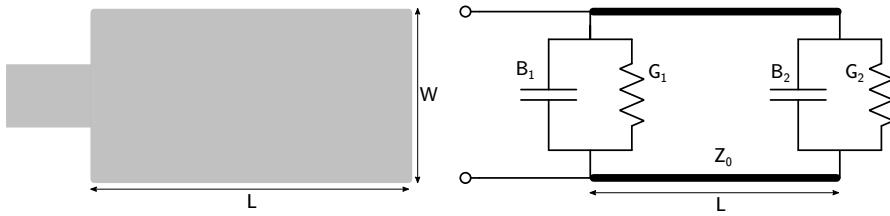


FIGURA 1.20: Circuito equivalente, según el modelo de líneas de transmisión, de una antena *microstrip*.

Al igual que en el caso de las líneas *microstrip*, se debe considerar una constante dieléctrica efectiva  $\epsilon_{r_{eff}}$ , que depende no sólo del ancho del sustrato, sino también de la frecuencia, debido a que a mayor frecuencia hay una mayor concentración de campo sobre el dieléctrico, otorgando mayor prevalencia a la constante dieléctrica del sustrato que a la del aire circundante en el cálculo de la constante efectiva. La expresión es la misma utilizada para líneas *microstrip* (ecuación 1-70), siempre y cuando  $W > h$ .

El efecto de *fringing* en los bordes del parche, que da lugar a un aumento del tamaño eléctrico, se modelan mediante la consideración de una extensión en la línea de transmisión que une a las aperturas radiantes, en función de la altura del sustrato. El cambio en la extensión de la línea de transmisión sugiere un cambio en la frecuencia de resonancia de la antena, al mismo tiempo que un mayor ancho de banda, sin una modificación del tamaño físico. En la ecuación 1-77 se muestra una expresión aproximada de la variación del tamaño eléctrico, de forma que la longitud efectiva de la línea de transmisión resulta  $L_{eff} = L + 2\Delta L$ . Esta expresión se utiliza para la obtención de la frecuencia de resonancia, como indica la expresión 1-78 para el modo dominante,  $TM_{010}$ .

$$\Delta L = h \cdot 0,412 \frac{(\epsilon_{eff} + 0,3)(W/h + 0,264)}{(\epsilon_{eff} - 0,258)(W/h + 0,8)} \quad (1-77)$$

$$f_{r010} = \frac{1}{2L_{eff}\sqrt{\epsilon_{eff}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}} = \frac{1}{2(L + 2\Delta L)\sqrt{\epsilon_{eff}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}} \quad (1-78)$$

La impedancia de entrada de una antena *microstrip* depende fuertemente de la posición de la alimentación, además de los valores de  $G$  y  $B$  de los *slots* radiantes [14]. Cuando la alimentación se realiza

mediante una cinta *microstrip*, se suele terminar la misma en el interior del parche, a una distancia  $y_0$  del borde, como se indica en la figura 1.21, permitiendo una mejor adaptación, aunque introduciendo una capacidad de juntura que afecta a la frecuencia de resonancia. La distancia del punto de alimentación al borde del parche será menor a la mitad de la longitud total del parche, en lo que se identificó como "zona de adaptación" en la misma figura.

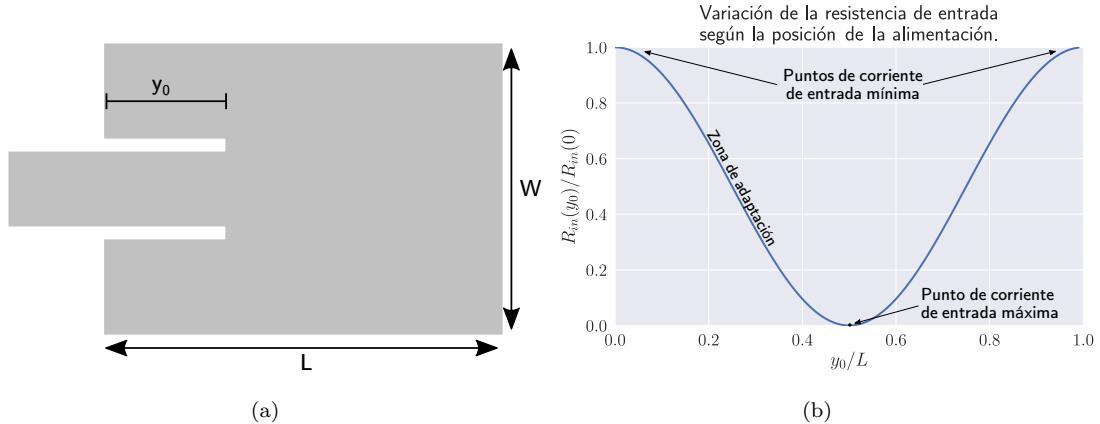


FIGURA 1.21: Esquema y gráfica del comportamiento de la impedancia de entrada según la posición de la alimentación.

El factor de antena, el ancho de banda y la eficiencia son valores interdependientes, y entre ellos se presenta una relación de compromiso. El factor de antena representa las pérdidas de la misma, en general dominadas por la radiación (relacionada a la conductancia asociada a las aperturas radiantes), la conducción (en función de la conductividad del metal), las pérdidas dieléctricas (expresada según la tangente de pérdidas) y las ondas de superficie (despreciables si el sustrato es demasiado fino). Además, se debe tener en cuenta la adaptación de la antena, que limita fuertemente el ancho de banda de uso. En general, se observa que [11] a mayor volumen de la antena, el ancho de banda aumenta. Un aumento de la permitividad dieléctrica genera una disminución del ancho de banda, debida a la disminución de los campos de borde (*fringing*) y una disminución de la eficiencia de radiación, dado que da lugar a antenas de menor tamaño. Un sustrato de mayor constante dieléctrica, entonces, da lugar a antenas de menor volumen, lo cual genera un menor ancho de banda.

### 1.7.6.2. Modelo de cavidades multimodo

El modelo de cavidad resonante se utiliza principalmente para predecir el comportamiento en modos superiores de la antena. Para ello se considera que la región dieléctrica bajo el parche consiste en una cavidad cargada dieléctricamente, limitada por conductores eléctricos en las caras superior e inferior, y por conductores magnéticos en las caras laterales. Esta configuración conlleva a una impedancia de entrada puramente reactiva, incompatible con el comportamiento radiante del sistema, pero consistente con el comportamiento de otros parámetros. Para considerar las pérdidas por radiación, se añaden efectos de pérdidas dentro de la cavidad, relacionados con el factor de antena correspondiente.

La consideración de paredes laterales como conductores magnéticos deviene de la consideración de la disposición de las cargas sobre el parche conductor y sobre el plano de tierra, donde se asume que el espesor del dieléctrico es lo suficientemente pequeño como para que no se presenten modos superiores sobre el eje vertical. Las cargas sobre la cara inferior del parche son atraídas por las cargas opuestas

correspondientes en el plano de tierra, y su concentración genera una repulsión, hacia la cara superior, a otras cargas de la misma polarización, generando una corriente superficial en cada cara, como se indica en la figura 1.22. Al disminuir el ancho del sustrato, el efecto de atracción del plano del tierra supera, en magnitud, al efecto de repulsión por la concentración de cargas en la cara inferior del parche, por lo que el flujo decrece, pudiendo considerarse nulo. Dado que el flujo de cargas, a través de los bordes, entre la cara superior y la inferior del parche metálico dispuesto sobre el sustrato, es el responsable del campo magnético tangencial a los bordes, la desaparición de dicho flujo disminuiría considerablemente este campo, permitiendo asumir que las paredes se comportan como conductores magnéticos. La baja altura del sustrato, además, permite considerar sólo las configuraciones TM para las frecuencias de interés, dado que, como se explicó antes,  $h \ll \lambda$ .

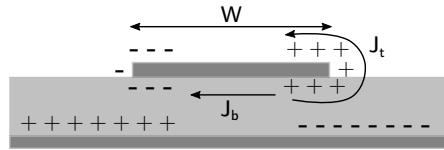


FIGURA 1.22: Corrientes sobre el parche en una antena *microstrip*, según el modelo de cavidad.

La obtención de los campos se detalla en [14], donde, considerando las hipótesis descriptas antes, asumiendo que el vector de potencial  $\vec{A}$  tiene que cumplir la ecuación de Helmholtz (1-17), y utilizando separación de variables, se obtienen soluciones para distintos modos, todos transversales magnéticos, con frecuencias de resonancia dadas por 1-79, donde  $n$ ,  $m$  y  $p$  son los índices del modo. El modo dominante, dado que  $h < L$  y  $h < W$ , es el  $TM_{010}$ , cuya distribución de campos se muestra en la figura 1.23.

$$(f_r)_{nmp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{W}\right)^2} \quad (1-79)$$

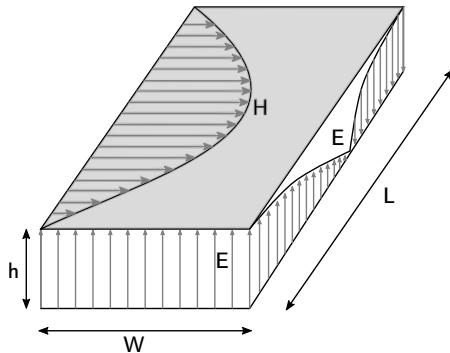


FIGURA 1.23: Distribución de campos eléctrico y magnético en la cavidad de *microstrip*, para el modo  $TM_{010}$ .

A pesar de que hay 4 aperturas en una antena *microstrip* rectangular, sólo 2, las radiantes, aportan significativamente a la radiación, dado que lo radiado por las otras dos se cancelan sobre los planos principales. Las paredes separadas aproximadamente  $\lambda/2$  tienen campos en direcciones opuestas en el mismo momento, por lo que se suman en la dirección normal al parche, dando lugar a un comportamiento *broadside*.

Un aspecto importante del análisis por el modelo de cavidad radica en las densidades de corriente equivalentes. Según lo descripto antes, existe una corriente,  $\vec{J}$ , sobre la superficie del parche. Debido a

que la polarización es TM, sobre las aperturas radiantes laterales debe existir también una densidad de corriente eléctrica,  $\vec{J}_s$ , y una densidad de corriente magnética,  $\vec{M}_s$ , de modo que, en función de los campos en las aperturas:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_a \quad \vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_a \quad (1-80)$$

Según las hipótesis dadas antes, y como se muestra en la figura 1.23, la magnitud del campo magnético tangencial a las paredes es despreciable, de modo que la corriente sobre las paredes,  $\vec{J}_s$ , también lo es. La corriente sobre el parche, debido a la baja distancia con el plano de tierra, es baja, por lo que también puede considerarse despreciable. De esta forma, la única densidad de corriente apreciable es  $\vec{M}_s$ . El efecto del plano de tierra se puede tener en cuenta considerando teoría de imágenes. Según la misma, dado que se trata de un conductor eléctrico, las corrientes magnéticas imagen tienen el mismo sentido que las originales, de modo que la densidad de corriente magnética equivalente resulta el doble que la original, como se expresa en la ecuación 1-81, y se observa en la figura 1.24.

$$\vec{M}_s = -2\hat{n} \times \vec{E}_a \quad (1-81)$$

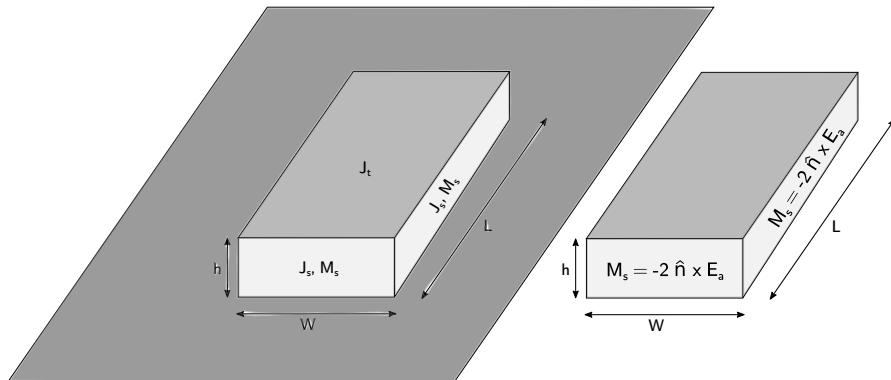


FIGURA 1.24: Densidades de corrientes eléctricas y magnéticas en una antena *microstrip*.

Se puede considerar, entonces, que cada apertura actúa como un dipolo magnético con densidad de corriente  $\vec{M}_s$ . Cuando las aperturas están separadas una distancia de  $\lambda/2$ , forman un arreglo de dos elementos, que tiene un comportamiento *broadside*.

### 1.7.7. Acoplamiento mutuo en antenas Microstrip

El acoplamiento mutuo está determinado principalmente por los campos que existen sobre la interfaz dieléctrico-aire: la onda espacial (decrece como  $1/\rho$ ), los campos cercanos de superior (decreciendo como  $1/\rho^2$ ), la onda de superficie (con dependencia de tipo  $1/\rho^{1/2}$ ) y las ondas de tipo *leaky* (con dependencia del tipo  $e^{-Q}/e^{1/2}$ ) [14]. A mayor distancia del elemento radiante fuente, las ondas de superficie son las que tienen carácter dominante, siempre que en esa dirección existan [15]. En general, si la distancia entre los elementos radiantes es grande (mayor a  $0,8\lambda$ ), la influencia de las ondas de superficie es baja y el acoplamiento es por tanto bajo. Aún así, si el conjunto es grande, la suma de los efectos de los distintos

parches puede dar lugar a efectos de acoplamiento significativos, incluso entre elementos no adyacentes [16]. Como en todo conjunto de antenas, el acoplamiento mutuo es función, además de la distancia, de la posición entre los elementos radiantes.

En un *array* planar de antenas se deben considerar la amplitud y la fase de la onda incidente. Si se ubican en forma colineal sobre el plano anche, el acoplamiento mutuo entre las antenas es menor al que se observa si se ubican de forma colineal sobre el plano E (figura 1.25, [17], [13]), y el aumento de la distancia entre los parches reduce el acoplamiento [16]. Si los elementos se ubican en forma colineal sobre el plano E, el decrecimiento del parámetro  $S_{12}$  es mucho más lento, debido a la presencia de ondas de superficie, comenzando a partir del modo TM, que no posee frecuencia de corte inferior, y aumentando con la aparición de modos TE y TM de orden superior, fruto del aumento de espesor del sustrato y el crecimiento de la constante dieléctrica [15]. La ubicación sobre el plano H genera que las ondas responsables del acoplamiento sean de polarización TE, mientras que la ubicación sobre el plano E genera que las mismas sean de polarización TM, que es la polarización dominante en las antenas *microstrip*. Un aumento en el ancho del sustrato permitiría la aparición de modos TE, generando un mayor acoplamiento en el arreglo sobre el plano H.

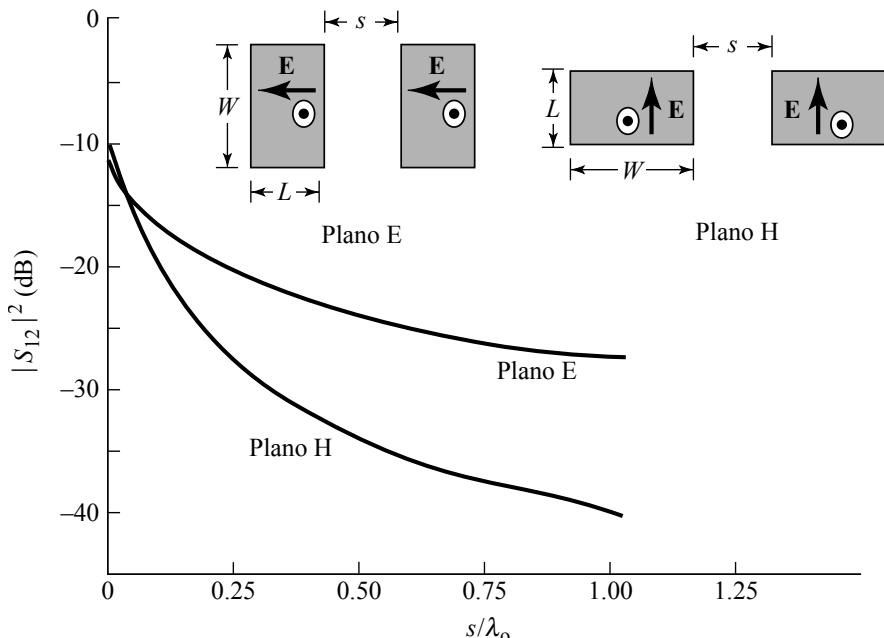


FIGURA 1.25: Acoplamiento mutuo entre antenas *microstrip*, para posición colineal en plano E y plano H. Parámetros:  $W: 10.57$  cm,  $L: 6.55$  cm,  $h: 0.1588$  cm,  $\epsilon_r: 2.55$ ,  $f_r: 1.410$  MHz. Fuente: D. M. Pozar, "Input impedance and mutual coupling of rectangular microstrip antennas", IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol AP-30, No. 6. Noviembre, 1982.

Según [16], los efectos de onda de superficie son importantes cuando el valor de  $\epsilon_r$  del sustrato es alto, y si las pérdidas son bajas, la onda de superficie se mantiene en un valor estable cuando se aumenta la distancia [18]. Esto hace que el acoplamiento mutuo entre las antenas sea mayor, porque existe una onda de superficie notoria. Por otro lado, según [19], si el ancho del dieléctrico es bajo, las ondas de superficie son despreciables. Para separaciones pequeñas, los efectos de campo cercano son los que dominan; en la zona intermedia ( $0.4\lambda < d < 0.8\lambda$ ), los efectos de la onda espacial directa son visibles, y en la zona más lejana sólo son reconocibles los efectos originados por las ondas de superficie [15].

La búsqueda de antenas de menor tamaño (aumentando la constante dieléctrica del sustrato) y mayor ancho de banda (aumentando el ancho del dieléctrico) tiene como obstáculo la relación de compromiso con el acoplamiento causado por ondas de superficie, que son amplificadas cuando la constante dieléctrica aumenta o el sustrato es de mayor altura. En el caso de los llamados *phased arrays* de antenas *microstrip*, el acoplamiento mutuo genera, además de modificaciones en el diagrama de radiación, una limitación en el ángulo de escaneo y puntos ciegos [20].



## Capítulo 2

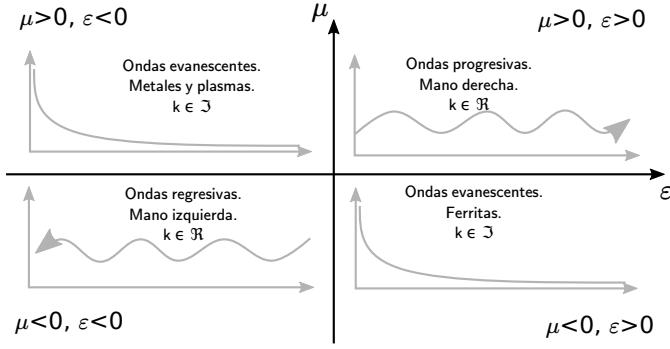
# Fundamentos de estructuras de EBG

### 2.1. Introducción: Metamateriales, materiales periódicos y EBGs

La definición de metamaterial aún está en discusión aunque, en términos generales, la más aceptada indica que son estructuras electromagnéticas artificiales efectivamente homogéneas que presentan propiedades que no se encuentran en la naturaleza [9]. Los materiales EBG (de banda prohibida electromagnética, *Electromagnetic Bandgap*), PBG (de banda prohibida fotónica, *Photonic Bandgap*) o cristales fotónicos son un tipo de estructura artificial, dieléctrica o metalodieléctrica, en algunos casos clasificadas como metamateriales, con capacidades para controlar ondas electromagnéticas [21] a partir de una variación periódica en el espacio de la constante dieléctrica  $\epsilon$ . Tienen la capacidad de permitir la propagación en direcciones determinadas, o de impedirla completamente, debido que presentan una banda prohibida electromagnética, concepto análogo al de banda prohibida electrónica, que controla el movimiento de ondas de electrones que viajan en un potencial periódico cristalino.

La condición de homogeneidad efectiva de los metamateriales se cumple si las estructuras que forman al EBG están a distancias mucho menores a la longitud de onda guiada incidente,  $\lambda_g$  [9], de forma que la naturaleza de la estructura básica que se periodiza, denominada celda unitaria, determine parámetros constitutivos ( $\epsilon$  y  $\mu$ ) electromagnéticamente uniformes en la dirección de propagación, para la frecuencia de interés. En función de la relación entre estos parámetros constitutivos, las ondas electromagnéticas que lo atraviesan tienen comportamientos diferentes, como se muestra en la figura 2.1. El estudio de estructuras periódicas permitió, entonces, la fabricación de materiales con características en los cuatro cuadrantes del plano  $\mu-\epsilon$ .

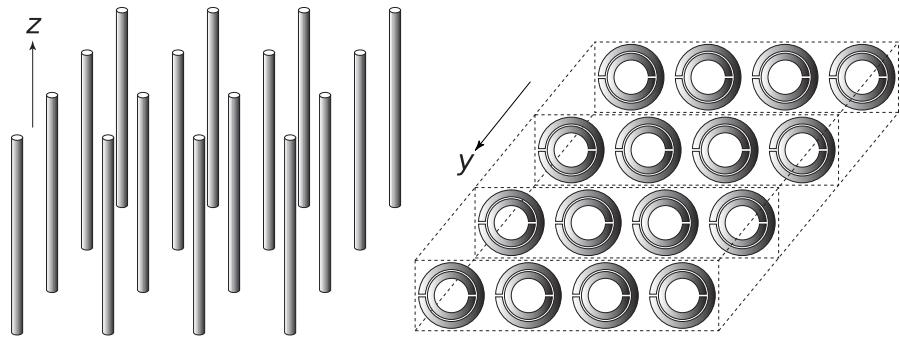
A fines del siglo XVIII, el físico estadounidense David Rittenhouse observó que algunos de los colores del espectro de luz visible desaparecían cuando una lámpara era vista a través de un pañuelo [22], mostrando por primera vez que un medio discontinuo puede presentar propiedades de transmisión diferentes en función de la frecuencia incidente. El estudio teórico del comportamiento de ondas electromagnéticas en medios periódicos comenzó a principios del siglo XX, aunque no fue hasta finalizada la segunda guerra mundial que se formalizaron algunos conceptos. Ya en 1919, Guglielmo Marconi y Charles Samuel Franklin

FIGURA 2.1: Tipos de ondas en función de los valores de  $\epsilon$  y  $\mu$ .

utilizaron una estructura de conductores horizontales que operaban como una superficie reflectiva para cierta frecuencia, que podría considerarse la primera superficie selectora de frecuencias (FSS).

En 1946, Louis Brillouin publicó su libro sobre ondas mecánicas, "Wave propagation in periodic structures: Electric filters and crystal lattices" [23], donde demostró que un arreglo periódico impone restricciones a los vectores de onda  $\vec{\gamma}$  que pueden propagarse en él, dado que el mismo establece condiciones de contorno para los modos permitidos. Aquellas ondas que no cumplen las condiciones derivadas de la periodicidad de la estructura, no son capaces de propagarse.

En 1968, el físico ruso Viktor Veselago describió por primera vez, de forma teórica, la posibilidad de que existieran sustancias naturales con índice de refracción negativo, denominados LHS (*Left Handed Substances*, sustancias de mano izquierda), cuya permitividad eléctrica y permeabilidad magnética fueran simultáneamente negativas, de modo que la velocidad de fase de una onda que se propagara por ese medio resultara antiparalela a la velocidad de grupo. Treinta años más tarde, a fines de la década de 1990, Smith propuso la primera forma de fabricación de un medio con esas características en una banda limitada de frecuencia, utilizando SSRs (*Split-ring resonators*, resonadores de aro dividido), responsables de la permeabilidad magnética negativa, y cables conductores, responsables de la permitividad eléctrica negativa, ubicados en forma periódica, y estudiados previamente por Pendry (Figura 2.2). Recién en el año 2000 se construyó el primer metamaterial sobre las propuestas de Smith, mostrado en la figura 2.3, y varios experimentos confirmaron refracción negativa en los mismos. Hasta la fecha, no han sido encontrados materiales naturales con este comportamiento.

FIGURA 2.2: Metamateriales propuestos por Pendry. A la izquierda, un WSM (*Wire Screen Medium*), que posee  $\epsilon < 0$  y  $\mu > 0$  cuando el campo eléctrico es longitudinal a los cables, para un rango de frecuencias determinado. A la derecha, un medio de SRR, que posee  $\epsilon > 0$  y  $\mu < 0$  cuando el campo magnético es perpendicular al eje de los anillos, para una frecuencia determinada [9].

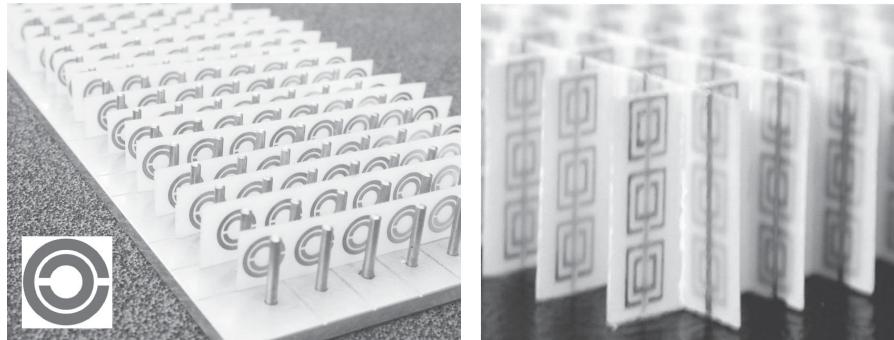


FIGURA 2.3: Estructuras metamateriales propuestas por Smith [9].

En el contexto de una línea de investigación, en principio, independiente de los trabajos previos de Veselago, la primera descripción de estructuras dieléctricas periódicas con una banda prohibida completa fue dada, en 1990, por Ho, Chan y Soukoulis, en Iowa, Estados Unidos, quienes propusieron un arreglo periódico de esferas dieléctricas, dispuestas en forma de capas. Para un rango amplio de radios de esferas, el efecto de banda prohibida se daba en todas direcciones. Posteriormente, Yablonovitch dividió una estructura cristalina simétrica de más fácil fabricación, que consistía en la producción de tres agujeros cilíndricos en un prisma dieléctrico, repetido periódicamente. Demostró, además, usando dichas estructuras, que la existencia de una banda prohibida electromagnética podía ser predicha teóricamente, en base, principalmente, a la constante de periodicidad del dieléctrico artificial.

Los trabajos de Yablonovitch, en estructuras de banda prohibida electromagnética, y Pendry, en metamateriales de índice de refracción negativo, se hicieron sobre estructuras con banda de interés en microondas, pero bajo modelos fotónicos, gracias a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell. Esto permitió el uso de distintas técnicas conocidas y desarrolladas durante el siglo XX en microondas para el diseño de materiales fotónicos de estas características a partir de finales de la década de 1990, principalmente en ámbitos de investigación de ciencias básicas.

Al mismo tiempo, comenzaron los estudios sobre las denominadas "superficies electromagnéticas" (*electromagnetic surfaces*), que consisten en superficies texturadas, generalmente conductoras (en contraposición a los trabajos tridimensionales) que imponen condiciones de contorno particulares, capaces de lograr cambiar la polarización de una onda incidente, influir sobre las ondas de superficie y controlar la fase de reflexión, actuando como estructuras de banda electromagnética bidimensionales. La más simple consiste en una placa metálica coarrugada, como la mostrada en la figura 2.4(a), de forma que las variaciones de altura sean de  $\lambda/4$ , que puede comportarse como una "superficie blanda" (*soft surface*) o una "superficie dura" (*hard surface*), en función de la polarización de la onda que se propaga<sup>1</sup>. Los primeros trabajos sobre estructuras bidimensionales con comportamiento de banda prohibida electromagnética dieron lugar a las denominadas FSS (*Frequency Selective Surfaces*, superficies selectoras de frecuencias) **Munk**. En 1999, Sievenpiper [24] propuso, en su tesis doctoral, estructuras superficiales compactas de alta impedancia, de manera que no fuera necesario el uso de una distancia de  $\lambda/4$  entre la superficie superior y la inferior para lograr el efecto deseado, dado que se cargaba capacitivamente a la estructura [25] [26]. Estas nuevas superficies periódicas consisten en un arreglo metalodieléctrico de subestructuras denominadas "hongos" (*mushrooms*), como se muestra en la figura 2.4(b), y proveen condiciones de borde de alta impedancia para polarizaciones TE y TM al mismo tiempo.

<sup>1</sup>Si el campo eléctrico es perpendicular a las ranuras, la hendidura de profundidad  $\lambda/4$  actúa como una línea de transmisión de cuarto de onda cortocircuitada, lo que, en la parte superior de las ranuras, se convierte en un circuito abierto, actuando como una superficie de alta impedancia. Si, en cambio, el campo eléctrico es paralelo a las ranuras, la impedancia que presenta es baja.

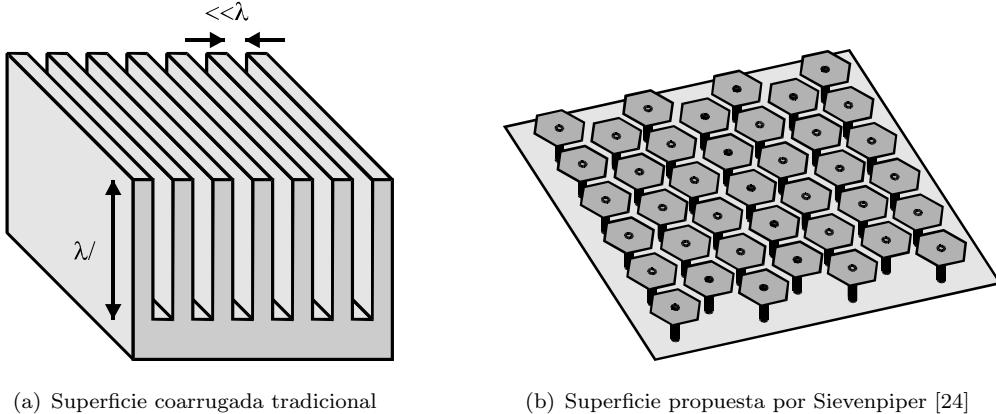


FIGURA 2.4: Superficie coarrugada tradicional para lograr superficies blandas y duras, y superficie propuesta por Sievenpiper [24].

El principal interés práctico de las estructuras propuestas por Sievenpiper radica en que actúan como conductores magnéticos artificiales, es decir, tienen una fase de reflexión nula para ondas incidentes, al mismo tiempo que presentan una banda prohibida electromagnética para las ondas de superficie. Esto se puede explicar a baja frecuencia considerando un modelo cuasiestático, dado que la distancia entre los parches conductores de la capa superior dan lugar, debido a la distancia que los separa, a una capacidad. La corriente que circula entre parches vecinos por efecto de una onda de superficie da lugar, análogamente, a una inductancia. Cuando el circuito resonante paralelo que forman resuena, la impedancia aumenta, dando lugar a una banda prohibida. Para frecuencias menores a la de resonancia, la superficie es inductiva y soporta ondas TM, mientras que para frecuencias mayores a la misma, la superficie es capacitiva, lo que permite la existencia de ondas TE. La explicación para las bandas prohibidas en mayores frecuencias requiere un análisis de redes y campos.

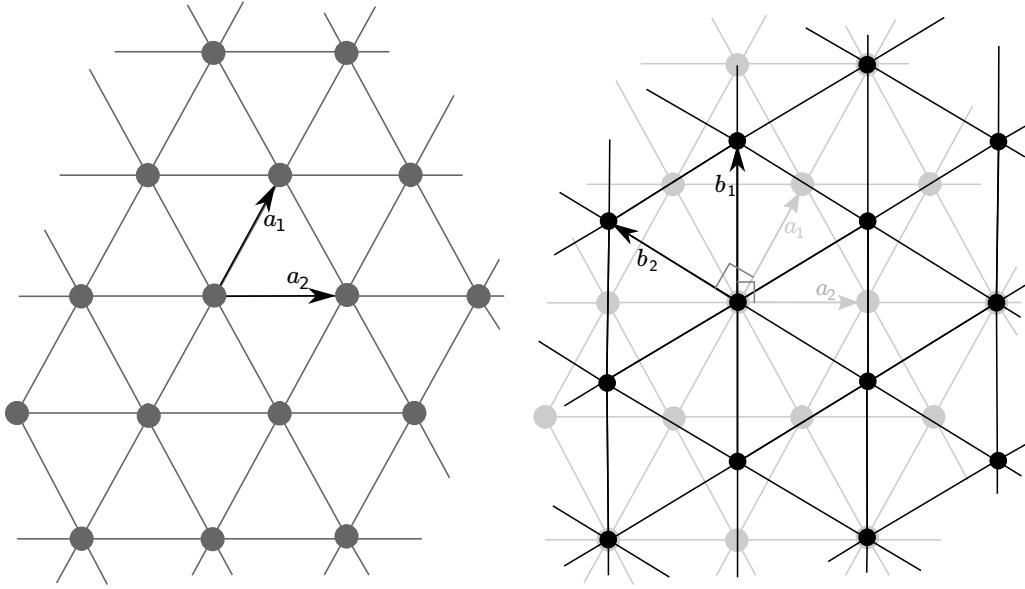
En base a la propuesta de Sievenpiper, y en búsqueda de una mayor facilidad de fabricación, en 2001 Yang propuso la aplicación de los conceptos de superficies selectoras de frecuencias (FSS) con la intención de lograr un comportamiento similar, pero evitando el uso de vías entre el plano conductor inferior y las estructuras ubicadas en la capa superior. Estas nuevas estructuras uniplanares son de más fácil fabricación, reduciendo al mismo tiempo el costo, aunque los anchos de banda prohibida electromagnética para ondas de superficie se redujeron ampliamente. El bajo costo, el bajo peso y el bajo perfil de estas estructuras las volvieron de particulares interés en el diseño de antenas.

## 2.2. Celdas unitarias de cristales bidimensionales

En un material periódico se puede definir una red de Bravais, que indica la forma en que los elementos están físicamente dispuestos en la red cristalina. En la figura 2.5(a),  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  son la base de vectores que permite expresar la posición de cualquier elemento del arreglo como una combinación lineal de coeficientes enteros:

$$R_{n_1, n_2} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2, \quad n_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2 \quad (2-1)$$

La celda unitaria de la red de Bravais se denomina celda de Wigner-Seitz, y restringe la región del espacio más cercana a cada elemento de la red cristalina. Se puede observar, para el caso de una red triangular, en la figura 2.6(a).



(a) Red de Bravais correspondiente a una estructura periódica con disposición triangular de los elementos  
(b) Superposición de la red recíproca y la red directa de Bravais correspondiente a una estructura periódica con disposición triangular de los elementos

**FIGURA 2.5:** Red de Bravais y red recíproca correspondiente a una estructura periódica. Los vectores  $\vec{a}_i$  son los que corresponden a la red directa o red de Bravais, y unen a los elementos físicos del sistema periódico. Los vectores  $\vec{b}_j$  son los correspondientes a la red recíproca. Las respectivas redes no están dibujadas a escala y, de hecho, se suelen conceptualizar en espacios diferentes.

Se puede definir, además, una red dual o recíproca, compuesta de vectores  $\vec{b}_j$  tales que cada uno de ellos resulte ortonormal a uno de los vectores  $\vec{a}_i$  de la red de Bravais, como se muestra en la figura 2.5(b). Esto da lugar a que  $a_i$  y  $b_j$  sean inversamente proporcionales. El uso de un factor de  $2\pi/a$ , con  $a$  la separación entre los elementos de la red física o de Bravais. Dicho de otra manera, mientras la red de Bravais representa la periodicidad de los elementos que conforman la red física en  $(x, y, z)$ , la red recíproca es la representación de la misma estructura, pero en el espacio de los vectores de onda,  $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ . La red recíproca es también periódica, y sobre ella se pueden buscar, también, celdas unitarias, denominadas regiones de Brillouin o celdas de Wigner-Seitz de la red recíproca, como se muestra en la figura 2.6(b).

Si, además, la celda de Brillouin es lo suficientemente simétrica, se puede definir la denominada zona irreducible de Brillouin, que forma parte de la primera zona de Brillouin, pero está limitada por sus líneas de simetría. Para el análisis de una estructura periódica cualquiera, sólo es necesario analizar esta zona irreducible, dado que el resto son simplemente sus reflexiones espejadas.

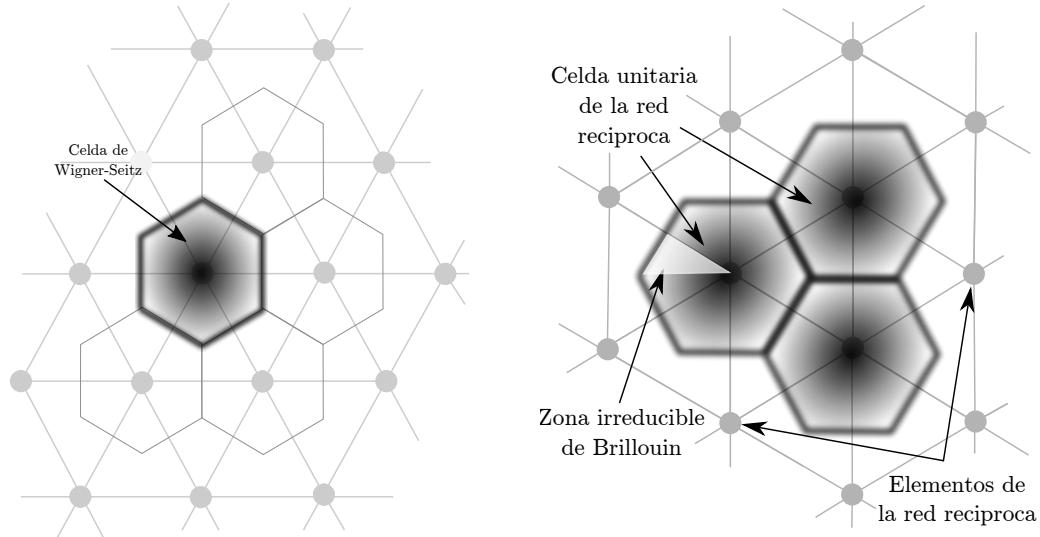


FIGURA 2.6: Celdas unitarias de las redes de Bravais y recíproca.

Para el caso en que las celdas unitarias son rectangulares, la red recíproca está también dada por una disposición rectangular de elementos, y la zona de Brillouin resulta también cuadrada. La zona irreducible de Brillouin depende de las líneas de simetría, por lo que puede resultar rectangular, a excepción del caso de celdas unitarias cuadradas, donde la mínima unidad que se repite resulta triangular, como se muestra en la figura 2.7.

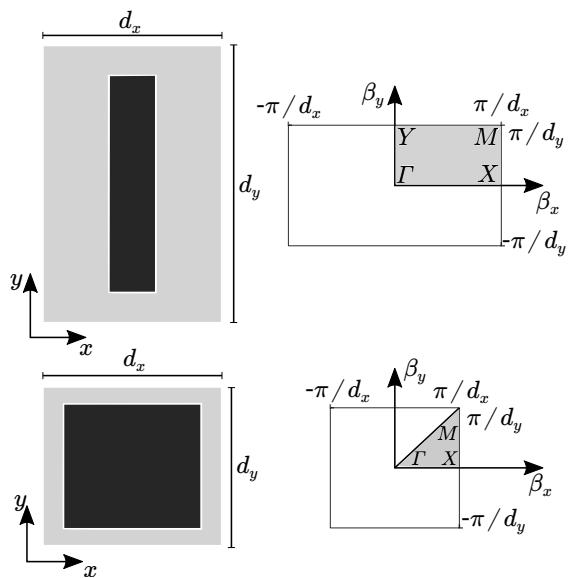


FIGURA 2.7: Celda unitaria en el espacio recíproco, y zona irreducible de Brillouin, para celdas unitarias en el espacio de Bravais rectangulares y cuadradas. Notar que la celda rectangular tiene dos ejes de simetría ortogonales, mientras que la celda cuadrada tiene los mismos ejes, y además con el que corresponde a una recta de  $45^\circ$ .

### 2.3. Teorema de Bloch-Floquet

El teorema Floquet fue presentado por Gaston Floquet en 1883, y explicita la forma canónica de las soluciones a ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes periódicos, de la forma  $x' = A(t)x$ , con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ , donde  $A(t)$  es una función periódica con periodo  $p$ . Si  $x = \phi(t)$  es solución, entonces también lo es  $x = \phi(x \pm np)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Esto significa que toda solución encontrada para el sistema con condiciones de contorno periódicas, es también periódica, con la misma periodicidad que las condiciones de borde, debiendo considerar, además, un factor de fase. Si bien el teorema aplica a ecuaciones de primer orden, toda ecuación de segundo orden puede ser transformada en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para en análisis de ondas electromagnéticas en un material periódico, se puede considerar el caso particular en que, dado que varían las condiciones de propagación periódicamente, como se describió en la sección 2.2, existe una periodicidad en el espacio de los número de onda  $\gamma$ . En el mismo sentido, una variación de los valores de permitividad eléctrica y permitividad magnética generan una variación en la constante de propagación, sin necesidad de considerar el análisis de estructuras cristalinas de la sección anterior. Dado que el vector de onda de la ecuación de Helmboltz (1-17) varía periódicamente ( $\gamma = \gamma(x)$ ), se puede plantear el sistema:

$$\begin{bmatrix} \phi'_1(x) \\ \phi'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

donde  $\gamma(x)$  es el vector de onda, variable en el espacio, de modo que en la estructura periódica,  $\gamma(x) = \gamma(x + np)$ ,  $\phi_1(x) = E(x)$  y  $\phi_2(x) = \frac{\partial E(x)}{\partial x} = \phi'_1(x)$ . La matriz del sistema es periódica, por lo que cumple las condiciones del teorema de Floquet, de manera que la solución es de la forma

$$\phi(x) = P(x)e^{xB} \quad (2-3)$$

donde  $P(x)$  es una función periódica del espacio, con la misma periodicidad que la matriz del sistema, y  $B$  es una matriz cuadrada de rango 2.

La aplicación del teorema de Floquet a la física del estado sólido se denomina teorema de Bloch, e indica que las soluciones a la función de onda de un electrón en un cristal tiene la forma:

$$\phi(\vec{r}) = e^{j\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} u(\vec{r}) \quad (2-4)$$

donde  $\vec{\gamma}$  es el vector de onda cristalino,  $\vec{r}$  es la posición y  $u(\vec{r})$  es una función periódica con igual periodicidad que el cristal. El factor exponencial se corresponde con el comportamiento de una onda plana incidente en un espacio sin obstáculos, mientras que el factor periódico,  $u(\vec{r})$ , deviene del efecto del sistema. El efecto se puede observar gráficamente en la figura 2.8.

La idea intuitiva detrás del resultado radica en que si la estructura es infinitamente periódica, con celdas unitarias idénticas, las mismas deberían ser indistinguibles, por lo que los campos electromagnéticos presentarían también un comportamiento periódico, a excepción de un corrimiento de fase. Por lo tanto, se puede escribir:

$$E(x, y, z + d) = e^{j\beta d} E(x, y, z) \quad (2-5)$$

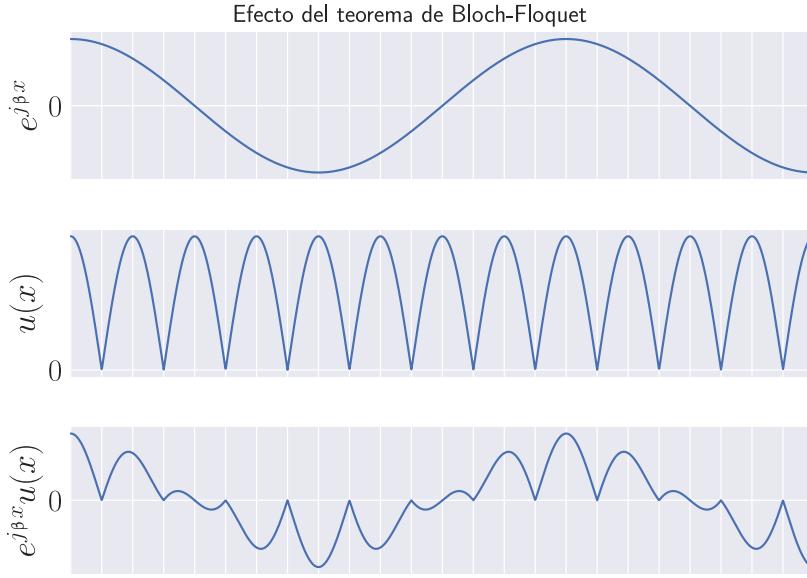


FIGURA 2.8: Comportamiento de una onda monocromática sobre un medio periódico.  
La función  $u(\vec{r})$  tiene un comportamiento de igual periodicidad que el medio.

donde  $\beta$  es la constante de propagación en el medio periódico, considerando que no hay pérdidas ( $\gamma = \beta$ ) [27]. El valor de la diferencia entre los campos en dos bordes de una celda unitaria, entonces, es  $\beta d$ , que puede reducirse al rango  $[-\pi, \pi]$ , de modo que los posibles valores de  $\beta$  son  $[-\pi/d, \pi/d]$ , que son los límites de la celda de Brillouin descrita antes. La generalización para el comportamiento en dos dimensiones está íntimamente ligado a la definición de la zona de Brillouin del material analizado.

Si una onda plana incide sobre un medio periódico dispuesto en la dirección orthogonal al vector de propagación, el efecto es intuitivo, como se puede ver en la figura 2.9. En este caso, la periodicidad se da sobre el eje  $z$ , y la constante de propagación en esa coordenada es nula, por lo que no hay diferencia de fase entre los elementos dispuestos periódicamente (la diferencia de fase se da, para la onda incidente dibujada, en la dirección  $y$ ).

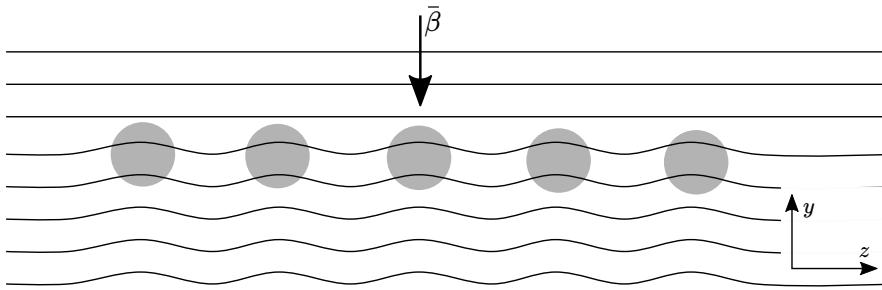


FIGURA 2.9: Comportamiento de una onda monocromática que incide en forma perpendicular a un medio periódico unidimensional.

## 2.4. Relación y diagrama de dispersión

Las estructuras periódicas se usan comúnmente en microondas, principalmente como filtros, dado que pueden ser modeladas como líneas de transmisión cargadas, lo que permite describir las características

que comparten con los mismos, utilizando nomenclaturas similares para fenómenos similares.

Una línea de transmisión infinita cargada periódicamente puede analizarse planteando las matrices ABCD<sup>2</sup> de cada celda unitaria, considerando puntual el efecto de carga que impone la geometría, de forma que:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Si se considera que la línea está cargada con una impedancia y una admitancia, como indica la figura 2.10, entonces se puede dividir a cada celda unitaria en secciones diferenciadas, y multiplicar las matrices ABCD<sub>i</sub> de cada sección para obtener la matriz ABCD que corresponde a la celda unitaria completa.

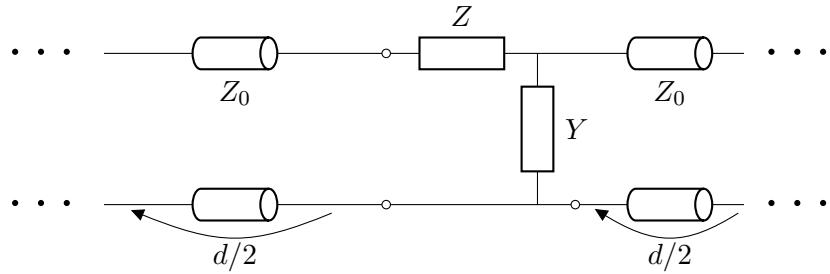


FIGURA 2.10: Circuito equivalente de porción de línea de transmisión cargada, de longitud  $d$ .

- La primera mitad de la línea de transmisión, de largo  $d/2$ , cuya matriz ABCD es, considerando  $Z_0$  su impedancia característica y  $\beta_{TL}$  la constante de propagación [1]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{1,3} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{TL}d/2) & jZ_0 \sin(\beta_{TL}d/2) \\ jY_0 \sin(\beta_{TL}d/2) & \cos(\beta_{TL}d/2) \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

- La carga, que comprende a la impedancia  $Z$  y la admittance  $Y$  asociada a la línea de transmisión. La matriz resulta:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 + ZY & Z \\ Y & 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

- La segunda mitad de la línea de transmisión, de largo  $d/2$ , de igual expresión que la primera mitad.

Si se considera que la relación entre las tensiones y corrientes de entrada y salida, respectivamente, están relacionadas por el factor de propagación  $e^{-\gamma d}$ , donde  $\gamma$  es el módulo del vector de onda en el medio metamatérial que se quiere obtener, entonces:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n+1} e^{\gamma d} \\ I_{n+1} e^{\gamma d} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A - e^{\gamma d} & B \\ C & D - e^{\gamma d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-9)$$

<sup>2</sup>Las matrices ABCD son matrices que relacionan la corriente y la tensión a la entrada con la corriente y la tensión a la salida de un sistema. De esta manera, los parámetros A y D son adimensionales, el parámetro B tiene dimensiones de impedancia, y el parámetro C tiene dimensiones de admittance.

La existencia de una solución no trivial del sistema de ecuaciones planteado requiere que el determinante de la matriz se anule. Recordando, además, que en las redes recíprocas,  $AD - BC = 1$  [1]:

$$AD + e^{2\gamma d} - (A + D)e^{\gamma d} - BC = 0 \implies 1 + e^{2\gamma d} - (A + D)e^{\gamma d} = 0 \quad (2-10a)$$

$$\cosh(\gamma d) = \frac{A + D}{2} \quad (2-10b)$$

Reemplazando los valores de A y D de la matriz de transmisión de la celda unitaria completa, que surge de la multiplicación de las matrices de transmisión que la componen:

$$\cosh(\gamma d) = \frac{YZ}{2} \cos(\beta_{TL}d) + \frac{iYZ_0}{2} \sin(\beta_{TL}d) + \frac{iZ}{2Z_0} \sin(\beta_{TL}d) + \cos(\beta_{TL}d) \quad (2-11)$$

Dado que  $\gamma = \beta - j\alpha$  es la constante de onda en el material, resulta conveniente considerar el caso en que no hay comportamientos exponenciales negativos para las ondas que los atraviesan, de modo que  $\alpha = 0$ <sup>3</sup>. Se obtiene, entonces, la ecuación de dispersión para una dimensión:

$$\cosh(\beta d) = \frac{YZ}{2} \cos(\beta_{TL}d) + \frac{iYZ_0}{2} \sin(\beta_{TL}d) + \frac{iZ}{2Z_0} \sin(\beta_{TL}d) + \cos(\beta_{TL}d) \quad (2-12)$$

El diagrama de dispersión es un gráfico que muestra la relación entre la frecuencia angular,  $\omega$ , y el módulo del vector de onda,  $|\vec{\beta}|$ . En la ecuación 2-12, si se reemplaza  $\beta_{TL}$  por  $\omega/v_p$ , con  $v_p$  la velocidad de fase de una onda monocromática que viaja por la línea de transmisión, se obtiene la relación buscada. Para el caso en que no existen discontinuidades periódicas, sino que la onda se desplaza sobre un medio homogéneo sin pérdidas, la relación es independiente de la frecuencia:  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , la velocidad de la luz en el medio.

Para el caso bidimensional, el análisis es similar, aunque se obtiene mayor información si se analizan simultáneamente las componentes ortogonales del vector  $\vec{\beta}$ . Para el caso de un medio homogéneo, el diagrama de dispersión es un cono, denominado comúnmente “cono de luz”, como se muestra en la figura 2.11, que surge de la expresión  $\omega = c\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$ .

El análisis tridimensional del diagrama de dispersión de una estructura periódica bidimensional posee, en muchos casos, información redundante, y su lectura puede ser complicada.

En función de lo explicado en la sección 2.2, y en base a lo analizado sobre el teorema de Bloch, resulta evidente que un análisis del comportamiento de una onda plana que viaja por un material periódico se reduce a comprender el mismo en una región limitada del espacio, conocida como la zona de Brillouin. Si, además, existen simetrías, las mismas permiten reducir aún más el espacio de análisis, dando lugar a la zona irreducible de Brillouin, de la cual las demás regiones del material son reflexiones y traslaciones. Sobre esta zona se presentan todos los posibles vectores de onda del espacio.

Para una superficie bidimensional, el análisis requiere que para cada punto dentro de la zona de Brillouin, se analice el valor de  $\omega$  correspondiente. Para un caso sencillo como el mostrado en la figura 2.7, el cálculo se debe realizar para todas las combinaciones posibles de valores de  $\beta_x$  en el intervalo  $[0, \pi/d_x]$  y de  $\beta_y$  en el intervalo  $[0, \pi/d_y]$ . Este análisis da lugar a el diagrama de dispersión o diagrama de bandas

---

<sup>3</sup> $\cosh(\gamma d) = \cosh(\beta d) \cos(\alpha d) + j \sinh(\beta d) \sin(-\alpha d) = \cosh(\beta d)$

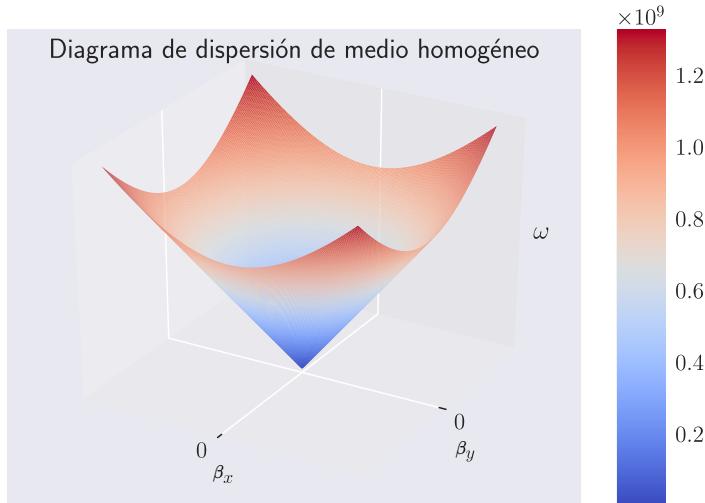


FIGURA 2.11: Gráfica del diagrama de dispersión tridimensional para el caso del vacío, denominado cono de luz.

completo, que sigue requiriendo una representación tridimensional, como se muestra en las figura 2.12c), que explicita que el análisis del diagrama completo sobre una celda unitaria se puede realizar sobre la zona irreducible de Brillouin. Una simplificación muy utilizada, que reduce la cantidad de información a considerar, aunque vuelve incompleto el diagrama, es la mostrada en la figura d), donde se analizan únicamente los valores del diagrama de dispersión sobre los bordes de la zona irreducible de Brillouin. De esta forma, resulta fácil expresar un diagrama de dispersión en un gráfico bidimensional, como se muestra en la figura e). Los puntos denominados  $\Gamma$ ,  $X$  y  $M$  representan los vértices de la zona de análisis.

Para el caso particular del vacío, el diagrama de dispersión simplificado, calculado a partir del que se observa en la figura 2.11, es el mostrado en la figura 2.13.

Una explicación intuitiva sobre el comportamiento en cada punto de la frontera de la zona irreducible de Brillouin se puede observar en la figura 2.14. En el centro de la misma se ubica una celda de Brillouin, que equivale a una celda de Wigner-Seitz del espacio recíproco. En la misma se destaca la zona irreducible de Brillouin de una celda cuadrada, cuyos vértices se denominan  $\Gamma$ ,  $X$  y  $M$ . Alrededor de la gráfica de la zona de Brillouin, se muestra una representación gráfica de una onda plana incidente, para el modo más bajo (la frecuencia más baja de las posibles).

La gráfica de la zona de dispersión comienza en el punto  $\Gamma$  de la zona irreducible de Brillouin, que corresponde a un valor de  $\beta_x = 0$  y  $\beta_y = 0$ , por lo que no hay variación espacial del valor de los campos. El recorrido de las abscisas continúa hacia el punto  $X$ , que corresponde a un valor de  $\beta_x$  equivalente a  $\pi/d$ , con  $d$  la periodicidad en  $x$ , como se muestra en la figura. Los valores intermedios entre  $\Gamma$  y  $X$  representan valores de  $\beta_x$  cada vez mayores, mientras se mantiene la frecuencia espacial en el eje  $y$  en cero. El aumento de la frecuencia espacial da lugar a longitudes de onda menores.

Una vez alcanzado el punto  $X$  de la zona irreducible de Brillouin, el recorrido continúa hacia el punto  $M$ , donde el cambio se da sólo para el valor de  $\beta_y$ , con  $\beta_x$  fijo en  $\pi/a$ . Esto indica una incidencia oblicua, como se esquematiza en las figuras que rodean a la zona de Brillouin.

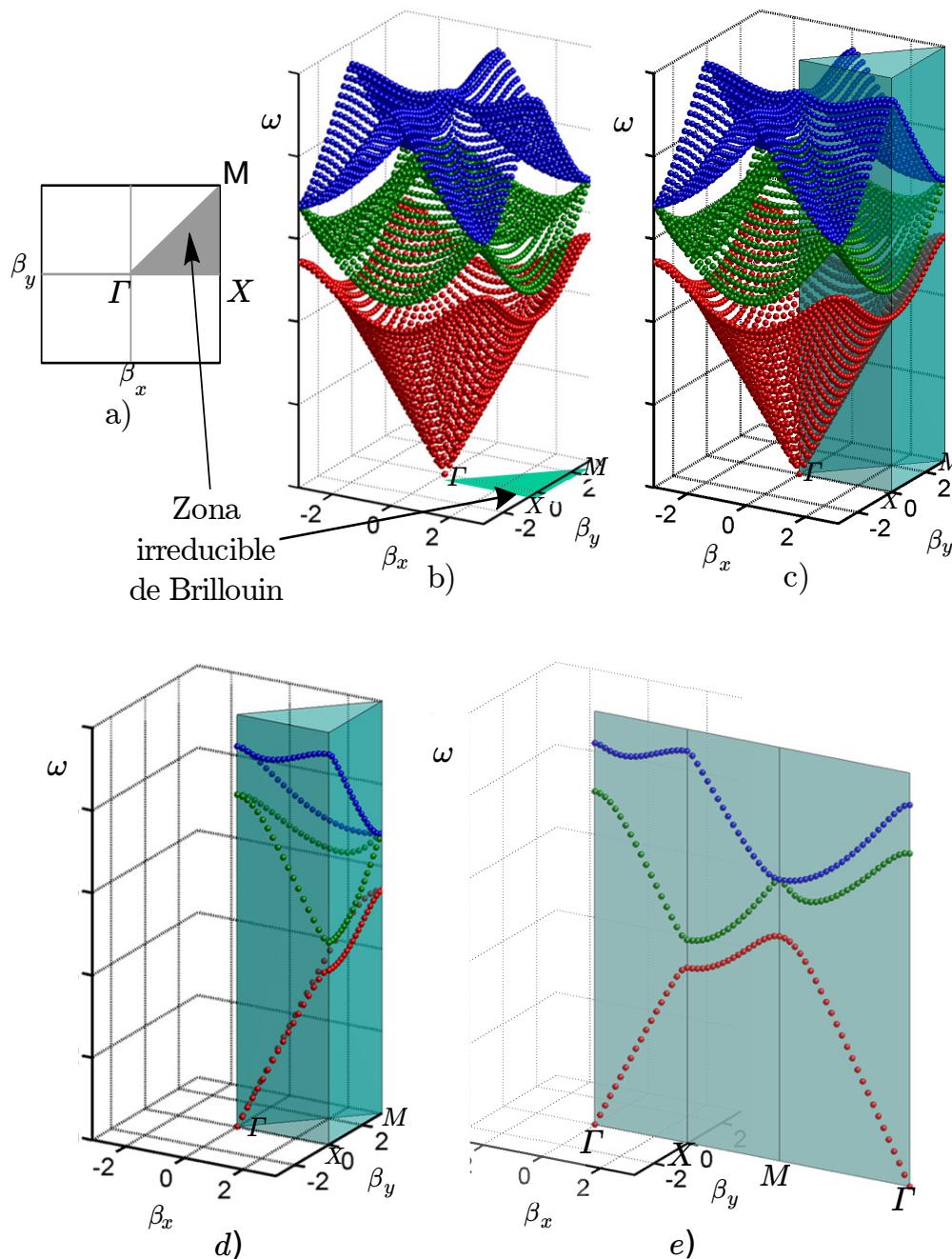


FIGURA 2.12: Gráficas ilustrativas del análisis del diagrama de dispersión sobre la zona de Brillouin [Raymond C. Rumpf, diapositivas del curso *21st Century Electromagnetics*].

El recorrido se completa con el camino entre el punto  $M$  y el punto  $\Gamma$ , donde ahora los valores de  $\beta_x$  y  $\beta_y$  disminuyen simultáneamente, a la misma velocidad, y en la dirección correspondiente a  $45^\circ$ , como se observa en las gráficas de la zona superior izquierda de la figura.

Se debe tener en cuenta que, dado que existen distintos modos, frecuencias de incidencia mayores darían lugar a modos superiores, que compartirían el valor de  $\beta_i$  con los modos inferiores. Esto se debe a que la diferencia de fase medida en los extremos de la celda unitaria de la red de Bravais no tiene en cuenta la cantidad de ciclos que le dieron origen (es decir, una diferencia de fase de  $\phi$  da lugar al mismo  $\beta_i$ ,



FIGURA 2.13: Diagrama de dispersión del vacío, calculado a partir de su representación tridimensional mostrada en la figura 2.11. Para el vacío no existen modos de propagación.

$i = x, y$  que una diferencia de  $\pi + 2n\pi$ ). Esto es esquematizado en la parte superior y los lados de las figuras que representan al arreglo periódico.

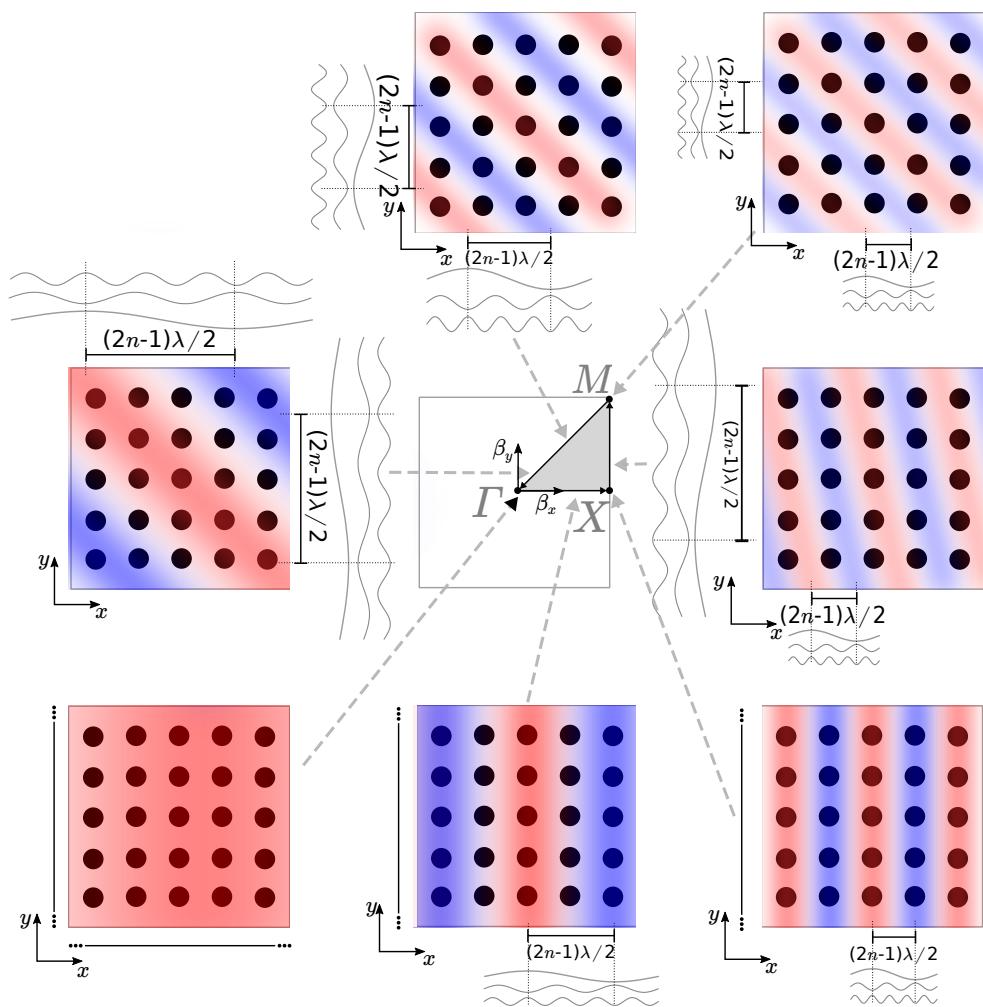


FIGURA 2.14: Explicación gráfica de la incidencia de ondas planas para cada punto del borde de la zona irreducible de Brillouin que da lugar al diagrama de dispersión.

## Capítulo 3

# Estudio y diseño de estructuras de banda prohibida electromagnética

### 3.1. Modelos analíticos de estructuras uniplanares de ban- da prohibida electromagnética

El análisis de estructuras de banda prohibida electromagnética, así como de superficies selectoras de frecuencia (FSS), se suele realizar a través de simulaciones numéricas de onda completa, utilizando el método de elementos finitos (FEM) o métodos en el dominio del tiempo, como FDTD, dado que permiten la resolución de los problemas de forma tridimensional, lo que habilita al diseñador a conocer el comportamiento de configuraciones de una o más capas, así como los efectos de curvaturas y discontinuidades en la periodicidad. Estos métodos, si bien son flexibles, no otorgan intuición física y resultan computacionalmente demandantes. Análisis de tipo numérico en dos dimensiones han sido propuestos, principalmente utilizando el método de momentos, a partir de los cuales han surgido otras técnicas de estudio de las estructuras bidimensionales, basadas en la búsqueda de capacidades e inductancias equivalentes, dispuestas de forma tal que respuesta en frecuencia tenga un comportamiento similar al observado en las simulaciones. Estos métodos, que en ocasiones derivan en aproximaciones de primer orden a elementos circuitales, se denominan semi-analíticos, y se usan especialmente cuando la periodicidad es mucho menor a la longitud de onda incidente. Este tipo de análisis ha permitido la aplicación de otros métodos numéricos, como TMM (*Transmission Matrix Method*) y TLM (*Transmission-Line Matrix Method*), de mayor simplicidad y con suficiente acercamiento al problema físico para que el resultado resulte intuitivo para el diseño preliminar.

Los métodos de modelado orientados a la descripción del comportamiento en el primer modo (en bajas frecuencias) no requieren de una simulación numérica de onda completa previa [28]. En ellos, como se muestra en la figura 3.1, las inductancias y capacidades surgen del análisis intuitivo y cuasiestático del efecto de cada aspecto de la geometría de la estructura metalodieléctrica de las celdas unitarias. Así, para las celdas de dicha figura, formadas por parches rectangulares unidos por puentes *microstrip*, se debe

considerar que cada parche presenta una capacidad contra el plano conductor ( $C_p$ ), dada simplemente como la expresión de capacidad entre placas planas paralelas, y una inductancia  $L_p$ , dadas por:

$$C_p = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 b^2}{h} \quad (3-1)$$

$$L_p = \mu_0 h \quad (3-2)$$

Los parches cercanos dan lugar a una capacidad ( $C_g$ ) [25] [24] [28], y los puentes entre parches generan una inductancia ( $L_{puente}$ ) [28]:

$$C_{gap} = \frac{b\epsilon_0(1 + \epsilon_r)}{\pi} \cosh^{-1}(a/g) \quad (3-3)$$

$$L_{puente} = 0,2 \text{ nH/mm} \cdot \ln(2\pi \frac{h}{w}) \quad (3-4)$$

donde  $a$  es el tamaño de la celda unitaria,  $h$  es el ancho del dieléctrico y  $w$  es el ancho del puente. Estos parámetros permiten calcular los valores de  $Y$  y  $Z$  requeridos para el análisis con líneas de transmisión cargadas, utilizados para calcular los diagramas de dispersión en la sección 2.4.

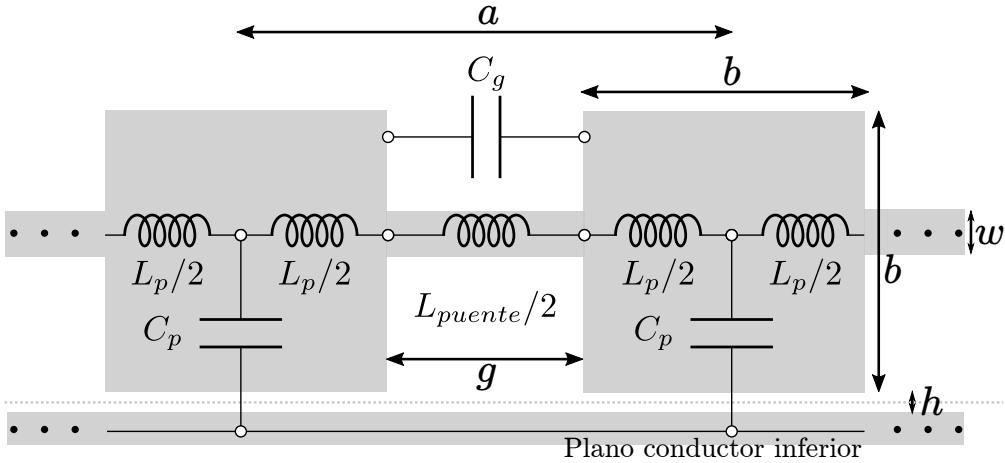


FIGURA 3.1: Circuito equivalente propuesto para el análisis de primer modo de una celda unitaria bidimensional arbitraria, propuesto por [28]

Para el caso de las superficies de alta impedancia sin vías de conexión entre la geometría superior y el plano de tierra inferior, Tretyakov y otros ([29] [30]) han propuesto un análisis centrado en la similitud con las FSS, considerando a las superficies EBG uniplanares como FSS con un plano de tierra. De esta manera es posible utilizar los modelos desarrollados durante el siglo XX para el análisis de las superficies selectoras de frecuencias, en el estudio de EBGs, dado que el comportamiento de banda prohibida se da por el mismo motivo que el comportamiento de filtro de las FSS [31], relacionado a la frecuencia de resonancia del arreglo de elementos. Para ello, se considera el circuito equivalente de la figura 3.2, donde  $Z_g$  es la impedancia que impone la FSS que se dispone sobre el plano dieléctrico, y  $Z_d$  es la impedancia del conjunto formado por el dieléctrico y el plano conductor. De esta forma, la impedancia de superficie resulta del paralelo de ambas. La impedancia del conjunto dieléctrico-plano conductor fue analizada en el capítulo anterior, y depende de la polarización (TE o TM). La impedancia que impone el arreglo periódico bidimensional, la FSS, requiere de un análisis particular de cada caso, y los

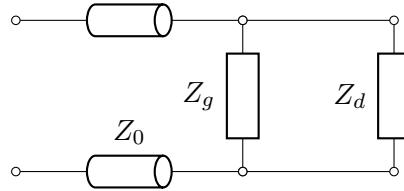


FIGURA 3.2: Circuito equivalente propuesto por [30] para un EBG.

resultados analíticos en la literatura están limitados a arreglos de rectángulos, dipolos y cruces, y sus correspondientes estructuras complementarias.

Un planteo intuitivo de los resultados de Tretyakov requiere comenzar el análisis a partir del conocimiento de que, para ondas TM, como se demostró en la sección 1.5, y como se muestra en la figura 1.10, una superficie con impedancia inductiva es capaz de soportar ondas TM. La impedancia de un plano de tierra recubierto por un material dieléctrico, como se muestra en la ecuación 1-58, da lugar a una impedancia  $Z_d$  inductiva. Para lograr una impedancia superficial  $Z_s$  menos inductiva, en vistas de disminuir el comportamiento de guía de ondas de la estructura, se debe imponer una impedancia  $Z_g$  acorde.

El metamaterial basado en FSS más usual, el arreglo de parches, da lugar a una impedancia  $Z_g$  capacitiva, tanto por la capacidad impuesta entre los parches y el plano de tierra, como por la capacidad entre los parches adyacentes. Para frecuencias bajas, el comportamiento del circuito equivalente es inductivo, pero para frecuencias por encima de la de resonancia, el comportamiento es capacitivo. Por otro lado, es posible considerar, si los parches son lo suficientemente grandes, que los mismos presentan una inductancia, en serie con las capacidades parásitas descriptas antes. Un inductor en paralelo con el inductor correspondiente al plano conductor de la cara inferior del dieléctrico disminuye la inductancia total, por lo que se logra el efecto deseado. Finalmente, si los parches son conectados, como se mostró en la figura 3.1, la inductancia en paralelo con la capacidad entre parches acrecentará este efecto. Los efectos que se presentan por encima de la frecuencia de resonancia impiden que el análisis intuitivo describa la existencia de modos superiores, por lo que el análisis no es completo, lo que obliga a que la frecuencia de resonancia no esté muy por debajo de la frecuencia de ondas de superficie que se desea bloquear con la estructura EBG.

### 3.2. Técnicas numéricas de onda completa

El análisis mediante circuitos equivalentes sólo permite el modelado de efectos de primer orden y, en general, en sólo dos dimensiones. El uso de herramientas tridimensionales de cálculo numérico permite observar los efectos de orden superior, así como evaluar los campos radiados por la estructura y los posibles efectos de campo cercano [32].

Las técnicas de simulación de onda completa son aquellas en las que se resuelven las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 1-1) sin simplificaciones, por lo que los campos solución son, en general, variables en el tiempo y dependientes de la frecuencia, y el cálculo es más lento que en los métodos simplificados. Requieren del establecimiento de condiciones de borde, y permiten conocer el comportamiento de estructuras arbitrarias.

La solución de las ecuaciones diferenciales vectoriales en el espacio y el tiempo se pueden realizar utilizando distintas técnicas, entre las que destacan el método de momentos (MOM), el método de elementos finitos (FEM) y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD).

- Método de elementos finitos (FEM): Tiene su origen en el análisis estructural. Consiste en dividir en recinto en un número finito de regiones o elementos pequeños (habitualmente triángulos), deducir las ecuaciones que describen los campos dentro de un elemento cualquiera (habitualmente utilizando polinomios de orden  $n$ ), plantear las ecuaciones que dan las condiciones de ajuste de las soluciones en las superficies frontera (en general, agregando como requisito que la solución sea la de mínima energía) y, finalmente, resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante [6].
- Método de momentos (MOM): Se suele utilizar para el cálculo de estructuras radiantes. Consiste en establecer un operador lineal, para luego resolver un sistema de ecuaciones operacionales lineales, donde la función solución (los campos que se desea hallar) se representan como un desarrollo en serie de funciones base a las que se aplica el operador, donde las incógnitas son los coeficientes constantes utilizados en el desarrollo en serie de la función resultado. Es un método en el dominio de la frecuencia, y su implementación más conocida es la realizada por el software NEC-2 [6].
- Método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD): Consiste en la discretización en el espacio y el tiempo, mediante las denominadas celdas de Yee, lo que permite el análisis en banda ancha. Los campos eléctrico y magnético se evalúan en puntos alternados (en la mitad de los puntos se evalúa únicamente el campo eléctrico, y en la otra mitad, campo magnético), de forma que cada punto donde se evalúa campo eléctrico quede rodeado de cuatro componentes donde se evalúa campo magnético, y viceversa. La evaluación en el tiempo es también alternada: los campos magnéticos se evalúan  $\Delta t/2$  más tarde que los campos eléctricos, de forma que resulte fácil calcular las derivadas en el tiempo y el espacio mediante diferencias finitas.

Para el caso particular del FDTD, es posible resolver problemas de autovalores (particularmente, el analizado en la sección 1.2.2), útiles en la descripción de guías de onda y metamateriales periódicos. Una vez impuesta una excitación en el tiempo  $t = 0$ , los valores de campos se actualizan tiempo a tiempo para todos los puntos del dominio de cálculo de forma iterativa, hasta que se logra una señal resonante estable.

Para el caso del estudio de cavidades y guías de ondas, las condiciones de borde para el análisis de autovalores suelen ser conductores eléctricos, con o sin pérdidas. Cuando se analizan estructuras periódicas, es común utilizar condiciones de borde periódicas (PBC, *periodic boundary conditions*), que modelan el efecto de replicación periódica, de manera que es posible simular una única celda unitaria para obtener el efecto del metamaterial completo en base a su diagrama de dispersión [33], utilizando la disposición mostrada en la figura 3.3.

El uso de estas condiciones de borde periódicas deriva del teorema de Bloch-Floquet, tratado en la sección 2.3. Como se muestra en la ecuación 2-5, el campo eléctrico (o magnético) resulta periódico, con la misma periodicidad que el material, a excepción de una variación de fase, dada por el valor de la constante de propagación  $\beta$  del medio.

Para obtener el diagrama de dispersión, cada frecuencia  $\omega$  debe estar asociada a una o más constantes de propagación de onda  $\beta$ . O, dicho de otra forma, dada una constante de propagación  $\beta$ , es necesario encontrar las autofrecuencias asociadas. Fijar el valor de la constante de propagación  $\beta$ , según la ecuación 2-5, equivale a establecer la diferencia de fase entre las paredes opuestas de la celda unitaria ( $e^{-j\beta d}$ ). Una simulación del comportamiento en el tiempo, una posterior transformada de Fourier para obtener

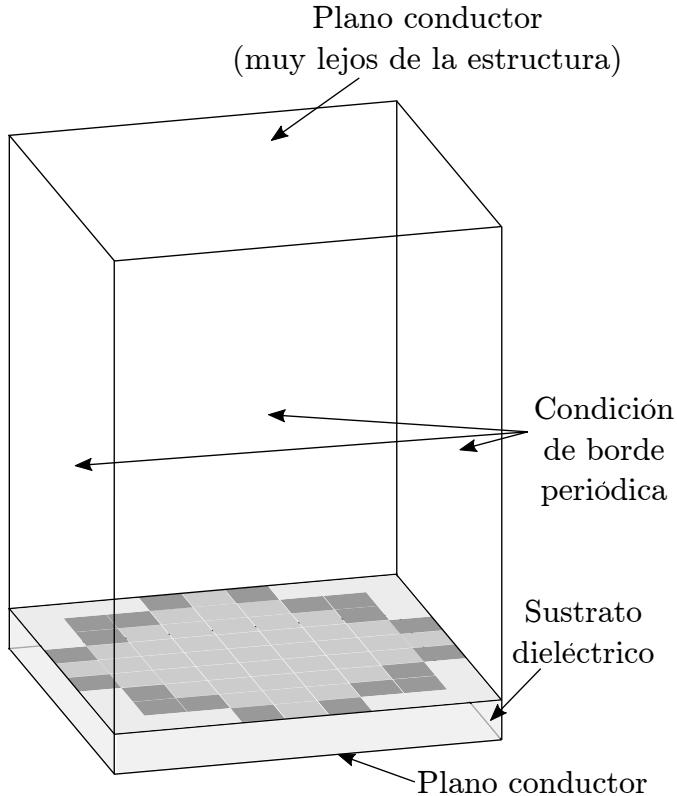


FIGURA 3.3: Dominio de simulación de una celda unitaria de un metamaterial bidimensional, utilizando condiciones de borde periódicas.

el comportamiento en frecuencia, permite observar picos de amplitud de campo para algunas frecuencias en particular, que son las que autofrecuencias del problema. Dado que la misma diferencia de fase se puede obtener para frecuencias mayores (un ciclo más tarde), se presentarán distintos modos.

Como se observó en la sección 2.4, para la descripción del comportamiento de la relación de dispersión sólo es necesario el cálculo en la denominada zona irreducible de Brillouin, dado que a partir de reflexiones y transposiciones de la misma es posible reconstruir la celda unitaria en el espacio recíproco. Para el caso de celdas unitarias en que hay simetría sobre los ejes  $x$  e  $y$ , y además hay simetría diagonal, la zona irreducible es un triángulo, como se mostró en la figura 2.7.

De esta forma, únicamente hay que fijar, como condiciones de borde, diferencias de fase que se correspondan, entre los distintos puntos que forman una celda de Wigner-Seitz y que se corresponden a la zona irreducible de Brillouin.

### 3.3. Análisis de campos y modos para distintas estructuras

#### 3.3.1. Metamaterial formado por parches cuadrados unidos por finas trazas *microstrip*

Uno de los metamateriales más fáciles de construir, y que en general presenta buenos resultados al mismo tiempo que mantiene una geometría sencilla es el que se observa en la figura 3.4. En la misma,  $d$  es el

lado de la celda unitaria (cuadrada),  $l$  es el tamaño del lado del cuadrado metálico (de cobre), y  $l_m$  y  $w_m$  son el largo y el ancho de los puentes que comunican a los parches, respectivamente.

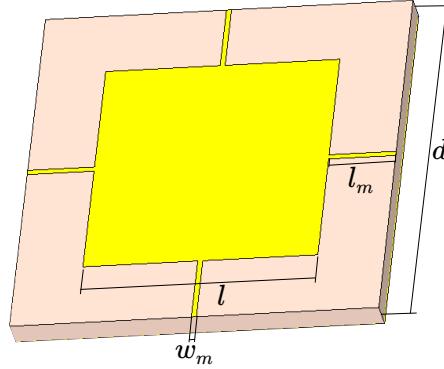


FIGURA 3.4: Celda unitaria de un metamaterial formado por parches cuadrados unidos por finas trazas *microstrip*.

Esta geometría resulta sencilla de analizar, debido principalmente a que, como se estudió en la sección 3.1, cada aspecto de la misma tiene un equivalente circuitual, al menos para las frecuencias más bajas, que varía en función de los parámetros constructivos. La celda unidad propuesta posee una simetría tal que permite realizar un análisis en una zona de Brillouin triangular, como la que se mostró, teóricamente, en la figura 2.14.

Aplicando el análisis de autovalores explicado en la sección precedente, es posible obtener, para cada condición de borde periódica en que va variando la fase de las paredes opuestas que conforman el contorno condicionado, un conjunto de frecuencias que representan los modos de propagación en cada dirección analizada, lo que permite crear un diagrama de dispersión, similar al mostrado en la figura 2.13, aunque con modos superiores.

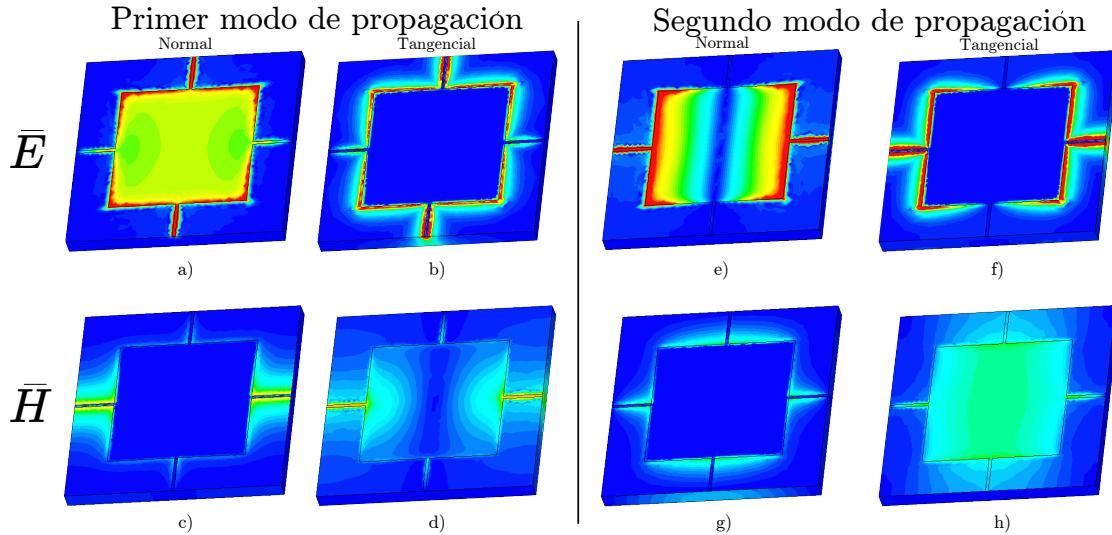


FIGURA 3.5: Comportamiento, en promedio temporal, de los campos eléctrico y magnético sobre una celda unitaria formada por un parche central y 4 puentes laterales, para el primer y segundo modo de propagación.

En la figura 3.5 se ilustran<sup>1</sup>, para los dos primeros modos de propagación, los campos eléctrico y magnético en dirección normal y tangencial a la superficie, considerando una dirección de propagación horizontal (equivalente al punto *M* en la figura 2.14).

En la figura 3.5 a) se muestra el comportamiento del campo eléctrico promedio perpendicular a la superficie para el primer modo de propagación. Resulta claro que el mismo se concentra debajo del parche metálico que conforma a la celda unitaria, debido a que la presencia de un plano de tierra genera un comportamiento de planas planas paralelas, conformando efectivamente un capacitor. Es también notoria la presencia de campo eléctrico en dirección normal a la superficie en los puentes *microstrip* superior e inferior, debido principalmente a que no hay movimiento de cargas en dirección longitudinal a los mismos, sino que actúan como extensiones al parche central, aumentando ligeramente la capacidad del dispositivo.

El campo eléctrico en la dirección tangencial, también para el primer modo de propagación, es ilustrado en la figura 3.5 b), y permite observar la existencia de notorios efectos de *fringing* alrededor de todo el parche, que deben ser considerados en el análisis. Estos efectos son mayores sobre los puentes superior e inferior, nuevamente, mientras que sobre los puentes ubicados horizontalmente parece no haber concentración de cargas. Esto se confirma al analizar las figuras 3.5 c) y d), que ilustran el campo magnético en dirección normal y tangencial a la superficie, respectivamente. Se puede observar que no existen campos magnéticos normales a la superficie debajo del parche metálico, sino que, como muestra la figura d), son puramente tangenciales. Debajo del parche, entonces, para el primer modo de propagación, los campos son quasi-TEM. La presencia de campo magnético sobre los puentes horizontales corrobora la hipótesis de que sobre los mismos se genera corriente, que ingresa al parche metálico para ser conducida.

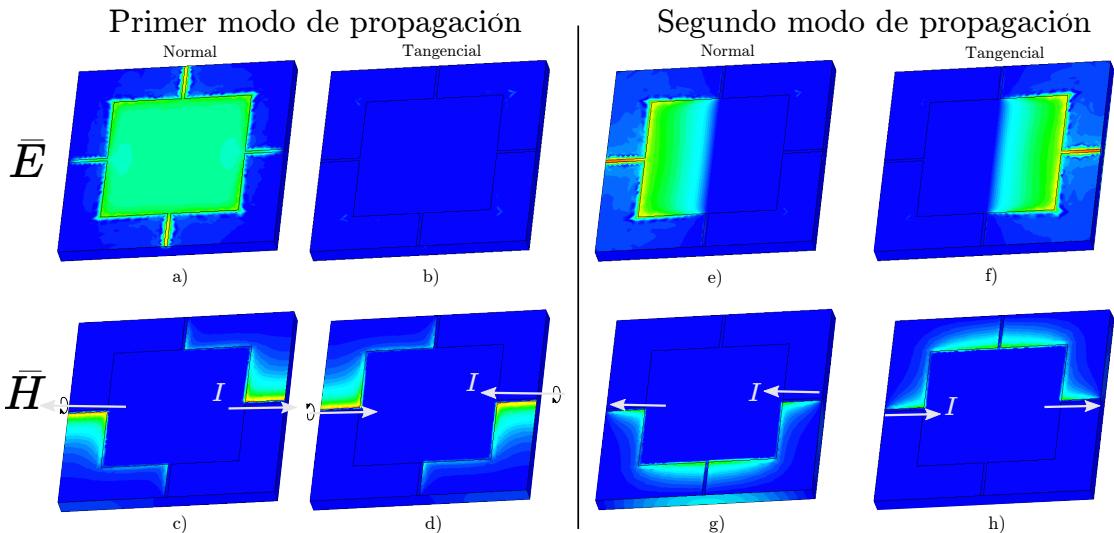


FIGURA 3.6: Comportamiento, para dos tiempos diferentes, de los campos eléctrico y magnético sobre una celda unitaria formada por un parche central y 4 puentes laterales, para el primer y segundo modo de propagación.

El análisis para el primer modo de propagación continúa en la figura 3.6. En las figuras 3.6 a) y b) se muestra el comportamiento del campo eléctrico para dos momentos de tiempo diferentes. Se observa que el parche almacena cargas durante un breve tiempo, y las expelle inmediatamente después. Esto se

<sup>1</sup>Debido a la naturaleza de la simulación con autovalores, que no impone una tensión inicial, los valores obtenidos de los campos no son representativos de la situación física (aunque sí la morfología espacial). Estos valores obtenidos, no mostrados en la figura, suelen ser altos debido al mecanismo de simulación. El análisis que se pretende realizar aquí del comportamiento de los campos es puramente conceptual.

ve corroborado por el comportamiento del campo magnético normal a la superficie, mostrado en escala lineal en las figuras 3.6 c) y d), para dos tiempos distintos, y donde se ven colores cuando el campo es positivo en la dirección perpendicular saliente a la superficie del parche. A través del uso de la regla de la mano derecha, se pueden deducir las direcciones de las corrientes sobre los puentes, que son las especificadas por flechas, y donde se observa que son opuestas en el primer modo. Es decir, de forma intuitiva, las corrientes son entrantes al parche de todas direcciones al mismo tiempo, y son salientes del mismo hacia todas direcciones en un tiempo subsiguiente. De esta forma, el parche posee cargas positivas completamente en un tiempo, y luego cargas negativas en el tiempo siguiente, lo cual coincide con la intuición del concepto de un primer modo de propagación, y con el análisis intuitivo detallado.

El segundo modo de propagación, para la misma dirección y posición sobre el diagrama de dispersión (punto "M"), posee un comportamiento más complejo. Como se observa en la figura 3.5 e), el campo eléctrico presenta un cero en el centro de la celda unidad, en la figura f) es coherente con esta observación, dado que cerca del centro y de los puentes verticales no hay campo de *fringing*. El campo magnético, por otro lado, mostrado en las figuras g) y h), nuevamente no parece permitir concebir corrientes sobre los puentes verticales, aunque sí en el interior del parche metálico propiamente dicho.

El análisis de dos tiempos diferentes dentro del ciclo para el segundo modo de propagación, mostrado en las figuras 3.6 e)-h), permite comprender más intuitivamente el comportamiento. Se observa que el parche central es excitado (posee campo eléctrico vertical) en dos tiempos diferentes, y sólo una de sus mitades lo es cada vez. Hay un desfasaje de  $180^\circ$  entre ambos lados del parche. Observando el campo magnético, resulta también intuitivo considerar que cuando la mitad izquierda del parche está excitada, es decir, cuando posee cargas almacenadas, formando un capacitor con el plano de tierra, se genera una corriente hacia la celda vecina, que posee un parche con tensión opuesta. En el lado derecho, el efecto es análogo. Es importante notar que, al contrario que en el caso del primer modo, en el segundo modo de propagación las corrientes de los puentes tienen el mismo sentido en cada tiempo.

La figura 3.7 ilustra, de forma esquemática e informal, el comportamiento de la fase del campo eléctrico para ambos modos de propagación, de manera que se pueda apreciar el requerido aumento de frecuencia para la concreción del segundo modo.

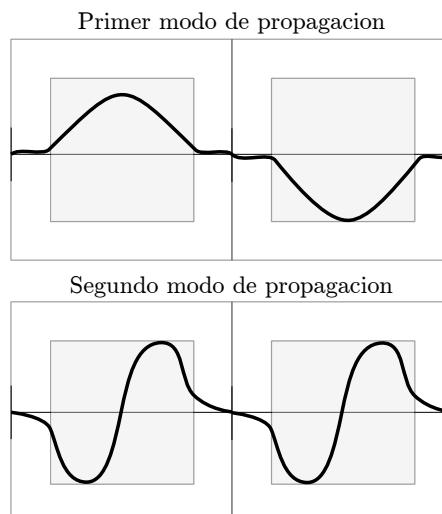


FIGURA 3.7: Comportamiento, para dos tiempos diferentes, del campo eléctrico sobre una celda unitaria formada por un parche central y 4 puentes laterales, para el primer y segundo modo de propagación.

Para comprender el efecto de la variación de distintos parámetros geométricos, se realizaron varias simulaciones, obteniendo de ellas los diagramas de dispersión.

### 3.3.1.1. Análisis de un diagrama de dispersión típico

En la figura 3.8 se puede observar un diagrama de dispersión típico.

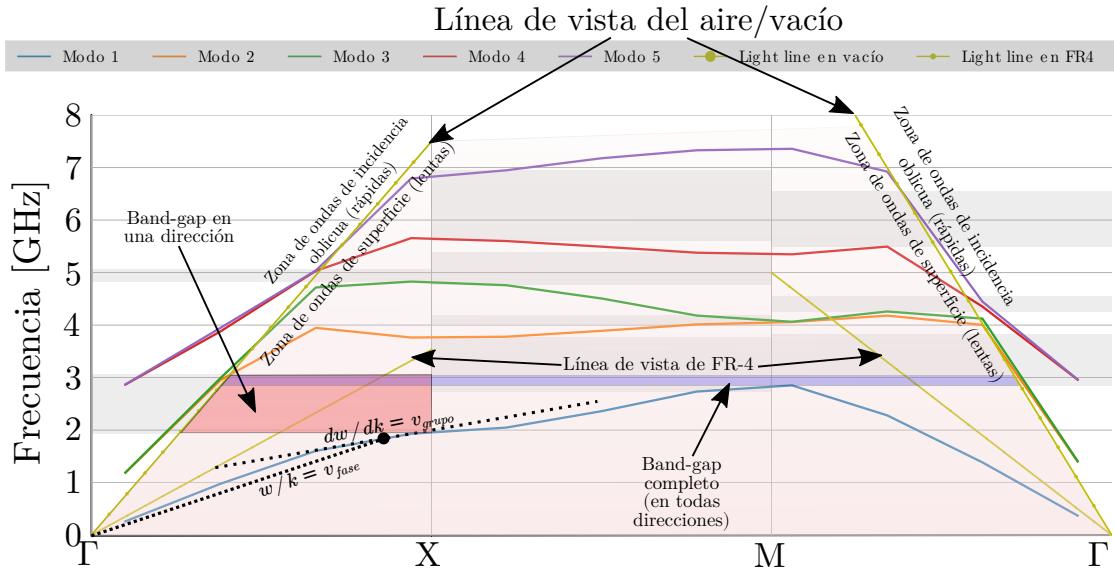


FIGURA 3.8: Ejemplo típico de un diagrama de dispersión que presenta un metamaterial bidimensional.

La línea azul corresponde al primer modo de propagación, la marrón al segundo, la verde al tercero, la roja al cuarto y la violeta al quinto. Además, se dibujaron las líneas de vista (*light-lines*) para vacío y para FR-4, que indican el comportamiento de una onda plana que circula por esos materiales. Representan el corte del diagrama de dispersión tridimensional mostrado en la figura 2.11 sobre los bordes de la celda de Brillouin, como se ve en la figura 2.13, para los dos materiales. La línea de vista del FR-4 presenta, naturalmente, una pendiente menor a la del vacío, pues la velocidad de propagación sobre ese medio es menor.

La línea de vista del vacío separa las llamadas ondas lentas (*slow waves*), que poseen una velocidad de fase menor a la del vacío ( $c$ ), de las ondas rápidas (*fast waves*), con velocidad de fase superior a  $c$ . Dado que, para el vacío,  $k = \omega/c$ , si se extiende a definición a dos dimensiones, se obtiene que  $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/c^2$ . Cuando el valor de  $|k|$  supera al correspondiente a la propagación en el vacío para la misma frecuencia, necesariamente la velocidad de fase es menor ( $k = \omega/v_p$ ). Cuando la velocidad es mayor, es decir, cuando se analizan resultados para pares  $(\omega, k)$  que están por encima de la línea de vista, el estudio no se da sobre ondas de superficie, sino sobre ondas incidentes o reflejadas con ángulo determinado. En algunos casos **Maci:pole-zero-matching** para algunos usos de metamateriales (especialmente cuando se los diseña de forma que actúen como paredes conductoras magnéticas), esa zona del diagrama de dispersión resulta de gran utilidad [33].

Las zonas demarcadas en gris representan, para cada una de las direcciones analizadas, la zona de frecuencias prohibidas o *band-gap*. En particular, para la zona  $\Gamma - X$ , el primer *band-gap* se demarcó en rojo. Se debe tener en cuenta que se calculan los *band-gaps* para las tres direcciones de forma separada. Existe un *band-gap* completo (en azul), cuando existe en todas las direcciones analizadas.

Para las frecuencias dentro de la zona prohibida completa, no existirá ángulo de incidencia que permita su propagación. Es importante notar que, para los intervalos  $\Gamma - X$  y  $M - \Gamma$ , las zonas prohibidas para la propagación de ondas lentes (*slow-waves*) de superficie se calculan por debajo de la línea de vista del vacío. Por encima de dicha línea, las ondas se propagan libremente.

En general, el diseño de EBGs tiene como objetivo aumentar el ancho de la banda prohibida de frecuencias para la propagación de ondas de superficie, la variación de la frecuencia central de los *band-gaps*, y la independización del mismo de la dirección de propagación (que equivale a lograr *band-gaps* completos). Estos objetivos se logran modificando la geometría de la celda unitaria, aumentando el acoplamiento entre las mismas y conectando los parches al plano de tierra [25]. La independización de las zonas prohibidas para cualquier dirección azimutal de propagación de ondas de superficie requiere celdas simétricas, aunque para ciertas aplicaciones la anisotropía es buscada [34].

El diagrama de dispersión, además, da una idea de las velocidades de fase ( $v_p = w/k$ ) y grupo ( $v_g = d\omega/dk$ ) para los modos existentes.

### 3.3.1.2. Efecto de la variación del ancho del puente *microstrip*

La primera variación analizada es la del ancho de los puentes *microstrip* que unen a los parches metálicos que conforman la estructura. Estableciendo una celda de 2 cm de lado, y un parche de 1,8 cm, para el caso de sustrato FR4 de 1,6 mm de espesor, se obtuvieron los diagramas de dispersión sobre el borde de la celda de Brillouin que se muestran en la figura 3.9.

Celda de parches metálicos unidos por puentes *microstrip*  
Variación de ancho del puente

Lado de celda: 20 mm. Lado del parche: 18 mm.  $\epsilon_r: 4.5$ . Ancho FR-4: 1.6 mm

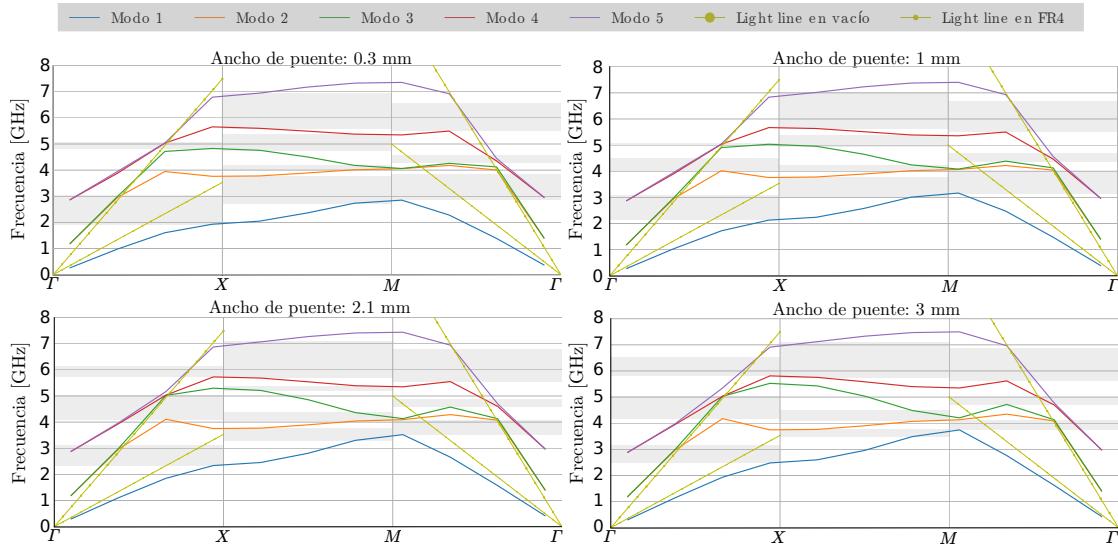


FIGURA 3.9: Diagramas de dispersión para la variación del ancho de los puentes *microstrip* que conforman una celda unitaria cuadrada, de lado 2 cm, parche de 1,8 cm, con sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

En la misma se observa que la formación de una zona prohibida completa entre los dos primeros modos de propagación, se ve dificultada cuando el ancho del puente aumenta, debido a que, para todas las direcciones de propagación, el ancho de los *band-gaps* disminuye drásticamente.

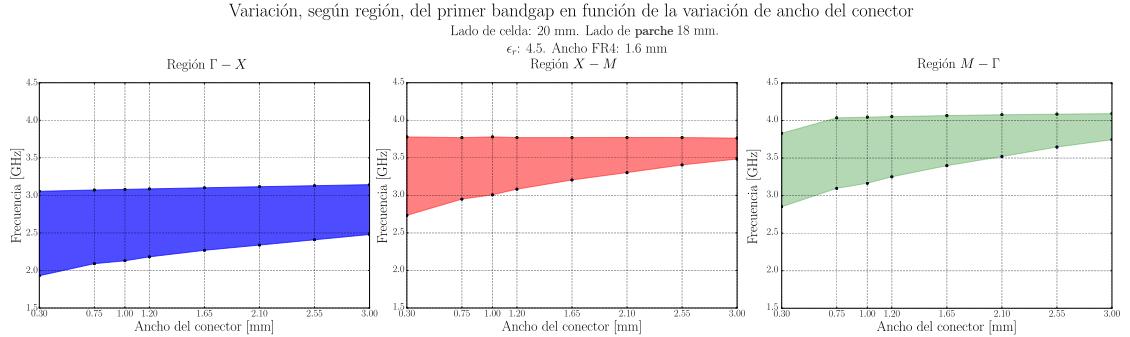


FIGURA 3.10: Comparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del ancho del puente que une los parches metálicos.

La principal causa se puede deducir de la figura 3.10, donde es notorio el crecimiento generalizado de las frecuencias necesarias para obtener el primer modo de propagación (la curva azul de la figura 3.9 se eleva), lo que se condice con una aumento en la velocidad de propagación en el metamaterial. Una explicación intuitiva, válida únicamente para las frecuencias en que se puede aplicar el modelo cuasiestático y considerar corrientes y tensiones sobre los conductores que conforman la estructura, se basa en la posible disminución de la resistencia al paso de corriente, lo que permite una carga y descarga del capacitor de placas planas paralelas (formado por el parche y el plano de tierra) más rápida.

Para modos superiores, especialmente para el rango de frecuencias entre el cuarto y el quinto modo, existe una zona prohibida que se extiende en todas direcciones, pero se da para frecuencias mucho más altas, de escaso valor práctico.

### 3.3.1.3. Efecto del escalamiento de la celda unitaria

Celda de parches metálicos unidos por puentes microstrip

#### Variación del tamaño de la celda unitaria

Lado de celda:  $d$  (variable). Lado del parche:  $0.75 \cdot d \cdot \epsilon_r : 4.5$ .

Ancho FR-4: 1.6 mm. Ancho del puente: 1 mm.

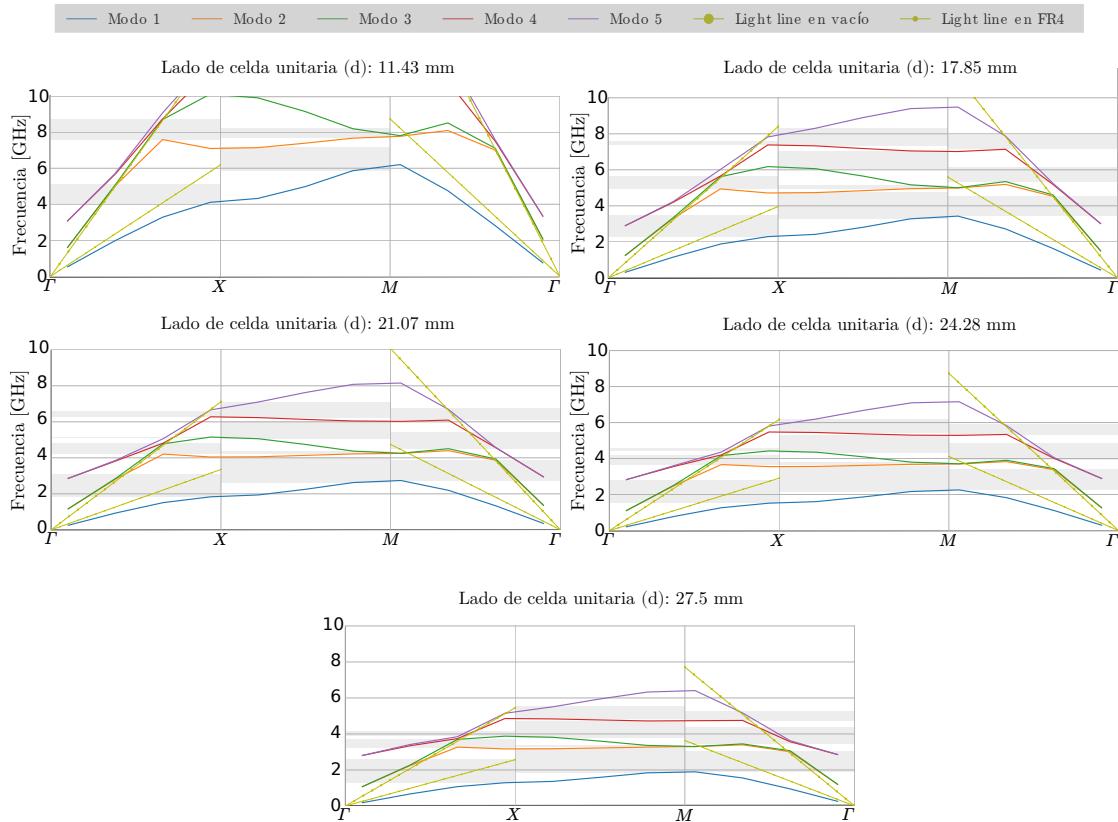


FIGURA 3.11: Diagramas de dispersión para la variación del ancho de las celdas unitarias (y, en consecuencia, también del parche que contiene) que conforman una celda unitaria cuadrada. El lado del parche es  $3/4$  del lado de la celda unitaria. El sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

Un escalamiento de la celda unitaria, debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, debería únicamente generar un cambio en las frecuencias centrales de los *band-gaps*. Para celdas unitarias pequeñas, las frecuencias centrales de las zonas prohibidas son altas, y resulta más difícil obtener un *bandgap* completo, como se observa en la figura 3.11.

En la figura 3.12 se puede observar el comportamiento del primer *bandgap* (ubicado entre el primer y el segundo modo de propagación), en función del tamaño de la celda unitaria analizada. A medida que la misma disminuye, las frecuencias centrales decaen a un ritmo de *sarasa*. La variación del tamaño de la celda unitaria, por sí solo, facilita la superposición de zonas prohibidas en todas las direcciones sólo para frecuencias bajas, y cuando la celda unitaria es grande. La superposición de las tres direcciones de propagación analizadas se puede observar en la gráfica inferior de la figura 3.12.

El comportamiento de la primera zona prohibida se puede explicar intuitivamente considerando que, de no variar la velocidad de propagación en el medio, y dado que  $\omega = k * v_p$ , entonces al variar el número de onda requerido por aumentar el tamaño de la celda unitaria (disminuye, permitiendo que el primer modo se corresponda con una longitud de onda mayor), el valor de  $\omega$  debe disminuir en consecuencia.

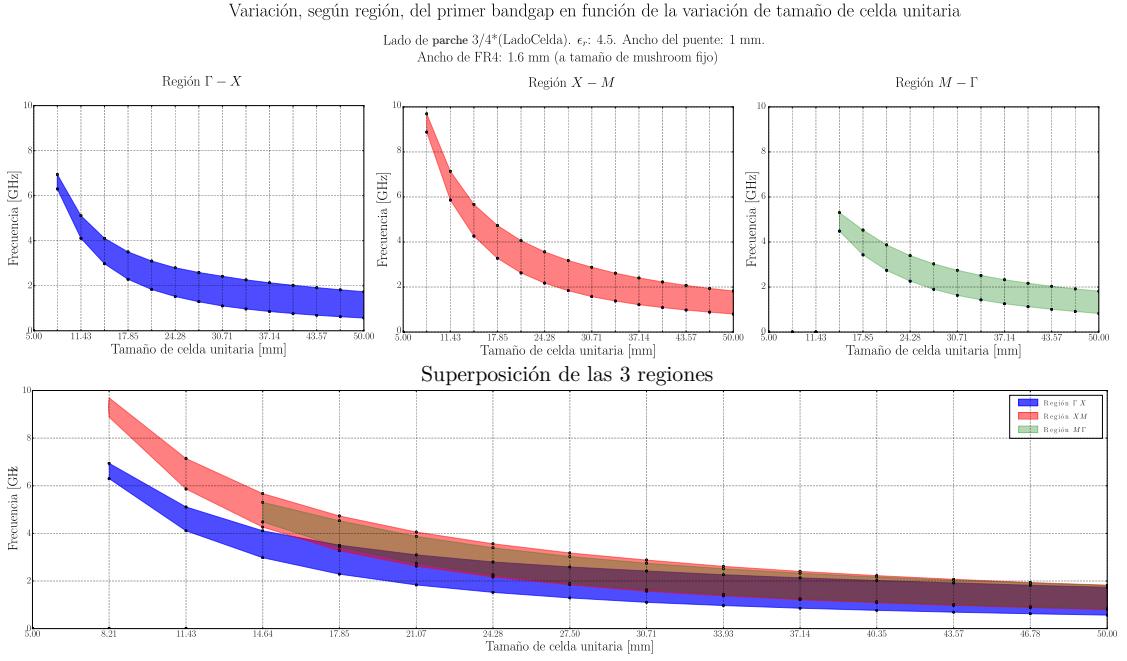


FIGURA 3.12: Comprparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del tamaño de la celda unitaria.

A este efecto se debe añadir el correspondiente al aumento del efecto capacitivo por el aumento del tamaño del parche. Si se considera, como se explicó antes, que un análisis a bajas frecuencias, utilizando razonamientos cuasiestáticos, nos conduce a un filtro LC equivalente. La frecuencia de resonancia de ese tipo de filtro es, en general, y sin considerar pérdidas,  $f_r \approx 1/\sqrt{LC}$ . Dado que se está escalonando la celda unitaria, y que por tanto también está creciendo el tamaño del parche, el valor de la capacidad aumenta. La relación entre la capacidad y el tamaño del parche es cuadrática, como se puede ver en la ecuación 3-1, y la inductancia no aumentará apreciablemente en comparación. De esta forma:  $f_r \propto 1/\sqrt{l^2} = 1/l$ , con  $l$  el tamaño del parche, según la figura 3.4.

Resulta importante destacar que la variación del tamaño de la celda unitaria en su conjunto es la forma más fácil (aunque en general, la menos conveniente) de modificar la frecuencia de trabajo del EBG.

### 3.3.1.4. Efecto de la variación del tamaño del parche metálico

Celda de parches metálicos unidos por puentes microstrip

**Variación del lado del parche, a tamaño de celda fijo**

Lado de celda: 20 mm. Ancho de puente: 1 mm.  $\epsilon_r = 4.5$ . Ancho FR-4: 1.6 mm

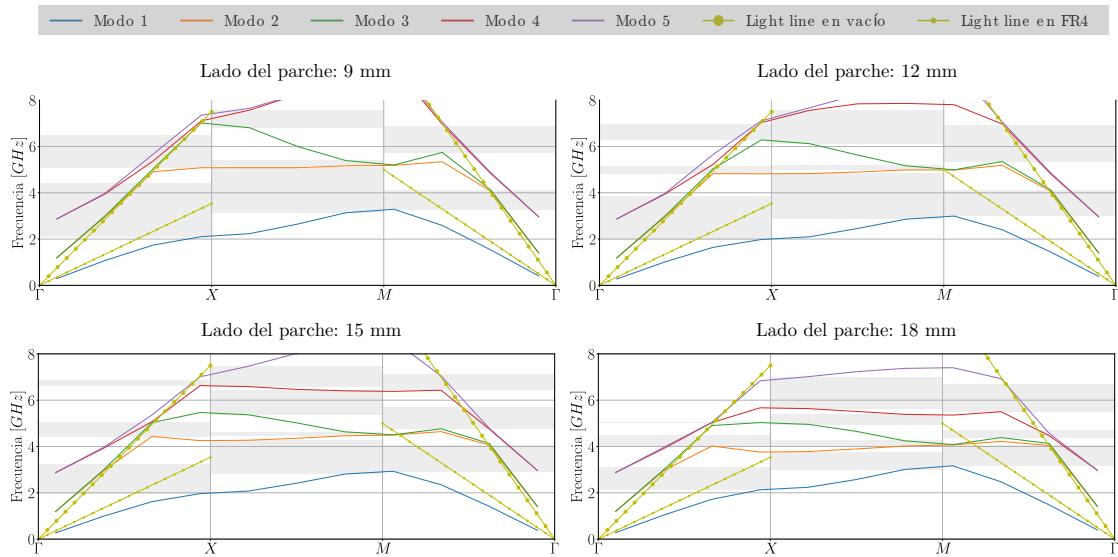


FIGURA 3.13: Diagramas de dispersión para la variación del tamaño del parche metálico, sin una variación en el tamaño de la celda unitaria. El sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

La figura 3.13 muestra que, al contrario que en el caso anterior, la mera variación del tamaño del parche metálico, sin la modificación del tamaño de la celda unitaria, no genera los mismos efectos. La variación de la capacidad, como antes, da lugar a una disminución en la frecuencia central del primer *bandgap*.

Por otro lado, la inductancia impuesta por los puentes disminuye considerablemente cuando el tamaño del parche aumenta sin que lo haga la celda unitaria en general. En este sentido, manteniendo la analogía con el filtro LC presentado antes, dado que el ancho de banda de resonancia de un filtro LC es aproximadamente  $BW_r \approx \sqrt{L/C}$ , si disminuye el valor de la inductancia (por puentes más cortos) y, al mismo tiempo, aumenta el valor de la capacidad (por el aumento del efecto de capacitor de placas planas paralelas y las capacidades mutuas entre celdas vecinas), el ancho de banda disminuirá notablemente.

Como se puede ver en la figura 3.14, un mayor ancho de banda prohibida se obtiene con parches de tamaño moderado, con los que además es posible obtener bandas prohibidas completas.

### 3.3.1.5. Variación de la longitud de los puentes

Para la variación de la longitud de los puentes es necesario, nuevamente, modificar el tamaño de la celda unitaria, por lo que, necesariamente, a medida que exista una mayor separación entre los parches (y por tanto una mayor longitud de puentes), la frecuencia central de la banda prohibida disminuirá.

Por otro lado, dado que la capacidad no cambiará (excepto aquella correspondiente al efecto de capacidad entre parches cercanos, que estarán cada vez más alejados), los efectos más notorios, bajo un análisis cuasiestático, se darán por el aumento de la inductancia. El alejamiento de los parches metálicos entre sí disminuirá la capacidad total de cada celda unitaria, pero los efectos no son lo suficientemente notorios.

Variación, según región, del primer bandgap, en función de la variación del tamaño del parche metálico  
Lado de celda: 20 mm. Ancho de puente: 1 mm.  $\epsilon_r$ : 4.5. Ancho FR4: 1.6 mm

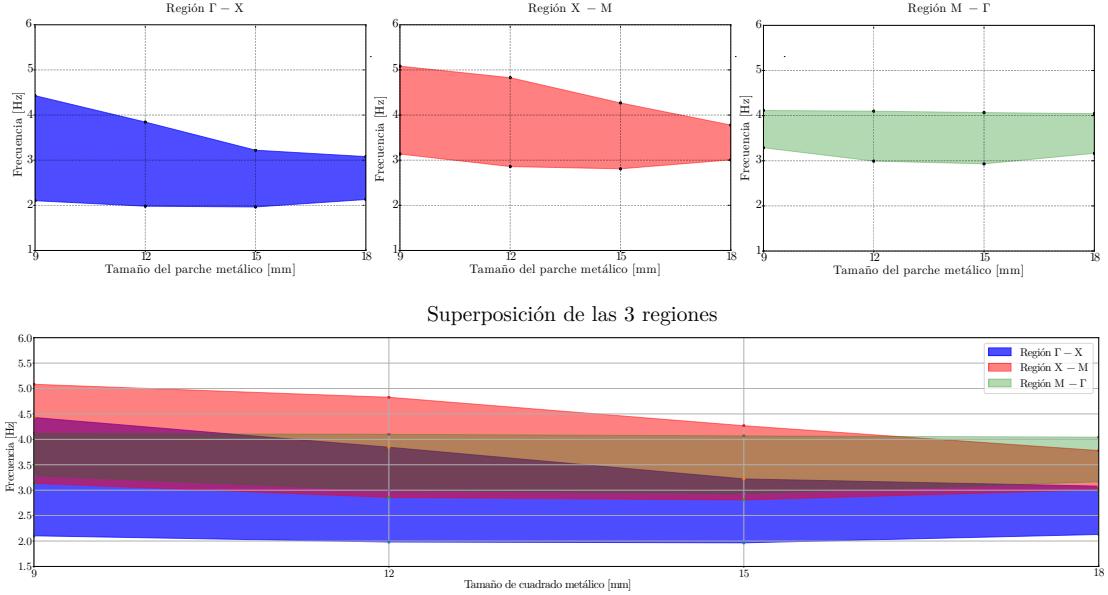


FIGURA 3.14: Comparación del ancho del primer bandgap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del tamaño del parche.

Si los puentes no existieran, el efecto sería el opuesto al que se da en esta geometría [33]. Este aumento en la inductancia generará un mayor ancho de banda, que se ve reflejado en la figura 3.16.

### 3.3.1.6. Efecto de la variación del ancho del sustrato dieléctrico

La variación del ancho del sustrato tiene importantes consecuencias en el EBG. Por un lado, es importante notar que el comportamiento del ancho de banda es opuesto al que se obtiene considerando el modelo cuasiestático: Un aumento en la capacidad (debido al acercamiento de los planos paralelos que forman los parches y el plano conductor inferior, cuando disminuye el ancho del sustrato), debería dar lugar a una disminución notoria en el ancho de banda. Sin embargo, como se observa en la figura 3.18, se da el efecto contrario.

El comportamiento resulta más intuitivo si se recuerda que, como se explicó en la sección 1, un sustrato delgado dificulta la aparición de ondas de superficie, volviendo a las zonas prohibidas de propagación más notorias.

A medida que aumenta el tamaño del mismo, disminuye el ancho de banda de la zona prohibida, y resulta más difícil obtener un *bandgap* completo.

### Celda de parches metálicos unidos por puentes microstrip Variación de largo del puente (hasta el borde de la celda)

Lado del parche: 15 mm. Ancho del puente: 1 mm.  $\epsilon_r: 4.5$ . Ancho FR-4: 1.6 mm

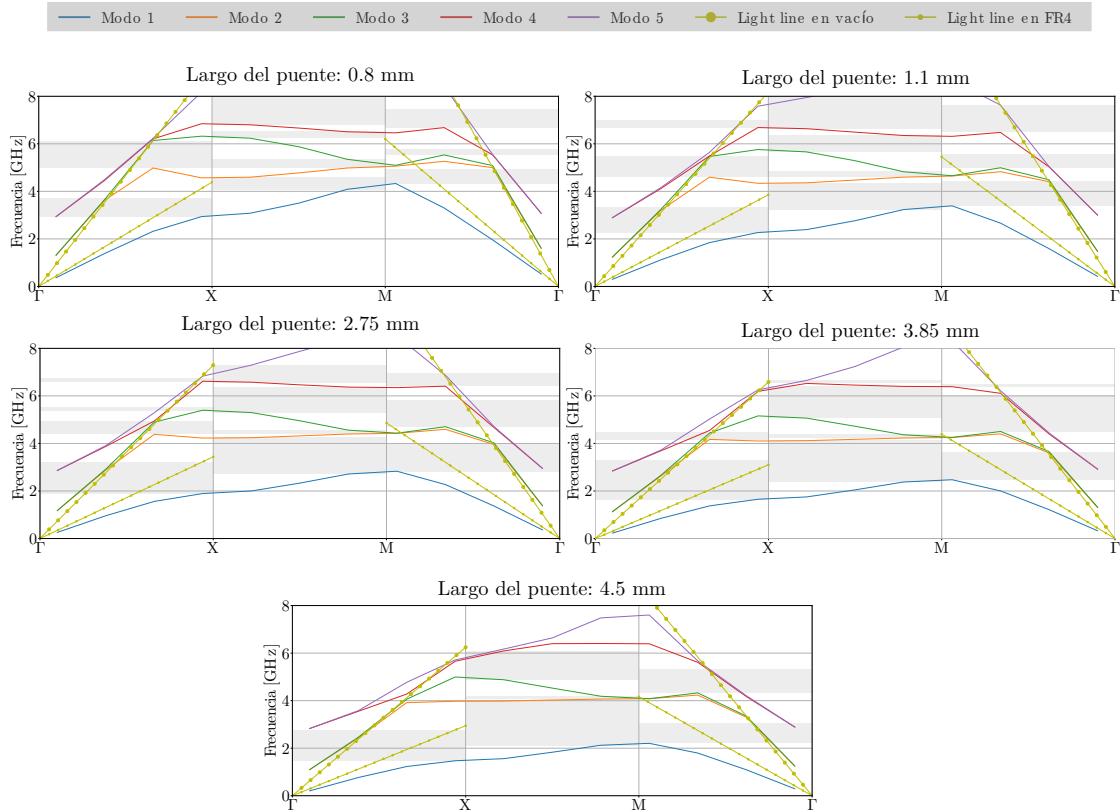


FIGURA 3.15: Diagramas de dispersión para la variación del largo de los puentes, que equivale a un aumento del tamaño de la celda unitaria, si las dimensiones del parche *microstrip* se mantienen fijas. El sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

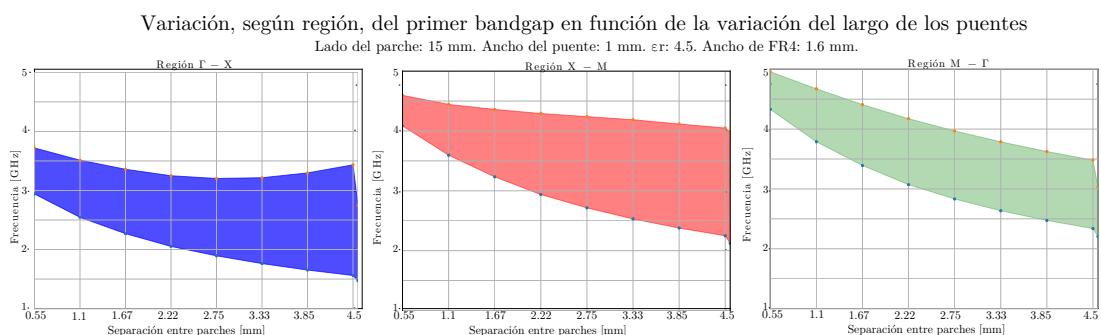


FIGURA 3.16: Comparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del largo de los puentes que unen a los parches.

### Celda de parches metálicos unidos por puentes microstrip Variación del ancho del sustrato dieléctrico

Lado del parche: 15 mm. Lado de la celda: 20 mm.

Ancho del puente: 1 mm.  $\epsilon_r = 4.5$ . Dieléctrico: FR-4.

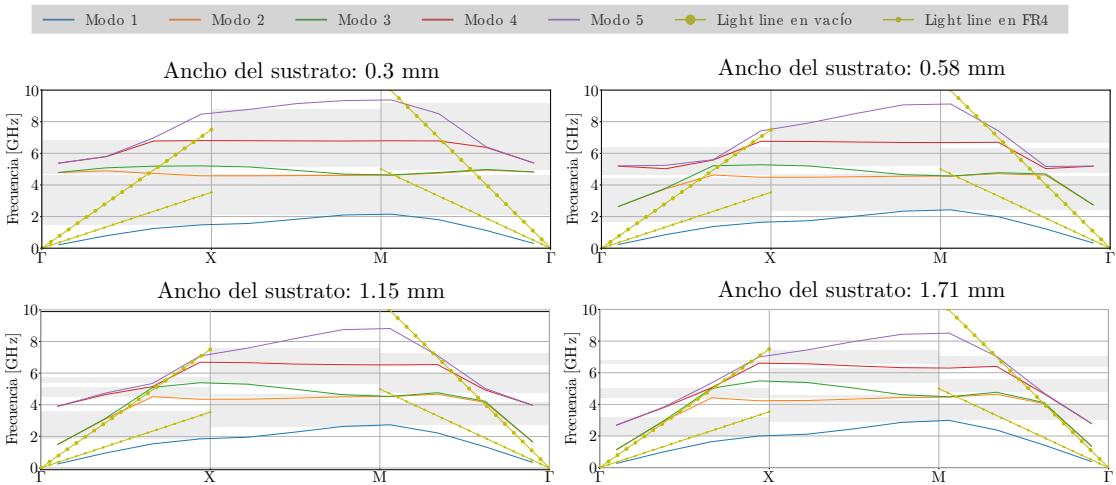


FIGURA 3.17: Diagramas de dispersión para la variación del ancho del sustrato dieléctrico. El sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

Variación, según región, del primer bandgap en función de la variación de ancho de sustrato  
Lado de celda: 20 mm. Lado de mushroom: 15 mm.  $\epsilon_r = 4.5$ . Ancho del puente: 1 mm.

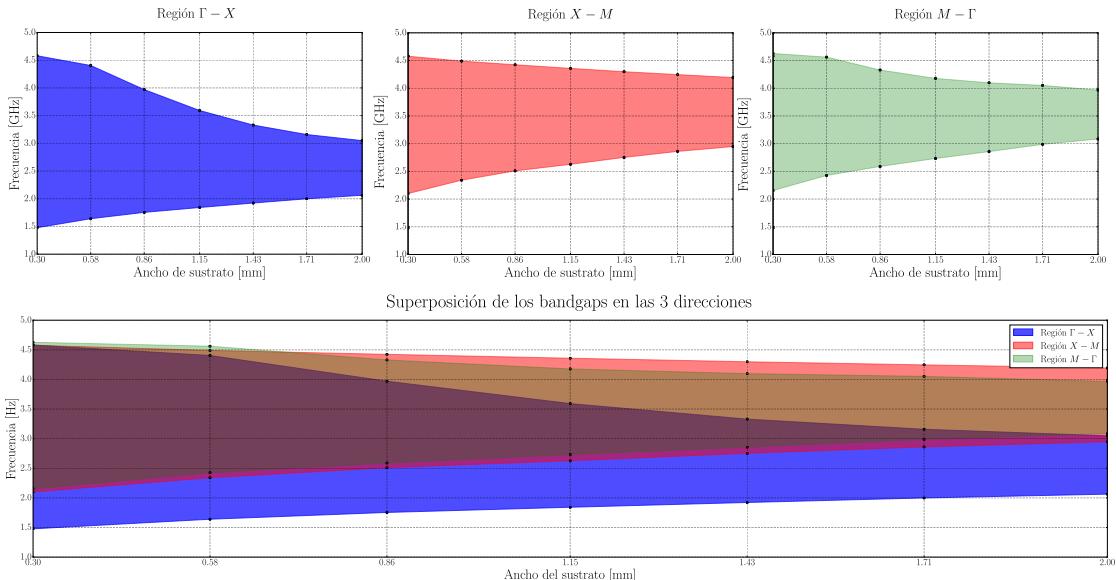


FIGURA 3.18: Comparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del ancho del sustrato dieléctrico.

### 3.3.2. Celda de Yang

## 3.4. Modelado por líneas de transmisión

### 3.4.1. TMM

### 3.4.2. TLM

## 3.5. Estudio de estructuras mediante TLM

### 3.5.1. Algoritmo utilizando programación orientada a objetos

La simulación se corre a través de un *script* editable de Python, donde se establecen las condiciones de la simulación en forma manual, y se determina si se leerán resultados calculados previamente o se calcularán nuevos. En el mismo, además, se permite elegir si se considerarán las capacidades de acople entre elementos, la cantidad de tiempos a simular y las frecuencias superior e inferior de análisis. Se debe tener en cuenta, además, que se especifica la discretización espacial (cantidad de milímetros de cada estructura simulada, denominada *Pixel*). La discretización espacial se relaciona con la temporal, dado que en TLM están vinculadas por la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el medio. Así, la primera deberá asegurar que la segunda permita cumplir con las condiciones del teorema de Nyquist para la caracterización de las señales calculadas (esto significa que, dado que la velocidad de propagación,  $v_p = \frac{\Delta l}{\Delta t}$  relaciona las discretizaciones espacial y temporal, la discretización espacial debe ser tal que  $\Delta l = v_p \frac{\Delta t}{2}$  para cumplir las condiciones del teorema de Nyquist, lo que deriva en que  $\Delta l = \frac{v_p}{2f}$ , con  $f$  la frecuencia de interés, que en nuestro caso es 2,4 GHz).

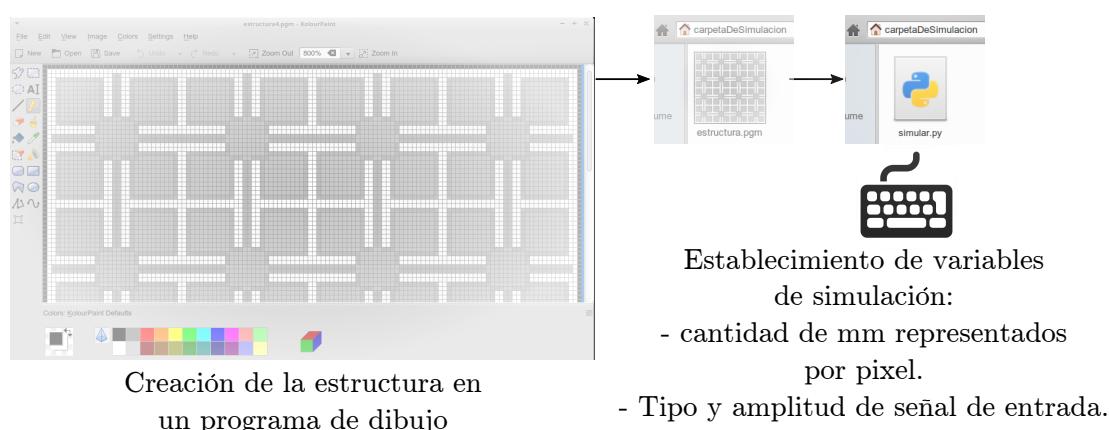


FIGURA 3.19: Esquema de ingreso de datos al simulador.

Como se esquematiza en la figura 3.19, la entrada de datos se realiza a través de un archivo con formato .PGM, que establece una matriz de *pixels*, cada uno con un valor, entre 1 y 255, donde 1 representa el negro, 255 el blanco, y los valores intermedios corresponden a una escala de grises. El archivo se puede

generar a partir de un programa de edición de imágenes, lo que facilita la creación de estructuras a simular, ya que la misma sólo debe ser dibujada con la resolución requerida. Si la imagen creada ocupa una mayor cantidad de *píxeles* (tiene una mayor resolución), la granularidad espacial utilizada en la simulación será mayor, dado que existe una relación 1 a 1 entre los *píxeles* gráficos y la discretización utilizada.

La lectura de la imagen del disco genera un objeto *Superficie*, que almacena, en forma ordenada, los *Píxeles* dibujados, que son objetos con características eléctricas variables, en función de su color en la imagen, como se muestra en la figura 3.20. En la misma se pueden observar 4 tipos de *píxeles*:

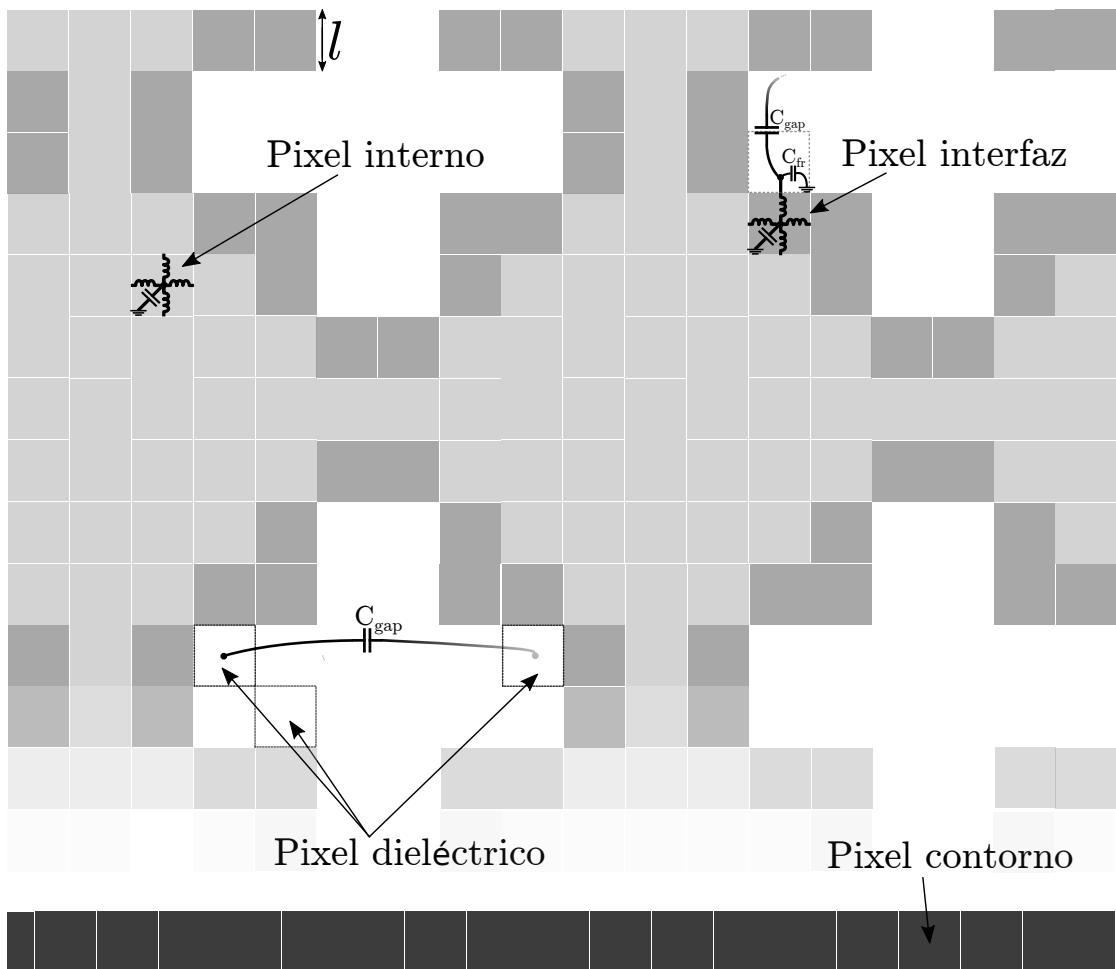


FIGURA 3.20: Circuitos equivalentes propuestos para cada tipo de pixel.

1. **Interno.** Representan superficies metálicas que se encuentran en el interior de un plano conductor.
2. **Interfaz.** Representan superficies metálicas que se encuentran en los bordes de una estructura metálica, lo que significa que tienen vecinos que son otros *píxeles* de tipo metálico (de interfaz o internos) y vecinos dieléctricos. Son los *píxeles* que poseen la propiedad de capacidad de *fringe*.
3. **Dieléctricos.** Representan las zonas donde no hay cobre, sino simplemente dieléctrico desnudo (en particular, FR4). Estos *píxeles* no participan del intercambio de energía en el modelo.
4. **Contorno.** Pueden intentar simular una superficie perfectamente adaptada, o una superficie metálica, en función de las necesidades de la simulación. Se ubican en el borde de la imagen .PGM creada, para que actúen como el borde del espacio de simulación.

Una vez cargada la imagen en memoria, creado el objeto *Superficie* y los objetos *Pixeles*, se los vincula.

Como se observa en la figura 3.20, los pixeles metálicos (internos y de interfaz) tienen una capacidad y varias inductancias asociadas (una para cada dirección). Las mismas quedan descriptas en base a las ecuaciones 3-1, y a partir de ellas es posible obtener una impedancia característica, como se muestra en la figura 3.21, en base a las ecuaciones 3-5:

$$L_{inn} = \mu_0 h / 2 \quad (3-5a)$$

$$C_{inn} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 l^2}{h} \quad (3-5b)$$

$$Z_{inn} = \sqrt{L_{inn}/C_{inn}} \quad (3-5c)$$

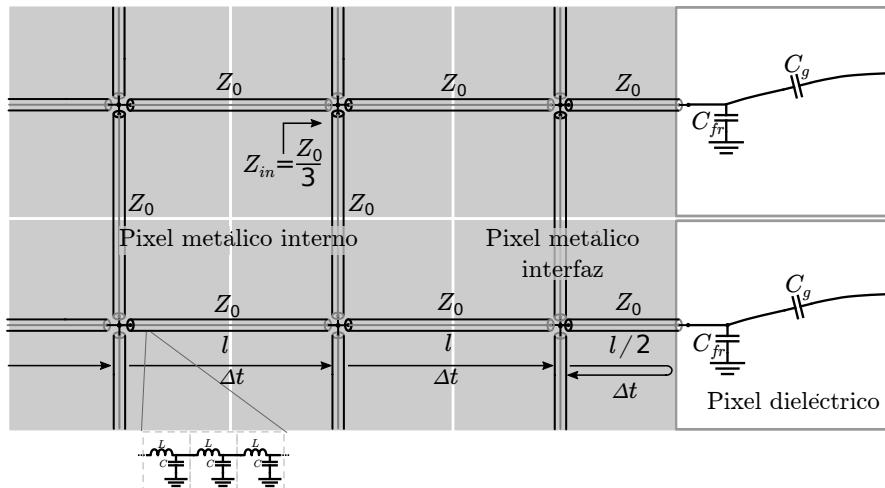


FIGURA 3.21: Circuito equivalente de líneas de transmisión, donde se observa la relación con la capacidad e inductancia de cada *Pixel*.

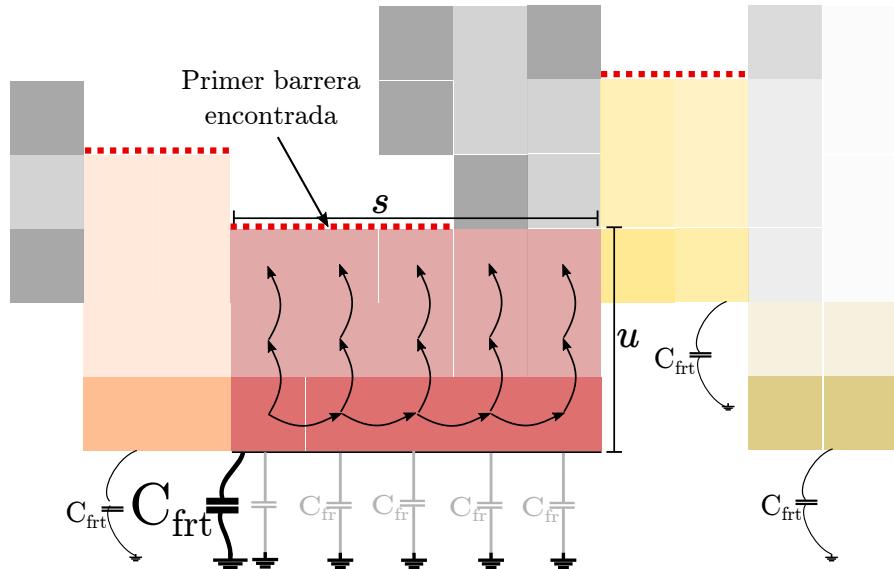
Los pixeles interfaz poseen, además, una capacidad de *fringe*, que se relaciona al comportamiento no-TEM de las líneas de campo cerca de los bordes de las estructuras *microstrip*, mostrado en la figura 1.18. La expresión de la capacidad de *fringe* para cada borde es la siguiente [35], donde *u* es la profundidad de metal para ese borde en cuestión, como se muestra en la figura 3.22:

$$C_{fr} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\pi} \ln(2\pi e^{\frac{u}{2h}} + 0,92) \quad (3-6)$$

Al momento de crear la superficie, además, se realizan dos acciones previas a la simulación:

1. **Vincular capacitivamente los bordes de las estructuras metálicas**, como se indica en la figura 3.23. Para esto se toman todos los bordes de las estructuras metálicas (los pixeles de tipo *Interfaz*), y se recorre horizontal y verticalmente la matriz, una vez por dirección, vinculando los bordes interfaz de a pares, teniendo en cuenta que aquellos *pixeles* de interfaz que corresponden a la misma estructura (a la misma isla metálica) no deben ser vinculados.

Por cada par encontrado, se obtiene la capacidad de acople,  $C_{gt}$ , utilizando la expresión 3-3, reescrita aquí para simplificar la lectura:


 FIGURA 3.22: Cálculo de la capacidad de *fringe* de una pared horizontal.

$$C_{gap} = \frac{b\epsilon_0(1 + \epsilon_r)}{\pi} \cosh^{-1}(a/g)$$

En esta expresión,  $a$  es el tamaño de las islas metálicas y  $g$  representa la distancia entre las islas conductoras. El valor de  $s$ , en tanto, representa la longitud del *gap*, que se obtiene calculando la cantidad de *pixels* enfrentado a distancia constante que existen (paso 1 en la figura). Hecho esto, considerando todos los *pixels* a uno y otro lado del *gap*, se busca la "profundidad" de la celda,  $u$ , que no es más que la cantidad de *pixels* metálicos detrás de los *pixels* frontera que pueden hallarse simultáneamente a ambos lados del *gap*, manteniendo al cantidad longitudinal de *pixels* metálicos del borde (paso 2 en la figura). Así, el valor de  $a$  queda representado por, aproximadamente,  $2 * u + g$ , con  $u$  en unidades de metro.

El valor de la capacidad total de acople se divide entre la cantidad de pares de *pixels* que participan del cálculo, de manera que a cada par se le asigna una capacidad  $C_g$ , como se indica en la figura para los *pixels* de color rojo.

- Calcular las matrices S asociadas a cada pixel metálico.** Las matrices S son las matrices que, multiplicadas por un vector de tensiones incidentes,  $V_i$  a cada pixel, devuelven un vector de igual dimensión de tensiones reflejadas,  $V_r$  en los mismos, como se muestra en la ecuación 3-7. Cada uno de los elementos de estos vectores representan una dirección (izquierda, derecha, arriba y abajo) de la celda unitaria. Las expresiones de la matriz S son las mostradas en la ecuación 3-8:

$$\begin{bmatrix} V_r^{izq} \\ V_r^{der} \\ V_r^{arr} \\ V_r^{aba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{izq-izq} & s_{der-izq} & \dots & \dots \\ s_{izq-der} & s_{der-der} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{izq-izq-aba} & \dots & \dots & s_{aba-aba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i^{izq} \\ V_i^{der} \\ V_i^{arr} \\ V_i^{aba} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

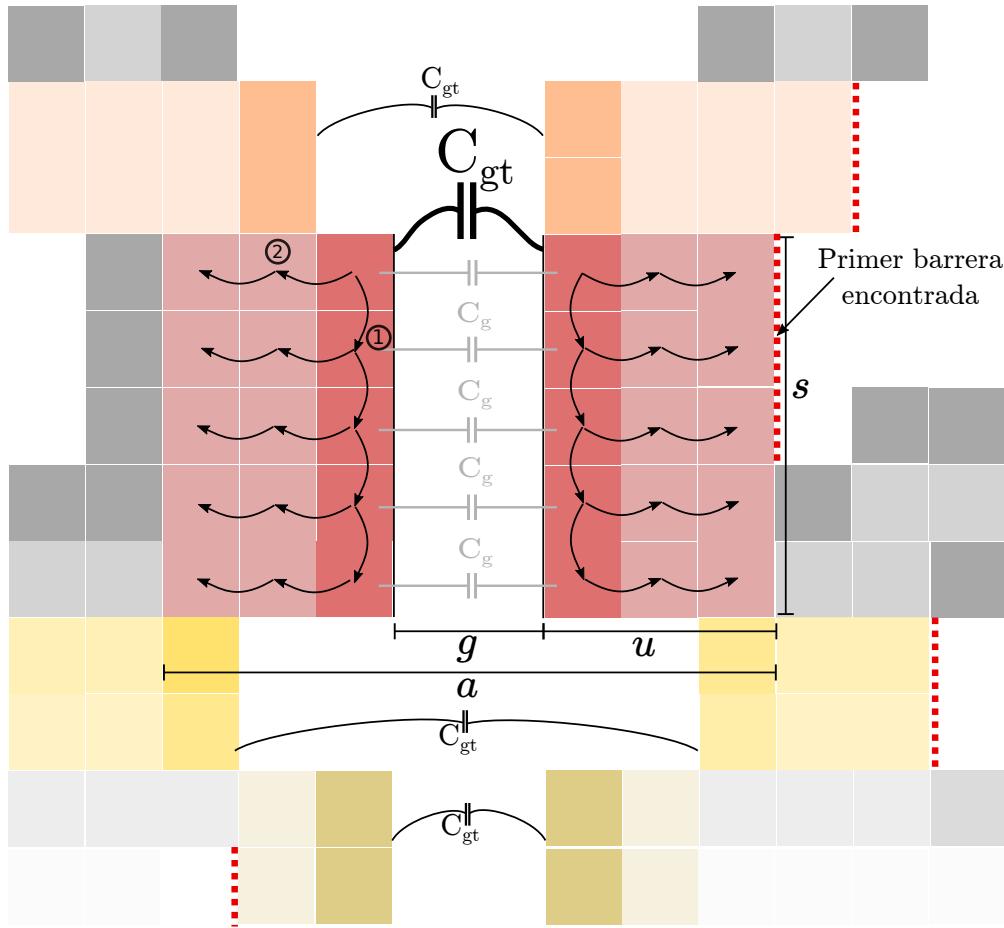


FIGURA 3.23: Cálculo de las distintas capacidades de acople horizontales para los pixeles que participan del cálculo numérico. Para un caso particular se muestran las capacidades de acople asociadas a los pixeles enfrentados por un *gap*.

$$S_{i,i} = \frac{Z_j \| Z_k \| Z_l - Z_i}{Z_j \| Z_k \| Z_l + Z_i} \quad (3-8a)$$

$$S_{j,i} = \frac{2Z_j \| Z_k \| Z_l}{Z_j \| Z_k \| Z_l + Z_i} \quad (3-8b)$$

Se debe tener en cuenta que, para el caso de las líneas de transmisión que unen *pixeles* metálicos (*internos* y de *interfaz*), como se muestra en la figura ??, cada una de las 4 líneas de transmisión que confluyen en un nodo representante de un pixel son iguales, por lo que el valor de los elementos de la diagonal de la matriz S será  $-0,5$ , mientras que los elementos no diagonales valdrán  $0,5$ .

Además, se pueden establecer pérdidas para el transporte de tensión de un *pixel* a otro, de manera que se puedan simular, de forma simplificada, las pérdidas por conductividad.

Los *pixeles* de tipo *dielectrico* no poseen matriz S, debido a que en su mayoría no tendrán información de tensión incidente.

Para el análisis de transferencia entre un punto y otro de la estructura, se debe fijar una posición de entrada y una posición de salida, cuya tensión, para cada tiempo, deberá ser almacenada.

Una vez creada la matriz a partir de la información obtenida de la imagen, se debe establecer una tensión inicial en el nodo de entrada. Se puede establecer un  $\delta(t)$  de tensión, de manera que se fija el valor de

tensión inicial y luego se lo deja libre para todos los tiempos posteriores. También puede establecerse un seno y un pulso Gaussiano, que permite una excitación limitada en frecuencia [5].

La simulación es de tipo TLM, donde existe una tensión inicial impuesta para  $t = 0$ , y elegida previamente al cálculo. A partir de la tensión ubicada en uno de los nodos, se calcula, en cada tiempo discreto, el valor de las tensiones incidentes a cada nodo, y a partir de las mismas, se calculan las tensiones reflejadas en todas las direcciones (*scattering*), sumándose los efectos en todas ellas.

Así, como se muestra en la figura 3.24, si se inicia el cálculo en el nodo denominado  $a$ , se impondrá una tensión inicial en el mismo, que será la que se transmita a los nodos adyacentes ( $t_{1b}$ ), denominados  $b_i$ . Esta tensión será recibida por los nodos  $b_i$ , quienes multiplicarán las tensiones incidentes en todas las direcciones (en el tiempo  $t_{2a}$ , los nodos  $b$  sólo tienen una dirección de incidencia) por su matriz  $S$  asociada, para obtener las tensiones reflejadas y transmitidas. Estas tensiones, en el tiempo siguiente ( $t_{2b}$ ) son las que se transmiten a los respectivos nodos adyacentes,  $c_j$ , quienes repetirán la operación. El cálculo proseguirá hasta que se interrumpa la simulación.

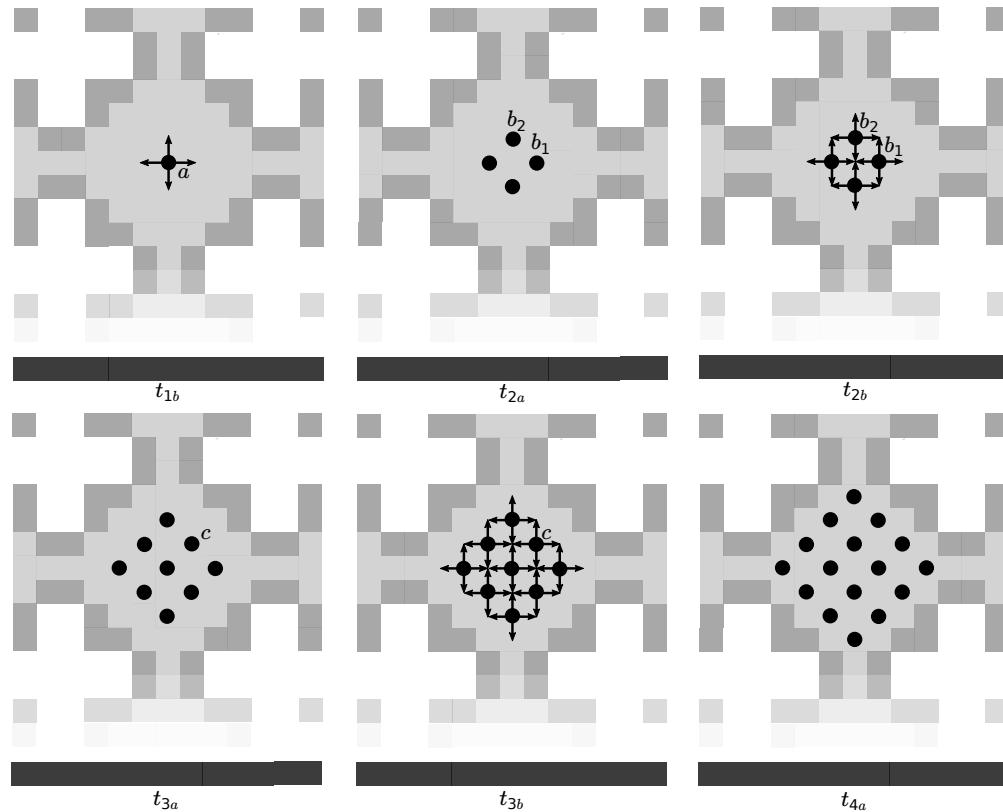


FIGURA 3.24: Proceso de cálculo en el dominio del tiempo.

Para el caso particular de los *pixels* de tipo *interfaz*, existen dos situaciones especiales: La correspondiente al efecto de la capacidad de *fringe* y el truncamiento de la línea de transmisión, y el correspondiente al acoplamiento con otras estructuras de la *Superficie*.

Dado que el análisis es cuasiestático, debido a las dimensiones pequeñas de los *gaps* y los *Pixels* en comparación con la longitud de onda, se puede utilizar un modelo de bajas frecuencias de acoplamiento mutuo para describir el fenómeno de acoplamiento entre islas metálicas distintas. Este acoplamiento, en términos generales, se da por fenómenos inductivos y capacitivos al mismo tiempo. Si se considera que existe un elemento fuente y un elemento víctima del acoplamiento, se puede afirmar que cada uno de ellos expone una capacidad y una inductancia al ambiente, que son excitadas por los circuitos cercanos.

El acoplamiento inductivo se debe a la inductancia mutua  $M$  entre las inductancias expuestas de ambos, relacionada al campo magnético presente, mientras que el acoplamiento inductivo se debe a la capacidad de acople entre los circuitos ( $C_g$ ).

En términos generales, dado que los *pixels* y las estructuras son pequeñas y no están conectadas al plano de tierra, en general no existirá un acoplamiento inductivo notorio. Sí se presentará, debido a la cercanía entre las islas metálicas, un acoplamiento capacitivo de mayor magnitud. En vistas de simplificar los cálculos, y bajo estas consideraciones prácticas, será este el tipo de acoplamiento que se analizará, mostrado en la figura 3.25.

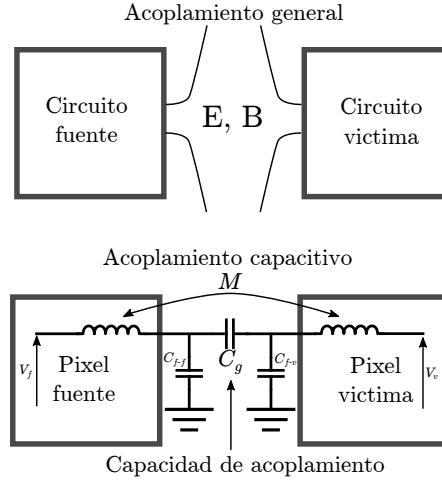


FIGURA 3.25: Modelo de acoplamiento capacitivo entre dos *pixels*.

En el mismo sentido, debido a que el efecto capacitivo de placas planas paralelas enfrentadas (relacionado a la capacidad de *fringe*) es mucho mayor al de placas planas paralelas coplanares (relacionada a la capacidad entre islas metálicas cercanas), se puede considerar que el acoplamiento es de tipo capacitivo débil [36] (donde no se considerarán efectos de re-acoplamiento y acoplamiento inverso), lo que permite utilizar un modelo simplificado de acoplamiento, considerando fuentes controladas de corriente, mostrado en la figura 3.26. Los valores de las fuentes controladas se muestran en la ecuación 3-9, aunque en términos prácticos el valor de  $M$ , la inductancia mutua, se despreciará, por lo que no existirá una fuente controlada de tensión.

$$i' = j\omega C_g v_f \quad (3-9a)$$

$$v' = j\omega M i_f \approx 0 \quad (3-9b)$$

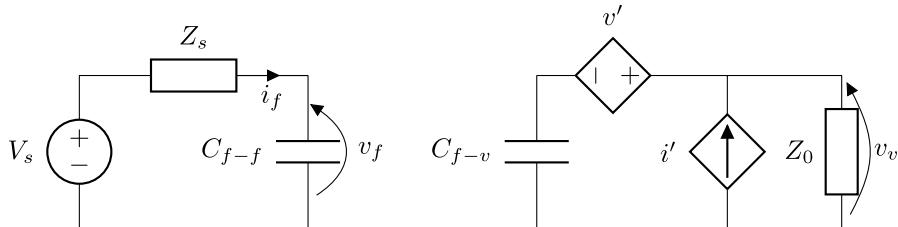


FIGURA 3.26: Circuito equivalente del modelo de acoplamiento capacitivo débil, utilizando fuentes de corriente, para una carga de impedancia igual a la impedancia característica de la línea de transmisión conectada.

Para adaptar este circuito al modo de funcionamiento de TLM, es posible considerar a la fuente de corriente y el capacitor de *fringe* como un equivalente Norton, y convertirlo en un equivalente Thévenin, de modo que la tensión desarrollada sobre  $Z_0$ , y por lo tanto, la tensión transmitida al nodo correspondiente al *pixel* víctima, resulte de un divisor resistivo:

$$v_v = v_f \frac{C_g}{j\omega C_{f-v}} \frac{Z_0}{Z_0 + \frac{1}{j\omega C_{f-v}}} \quad (3-10)$$

La tensión  $v_f$  es la que desarrolla el capacitor de *fringe* del *pixel* fuente. Utilizando consideraciones similares, el efecto de este capacitor para el circuito fuente se podría obtener, para el acoplamiento capacitivo, como el paralelo de la capacidad de *fringe* fuente con el circuito que lo conecta al circuito víctima. Sin embargo, dado que, como se dijo antes, la capacidad  $C_g$  es mucho menor a las capacidades de *fringe*,  $C_f$ , los efectos del circuito víctima y de la capacidad de acople son despreciables. De esta forma, el valor del coeficiente de reflexión resulta:

$$\rho = \left| \frac{1/(j\omega C_{f-f}) - Z_0}{1/(j\omega C_{f-f}) + Z_0} \right| \quad (3-11)$$

Se debe tener en cuenta que, dado que la señal recorre un camino de  $\Delta l/2$  desde el nodo hasta el capacitor de *fringe*, el cálculo de la tensión reflejada se debe realizar en  $n\Delta t/2$ . Esto es porque en el tiempo siguiente, exactamente un  $\Delta t$  luego de enviada la señal, la tensión reflejada debe impactar en el nodo original, como se esquematizó sobre el *pixel* metálico de la figura 3.21.

El resultado arrojado por la simulación será un archivo, de formato .NPY, que es una matriz tridimensional, que puede ser considerada como un apilamiento, de tamaño igual a la cantidad de tiempos simulados, de matrices bidimensionales con tamaño igual al de la estructura, como se muestra en la figura 3.27. En cada una de estas matrices bidimensionales, cada elemento posee un valor, que no es más que la tensión vista en ese nodo en el tiempo al que la matriz bidimensional corresponde en la estructura tridimensional creada. De ser necesario, se pueden establecer los parámetros de una ventana de Hanning para disminuir el comportamiento espúreo de alta frecuencia debido a la limitación en tiempo de la señal de salida.

El análisis de la tensión del nodo de salida, teniendo en cuenta la tensión del nodo de entrada aplicada, da lugar a una transferencia de tensión.

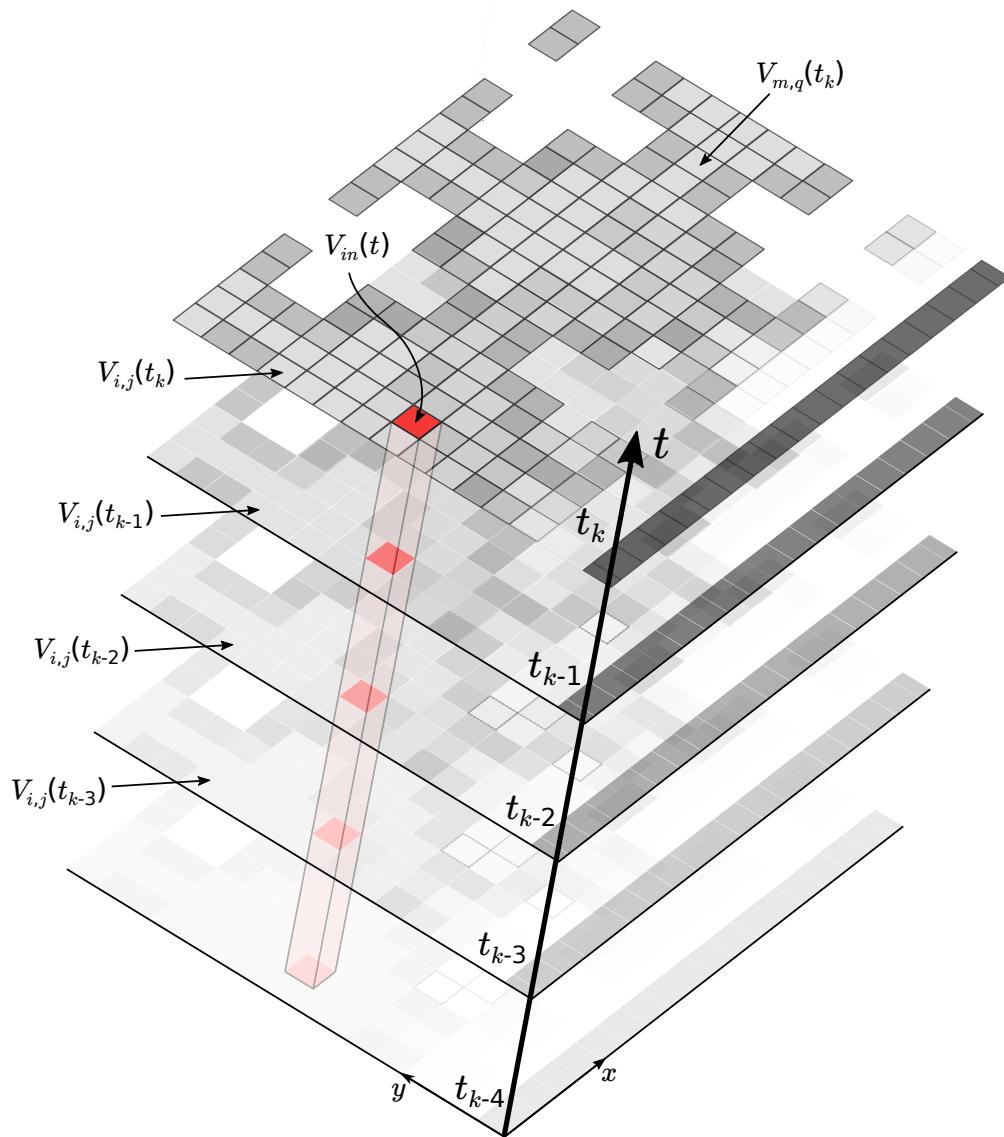


FIGURA 3.27: Estructura de la matriz que se guarda y se lee del disco rígido. La estructura posee todas las tensiones calculadas para cada tiempo y para cada pixel en particular.

## Capítulo 4

# Aplicación de EBGs en estructuras microstrip

### 4.1. Introducción

Como se describió en la sección 1.7.6, las antenas *microstrip* son utilizadas en un amplio rango de aplicaciones comerciales y militares, especialmente debido a que son livianas, de bajo perfil, suponen reducidos costos y resultan de fácil fabricación. Además, permiten diseños integrados con componentes activos, circuitos de microondas y elementos radiantes [33].

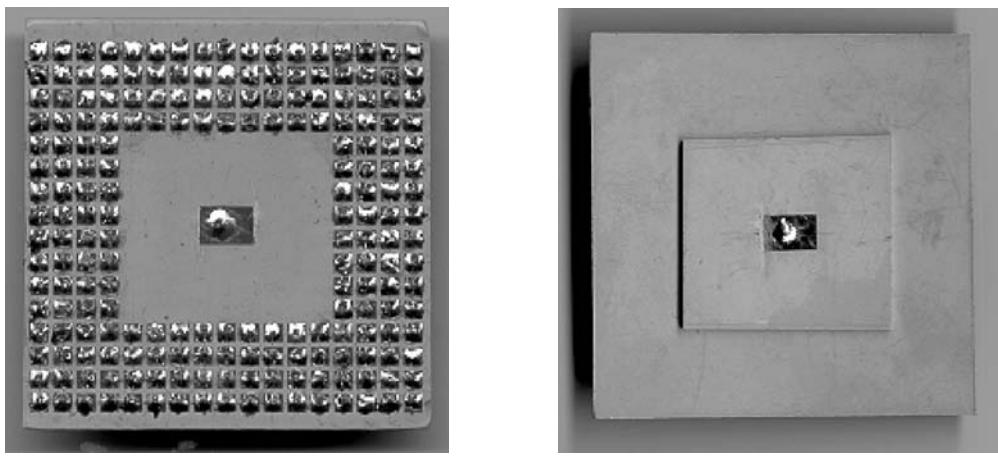
El tamaño de las antenas está íntimamente ligado a la longitud de onda de trabajo, que se relaciona a la frecuencia y permitividad eléctrica del sustrato utilizado, como queda explícito en la ecuación 1-79. Al mismo tiempo, dado que en general son antenas resonantes, presentan un alto Q, lo que afecta a su ancho de banda.

En muchos casos es necesario disminuir el tamaño de los elementos *microstrip*, lo que se puede lograr mediante cortocircuitos y líneas *microstrip* de formas complejas. Otro método, más sencillo, consiste en aumentar el valor de la permitividad eléctrica del sustrato. Sin embargo, como ya se explicó antes, y como se puede observar en la figura 1.14(b), el aumento de este parámetro aumenta el valor de la impedancia inductiva de la superficie, permitiendo el desarrollo de ondas de superficie.

Por otro lado, el uso de dieléctricos de constante alta genera un ancho de banda aún menor (un mayor Q) y aún más baja eficiencia de radiación. Estos efectos suelen mitigarse con el aumento del ancho del sustrato, que, en contrapartida, genera condiciones propicias para la propagación de ondas de superficie en modo TM, debido a que, como se indica en la ecuación 1-50 y se esquematiza en la figura 1.13(c), se permiten una mayor cantidad de modos de propagación en el eje *x* (vertical). Por otro lado, un análisis de la impedancia de superficie indica que el comportamiento inductivo aumenta con el ancho del sustrato (ecuación 1-58 y figura 1.14), lo que también es signo de una configuración que soporta ondas de superficie con facilidad.

Las ondas de superficie, además, extraen potencia que no se convierte en radiación y, facilitan el acomplimiento entre elementos. Además, cuando inciden sobre discontinuidades, generan lóbulos secundarios que degradan el patrón de radiación y las características de polarización [11].

Entre las distintas técnicas que han surgido para la disminución de la presencia de ondas de superficie en el sustrato que soporta a las antenas *microstrip*, entre las que destacan las relativas a disminuir la altura del sustrato en los bordes de la antena (figura 4.1(b)), en los últimos años ha cobrado especial interés el uso de sustratos con banda prohibida electromagnética, debido a que no requieren un cambio en la tecnología de fabricación. Los mismos pueden aplicarse justo debajo de la antena (generando estructuras planares que reemplazan al plano de tierra, conocidas como DGS, que ofrecen como contrapartida un diagrama de radiación con mayores lóbulos laterales), o alrededor de la misma ([25], figura 4.1(a)). Ambas soluciones, debido a la naturaleza resonante de la antena, que genera que las frecuencias en juego estén distribuidas en un ancho de banda acotado, tienen como consecuencia una disminución del acoplamiento mutuo con elementos circuitales cercanos a la antena (en particular, otras antenas que podrían estar formando parte de un arreglo de radiadores). Esto es así porque, si las estructuras que rodean al elemento radiante tienen una banda prohibida para las frecuencias de trabajo, las mismas no podrán propagarse por el sustrato.



(a) Antena rodeada por una estructura EBG.

(b) Antena rodeada por un escalón de sustrato,

FIGURA 4.1: Fotos de diseños de antenas parches con limitadores a la propagación de onda de superficie [33].

Las primeras estructuras EBG utilizadas con estos fines consistían en arreglos de agujeros cilíndricos en el sustrato que, debido a la periodicidad que presentaban para las ondas de superficie, daban lugar a un comportamiento de filtro, presentando una banda prohibida. La dificultad para la fabricación de este tipo de sustratos dio lugar a la búsqueda de estructuras de banda prohibida de mayor facilidad de uso. En 1999, Sievenpiper presentó, en sus tesis doctoral [24], una estructura que denominó HIS (*High Impedance Surface*, superficie de alta impedancia), que además de cumplir con las características de un conductor magnético para un rango de frecuencias [26] y de ser de fácil fabricación con tecnología *microstrip*, poseía también una banda prohibida electromagnética para las ondas de superficie [25]. Esta estructura, consistente en parches metálicos dispuestos sobre un sustrato, y unidos al plano de tierra, ubicado en la cara opuesta del mismo, a través de vías metálicas, redujo ampliamente los costos y la dificultad de fabricación. Pocos años más tarde, debido a que en algunos casos el uso de vías retrasa la fabricación de circuitos *microstrip*, surgieron estructuras de banda prohibida uniplanares, con características similares, aunque con anchos de banda prohibida más reducidos.

Para el presente trabajo, estas estructuras se ubicarán entre dos antenas microstrip, alineadas según distintos criterios, a fin de comparar el diagrama de radiación y el acoplamiento mutuo con el que se logra con el mismo arreglo radiante, pero sin el uso de EBG entre ellas.

## 4.2. Criterios y técnicas utilizados para aumentar el ancho de banda de las antenas microstrip

Para poder utilizar las técnicas de blindaje contra ondas de superficie utilizando metamateriales, como las descriptas antes, es necesario que el ancho de la banda prohibida de la estructura EBG resulte mayor al ancho de banda de la antena. Es debido al alto valor del factor Q (y por tanto, bajo ancho de banda) de las antenas *microstrip* rectangulares el motivo por el que el uso de estructuras EBG es factible.

Considerando que el objetivo del presente trabajo no es meramente la determinación de la posibilidad o no del uso de EBGs para disminuir el acoplamiento mutuo de antenas *microstrip*, sino que se pretende describir y caracterizar someramente el comportamiento del metamaterial en cuestión, resulta necesario utilizar antenas de ancho de banda mayor a las *microstrip* convencionales que se describieron en el capítulo 1. De esta manera, sería posible encontrar los límites de uso y la tolerancia a variación de tamaños sin variación de la estructura EBG utilizada, lo que flexibiliza el trabajo de diseño.

Existen numerosas técnicas que permiten aumentar el ancho de banda de las estructuras radiantes de tecnología *microstrip*. Como se explicó antes, una técnica común consiste en aumentar al ancho del sustrato, o cambiarlo por otro de constante dieléctrica menor. Debido a que la modificación de cualquiera de los dos parámetros condicionaría sustancialmente el comportamiento de las ondas de superficie generadas sobre el sustrato, se decidió que resultaba importante independizarlos del análisis.

En otros casos, se ha propuesto la modificación de la geometría del elemento radiante, descartando el tradicional parche rectangular por figuras con formas de U o de E, o por formas geométricas con aperturas radiantes embebidas [33]. Para las mediciones de este trabajo se consideró, y finalmente se descartó, el uso de antenas *microstrip* de tipo moño (*bow-tie*), que presentan una transición geométrica suave, intuitivamente apta para las necesidades presentadas. Entre las dificultades que ofrece, está su principio de funcionamiento, comparable al de un dipolo, y requiriendo, por tanto, una alimentación en modo diferencial, lo que obligaría a realizar un diseño de un balún *microstrip*, lejano a las pretensiones del trabajo.

Otra técnica común consiste en diseñar conjuntos de elementos que resuenan a distintas y frecuencias, acoplados capacitivamente, denominados estructuras multi-resonantes. Si las distintas frecuencias de resonancia están lo suficientemente cerca unas de otras, se logra un efecto de continuidad, aumentando notoriamente el ancho de banda. En muchos casos, y debido a los costos cada vez más despreciables de la fabricación de circuitos multicapa, los elementos resonantes se ubican apilados, generando un acoplamiento capacitivo máximo entre ellos. Para el caso de las pruebas que se requieren hacer para validar y caracterizar el comportamiento de las estructuras EBG, elementos radiantes coplanares con el parche activo resonante resultan suficientes.

La estructura propuesta consiste en un parche rectangular, ubicado sobre un sustrato de FR4, de comportamiento resonante en una frecuencia aproximada de 2.4 GHz, y ubicado entre dos rectángulos *microstrip* pasivos iguales, de un largo establecido de forma que la frecuencia de resonancia de los mismos resulte ligeramente diferente a la del parche activo. La distancia entre estos elementos de carga y la antena

original debe ser tal que el acoplamiento sea notorio, requisito que presenta complejidades [37] debido a que los parches deben estar ubicados frente a los bordes no radiantes de la antena para evitar reducir el espacio utilizado por la estructura EBG con la que compartirán sustrato. En la figura 4.2 se puede observar el arreglo final de elementos. Se debe destacar que la elección de que ambos parches posean las mismas propiedades geométricas se debe a la búsqueda de la máxima simetría para simplificar el análisis de la estructura, aún cuando esta elección merme la flexibilidad del diseño de banda ancha.

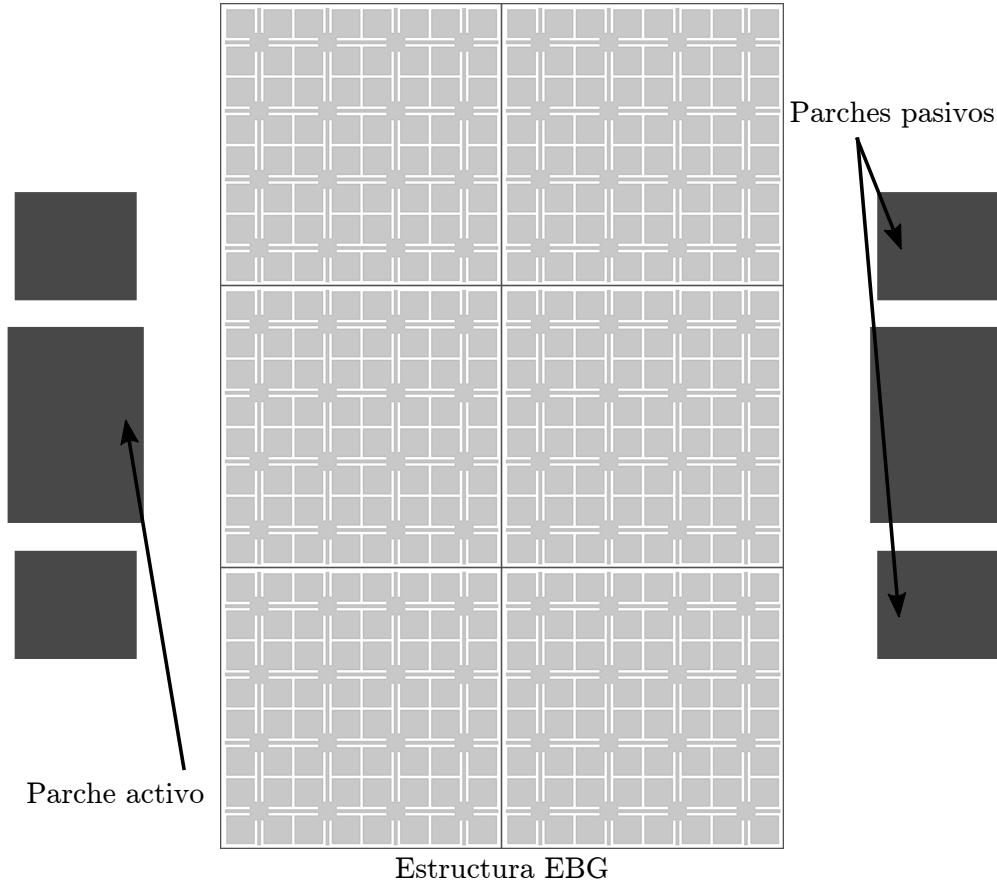


FIGURA 4.2: Estructura propuesta para la caracterización del efecto de EBGs sobre antenas microstrip.

Los parches rectangulares, al igual que en el desarrollo del análisis de estructuras EBG, están acoplados al elemento activo mediante lo que puede modelarse como una red  $\pi$  de capacitores (acoplamiento capacitivo) [38], similar a mostrada en la figura 3.25, donde los denominados *pixels* deben ser reemplazados por los parches propiamente dichos. En términos generales, los parámetros que modificarán la impedancia de entrada y que, por lo tanto, afectarán al ancho de banda, son la distancia entre el resonador activo y los pasivos ( $g$ ), la longitud de los parches acoplados ( $l'$ ) y la posición del punto de alimentación [38].

La existencia de estos parches, que pueden considerarse como de carga, implican una modificación de la impedancia de entrada para distintas frecuencias.

Si los parches pasivos poseen dimensiones muy disímiles al parche activo central, las frecuencias de resonancia de los elementos estarán tan alejadas entre sí que es posible un análisis simplificado del comportamiento: A bajas frecuencias, los rectángulos pasivos no resuenan ni se acoplan visiblemente al parche activo. A medida que la frecuencia de trabajo aumenta, los mismos comienzan a acoplarse, adoptando un comportamiento capacitivo, al mismo tiempo que debido a que forman un paralelo con la carga impuesta por la resistencia de radiación, disminuyen el valor de la resistencia de entrada.

Una vez que los parches resuenan, logrando que se presente la mínima resistencia de entrada, obtienen un comportamiento de carácter inductivo, hasta que nuevamente, a altas frecuencias, dejan de tener injerencia palpable sobre el valor de la impedancia de entrada. La variación de la distancia entre los parches da lugar a que estos efectos se vuelvan más o menos plausibles, en función del acoplamiento capacitivo [38].

Cuando los parches pasivos poseen geometrías similares a la del parche original, el problema resulta más complejo, debido a que no puede analizarse la resonancia de cada elemento por separado sin considerar la carga que los demás ejercen sobre él. Debido a que, a fin de aumentar el ancho de banda, todos los parches deberán tener geometrías similares, resulta necesario realizar simulaciones numéricas que permitan predecir el comportamiento.

### 4.3. Diseño de la antena microstrip

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.*

*Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.*

*Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.*

*Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.*

*Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere,*

turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

#### **4.4. Elección del metamaterial**

#### **4.5. Estudio del efecto sobre el acoplamiento mutuo**

#### **4.6. Estudio del efecto de la distancia sobre el ancho de banda**

## **Capítulo 5**

# **Resultados experimentales**

**5.1. Construcción del prototipo**

**5.2. Banco de medición**

**5.3. Resultados**



## **Capítulo 6**

# **Conclusiones**



# Apéndices



## Apéndice A

# Incertezas en la instrumentación

El instrumental utilizado en las mediciones fue:

- Analizador vectorial de redes Agilent N9923A.
- Analizador de espectros LPT-6000.
- Generador de RF Agilent N9310A.

### A.1. Analizador vectorial de redes

Al realizar una medición del coeficiente de reflexión del alimentador con el analizador vectorial de redes, existen 3 tipos de errores sistemáticos que se producen **Agilent 'vna'cal**

- $E_D$  = Error por directividad.
- $E_T$  = Error por seguimiento en reflexión.
- $E_M$  = Error por desadaptación en la fuente.

En la figura A.1 se muestra un diagrama de flujo de la medición del coeficiente de reflexión  $\Gamma$  en el que se incluyen los errores sistemáticos.

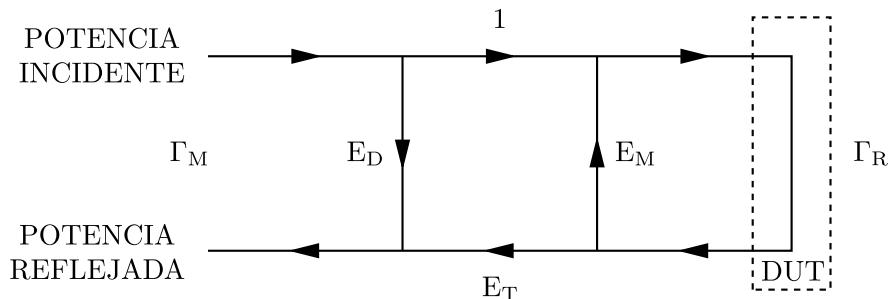


FIGURA A.1: Diagrama de flujo de la medición del coeficiente de reflexión  $\Gamma$  con los errores sistemáticos incluidos.

donde:

$\Gamma_M$  = Coeficiente de reflexión medido.

$\Gamma_R$  = Coeficiente de reflexión a determinar.

A partir de la figura A.1, se obtiene la expresión:

$$\Gamma_M = \frac{E_D - (E_D E_M - E_T) \Gamma_R}{1 - E_M \Gamma_R} \quad (\text{A-1})$$

Para corregir los errores sistemáticos, es necesario realizar la calibración del analizador vectorial de redes, proceso que consiste en la medición del  $\Gamma$  en tres condiciones de carga: cortocircuito, circuito abierto y una carga de  $50 \Omega$ . De esta forma, se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas a partir de las cuales pueden determinarse los errores sistemáticos, pudiendo así corregir la medición realizada.

A pesar de haber realizado correctamente la calibración del analizador vectorial de redes, no es posible eliminar completamente los errores sistemáticos producidos en la medición. Los errores remanentes luego de realizada la calibración se denominan *errores residuales*, y son:

- $\delta$  = Error residual por directividad.
- $\tau$  = Error residual por seguimiento en reflexión.
- $\mu$  = Error residual por desadaptación en la fuente.

Las incertezas producidas en la medición del módulo y de la fase del  $\Gamma$  dependen de los errores residuales, y pueden expresarse como **Agilent'vna'err**

$$\Delta |\Gamma| = \delta + (1 - \tau) |\Gamma| + \mu |\Gamma|^2 + (1 - A) |\Gamma| \quad (\text{A-2a})$$

$$\Delta \angle \Gamma = \arcsin \left( \frac{\Delta |\Gamma|}{\Gamma} \right) \quad (\text{A-2b})$$

donde:

$A$  = Error por precisión dinámica.

Los errores se determinan a partir de las especificaciones del instrumento de medición; dado que los errores se encuentran especificados en dB, es necesario convertirlos a valores lineales antes de calcular las incertezas. Para el analizador vectorial de redes utilizado, las especificaciones **Agilent'vna'man** y las conversiones a valores lineales se muestran en la tabla A.1.

Error	Especificación (dB)	Valor lineal
$\delta$	42	0,008
$\tau$	$\pm 0,06$	0,993
$\mu$	36	0,016
$A$	0,1	0,989

TABLA A.1: Especificaciones de los errores del analizador vectorial de redes Agilent N9923A y sus conversiones a valores lineales.

En la medición del alimentador realizada con el analizador vectorial de redes, los valores de magnitud y fase obtenidos son:

$$|\Gamma| = 0,03027143427466 \simeq 0,030$$

$$\angle\Gamma = 0,05388041135260 \text{ rad} \simeq 0,054 \text{ rad}$$

Empleando las expresiones (A-2), las incertezas producidas en la medición del módulo y de la fase del  $\Gamma$  del alimentador son:

$$|\Delta|\Gamma|| = 0,00851270700079 \simeq 0,009$$

$$|\Delta\angle\Gamma| = 0,28505740750033 \text{ rad} \simeq 0,285 \text{ rad}$$

A partir de la expresión de la relación de onda estacionaria:

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (\text{A-3})$$

y aplicando propagación de errores **wolfram`error`prop** se determina la incerteza producida en la medición de la ROE como:

$$|\Delta\text{ROE}| = \frac{2}{(1 - |\Gamma|)^2} |\Delta|\Gamma|| \quad (\text{A-4})$$

Empleando la expresión (A-4), la incerteza producida en la medición de la ROE es:

$$|\Delta\text{ROE}| = 0,01810494889657 \simeq 0,02$$

Las partes real e imaginaria del  $\Gamma$  del alimentador se determinan a partir del módulo y de la fase a partir de las expresiones:

$$\Re(\Gamma) = |\Gamma| \cos(\angle\Gamma) \quad (\text{A-5a})$$

$$\Im(\Gamma) = |\Gamma| \sin(\angle\Gamma) \quad (\text{A-5b})$$

A partir de las expresiones (A-5) y aplicando propagación de errores, se determinan las incertezas producidas en las partes real e imaginaria del  $\Gamma$  del alimentador como:

$$|\Delta\Re(\Gamma)| = |\cos(\angle\Gamma)| |\Delta|\Gamma|| + |\Gamma| |\sin(\angle\Gamma)| |\Delta\angle\Gamma| \quad (\text{A-6a})$$

$$|\Delta\Im(\Gamma)| = |\sin(\angle\Gamma)| |\Delta|\Gamma|| + |\Gamma| |\cos(\angle\Gamma)| |\Delta\angle\Gamma| \quad (\text{A-6b})$$

Empleando las expresiones (A-6), las incertezas producidas en las partes real e imaginaria del  $\Gamma$  del alimentador son:

$$|\Delta\Re(\Gamma)| = 0,00896506772042 \simeq 0,009$$

$$|\Delta\Im(\Gamma)| = 0,00907502030661 \simeq 0,009$$

Las partes real e imaginaria de la impedancia del alimentador  $Z_L$  se determinan a partir del módulo y de la fase del  $\Gamma$ :

$$\Re(Z_L) = Z_O \frac{1 - \Re(\Gamma)^2 - \Im(\Gamma)^2}{[1 - \Re(\Gamma)]^2 + \Im(\Gamma)^2} \quad (\text{A-7a})$$

$$\Im(Z_L) = Z_O \frac{2\Im(\Gamma)}{[1 - \Re(\Gamma)]^2 + \Im(\Gamma)^2} \quad (\text{A-7b})$$

A partir de las expresiones (A-7) y aplicando propagación de errores, se determinan las incertezas producidas en las partes real e imaginaria de la impedancia del alimentador como:

$$|\Delta \Re(Z_L)| = \left| \frac{2Z_0 \{[1 - \Re(\Gamma)]^2 - \Im(\Gamma)^2\}}{\{[1 - \Re(\Gamma)]^2 + \Im(\Gamma)^2\}^2} \right| |\Delta \Re(\Gamma)| + \left| \frac{4Z_0 [1 - \Re(\Gamma)] \Im(\Gamma)}{\{[1 - \Re(\Gamma)]^2 + \Im(\Gamma)^2\}^2} \right| |\Delta \Im(\Gamma)| \quad (\text{A-8a})$$

$$|\Delta \Im(Z_L)| = \left| \frac{4Z_0 [1 - \Re(\Gamma)] \Im(\Gamma)}{\{[1 - \Re(\Gamma)]^2 + \Im(\Gamma)^2\}^2} \right| |\Delta \Re(\Gamma)| + \left| \frac{2Z_0 \{[1 - \Re(\Gamma)]^2 - \Im(\Gamma)^2\}}{\{[1 - \Re(\Gamma)]^2 + \Im(\Gamma)^2\}^2} \right| |\Delta \Im(\Gamma)| \quad (\text{A-8b})$$

Empleando las expresiones (A-8), las incertezas producidas en la medición de las partes real e imaginaria de la impedancia del alimentador son:

$$|\Delta \Re(Z_L)| = 0,84740126818922 \Omega \simeq 0,85 \Omega$$

$$|\Delta \Im(Z_L)| = 0,85772757113368 \Omega \simeq 0,86 \Omega$$

## A.2. Analizador de espectros

Las incertezas producidas al realizar una medición de amplitud con el analizador de espectros **Agilent an'esp'err** se determinan a partir de sus especificaciones. Para el analizador de espectros utilizado, las especificaciones son **LPT'ana'esp'man**

- Error por respuesta en frecuencia =  $\pm 1,5$  dB.
- Error por fidelidad de la escala de la pantalla =  $\pm 1,5$  dB (10 dB/div).

La incerteza total producida en mediciones de amplitud es:

$$|\Delta A| = 3 \text{ dB}$$

La incerteza producida en la medición del ancho de haz (??) depende solamente de la incerteza en el ángulo  $\theta$ :

$$|\Delta \theta| = 1,5^\circ$$

La incerteza resultante en la medición del ancho de haz se expresa como:

$$|\Delta \text{Ancho de haz}| = 2 |\Delta \theta| = 3^\circ$$

Para la medición de  $G_{fn}(\theta_0)$  (??), se toma el valor más cercano a  $\theta_0$ . Considerando que  $\theta_0 = 71,5^\circ$ , en la tabla A.2 se muestran las cotas de error resultantes.

Plano	Cota inferior (grados)	Ganancia en cota inferior (dB)	Cota superior (grados)	Ganancia en cota superior (dB)
E	70,17	-7,01	71,69	-7,33
H	70,53	-8,60	72,00	-8,91

TABLA A.2: Cotas de error en la medición de  $G_{fn}(\theta_0)$ .

Tomando los ángulos más cercanos a  $\theta_0$ , las mediciones de  $G_{fn}(\theta_0)$  son:

$$G_{fn}(\theta_0) = -7,33 \text{ dB (Plano E)}$$

$$G_{fn}(\theta_0) = -8,91 \text{ dB (Plano H)}$$

La incerteza en la medición de  $G_{fn}(\theta_0)$  depende de las incertezas  $|\Delta A|$  y  $|\Delta\theta|$ . Considerando que en los planos E y H la diferencia en la ganancia es de aproximadamente 0,3 dB, la incerteza de  $G_{fn}(\theta_0)$  queda expresada como:

$$|\Delta G_{fn}(\theta_0)| = |\Delta A| + \frac{0,3 \text{ dB}}{2} = 3,15 \text{ dB}$$

La incerteza en la medición de la relación frente-espalda se expresa como:

$$|\Delta \text{Relación frente-espalda}| = 2 |\Delta A| = 6 \text{ dB}$$



# Bibliografía

- [1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Wiley, 2011.
- [2] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Wiley-IEEE Press, 2001.
- [3] W. L. Stutzman y G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*. Wiley, 2012.
- [4] C. A. Balanis, *Modern Antenna Handbook*. Wiley, 2008.
- [5] R. Garg, P. Bhartia, I. Bahl y A. Ittipiboon, *Microstrip Antenna Design Handbook*. Artech House, 2001.
- [6] J. C. Fernández, *Apuntes de Electromagnetismo*. FIUBA, 2004.
- [7] J. D. Joannopoulos y S. G. Johnson, *Photonic Crystals: Molding the flow of light*. Princeton University Press, 2008.
- [8] H. M. Barlow y A. L. Cullen, «Surface waves», *IEEE - Radio Section*, 1953.
- [9] C. Caloz y T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission line theory and microwave applications. The Engineering Approach*. Wiley, 2006.
- [10] A. Venkateswaran, «Analysis of planar ebg structures using transmission line models (thesis)», *McGill University, Canada*, 2009.
- [11] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and design*. Wiley-Interscience, 2005.
- [12] J. Amado y G. Fano, «Antenna coupling model in receiving mode», *GEMCCON 2016*, 2016.
- [13] D. M. Pozar, «Input impedance and mutual coupling of rectangular microstrip antennas», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1982.
- [14] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, 2012.
- [15] N. G. Alexopoulos y I. E. Rana, «Mutual impedance computation between printed dipoles», 1981.
- [16] N. I. Dodov y P. Z. Petkov, «The surface waves impact on the coupling effect in microstrip antennas», *Electronic Letters*, 1982.
- [17] E. H. V. Lil y A. R. Van, «Transmission line model for mutual coupling between microstrip antennas», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984.

- [18] R. Gonzalo, P. de Maagt y M. Sorolla, «Enhanced patch-antenna performance by suppressing surface waves using photonic-bandgap substrates», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (Vol. 47, N° 11), 1999.
- [19] E. Penard y J. P. Daniel, «Mutual coupling between microstrip antennas», *Electronic Letters*, 1982.
- [20] Z. Iluz, R. Shavit y R. Bauer, «Microstrip antenna phased array with electromagnetic bandgap substrate», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004.
- [21] N. Engheta y R. W. Ziolkowski, *Metamaterials: Physics and engineering explorations*. IEEE Press y Wiley-Interscience, 2006.
- [22] D. Rittenhouse, «An optical problem, proposed by mr. hopkinson, and solved by mr. rittenhouse», *Transactions of the American Philosophical Society*, 1786.
- [23] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters adn Crystal Lattices*. Dover Publications, 1953.
- [24] D. Sievenpiper, «High-impedance electromagnetic surfaces (phd thesis)», *University of California*, 1999.
- [25] M. F. Luberto, «Diseño de una antena de microcintas para WIFI empleando estructuras EBG (electromagnetic band gap)», *Tesis de grado. Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires*, 2016.
- [26] D. Sievenpiper, L. Zhang, R. F. Jimenez, N. G. Alexopoulos y E. Yablonovitch, «High-impedance electromagnetic surfaces with a forbidden frequency band», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1999.
- [27] F. Capolino, *Theory and Phenomena of Metamaterials*. CRC Press, 2009.
- [28] K. H. Kim y J. E. Schutt-Ainé, «Analysis and modeling of hybrid planar-type electromagnetic-bandgap structures and feasibility study on power distribution network applications», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2008.
- [29] S. Tretyakov, *Analytical Modeling in Applied Electromagnetics*. Artech House, 2003.
- [30] A. B. Yakovlev, C. R. Simovski, S. A. Tretyakov, O. Luukkonen, G. W. Hanson, S. Paulotto y P. Baccarelli, «Analytical modeling of surface waves on high impedance surfaces», *NATO Security through Science Series B: Physics and Biophysics*, 2009.
- [31] G. Goussetis, A. Feresidis y J. C. Vardaxoglou, «Tayloring the amc and ebg characteristics of periodic metallic arrays printed on grounded dielectric substrate», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006.

- [32] B. Mohajer-Iravani y O. M. Ramahi, «On the suppression band and bandgap of planar electromagnetic bandgap structures», *Hindawi Publishing Corporation: International Journal of Antennas and Propagation*, 2014.
- [33] F. Yang y Y. Rahmat-Samii, *Electromagnetic Band Gap Structures in Antenna Engineering*. Cambridge University Press, 2009.
- [34] S. Maci, M. Caiazzo, A. Cucini y M. Casaletti, «A pole-zero matching method for ebg surfaces composed of a dipole fss printed on a grounded dielectric slab», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005.
- [35] M. Thumm y W. Wiesbeck, «Characteristic impedance and permittivity (diapositivas)», *Karlsruhe Institute of Technology*,
- [36] F. M. Tesche, M. V. Ianoz y T. Karlsson, *EMC Analysis Methods and Computational Models*. Wiley-Interscience, 1997.
- [37] G. Kumar y K. C. Gupta, «Broad-band microstrip antennas using additional resonators gap-coupled to the radiating edges», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984.
- [38] ——, «Nonradiating edges and four edges gap-coupled multiple resonator broad-band microstrip antennas», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1985.
- [39] P. Markos y C. M. Soukoulis, *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton University Press, 2008.
- [40] X. Jiang, *Metamaterial*. Intech: Open Science, 2012.
- [41] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*. Wiley-IEEE Press, 2001.
- [42] D. Morin, *Waves*. Aún no publicado a Octubre 2016. dirección: <http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/book.html>.
- [43] E. Burstein, C. Weisbuch, P. S. J. Russell, T. Birks y D. Lloyd-Lucas, *Confined Electrons and Photons: Photonic Bloch Waves and Photonic Band Gaps*. Plenum Press, 1995.
- [44] P. Saguet, *Numerical Analysis in Electromagnetics*. ISTE - Wiley, 2012.
- [45] J. L. Allen, «On surface-wave coupling between elements of large arrays», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1965.
- [46] M. Malkomes, «Mutual coupling between microstrip patch antennas», *IET Electronic Letters*, 1982.
- [47] J. A. Polo y A. Lakhtakia, «Surface electromagnetic waves: A review», *Laser and Photonics Reviews*, 2011.

- [48] S. A. Saikh, A. A. Desai y A. A. Deshmukh, «Electromagnetic band gap structures in MSA», *International Journal of Computer Applications*, 2014.
- [49] N. I. Dodov y P. Z. Petkov, «The surface waves' impact on the coupling effect in microstrip antennas», *ICEST 2002*, 2002.
- [50] R. M. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer y J. D. Joannopoulos, «Nature of photonic band gap: Some insights from a field analysis», *Journal of the Optical Society of America*, 1993.
- [51] J. Hendry, «Surface waves: What are they? why are they interesting?», *Roke Manor Research*, 2009.