



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Estudio y diseño de un alimentador para una antena parabólica

Tesista:

Pablo Luciano Lannes

IEEE Student Member

pllannes@yahoo.com.ar

Director:

Dr. Ing. Walter Gustavo Fano

IEEE Senior Member

gustavo.gf2005@gmail.com

Tesis de grado de
Ingeniería Electrónica

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

25 de abril de 2014

“You don’t understand anything until you learn it more than one way.”

Marvin Minsky

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ingeniería
Departamento de Electrónica

por Pablo Luciano Lannes

Resumen

Se estudia la antena espiral teóricamente y mediante simulaciones computacionales en muchas de sus variantes. Se analizan sus parámetros de diseño, prestando especial atención a las antenas de ranura y la posibilidad que brindan de conseguir características de banda ancha y un perfil compacto ya que se trata de una innovación no utilizada hasta el momento en nuestro país.

Se realiza el diseño completo de una antena de banda ancha en el rango entre 300 MHz y 3000 MHz, verificando su desempeño con simulaciones computacionales y comprobando las mismas mediante la construcción de un prototipo real y sus mediciones dentro de la banda de interés.

Palabras clave: Antena espiral, espiral de ranura, antena de banda ancha, polarización circular, perfil compacto.

Abstract

The spiral antenna is studied theoretically and by means of computer simulation, in many of its variants. Its design parameters are analyzed, giving special attention to slot spiral antennas and the possibility they provide to achieve wideband characteristics and a low profile.

A complete design of such a wideband antenna in the range from 300 MHz to 3000 MHz is performed, verifying its performance with computer simulation and by building and measuring a prototype of the antenna.

Keywords: Spiral antenna, slot spiral, wideband antenna, circular polarization, low profile, conformal applications.

Índice general

Resumen	II
Abstract	II
Índice general	III
Índice de Figuras	V
Índice de Cuadros	VI
1. Introducción	1
1.1. Reseña histórica	1
1.2. Parámetros básicos de las antenas	2
1.2.1. Potencia media radiada y densidad de potencia media	2
1.2.2. Intensidad de radiación	3
1.2.3. Diagrama de radiación	4
1.2.4. Directividad	5
1.2.5. Eficiencia	8
1.2.6. Ganancia	8
1.2.7. Eficiencia del haz	9
1.2.8. Impedancia de entrada	9
1.2.9. Area efectiva	11
2. Fundamentos de antenas de abertura	17
2.1. Integrales de radiación y potenciales vectoriales	17
2.2. Principio de equivalencias de campos	20
2.3. Campos radiados	24
3. Principios de antenas parabólicas	27
3.1. Método de distribución de campos sobre la abertura	33
3.2. Método de distribución de corrientes	35
3.3. Directividad y eficiencia de abertura	38
4. Estudio y diseño de la antena	43
5. Mediciones y resultados del modelo construido	44

6. Conclusiones	45
A. Distribución de los campos en guías de ondas	52
A.1. Guías de ondas rectangulares	53
A.2. Guías de ondas cilíndricas	60
B. Expresiones de los campos radiados por aberturas rectangulares	67
B.1. Abertura rectangular con plano conductor infinito y excitación con campo uniforme	67
B.2. Abertura rectangular con plano conductor infinito y excitación con campo sinusoidal en modo dominante	70
B.3. Guía de ondas rectangular abierta	73
B.4. Bocina rectangular sectorial E	77
C. Expresiones de los campos radiados por aberturas circulares	82
C.1. Abertura circular con plano conductor infinito y excitación con campo uniforme	82
C.2. Abertura circular con plano conductor infinito y excitación con campo sinusoidal en modo dominante	86
C.3. Guía de ondas cilíndrica abierta	90
C.4. Bocina cónica	95

Índice de figuras

2.1. Modelos real y equivalente.	20
2.2. Modelos del principio de equivalencia.	21
2.3. Modelos equivalentes para fuentes magnéticas cercanas a un conductor eléctrico perfecto.	22
2.4. Modelos equivalentes empleados para aberturas montadas sobre un plano conductor infinito.	23
2.5. Modelo equivalente empleado para guías de onda con extremo abierto y bocinas.	23
2.6. Sistemas de coordenadas para análisis de antenas de abertura.	25
2.7. Sistemas de coordenadas para análisis de antenas de abertura.	26
3.1. Esquema bidimensional de un reflector parabólico	27
3.2. Angulo θ_0 en función de f/d	28

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

1.1. Reseña histórica

- Fue el físico alemán Heinrich Hertz quien construyó la primera antena parabólica, en el año 1888. Dicha antena consistía en un reflector parabólico cilíndrico construido con una hoja metálica de zinc, excitado mediante un dipolo ubicado a lo largo de la línea focal. La antena funcionaba a una frecuencia de operación de 450 MHz.
- El italiano Guglielmo Marconi utilizó un reflector parabólico en el año 1930 en investigaciones de transmisión en la banda de UHF desde su barco en el Mediterráneo.
- La primera gran antena parabólica, con un diámetro de 9 metros, fue construida en el año 1937 por Grote Reber en el patio trasero de su hogar, a quien se lo considera pionero de la radioastronomía.
- El desarrollo del radar durante la Segunda Guerra Mundial proporcionó un gran impulso al estudio de las antenas parabólicas, modificando el reflector de forma tal que su curva horizontal sea diferente a la curva vertical. El radar fue desarrollado principalmente en Inglaterra, y representó una gran ventaja táctica para la Royal Air Force en la Batalla de Inglaterra, que culminó con la derrota de la Luftwaffe (fuerza aérea alemana en la época de la Alemania nazi). Dicha derrota, debida en gran parte al desarrollo del radar, tuvo importantes consecuencias, ya que cuatro años más tarde, los británicos y los estadounidenses utilizarían el sudeste de Inglaterra como base para el Desembarco de Normandía, y así poder liberar Europa continental del nacionalsocialismo alemán.

- Durante la década del 60, las antenas parabólicas comenzaron a ser ampliamente utilizadas en las redes de comunicaciones de microondas terrestres, las cuales transmitían llamadas telefónicas y programas de televisión a través de los continentes.
- La primera antena parabólica utilizada para transmisiones satelitales fue construida en 1962 en la estación terrena Goonhilly en Cornwall, Inglaterra, para comunicarse con el satélite Telstar. En el mismo año y mediante el mismo satélite, fue transmitida la primera señal de TV desde Europa hacia Norteamérica.
- La antena Cassegrain fue desarrollada en Japón en el año 1963 por NTT, KDDI y Mitsubishi. Se utiliza fundamentalmente en estaciones terrenas y en aplicaciones de radioastronomía.
- La aparición en la década del 70 de herramientas de diseño por computadora, como NEC, capaces de determinar los diagramas de radiación de las antenas parabólicas, ha llevado al desarrollo de sofisticados diseños asimétricos, de múltiples reflectores y de múltiples alimentadores.

1.2. Parámetros básicos de las antenas

1.2.1. Potencia media radiada y densidad de potencia media

El vector de Poynting instantáneo describe la potencia asociada con una onda electromagnética, y se define como

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1-1)$$

\mathbf{N} = Vector de Poynting instantáneo (W/m²)

\mathbf{E} = Campo eléctrico instantáneo (E/m)

\mathbf{H} = Campo magnético instantáneo (A/m)

Como el vector de Poynting es una densidad de potencia, es posible obtener la potencia que atraviesa una superficie cerrada integrando la componente normal del vector de Poynting sobre la totalidad de la superficie.

$$P = \oint_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1-2)$$

P = Potencia total instantánea (W)

$\hat{\mathbf{n}}$ = Versor normal a la superficie

ds = Area infinitesimal de la superficie cerrada (m^2)

Para muchas aplicaciones es deseable hallar la densidad de potencia media, que se obtiene integrando el vector de Poynting instantáneo sobre un período y dividiendo por un período. A tal efecto y considerando que los campos son armónicos, se define la *densidad de potencia media* a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\mathbf{W}_{av} = \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (1-3)$$

El factor $\frac{1}{2}$ aparece en la ecuación (1-3) debido a que \mathbf{E} y \mathbf{H} representan valores pico y es necesario expresar los campos en valores RMS. La densidad de potencia media asociada con los campos electromagnéticos de la antena en la región de campo lejano es predominantemente activa, motivo por el cual la definición del valor medio del vector de Poynting contempla solamente la parte real; la parte imaginaria representa la densidad de potencia reactiva asociada con los campos electromagnéticos, que es prácticamente nula en la región de campo lejano.

Basándonos en la definición de la ecuación (1-2), la *potencia media radiada* o simplemente *potencia radiada* puede escribirse como

$$P_{rad} = \oint_S \mathbf{W}_{av} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1-4)$$

Para observaciones de campo lejano la superficie cerrada puede ser cualquiera; por conveniencia matemática, se adopta una esfera centrada en el centro de la antena. La potencia radiada por la antena, entonces, queda expresada como

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi W_{av} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1-5)$$

1.2.2. Intensidad de radiación

Dado que la densidad de potencia media depende de la distancia, se acostumbra a definir la *intensidad de radiación* como el producto de la densidad de potencia media por el cuadrado de la distancia, con el fin de obtener una magnitud independiente de la distancia.

$$U = W_{av} r^2 \quad (1-6)$$

Para campo lejano, la intensidad de radiación está relacionada con el campo eléctrico de la antena por

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= \frac{r^2}{2\eta} |\mathbf{E}(r, \theta, \phi)|^2 \simeq \frac{r^2}{2\eta} [|E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2] \\ &\simeq \frac{1}{2\eta} [|E_\theta^\circ(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi^\circ(\theta, \phi)|^2] \end{aligned} \quad (1-7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, \phi) &= \text{Campo eléctrico de la antena para campo lejano} = \mathbf{E}^\circ(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{r} \\ E_\theta, E_\phi &= \text{Componentes del campo eléctrico de la antena para campo lejano} \\ \eta &= \text{Impedancia intrínseca del medio} \end{aligned}$$

La componente radial del campo eléctrico E_r es muy pequeña para observaciones de campo lejano, por lo que se desprecia.

La potencia radiada se obtiene integrando la intensidad de radiación sobre el elemento de ángulo sólido, por lo que

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U \sin \theta d\theta d\phi \quad (1-8)$$

donde $d\Omega = \text{elemento de ángulo sólido} = \sin \theta d\theta d\phi$

1.2.3. Diagrama de radiación

Se define al *diagrama de radiación* como una representación gráfica de las propiedades de radiación en función de las coordenadas espaciales. Generalmente, el diagrama de radiación de una antena es un diagrama tridimensional o un grupo de secciones sobre planos determinados por los ángulos θ y ϕ . Los diagramas de radiación comúnmente empleados son

1. *diagrama de campo* (en escala lineal).
2. *diagrama de potencia* (en escala lineal).
3. *diagrama de potencia* (en dB).

En la práctica, generalmente se emplean los diagramas de potencia en dB. Muchas veces se trabaja con diagramas de potencia normalizados, con el fin de poder comparar las características de radiación de distintos tipos de antenas.

Los diagramas de radiación pueden representarse tanto en coordenadas polares como en coordenadas cartesianas, como puede observarse en la Figura ().

GRÁFICOS DE DIAGRAMAS DE RADIACIÓN

Puede observarse en los diagramas de radiación una serie de lóbulos, donde podemos diferenciar los *lóbulos principales*, en las direcciones de máxima radiación, y los *lóbulos secundarios* o *laterales*. Los lóbulos principales se definen por

- amplitud
- ancho de haz de potencia media, que se define como el ángulo en el que la densidad de potencia cae a la mitad de su valor máximo para el lóbulo.
- ancho de haz entre ceros, que se define como la separación angular entre los ceros del lóbulo.

En la Figura () puede observarse un diagrama de radiación en donde se indican los anchos de haz de potencia media y entre ceros.

GRÁFICO 2.11 DEL BALANIS

1.2.4. Directividad

Definimos la *directividad* como la relación entre la intensidad de radiación en una determinada dirección que produce un elemento radiante en el espacio y la intensidad de radiación promedio, o sea, la intensidad de radiación producida por un foco isotrópico alimentado con la misma potencia.

$$D = \frac{U}{U_0} \quad (1-9)$$

Un radiador isotrópico es una fuente ideal cuya potencia radiada es uniforme en todas las direcciones. Si bien no existe en la práctica, proporciona una referencia isotrópica con la cual se compararán otras antenas. Debido a su radiación simétrica, el vector de Poynting no será función de los ángulos θ y ϕ , y tendrá solamente una componente radial. Su potencia total radiada está dada por

$$P_{rad} = \oint_S \mathbf{W}_0 \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi W_0 r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^2 W_0 \quad (1-10)$$

y la densidad de potencia por

$$W_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi r^2} \quad (1-11)$$

A partir de la ecuación (1-11) se determina la intensidad de radiación del radiador isotrópico.

$$U_0 = W_0 r^2 = \frac{P_{rad}}{4\pi} \quad (1-12)$$

La directividad, entonces, queda definida como

$$D = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (1-13)$$

Si no se especifica la dirección, queda implícito que la dirección es la de máxima intensidad de radiación, por lo que

$$D_0 = D_{max} = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}} \quad (1-14)$$

D = Directividad

D_0 = Directividad máxima

Si la antena no es isotrópica, no radiará uniformemente en todas las direcciones y, por lo tanto, la intensidad de radiación dependerá de los ángulos θ y ϕ , por lo que podemos expresar la intensidad de radiación como

$$U = B_0 F(\theta, \phi) \simeq \frac{1}{2\eta} \left[|E_\theta^\circ(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi^\circ(\theta, \phi)|^2 \right] \quad (1-15)$$

donde B_0 es una constante, E_θ° y E_ϕ° son las componentes del campo eléctrico de la antena para campo lejano y $F(\theta, \phi)$ es la función que describe la variación angular de la intensidad de radiación en el espacio, denominada *factor de diagrama de potencia*. El máximo valor de la ecuación (1-15) está dado por

$$U = B_0 F(\theta, \phi)|_{max} = B_0 F_{max}(\theta, \phi) \quad (1-16)$$

La potencia radiada se determina usando

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U d\Omega = B_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1-17)$$

Podemos formular las expresiones generales de la directividad y de la directividad máxima utilizando las ecuaciones (1-13) y (1-14), respectivamente, como

$$D = 4\pi \frac{F(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} \quad (1-18)$$

$$D_0 = 4\pi \frac{F_{max}(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} \quad (1-19)$$

La ecuación (1-19) puede expresarse como

$$D_0 = \frac{4\pi}{\left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right] / F_{max}(\theta, \phi)} = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (1-20)$$

donde Ω_A es el *ángulo sólido del haz*, que se define como el ángulo sólido a través del cual fluiría toda la potencia radiada si la intensidad de radiación fuera constante e igual a la máxima dentro de dicho ángulo, como puede verse en la Figura ().

FIGURA 2.13 STUTZMAN

Ω_A se expresa como

$$\Omega_A = \frac{1}{F_{max}(\theta, \phi)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_n(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1-21)$$

$$F_n(\theta, \phi) = \frac{F(\theta, \phi)}{F_{max}(\theta, \phi)} \quad (1-22)$$

La ecuación (1-18) corresponde a la expresión genérica de la directividad; sin embargo, muchas veces es útil emplear aproximaciones más simples, sobre todo cuando se quiere tener una idea del valor de la directividad en la dirección de máxima radiación. Para antenas muy directivas, o sea, con un único lóbulo principal y lóbulos laterales despreciables, el ángulo sólido del haz es aproximadamente igual al producto de los anchos de haz de potencia media de los dos planos perpendiculares mostrados en la Figura ().

FIGURA BALANIS 2.14

Con dicha aproximación, la ecuación (1-20) puede expresarse como

$$D_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A} \simeq \frac{4\pi}{\Theta_{1r}\Theta_{2r}} \quad (1-23)$$

El ángulo sólido del haz Ω_A se aproximó como

$$\Omega_A = \Theta_{1r}\Theta_{2r} \quad (1-23a)$$

donde

Θ_{1r} = ancho de haz de potencia media en un plano (radianes)

Θ_{2r} = ancho de haz de potencia media en un plano en ángulo recto al otro (radianes)

1.2.5. Eficiencia

La *eficiencia* es un parámetro utilizado para considerar las pérdidas producidas tanto en el terminal de entrada como en la estructura de la antena.

En términos generales, la eficiencia puede expresarse como

$$e_0 = e_r e_c e_d \quad (1-24)$$

donde

e_0 = eficiencia total (adimensional)

$e_r = 1 - |\Gamma|^2$ = eficiencia por reflexiones, debida a la desadaptación de impedancias en el terminal de entrada de la antena (adimensional)

e_c = eficiencia conductiva, debida a las pérdidas por efecto Joule (adimensional)

e_d = eficiencia dieléctrica, debida a las pérdidas dieléctricas (adimensional)

Usualmente, la eficiencia suele expresarse como

$$e_0 = e_r e_{cd} = e_{cd} (1 - |\Gamma|^2) \quad (1-25)$$

donde e_{cd} es la eficiencia de radiación de la antena.

1.2.6. Ganancia

Definimos la *ganancia* como la relación entre la intensidad de radiación en una determinada dirección que produce un elemento radiante en el espacio y la intensidad de radiación que se obtendría si la potencia de entrada de la antena se radiara isotrópicamente. La intensidad de radiación correspondiente a la potencia radiada isotrópicamente es igual a la potencia de entrada de la antena dividida por 4π , por lo que la ganancia puede expresarse como

$$G = 4\pi \frac{U}{P_{in}} \quad (1-26)$$

Debido a las pérdidas existentes en la antena, la potencia radiada no será la misma que la potencia de entrada; es posible entonces relacionar ambas potencias mediante la eficiencia de radiación.

$$P_{rad} = e_{cd} P_{in} \quad (1-27)$$

La ganancia puede expresarse como

$$G = e_{cd} 4\pi \frac{U}{P_{rad}} \quad (1-28)$$

por lo que podemos relacionar la ganancia con la directividad.

$$G = e_{cd} D \quad (1-29)$$

1.2.7. Eficiencia del haz

La *eficiencia del haz* ε_M es un indicador del porcentaje de la potencia total radiada por la antena que se concentra en el haz principal. El ángulo sólido del haz está conformado por las contribuciones del lóbulo principal y de los lóbulos secundarios, por lo que

$$\Omega_A = \Omega_M + \Omega_m \quad (1-30)$$

donde

Ω_M = ángulo sólido del haz principal

Ω_m = ángulo sólido de los haces laterales

La eficiencia del haz, entonces, se define como

$$\varepsilon_M = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} \quad (1-31)$$

1.2.8. Impedancia de entrada

La *impedancia de entrada* se define como la impedancia que presenta la antena en sus terminales de entrada al circuito de alimentación. Generalmente es compleja, y puede expresarse como

$$Z_A = R_A + jX_A \quad (1-32)$$

donde

Z_A = impedancia de entrada (ohms)

R_A = resistencia de entrada (ohms)

X_A = reactancia de entrada (ohms)

La parte resistiva de la impedancia de entrada está compuesta por dos componentes.

$$R_A = R_R + R_L \quad (1-33)$$

donde

R_R = resistencia de radiación de la antena

R_L = resistencia de pérdidas de la antena

Si asumimos que la antena es excitada con un generador con impedancia interna

$$Z_G = R_G + jX_G \quad (1-34)$$

donde

R_G = resistencia de la impedancia del generador (ohms)

X_G = reactancia de la impedancia del generador (ohms)

y la antena es usada como transmisora, podemos representar la antena y el generador por el circuito equivalente Thevenin de la Figura ().

FIGURA 2.27b DEL BALANIS

Para determinar la potencia radiada (entregada a R_R) y la potencia disipada por efecto Joule (entregada a R_L), primero se determina la corriente que circula por el circuito equivalente, que está dada por

$$I_G = \frac{V_G}{Z_A + Z_G} = \frac{V_G}{(R_R + R_L + R_G) + j(X_A + X_G)} \quad (1-35)$$

La potencia radiada por la antena está dada por

$$P_R = \frac{1}{2} |I_G|^2 R_R = \frac{|V_G|^2}{2} \left[\frac{R_R}{(R_R + R_L + R_G)^2 + (X_A + X_G)^2} \right] \quad (1-36)$$

y la potencia disipada por efecto Joule por

$$P_L = \frac{1}{2} |I_G|^2 R_L = \frac{|V_G|^2}{2} \left[\frac{R_L}{(R_R + R_L + R_G)^2 + (X_A + X_G)^2} \right] \quad (1-37)$$

La potencia restante se disipa sobre la resistencia interna del generador R_G , cuya expresión es

$$P_G = \frac{1}{2} |I_G|^2 R_R = \frac{|V_G|^2}{2} \left[\frac{R_G}{(R_R + R_L + R_G)^2 + (X_A + X_G)^2} \right] \quad (1-38)$$

La máxima transferencia de potencia a la antena se produce cuando la impedancia de entrada de la antena es la conjugada de la impedancia interna del generador, o sea

$$R_R + R_L = R_G \quad (1-39)$$

$$X_A = -X_G \quad (1-40)$$

En este caso, las potencias involucradas son

$$P_R = \frac{|V_G|^2}{8} \left[\frac{R_R}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (1-41)$$

$$P_L = \frac{|V_G|^2}{8} \left[\frac{R_L}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (1-42)$$

$$P_G = \frac{|V_G|^2}{8} \left[\frac{1}{R_R + R_L} \right] \quad (1-43)$$

Puede observarse que $P_G = P_R + P_L$, por lo que de la potencia provista por el generador, la mitad se disipa en la resistencia interna R_G y la otra mitad es entregada a la antena, de la cual parte se disipa por efecto Joule y parte se irradia. Esta condición, la de máxima transferencia de potencia, se cumple cuando existe *adaptación de impedancias*. Si la antena idealmente no tuviera pérdidas, el generador debería suministrar el doble de la potencia que se desea irradiar en la condición de máxima transferencia de potencia. En la práctica la potencia suministrada por el generador debe ser mayor, para compensar las pérdidas óhmicas tanto en la antena como en las líneas de transmisión. Una medida de las pérdidas en la antena surge a partir de la *eficiencia de radiación*, que podemos expresarla como

$$e_{cd} = \frac{R_R}{R_R + R_L} \quad (1-44)$$

1.2.9. Area efectiva

Cuando una antena se utiliza como receptora, recibe una determinada densidad de potencia de la onda incidente que convierte en potencia eléctrica. Se define como *área efectiva* a la relación entre la potencia que la onda proporciona a una carga conectada a la antena receptora y la densidad de potencia de la onda incidente. El área efectiva

puede expresarse como

$$A_e = \frac{P_T}{W_i} \quad (1-45)$$

donde

A_e = área efectiva (m^2)

P_T = potencia proporcionada a la carga (W)

W_i = densidad de potencia de la onda incidente (W/m^2)

Con el fin de entender claramente el concepto de área efectiva, en la Figura () se muestra el circuito equivalente Thevenin de una antena receptora conectada a una carga Z_T .

FIGURA 2.28b BALANIS

donde

$$Z_T = R_T + jX_T \quad (1-46)$$

La potencia proporcionada a la resistencia R_T está dada por

$$P_T = \frac{|V_T|^2}{2} \left[\frac{R_T}{(R_R + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2} \right] \quad (1-47)$$

y la potencia disipada por efecto Joule por

$$P_L = \frac{|V_T|^2}{2} \left[\frac{R_L}{(R_R + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2} \right] \quad (1-48)$$

La potencia restante se dispersa al espacio, o sea, se disipa sobre la resistencia de radiación R_R , y su expresión es

$$P_R = \frac{|V_T|^2}{2} \left[\frac{R_R}{(R_R + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2} \right] \quad (1-49)$$

En condiciones de adaptación, las potencias quedan expresadas como

$$P_T = \frac{|V_T|^2}{8R_T} \quad (1-50)$$

$$P_L = \frac{|V_T|^2}{8} \left[\frac{R_L}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (1-51)$$

$$P_R = \frac{|V_T|^2}{8} \left[\frac{R_R}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (1-52)$$

y puede observarse que $P_T = P_R + P_L$. Para este caso, y si la antena está orientada para recibir máxima señal (o sea, orientada hacia donde la directividad es igual a la directividad máxima D_0), el área efectiva se denomina *área efectiva máxima*. El área efectiva máxima está relacionada con el área física de la antena mediante la *eficiencia de abertura*, cuya expresión es

$$\epsilon_{ap} = \frac{A_{em}}{A_p} \quad (1-53)$$

donde

ϵ_{ap} = eficiencia de abertura

A_{em} = área efectiva máxima (m^2)

A_p = área física (m^2)

Se cumplirá siempre que $0 \leq \epsilon_{ap} \leq 1$. Si consideramos pérdidas por efecto Joule nulas ($R_L = 0$), la potencia entregada a la carga será igual a la potencia que la antena dispersa en el espacio, o sea, habrá una potencia reirradiada exactamente igual a la recibida.

Para determinar la relación entre el área efectiva máxima y la directividad, partimos de un enlace entre dos antenas, que estarán físicamente ubicadas en el espacio libre y separadas por una distancia R , como se muestra en la Figura ().

FIGURA 2.30 BALANIS

En primera instancia, suponemos que la antena 1 es la transmisora y la antena 2 es la receptora. La densidad de potencia radiada por la antena 1 a una distancia R responde a la expresión

$$W_1 = \frac{P_T D_1}{4\pi R^2} \quad (1-54)$$

La potencia recibida por la antena 2 es

$$P_2 = A_{e2}W_1 = A_{e2}\frac{P_T D_1}{4\pi R^2} \quad (1-55)$$

por lo que

$$D_1 A_{e2} = \frac{P_2}{P_T} 4\pi R^2 \quad (1-55a)$$

Si ahora la antena 2 es usada como transmisora y la antena 1 como receptora, podemos escribir que

$$D_2 A_{e1} = \frac{P_1}{P_T} 4\pi R^2 \quad (1-56)$$

por lo que a partir de las ecuaciones (1-55a) y (1-56) se llega a

$$\frac{D_1}{A_{e1}} = \frac{D_2}{A_{e2}} \quad (1-57)$$

El incremento de la directividad genera un aumento del área efectiva, por lo que

$$\frac{D_{01}}{A_{em1}} = \frac{D_{02}}{A_{em2}} \quad (1-58)$$

Suponiendo que la antena 1 fuese un foco isotrópico, su directividad sería unitaria, por lo que

$$A_{em1} = \frac{A_{em2}}{D_{02}} \quad (1-59)$$

ESTO PUEDE IR EN UN APÉNDICE

Consideramos ahora que la antena 2 es un dipolo de Hertz. Para el mismo, su área efectiva máxima, considerando que las pérdidas óhmicas son nulas, está expresada por

$$A_{em} = \frac{|V_T|^2}{8W_i R_R} \quad (1-60)$$

Como el dipolo es muy corto, puede asumirse que el campo inducido es constante y de fase uniforme, por lo que la tensión inducida es

$$V_T = El \quad (1-61)$$

donde

V_T = tensión inducida en el dipolo

E = campo eléctrico de la onda incidente

l = longitud del dipolo

Para una onda incidente plana, la densidad de potencia incidente puede expresarse como

$$W_i = \frac{E^2}{2\eta} \quad (1-62)$$

La resistencia de radiación del dipolo de Hertz está dada por

$$R_R = 80 \left(\frac{\pi l}{\lambda} \right)^2 \quad (1-63)$$

El área efectiva máxima, entonces, puede expresarse como

$$A_{em} = \frac{(El)^2}{8 \frac{E^2}{2\eta} 80 \left(\frac{\pi l}{\lambda} \right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \quad (1-64)$$

Para un dipolo de Hertz, la directividad máxima es

$$D_0 = \frac{3}{2} \quad (1-65)$$

ESTO PUEDE IR EN UN APÉNDICE

Puede entonces determinarse el área efectiva máxima de un foco isotrópico, cuya expresión final es

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (1-66)$$

En forma general, entonces, puede expresarse el área efectiva máxima en función de la directividad máxima D_0 mediante la expresión

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_0 \quad (1-67)$$

Si existen pérdidas óhmicas y dieléctricas en la antena, su área efectiva máxima debe modificarse para tener en cuenta tales pérdidas, por lo que

$$A_{em} = e_{cd} \frac{\lambda^2}{4\pi} D_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_0 \quad (1-68)$$

VER SI VA LONGITUD EFECTIVA Y POLARIZACION

Capítulo 2

Fundamentos de antenas de abertura

2.1. Integrales de radiación y potenciales vectoriales

Partimos de las ecuaciones de Maxwell con fuentes, considerando campos armónicos.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mathbf{B} = 0 \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega\mathbf{D} = \mathbf{J} \quad (2-4)$$

Para facilitar la resolución de estas ecuaciones inhomogéneas se definen funciones auxiliares denominadas *potenciales vectoriales*. Los potenciales vectoriales más comunes son el potencial vectorial magnético \mathbf{A} y el potencial vectorial eléctrico \mathbf{F} .

El potencial vectorial \mathbf{A} se utiliza para determinar los campos generados por una densidad de corriente \mathbf{J} . Según la ecuación (2-2), la divergencia del flujo magnético \mathbf{B} es cero (o sea, el campo magnético es selenoide), por lo que por identidad vectorial, \mathbf{B} puede reemplazarse por el rotor de otro vector.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2-5)$$

donde \mathbf{A} es el potencial vectorial magnético. Definimos entonces

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2-6)$$

Reemplazando en la ecuación (2-3)

$$\nabla \times (\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad (2-7)$$

Por identidad vectorial

$$\nabla \times (-\nabla\phi_e) = 0 \quad (2-8)$$

donde ϕ_e se denomina *potencial escalar eléctrico*. A partir de las ecuaciones (2-7) y (2-8) se llega a

$$\mathbf{E}_A = -\nabla\phi_e - j\omega\mathbf{A} \quad (2-9)$$

Aplicando el rotor a ambos lados de la ecuación (2-6) y utilizando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2-10)$$

se obtiene

$$\mu \nabla \times \mathbf{H}_A = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2-11)$$

Empleando la ecuación de Maxwell (2-4), puede expresarse la ecuación (2-11) como

$$\mu \mathbf{J} + j\omega\mu\epsilon \mathbf{E}_A = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2-12)$$

La ecuación (2-12) puede expresarse, utilizando la ecuación (2-9), como

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2\mu\epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\epsilon\phi_e) \quad (2-13)$$

Todo campo vectorial queda unívocamente definido si se conoce su rotor y su divergencia. El rotor del potencial vectorial \mathbf{A} fue definido en la ecuación (2-6), pero las ecuaciones de Maxwell no dan ninguna condición sobre su divergencia, por lo que podemos elegirla de la forma más conveniente para resolver el problema. Para tal fin, se utiliza la *calibración de Lorentz*, que se define como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\phi_e \implies \phi_e = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2-14)$$

Con la calibración de Lorentz, la ecuación (2-9) queda expresada como

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2-15)$$

mientras que la ecuación (2-13) se reduce a

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (2-16)$$

que corresponde a una ecuación de ondas vectorial inhomogénea, cuya solución es el potencial vectorial \mathbf{A} .

Las corrientes magnéticas no existen físicamente, pero se emplean como una herramienta auxiliar al aplicar teoremas de equivalencia de volúmenes o de superficie. Mediante el teorema de dualidad electromagnética, es posible expresar la solución de un problema con una fuente magnética a partir de la solución para un problema similar con una fuente eléctrica.

Las ecuaciones de Maxwell, aplicando dicho principio, quedan expresadas como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (2-17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2-18)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega \mathbf{D} = 0 \quad (2-19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mathbf{B} = -\mathbf{M} \quad (2-20)$$

Los campos debidos al potencial vectorial \mathbf{F} resultan

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (2-21)$$

$$\mathbf{H}_F = -j\omega \mathbf{F} - j\frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2-22)$$

donde el potencial vectorial \mathbf{F} es la solución de la ecuación de ondas vectorial inhomogénea inhomogénea

$$\nabla^2 \mathbf{F} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{F} = -\varepsilon \mathbf{M} \quad (2-23)$$

En resumen, el procedimiento que puede ser usado para hallar los campos es el siguiente:

1. Especificar las densidades de corriente eléctrica \mathbf{J} y magnética \mathbf{M} .
2. Hallar el potencial vectorial \mathbf{A} usando

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (2-24)$$

que es la solución de la ecuación de ondas vectorial inhomogénea (2-16).

3. Hallar el potencial vectorial \mathbf{F} usando

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (2-25)$$

que es la solución de la ecuación de ondas vectorial inhomogénea (2-23). En las ecuaciones (2-24) y (2-25), $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ y R es la distancia desde un punto de la fuente y el punto de observación.

4. Hallar los campos debidos al potencial vectorial \mathbf{A} .
 5. Hallar los campos debidos al potencial vectorial \mathbf{F} .
 6. El campo total \mathbf{E} está determinado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega \mathbf{A} - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (2-26)$$

7. El campo total \mathbf{H} está determinado por

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j\omega \mathbf{F} - j \frac{1}{\omega \mu \varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2-27)$$

2.2. Principio de equivalencias de campos

La *equivalencia de campos* es un principio por el cual las fuentes de radiación reales son reemplazadas por fuentes equivalentes.

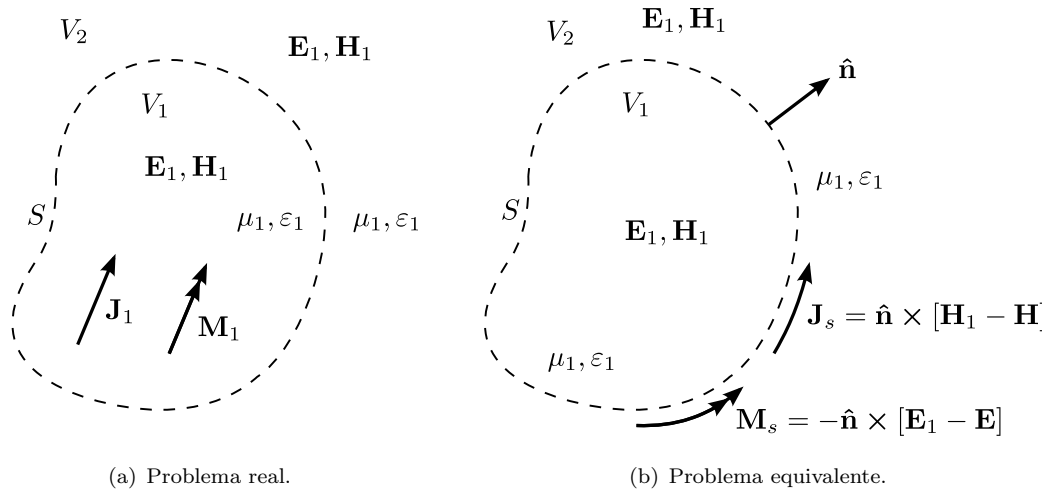


FIGURA 2.1: Modelos real y equivalente.

Toda fuente de radiación puede representarse eléctricamente por las densidades de corriente eléctrica \mathbf{J} y magnética \mathbf{M} . Como se muestra en la Figura 2.1(a), las fuentes \mathbf{J}_1

y \mathbf{M}_1 están encerradas en una superficie S e irradian los campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{H}_1 en todas las direcciones. El volumen dentro de S se denota mediante V_1 , y fuera de S mediante V_2 . El objetivo principal es el de reemplazar el problema original, que se muestra en la Figura 2.1(a), por uno equivalente de la Figura 2.1(b) que produzca los mismos campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{H}_1 fuera de S (dentro de V_2). Para que estos campos existan fuera de S , se deberán satisfacer las condiciones de contorno de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético. De esta forma, sobre la superficie imaginaria S deben existir las fuentes equivalentes, cuyas expresiones son

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}] \quad (2-28)$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}] \quad (2-29)$$

Como los campos dentro de S no son de nuestro interés, pueden tener cualquier valor. Por conveniencia, los suponemos nulos. En ese caso, el problema equivalente de la Figura 2.1(b) se reduce al de la Figura 2.2(a), con las densidades de corriente equivalentes siendo iguales a

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}]|_{\mathbf{H}=0} \implies \mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 \quad (2-30)$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}]|_{\mathbf{E}=0} \implies \mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 \quad (2-31)$$

Esta forma del principio de equivalencia de campos es conocida como *Principio de equivalencia de Love*

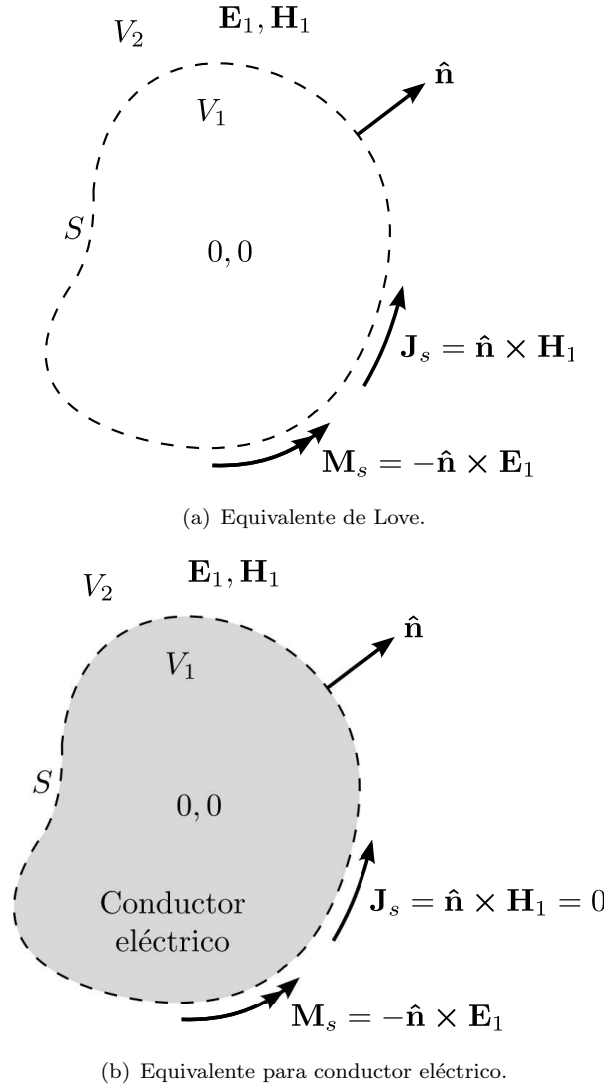


FIGURA 2.2: Modelos del principio de equivalencia.

Aunque el medio interior se modifique, \mathbf{E} y \mathbf{H} continuarán siendo nulos. Si reemplazamos el medio interior por un conductor eléctrico perfecto, la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J}_s , que es tangencial a la superficie S , es cortocircuitada por el conductor eléctrico; de esta forma, el problema equivalente de la Figura 2.2(a) se reduce al de la Figura 2.2(b). Para encontrar la utilidad al principio de equivalencia de campos, especialmente para el problema de la Figura 2.2(b), asumimos que la superficie S es un conductor eléctrico plano y que se extiende hasta el infinito, como se muestra en la Figura 2.3(a). Para esta geometría, el problema radica en cómo una fuente magnética irradia en presencia de un conductor eléctrico plano, por lo que aplicando teoría de imágenes se reduce el problema al de la Figura 2.3(b). Como la fuente imaginaria está en la misma dirección que la fuente equivalente, el problema equivalente de la Figura 2.3(b) se reduce al de la Figura 2.3(c).

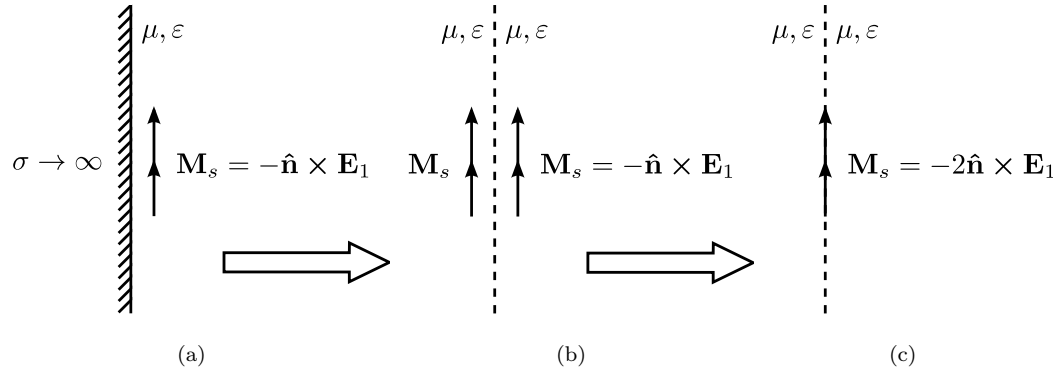


FIGURA 2.3: Modelos equivalentes para fuentes magnéticas cercanas a un conductor eléctrico perfecto.

Considerando una abertura montada sobre un plano conductor infinito y conociendo los campos \mathbf{E}_a y \mathbf{H}_a sobre dicha abertura, es posible determinar las densidades de corriente \mathbf{M}_s y \mathbf{J}_s resolviendo el problema análogamente al de la Figura 2.3. El resultado puede verse en la Figura 2.4; mientras que en la Figura 2.4(a) la abertura es excitada con campo distribuido uniformemente, en la Figura 2.4(b) se emplea una guía de ondas, por lo que la excitación se produce mediante campo con distribución sinusoidal.

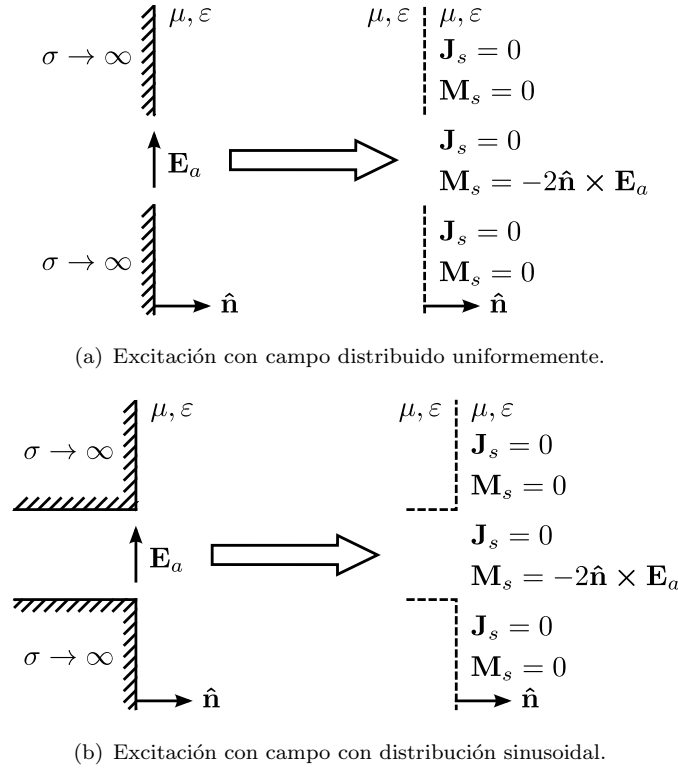


FIGURA 2.4: Modelos equivalentes empleados para aberturas montadas sobre un plano conductor infinito.

Para el caso de guías de onda con extremo abierto y bocinas, no existe un plano conductor infinito sobre el que esté montada la antena, lo que implica que la densidad de corriente \mathbf{J}_s sobre la abertura no es cortocircuitada por el plano conductor infinito; \mathbf{J}_s , entonces, no es nula. El problema es que no conocemos a priori los campos fuera de la abertura, por lo que a pesar de existir un equivalente exacto del problema, no puede utilizarse. Lo más usual es asumir que \mathbf{E}_a y \mathbf{H}_a (y por lo tanto, \mathbf{M}_s y \mathbf{J}_s), existen sobre la abertura pero son nulos fuera de ella, como puede observarse en la Figura 2.6(a). Se ha demostrado, mediante comparación con mediciones y otros datos disponibles, que este modelo equivalente aproximado es el que mejores resultados produce.

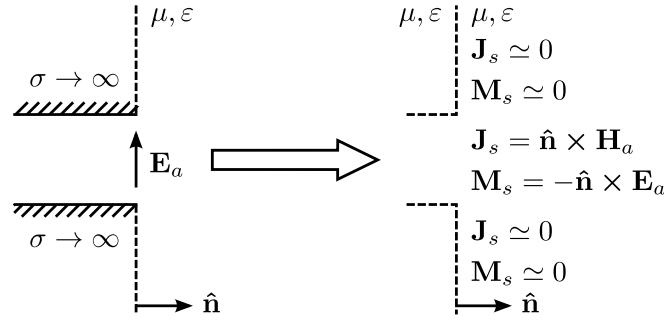


FIGURA 2.5: Modelo equivalente empleado para guías de onda con extremo abierto y bocinas.

2.3. Campos radiados

Para observaciones de campo lejano, la componente radial de los campos radiados es despreciable, por lo que se considera que \mathbf{E} y \mathbf{H} tienen solamente componentes en los ángulos θ y ϕ ; a la vez el frente de onda, que es esférico, puede aproximarse a un frente de onda plano, por lo que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados entre sí mediante la impedancia intrínseca del medio. Partiendo de las ecuaciones (2-26) y (2-27) y despreciando las componentes radiales, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} pueden expresarse como

$$\mathbf{E} \simeq -j\omega\mathbf{A} + j\omega\eta(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}) \quad (2-32)$$

$$\mathbf{H} \simeq \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{E}}{\eta} \quad (2-33)$$

y las componentes de ambos campos como

$$E_r \simeq 0 \quad (2-34)$$

$$E_\theta \simeq -j\omega (A_\theta + \eta F_\phi) \quad (2-35)$$

$$E_\phi \simeq -j\omega (A_\phi - \eta F_\theta) \quad (2-36)$$

$$H_r \simeq 0 \quad (2-37)$$

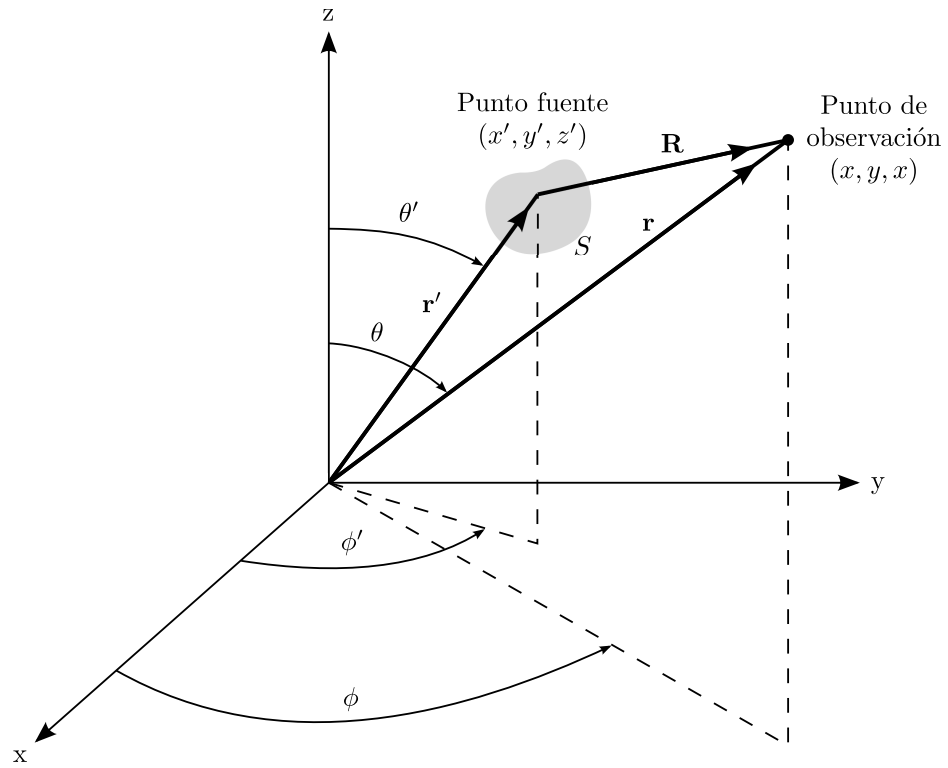
$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (2-38)$$

$$H_\phi \simeq \frac{E_\theta}{\eta} \quad (2-39)$$

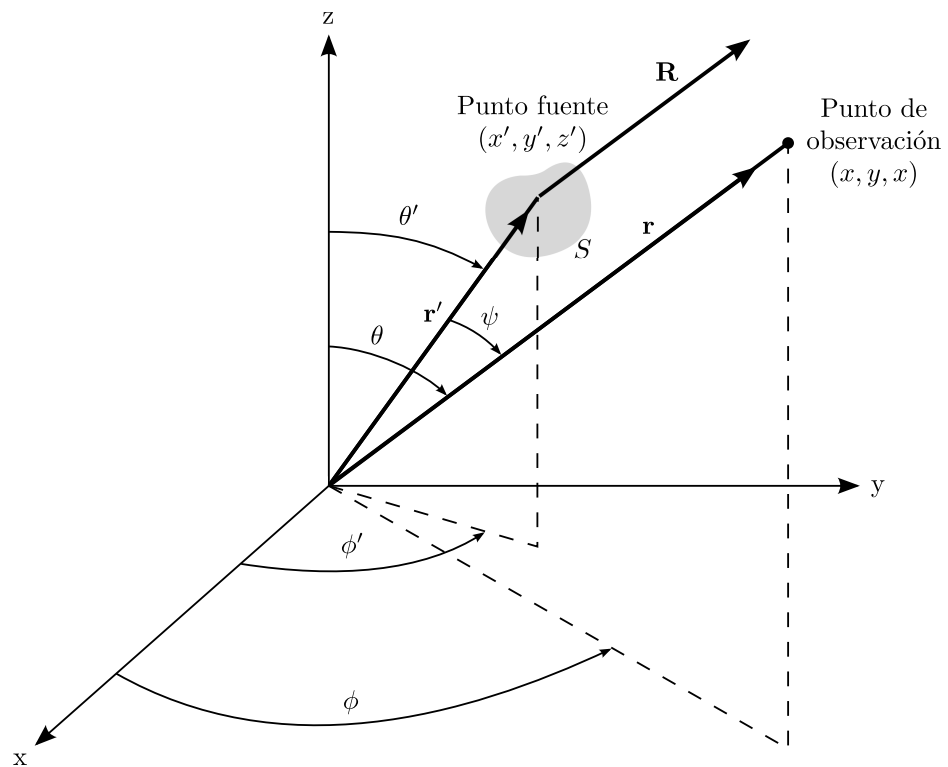
Las expresiones de los potenciales vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{F} ((2-24) y (2-25) respectivamente) corresponden a integrales de volumen sobre densidades de corriente superficiales. En los modelos equivalentes para antenas de abertura, las densidades de corriente son lineales, por lo que los potenciales vectoriales se expresan como integrales de superficie, quedando

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \mathbf{J}_s \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \quad (2-40)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_S \mathbf{M}_s \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \quad (2-41)$$



(a) Campo cercano.



(b) Campo lejano.

FIGURA 2.6: Sistemas de coordenadas para análisis de antenas de abertura.

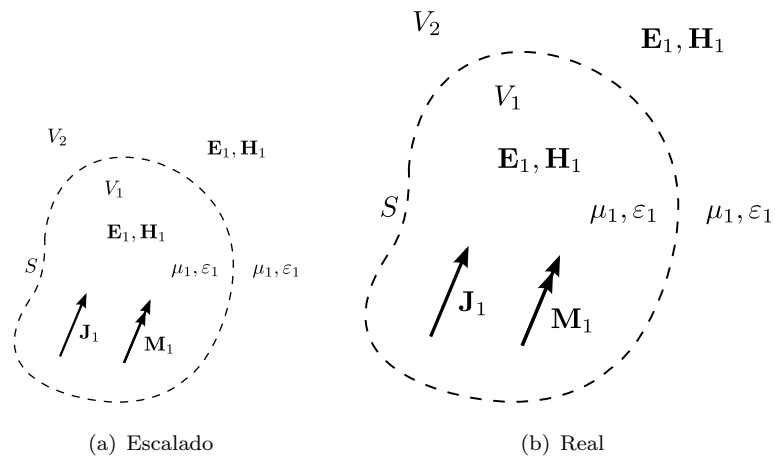


FIGURA 2.7: Sistemas de coordenadas para análisis de antenas de abertura.

$\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$

Capítulo 3

Principios de antenas parabólicas

Lo que comúnmente llamamos antena parabólica está en realidad compuesto por dos elementos: la antena propiamente dicha, que cumple la función de iluminador o alimentador, y la superficie reflectora, que consiste en un paraboloide de revolución.

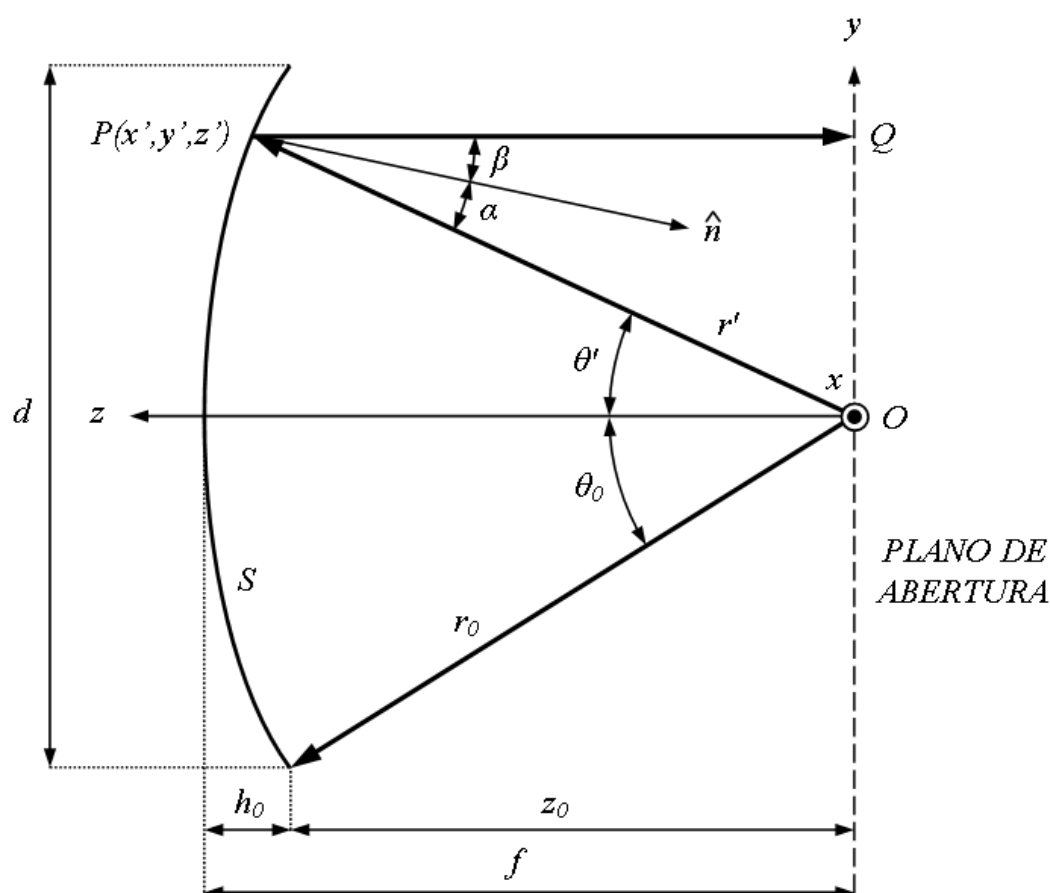


FIGURA 3.1: Esquema bidimensional de un reflector parabólico

La intersección del reflector con cualquier plano que contenga el eje del reflector (eje z) describe una curva parabólica que, en coordenadas cartesianas empleando (y', z') se muestra en la Figura 3.1. La ecuación que describe la curva parabólica resultante de la intersección entre el paraboloide de revolución y cualquier plano que contenga al eje z es

$$y'^2 = 4f(f - z'), \quad y' \leq \frac{d}{2} \quad (3-1)$$

El vértice del reflector corresponde a $y' = 0$ y $z' = f$, y el límite del reflector a $y' = d/2$ y $z' = f - (d/2)^2 / 4f$. Para un desplazamiento dado y' desde el eje del reflector, r' es la distancia entre el punto P sobre la superficie del reflector y el punto focal O . La curva parabólica puede expresarse también en coordenadas polares (r', θ') como

$$r' = \frac{2f}{1 + \cos \theta'} = f \sec^2 \left(\frac{\theta'}{2} \right) \quad (3-2)$$

Por lo tanto, la proyección de la distancia r' sobre el plano de abertura es

$$y' = r' \sin \theta' = \frac{2f \sin \theta'}{1 + \cos \theta'} = 2f \tan \left(\frac{\theta'}{2} \right) \quad (3-3)$$

En el vértice, se cumple que $\theta' = 0$ y $r' = f$, mientras que en el borde del reflector se cumple que $\theta' = \theta_0$, $r' = 2f / (1 + \cos \theta_0)$ y $y' = d/2$. A menudo la curvatura del reflector se expresa en términos de d y de f/d , donde d es el diámetro del reflector y f/d es la *relación distancia focal-diámetro*.

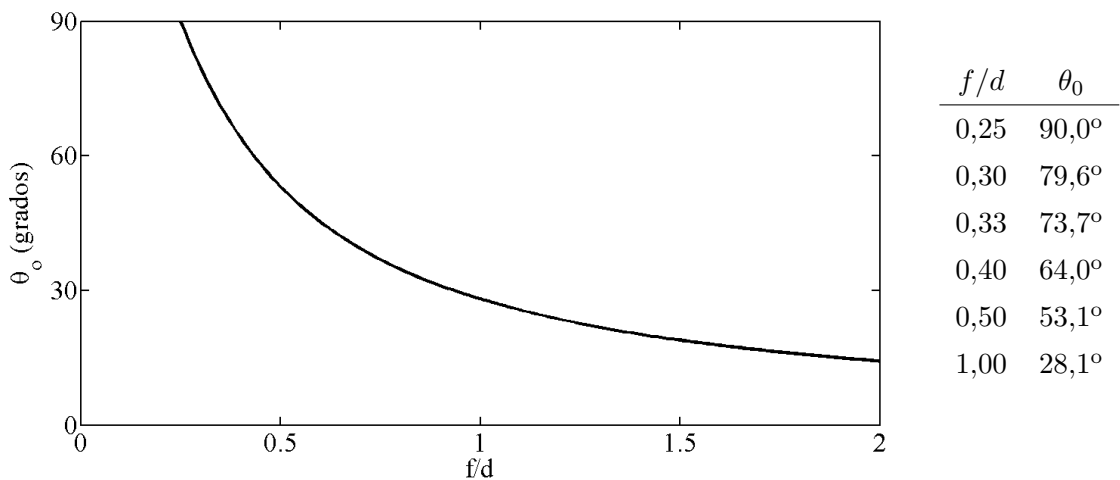


FIGURA 3.2: Angulo θ_0 en función de f/d

En la Figura 3.2 pueden observarse los distintos ángulos θ_0 en función de f/d . De acuerdo a la bibliografía consultada, en la práctica suelen utilizarse valores de f/d comprendidos entre 0,3 y 0,8.

Trabajando las expresiones anteriores, la distancia focal del reflector puede calcularse fácilmente a partir de su diámetro d y su profundidad h_0 .

$$f = \frac{d^2}{16h_0} \quad (3-4)$$

Los reflectores parabólicos poseen las siguientes propiedades de gran importancia:

1. Los rayos que emergen del punto focal O se coliman luego de reflejarse en la superficie metálica del reflector y los rayos reflejados son paralelos al eje del reflector (eje z).
2. La longitud de todos los caminos que describen los rayos desde el punto focal O hasta el plano de abertura, luego de reflejarse en la superficie metálica del reflector, es la misma e igual a $2f$.

Empleando la geometría óptica (GO), se tratan las ondas electromagnéticas como rayos que son normales a la superficie equifasial.

La primera propiedad se deduce directamente de la aplicación de la ley de reflexión de Snell en la superficie del reflector, o sea, tomando que $\alpha = \beta$. Para mostrar esto, primero determinamos la superficie normal $\hat{\mathbf{n}}$ evaluando el gradiente de la ecuación de la curva parabólica, $S = f - r' \cos^2(\theta'/2) = 0$, basada en la ecuación (3-2).

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \nabla S &= \nabla \left[f - r' \cos^2 \left(\frac{\theta'}{2} \right) \right] = \left(\frac{\partial S}{\partial r'} \hat{\mathbf{a}}'_r + \frac{1}{r'} \frac{\partial S}{\partial \theta'} \hat{\mathbf{a}}'_\theta \right) \\ &= -\cos^2 \left(\frac{\theta'}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}'_r + \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}'_\theta \end{aligned} \quad (3-5)$$

Se halla la expresión del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ utilizando $|\mathbf{N}| = \cos^2 \left(\frac{\theta'}{2} \right)$, obteniendo

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = -\cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}'_r + \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \hat{\mathbf{a}}'_\theta \quad (3-6)$$

Para hallar el ángulo formado entre el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, que es normal a la superficie en el punto de reflexión, y la onda incidente, formulamos

$$\cos \alpha = -\hat{\mathbf{a}}'_r \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{a}}'_r \cdot \left[-\hat{\mathbf{a}}'_r \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) + \hat{\mathbf{a}}'_\theta \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) \quad (3-7)$$

De igual forma, se encuentra el ángulo formado entre el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y la onda reflejada, que es paralela al eje z.

$$\begin{aligned}\cos \beta &= -\hat{\mathbf{a}}'_z \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{a}}'_z \cdot \left[-\hat{\mathbf{a}}'_r \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) + \hat{\mathbf{a}}'_\theta \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \right] \\ &= -(\hat{\mathbf{a}}'_r \cos \theta' - \hat{\mathbf{a}}'_\theta \sin \theta') \cdot \left[-\hat{\mathbf{a}}'_r \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) + \hat{\mathbf{a}}'_\theta \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right)\end{aligned}\quad (3-8)$$

Comparando ambas ecuaciones, puede verse que

$$\alpha = \beta = \frac{\theta'}{2} \quad (3-9)$$

por lo que la ley de reflexión de Snell se satisface.

A partir de la Figura 3.1, puede demostrarse también la propiedad de caminos de igual longitud.

$$\begin{aligned}\overline{OP} + \overline{PQ} &= \text{longitud total del camino entre el foco y el plano de abertura} \\ &= r' + r' \cos \theta' = r' (1 + \cos \theta') = 2f\end{aligned}\quad (3-10)$$

Dado que la longitud de los distintos caminos es constante e igual a $2f$, la fase de las ondas que arriben al plano de abertura desde un punto fuente ubicado en el foco también será constante. Por lo tanto, *el reflector parabólico alimentado con una fuente que tenga el centro de fase en el foco generara una fase uniforme a través del plano de abertura*. Sin embargo, la distribución de amplitud en la abertura no sera uniforme.

Las antenas con reflectores parabólicos pueden analizarse determinando la distribución de los campos sobre el plano de abertura, los cuales pueden integrarse para determinar el diagrama de radiación. Alternativamente, puede analizarse el problema determinando las corrientes superficiales equivalente e integrándolas. En ambos casos, se utilizan los principios de la óptica geométrica para determinar la distribución de corrientes. La aplicación de la óptica geométrica requiere las siguientes hipótesis:

- El radio de la curvatura del reflector es mucho mayor que la longitud de onda, por lo que la región del reflector localizada en torno a cada reflexión puede ser tratada como plana.
- El radio de la curvatura formado entre el foco y el punto del reflector donde se refleja la onda incidente es mucho mayor que la longitus de onda, por lo que la onda incidente puede ser tratada localmente en el punto de reflexión como una onda plana.

Adicionalmente, se asume que el reflector se comporta como un reflector perfecto, por lo que las amplitudes de las ondas incidente y reflejada son iguales; esto quiere decir que $\Gamma = -1$.

Para determinar las características de radiación de una antena parabólica, debe conocerse la densidad de corriente inducida sobre la superficie del reflector. La densidad de corriente \mathbf{J}_s puede determinarse mediante

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r) \quad (3-11)$$

donde \mathbf{H}^i y \mathbf{H}^r representan, respectivamente, las componentes del campo magnético incidente y reflejado en la superficie del reflector. Considerando que la región del reflector localizada en torno a cada reflexión se trata como plana, aplicando teoría de imágenes

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^r \quad (3-12)$$

y la ecuación (3-11) se reduce a

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r) = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^r \quad (3-13)$$

Si la superficie reflectora está, respecto al alimentador, en la zona de campo lejano, la ecuación (3-13) puede escribirse como

$$\mathbf{J}_s = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i \simeq \frac{2}{\eta} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{s}}_i \times \mathbf{E}^i)] \quad (3-14)$$

o

$$\mathbf{J}_s = 2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^r \simeq \frac{2}{\eta} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{s}}_r \times \mathbf{E}^r)] \quad (3-14a)$$

donde η es la impedancia intrínseca del medio, $\hat{\mathbf{s}}_i$ y $\hat{\mathbf{s}}_r$ son los vectores unitarios a lo largo de los caminos de las ondas incidente y reflejada (como puede verse en la Figura()) y \mathbf{E}^i y \mathbf{E}^r son los campos eléctricos incidente y reflejado.

Ahora se analizarán los dos métodos más empleado en el análisis de las características de radiación de antenas con reflectores parabólicos, que son los métodos de *distribución de campos sobre la abertura* y de *distribución de corrientes*.

- Para el método de *distribución de campos sobre la abertura*, se halla el campo reflejado por el reflector sobre un plano normal al eje del reflector, empleando la óptica geométrica; generalmente, dicho plano contiene al foco, y se denomina *plano de abertura*, como se observa en la Figura 3.1. Una vez hallado el campo reflejado

sobre el plano de abertura, se determina las características de radiación como en cualquier antena de abertura: se forman las corrientes equivalentes sobre el plano de abertura, suponiendo que dichas fuentes son nulas fuera del área proyectada, y luego se integran para hallar los campos radiados.

- Para el método de *distribución de corrientes*, la aproximación de la óptica física de la densidad de corriente inducida \mathbf{J}_s se formula sobre el lado iluminado del reflector (S_1) de la Figura (). Integrando \mathbf{J}_s sobre la superficie del reflector, se determinan los campos radiados.

FIGURAS 15-11 Y 15-12 DEL BALANIS

Para el reflector de la Figura (), se toman las siguientes aproximaciones para ambos métodos:

1. La densidad de corriente es cero en el lado no iluminado del reflector (S_2).
2. La discontinuidad de la densidad de corriente en el límite del reflector (Γ) es despreciable.
3. La radiación directa del alimentador y el bloqueo parcial del haz emergente que éste produce son despreciables.

Estas aproximaciones permiten obtener buenos resultados para los campos radiados en el haz principal y en los lóbulos secundarios cercanos. Para predecir el diagrama de radiación con más precisión, sobre todo para los lóbulos secundarios lejanos al haz principal, debe emplearse la teoría de difracción.

La ventaja del método de distribución de campos sobre la abertura es que la integración sobre el plano de abertura puede realizarse de igual forma independientemente del diagrama de radiación del alimentador o de su posición. La integración sobre la superficie del reflector, como se requiere en el método de distribución de corrientes, se vuelve compleja cuando el diagrama de radiación del alimentador es asimétrico y/o cuando el alimentado está desplazado del eje z.

Independientemente del método utilizado, el campo total puede obtenerse mediante superposición de la radiación del alimentador para ángulos mayores a θ_0 ($\theta > \theta_0$) y de la radiación reflejada por la superficie del reflector.

Si bien se desprecian los efectos de borde, la inclusión de los campos difractados en el borde del reflector no solamente introduce campos en la región no iluminada del

reflector, sino que modifica los campos en la región de transición. Cualquier discontinuidad introducida por la geometría óptica en la región de transición es removida por las componentes difractadas.

3.1. Método de distribución de campos sobre la abertura

Suponemos que sobre el foco del reflector se ubica una fuente con polarización lineal en el eje y una ganancia $G_f(\theta', \phi')$. La intensidad de radiación de la fuente está dada por

$$U(\theta', \phi') = \frac{P_t}{4\pi} G_f(\theta', \phi') \quad (3-15)$$

donde P_t es la potencia total radiada. Para campo lejano, se cumple que

$$U(\theta', \phi') = r'^2 \langle \mathbf{N} \rangle = r'^2 \frac{1}{2} \Re [\mathbf{E}(\theta', \phi') \times \mathbf{H}^*(\theta', \phi')] = r'^2 \frac{|\mathbf{E}(\theta', \phi')|^2}{2\eta} \quad (3-16)$$

por lo que

$$|\mathbf{E}(\theta', \phi')| = \sqrt{\frac{2\eta}{r'^2} U(\theta', \phi')} = \sqrt{\frac{\eta}{2\pi r'^2} P_t G_f(\theta', \phi')} \quad (3-17)$$

El campo incidente, con dirección perpendicular a la distancia radial, puede escribirse como

$$\mathbf{E}^i(\theta', \phi', r') = \hat{\mathbf{e}}_i \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{P_t}{2\pi} G_f(\theta', \phi') \right]^{1/2} \frac{e^{-jkr'}}{r'} = \hat{\mathbf{e}}_i C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-jkr'}}{r'} \quad (3-18)$$

$$C_1 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{1/4} \left(\frac{P_t}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (3-18a)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_i$ es un vector unitario perpendicular a $\hat{\mathbf{a}}'_r$ y paralelo al plano formado por $\hat{\mathbf{a}}'_r$ y $\hat{\mathbf{a}}_y$, como se muestra en la Figura ().

FIGURA 15-13 BALANIS

Puede mostrarse que en la superficie del reflector

$$\mathbf{J}_s = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{s}}_i \times \mathbf{E}^i)] \hat{\mathbf{a}}'_s = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-jkr'}}{r'} \mathbf{u} \quad (3-19)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{a}}'_r \times \hat{\mathbf{e}}_i) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) \hat{\mathbf{a}}'_r - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{a}}'_r) \hat{\mathbf{e}}_i \quad (3-19a)$$

y \mathbf{u} queda expresado como

$$\mathbf{u} = \left[-\hat{\mathbf{a}}_x \sin \theta' \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \sin \phi' \cos \phi' + \hat{\mathbf{a}}_y \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) (\sin^2 \phi' \cos \theta' + \cos^2 \phi') - \hat{\mathbf{a}}_z \cos \theta' \sin \phi' \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \right] / \sqrt{1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi'} \quad (3-20)$$

Para hallar el campo \mathbf{E}_{ap} en el plano de abertura, debido a la corriente en la superficie del reflector de la ecuación (3-19), primero se determina el campo reflejado \mathbf{E}^r en r' (el punto de reflexión)

$$\mathbf{E}^r = \hat{\mathbf{e}}_r C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-jkr'}}{r'} \quad (3-21)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_r$ es el (llenar). De la ecuación (3-14a)

$$\mathbf{J}_s = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{s}}_r \times \mathbf{E}^r)] \quad (3-22)$$

Como $\hat{\mathbf{s}}_r = -\hat{\mathbf{a}}_z$, la ecuación (3-22) puede escribirse, usando la (3-21), como

$$\mathbf{J}_s = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-jkr'}}{r'} \mathbf{u} \quad (3-23)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{n}} \times (-\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_r) = -\hat{\mathbf{a}}_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) - \hat{\mathbf{e}}_r \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) \quad (3-23a)$$

Como \mathbf{u} en las ecuaciones (3-23) y (3-23a) es el mismo que en las ecuaciones (3-19)–(3-20), puede demostrarse que luego de una compleja manipulación matemática

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\hat{\mathbf{a}}_x \sin \phi' \cos \phi' (1 - \cos \theta') - \hat{\mathbf{a}}_y (\sin^2 \phi' \cos \theta' + \cos^2 \phi')}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi'}} \quad (3-24)$$

Por lo tanto, el campo \mathbf{E}^r en el punto de reflexión r' está dado por la ecuación (3-21) donde $\hat{\mathbf{e}}_r$ está dado por la ecuación (3-24). En el plano de abertura, el campo está dado por

$$E_{ap} = \hat{\mathbf{e}}_r C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-jkr'(1+\cos \theta')}}{r'} = \hat{\mathbf{a}}_x E_{xa} + \hat{\mathbf{a}}_y E_{ya} \quad (3-25)$$

donde E_{xa} y E_{ya} representa las componentes x y y del campo reflejado sobre la superficie del plano de abertura.

Utilizando las componentes del campo eléctrico reflejado E_{xa} y E_{ya} dado en la ecuación (3-25), se determinan las densidades de corrientes equivalentes sobre el plano de

abertura.

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_a = -\hat{\mathbf{a}}_z \times \left(\hat{\mathbf{a}}_x \frac{E_{ay}}{\eta} - \hat{\mathbf{a}}_y \frac{E_{ax}}{\eta} \right) = -\hat{\mathbf{a}}_x \frac{E_{ax}}{\eta} - \hat{\mathbf{a}}_y \frac{E_{ay}}{\eta} \quad (3-26a)$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = \hat{\mathbf{a}}_z \times (\hat{\mathbf{a}}_x E_{ax} + \hat{\mathbf{a}}_y E_{ay}) = -\hat{\mathbf{a}}_x E_{ay} + \hat{\mathbf{a}}_y E_{ax} \quad (3-26b)$$

Los campos radiados pueden determinarse empleando las ecuaciones (3-26a) y (3-26b) y las formulaciones de la Sección (). La integración es restringida solamente al área proyectada S_0 sobre el plano de abertura, mostrada en línea discontinua en la Figura ().

$$E_{\theta s} = j \frac{ke^{-jkr}}{4\pi r} (1 - \cos \theta) \iint_{S_0} (-E_{ax} \cos \phi - E_{ay} \sin \phi) e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (3-27a)$$

$$E_{\phi s} = j \frac{ke^{-jkr}}{a\pi r} (1 - \cos \theta) \iint_{S_0} (-E_{ax} \sin \phi + E_{ay} \cos \phi) e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (3-27b)$$

A partir de los campos dados por las ecuaciones (3-27a) y (3-27b) puede determinarse el diagrama de radiación de la antena parabólica. Estrictamente, el diagrama de radiación debe tomar en cuenta las contribuciones de los campos directo y reflejado; para la mayoría de los alimentadores empleados, la intensidad de la radiación debida al campo directo es mucho menor que la debida al campo reflejado, por lo que la contribución del campo directo puede despreciarse.

3.2. Método de distribución de corrientes

Empleando los potenciales vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{F} y utilizando el sistema de coordenadas de la Figura (), puede demostrarse que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} radiados por las fuentes \mathbf{J} y \mathbf{M} pueden escribirse como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j \frac{1}{4\pi\omega\epsilon} \int_V [(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla + k^2 \mathbf{J} + j\omega\epsilon \mathbf{M} \times \nabla] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (3-28a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j \frac{1}{4\pi\omega\mu} \int_V [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \nabla + k^2 \mathbf{M} + j\omega\mu \mathbf{J} \times \nabla] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad (3-28b)$$

las cuales para observaciones de campo lejano se reducen, de acuerdo al sistema de coordenadas de la Figura (), a

$$\mathbf{E} \simeq -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V \left[\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) \hat{\mathbf{a}}_r + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{a}}_r \right] e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}_r} dv' \quad (3-29a)$$

$$\mathbf{H} \simeq -j \frac{\omega \varepsilon}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V \left[\mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) \hat{\mathbf{a}}_r - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{a}}_r \right] e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}_r} dv' \quad (3-29b)$$

Si las distribuciones de corrientes son inducidas por los campos eléctrico magnético incidentes sobre la superficie conductora mostrada en la Figura (), los campos creados por estas corrientes se denominan *scattered fields*. Si la superficie conductora es cerrada, los campos lejanos se obtienen de las ecuaciones () y () tomando $\mathbf{M} = 0$ y reduciendo la integral de volumen a la integral de superficie con la densidad de corriente \mathbf{J} reemplazada por la densidad de corriente lineal \mathbf{J}_s . Por lo tanto

$$\mathbf{E} = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \oint_S [\mathbf{J}_s - (\mathbf{J}_s \cdot \hat{\mathbf{a}}_r) \hat{\mathbf{a}}_r] e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}_r} ds' \quad (3-30a)$$

$$\mathbf{H} = j \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{4\pi r} e^{-jkr} \oint_S [\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{a}}_r] e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}_r} ds' \quad (3-30b)$$

Los campos eléctrico y magnético dispersos por la superficie cerrada del reflector de la Figura () y dados por las ecuaciones () y () son válidos siempre y cuando se satisfagan la ecuación de continuidad las funciones de densidad de las fuentes (corriente y carga), la cual estaría satisfecha si el objeto dispersante es una superficie cerrada y lisa. Para la geometría de la Figura (), la distribución de corriente es discontinua en el borde Γ (siendo cero sobre el área oscura S_2), que divide las áreas iluminada (S_1) y oscura (S_2). Puede demostrarse que la ecuación de continuidad se satisface si se introduce una distribución de carga lineal apropiada a lo largo del borde Γ . Por lo tanto, el campo disperso total sería la suma de las corrientes superficiales (1) sobre el área iluminada, las cargas superficiales (2) del área iluminada y la distribución de carga lineal (3) sobre el borge Γ .

FIGURA 15-18 BALANIS

Las contribuciones de la densidad de carga superficial sin tomadas en cuenta por la distribución de corriente mediante la ecuación de continuidad. Sin embargo, puede observarse que para campo lejano la contribución debido a la distribución de carga lineal cancela la componente longitudinal introducida por las distribuciones de corriente y carga superficial. Como para campo lejano las componentes del campo son predominantemente transversales, la contribución debida a la distribución de carga lineal no

necesitan incluirse y las ecuaciones () y () pueden aplicarse sobre la superficie abierta. En esta sección, las ecuaciones () y () se usarán para calcular el campo dispersado por la superficie del reflector parabólico. Generalmente los campos radiados por las corrientes sobre el lado oscuro del reflector son muy pequeños en comparación al campo total, por lo que las corrientes y los campos pueden igualarse a cero. El campo disperso por el lado iluminado del reflector puede formularse, usando el método de distribución de corrientes, usando las ecuaciones () y () cuando la integración es restringida sobre el área iluminada.

El campo eléctrico de un reflector parabólico, para campo lejano y despreciando la radiación directa del alimentador, esta dado por la ecuación (). La expresión de la ecuación () se separa, utilizando la geometría de la Figura (), en dos componentes.

$$E_{\theta} = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \iint_{S_1} \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \cdot \mathbf{J}_s e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}_r} ds' \quad (3-31a)$$

$$E_{\phi} = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \iint_{S_1} \hat{\mathbf{a}}_{\phi} \cdot \mathbf{J}_s e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}_r} ds' \quad (3-31b)$$

De acuerdo a la geometría de la Figura ()

$$ds' = dW dN = (r' \sin \theta' d\phi') \left[r' \sec \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \right] = r'^2 \sin \theta' \sec \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' d\phi' \quad (3-32)$$

donde

$$dW = r' \sin \theta' d\phi' \quad (3-32a)$$

$$\begin{aligned} dH &= -\hat{\mathbf{a}}_r \cdot d\mathbf{N} = -\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} dN \\ &= -\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \left[-\hat{\mathbf{a}}_r \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) + \hat{\mathbf{a}}_{\theta} \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right) \right] dN = \cos \left(\frac{\theta'}{2} \right) dN \end{aligned} \quad (3-32b)$$

$$dN = \sec \left(\frac{\theta'}{2} \right) dH = \sec \left(\frac{\theta'}{2} \right) r' d\theta' = r' \sec \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \quad (3-32c)$$

FIGURA 15-19 BALANIS

Por lo tanto, puede demostrarse que las ecuaciones () y () pueden expresarse, empleando las ecuaciones (), () y (), como

$$\begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix} = -j \frac{\omega \mu}{2\pi r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_1 e^{-jkr} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} = -j \frac{\omega \mu e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{P_t}{2\pi} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot \mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

donde

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_t + \mathbf{I}_z \quad (3-33a)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_t = & - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \hat{\mathbf{e}}_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \frac{\sqrt{G_f(\theta', \phi')}}{r'} e^{-jkr'[1 - \sin\theta' \sin\theta \cos(\phi' - \phi) - \cos\theta' \cos\theta]} \\ & \times r'^2 \sin\theta' \sec\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' d\phi' \end{aligned} \quad (3-33b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_z = & -\hat{\mathbf{a}}_z \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \frac{\sqrt{G_f(\theta', \phi')}}{r'} e^{-jkr'[1 - \sin\theta' \sin\theta \cos(\phi' - \phi) - \cos\theta' \cos\theta]} \\ & \times r'^2 \sin\theta' \sec\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' d\phi' \end{aligned} \quad (3-33c)$$

Comparando las ecuaciones () con las (), las componentes de los campos radiados formulados por los métodos de distribución de campos sobre la abertura y de distribución de corrientes llevan a resultados similares siempre y cuando la contribución de \mathbf{I}_z en la ecuación () sea despreciable. En la medida que la relación diámetro - longitud de onda (d/λ) se incremente, el método de distribución de corrientes se irá asemejando al método de distribución de campos sobre la abertura, y el haz principal del diagrama de radiación se volverá más estrecho.

Para variaciones cercanas a la región $\theta = \pi$, la contribución de \mathbf{I}_z se vuelve despreciable ya que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_\theta \cdot [-\hat{\mathbf{a}}_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] &= [\hat{\mathbf{a}}_x \sin\theta \cos\phi + \hat{\mathbf{a}}_y \cos\theta \sin\phi - \hat{\mathbf{a}}_z \sin\theta] \cdot [-\hat{\mathbf{a}}_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] \\ &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \sin\theta \end{aligned} \quad (3-34a)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot [-\hat{\mathbf{a}}_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] = [-\hat{\mathbf{a}}_x \sin\phi + \hat{\mathbf{a}}_y \cos\phi] \cdot [-\hat{\mathbf{a}}_z (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)] = 0 \quad (3-34b)$$

3.3. Directividad y eficiencia de abertura

La directividad y la eficiencia de abertura dependen directamente del diagrama de radiación primario (diagrama de radiación del alimentador) y de la relación f/d . Para simplificar el análisis, suponemos que el diagrama de radiación primario $G_f(\theta', \phi')$ es

circularmente simétrico (solamente función de θ') y que $G_f(\theta') = 0$ para $\theta' > 90^\circ$.

El patrón de radiación secundario (el formado por la superficie del reflector) está dado por la ecuación (). Despreciando la contribución de \mathbf{I}_z en la ecuación (), el campo \mathbf{E} total en la dirección $\theta = \pi$ está dada por E_θ o E_ϕ en la ecuación (). Asumiendo que la alimentación es circularmente simétrica, polarizada linealmente en la dirección y y despreciando las contribuciones de la polarización cruzada, puede mostrarse que, incluyendo la ecuación (), la ecuación () se reduce a

$$E(r, \theta = \pi) = -j \frac{2\omega\mu f}{r} \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{P_t}{2\pi} \right]^{1/2} e^{-jk(r+2f)} \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \quad (3-35)$$

La intensidad de radiación en la dirección $U(\theta = \pi)$ está dada por

$$U(\theta = \pi) = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}(r, \theta = \pi)|^2 \quad (3-36)$$

la cual empleando la ecuación () se expresa como

$$U(\theta = \pi) = \frac{16\pi^2}{\lambda^2} f^2 \frac{P_t}{4\pi} \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \quad (3-36a)$$

La directividad de la antena en la dirección de propagación principal puede escribirse, usando la ecuación (), como

$$U(\theta = \pi) = \frac{4\pi U(\theta = \pi)}{P_t} = \frac{U(\theta = \pi)}{P_t/4\pi} = \frac{16\pi^2}{\lambda^2} f^2 \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \quad (3-37)$$

La distancia focal está relacionada con el ángulo θ_0 y el diámetro de la abertura d por la ecuación (), por lo que la ecuación () se reduce a

$$U(\theta = \pi) = \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right)^2 \left[\cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \right] \quad (3-38)$$

El factor $(\pi d/\lambda)^2$ es la directividad de una abertura iluminada uniformemente y con fase constante; la parte remanente de la expresión es la eficiencia de abertura, que se define como

$$\epsilon_{ap} = \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \quad (3-39)$$

Para demostrar la variación de la eficiencia de abertura en función del ángulo θ_0 y la relación f/d , Silver [reflibro] consideró un tipo de diagramas de radiación cuyo diagrama

de radiación está definido por

$$G_f(\theta') = \begin{cases} G_0^{(n)} \cos^n(\theta') & \text{si } 0 \leq \theta' \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 \leq \theta' \leq \pi \end{cases} \quad (3-40)$$

donde $G_0^{(n)}$ es una constante dada por el valor n . Aunque son ideales, estos diagramas de radiación se escogieron porque permiten obtener expresiones cerradas y porque generalmente permiten obtener una buena representación del lóbulo principal en la práctica. La radiación en la región posterior se asume nula con el objetivo de evitar la interferencia entre la radiación directa del alimentador y la radiación reflejada.

La constante $G_0^{(n)}$ puede determinarse de la relación

$$\oint\!\!\!\oint_S G_f(\theta') d\Omega = \oint\!\!\!\oint_S G_f(\theta') \sin \theta' d\theta' d\phi' = 4\pi \quad (3-41)$$

por lo que la ecuación () se vuelve

$$G_0^{(n)} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta' \sin \theta' d\theta' = 2 \implies G_0^{(n)} = 2(n+1) \quad (3-42)$$

Empleando las ecuaciones () y (), la ecuación (), para valores pares de n y comprendidos entre 2 y 8, resulta

$$\epsilon_{ap}(n=2) = 24 \left\{ \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \ln \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \right\}^2 \cot^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (3-43a)$$

$$\epsilon_{ap}(n=4) = 40 \left\{ \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \ln \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] \right\}^2 \cot^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (3-43b)$$

$$\epsilon_{ap}(n=6) = 14 \left\{ 2 \ln \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] + \frac{(1 - \cos \theta_0)^3}{3} + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \right\}^2 \cot^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (3-43c)$$

$$\epsilon_{ap}(n=8) = 18 \left\{ \frac{1 - \cos^4 \theta_0}{4} - 2 \ln \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] - \frac{(1 - \cos \theta_0)^3}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \right\}^2 \cot^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (3-43d)$$

Las variaciones de las ecuaciones () – (), como funciones del ángulo de abertura del reflector θ_0 o de la relación f/d , se muestran en la Figura (). A partir de los gráficos obtenidos podemos decir que para un determinado diagrama de radiación (n constante)

1. Existe solamente un reflector que para un determinado ángulo de abertura θ_0 o relación f/d permite obtener la máxima eficiencia de abertura.
2. Cada eficiencia de abertura máxima se encuentra en torno al 82 - 83 %.

3. La eficiencia de abertura máxima es prácticamente la misma para todos los diagramas de radiación.
4. En la medida que el diagrama de radiación del alimentador se vuelva más directivo (se incrementa n), la abertura abgular del reflector que permite obtener la máxima eficiencia de abertura es menor.

La eficiencia de abertura es generalmente el producto de:

1. *Eficiencia por spillover* ϵ_s , debida a la fracción de la potencia total radiada por el alimentador fuera del angulo de abertura del reflector θ_0 .
2. *Eficiencia de iluminación* ϵ_t , debida a la distribución de amplitud no uniforme del diagrama de radiación del alimentador sobre la superficie del reflector.
3. *Eficiencia de fase* ϵ_p , debida a la no uniformidad de la fase del campo sobre el plano de abertura.
4. *Eficiencia por polarización cruzada* ϵ_x , debida a la existencia de campos con polarización cruzada sobre el plano de abertura.
5. *Eficiencia por bloqueo* ϵ_b , debida al bloqueo parcial del campo reflejado producido por el alimentador.
6. *Eficiencia por errores aleatorios* ϵ_r , debida a irregularidades de la superficie del reflector.

Entonces, en general

$$\epsilon_{ap} = \epsilon_s \epsilon_t \epsilon_p \epsilon_x \epsilon_b \epsilon_r \quad (3-44)$$

Para alimentadores con diagramas de radiación simétricos

$$\epsilon_s = \frac{\int_0^{\theta_0} G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'}{\int_0^\pi G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'} \quad (3-45)$$

$$\epsilon_t = 2 \cot^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \frac{\left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \right|^2}{\int_0^{\theta_0} G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'} \quad (3-46)$$

Usando la ecuación (), la ecuación () puede escribirse como

$$\epsilon_t = 32 \left(\frac{f}{d} \right)^2 \frac{\left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \right|^2}{\int_0^{\theta_0} G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'} \quad (3-46a)$$

Capítulo 4

Estudio y diseño de la antena

Capítulo 5

Mediciones y resultados del modelo construido

Capítulo 6

Conclusiones

Bibliografía

- [1] Dyson, John D.: *The characteristics and design of the conical log-spiral antenna*. En *IEEE Transactions on antennas and propagation*, volumen AP-13, páginas 488–499, Julio 1965.
- [2] Dyson, J. D. y P. Mayes: *New circular-polarized frequency-independent antennas with conical beam or omnidirectional patterns*. En *IRE Transactions on antennas and propagation*, volumen 9, páginas 334–342, Julio 1961.
- [3] Booker, H. G.: *Slot aeriels and their relation to complementary wire aeriels*. En *J. Inst. Elec. Engrs.*, páginas 620–626, United States of America, 1946.
- [4] Turner, E. M.: *Spiral slot antenna*. En *Tech. Note WCLR-55-8 WADC*, Wirght-Patterson AFB, Ohio, USA, Junio 1955.
- [5] Klopfenstein, R. W.: *A Transmission Line Taper of Improved Design*. En *Proc. IRE*, volumen 44, páginas 31–35, Enero 1956.
- [6] Rumsey, V.: *Frequency independent antennas*. En *IRE International Convention Record*, volumen 5, páginas 114–118, 1957.
- [7] Dyson, John D.: *The equiangular spiral antenna*. En *IRE Transactions on antennas and propagation*, páginas 181–187, Illinois, USA, Abril 1959.
- [8] Dyson, John D.: *The unidirectional equiangular spiral antenna*. En *IRE Transactions on antennas and propagation*, páginas 329–334, Illinois, USA, Octubre 1959.
- [9] Kaiser, Julius A.: *The archimedean two-wire spiral antenna*. En *IRE Transactions on antennas and propagation*, volumen 8, páginas 312–323, Washington D.C., Mayo 1960.
- [10] Bawer, R. y J. J. Wolfe: *The spiral antenna*. En *IRE Transactions on antennas and propagation*, volumen 8, páginas 85–95, 1960.

- [11] Cheo, B. R. S., V. H. Rumsey y W. J. Welch: *A solution to the frequency-independent antenna problem*. En *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, páginas 527–534, Tokyo, Japan, Noviembre 1961.
- [12] Wheeler, M. S.: *On the radiation from several regions in spiral antennas*. En *Antennas and Propagation, IRE Transactions on*, volumen 9, páginas 100–102, 1961.
- [13] Nakano, Hisamatsu y Junji Yamauchi: *A theoretical investigation of the two-wire round spiral antenna-Archimedean type*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1979*, páginas 387–390, Tokyo, Japan, Junio 1979.
- [14] Morgan, T. E.: *Spiral antennas for ESM*. En *Communications, Radar and Signal Processing, IEEE Proceedings*, volumen 132, páginas 245–251, 1985.
- [15] Drewniak, J., P. Mayes, D. Tanner y R. Waller: *A log-spiral, radiating-line antenna*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1986*, volumen 24, páginas 773–776, 1986.
- [16] Nakano, H., K. Nogami, S. Arai, H. Mimaki y J. Yamauchi: *A spiral antenna backed by a conducting plane reflector*. En *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, volumen 34, páginas 791–796, 1986.
- [17] Nakano, H. y H. Soga: *Realization of wideband characteristics for a spiral antenna backed by a conducting plane reflector*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1989. AP-S. Digest*, volumen 3, páginas 1312–1315, 1989.
- [18] Wang, J. H. H. y V. K. Tripp: *Design of multioctave spiral-mode microstrip antennas*. En *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, volumen 39, páginas 332–335, 1991.
- [19] Nurnberger, M. W. y J. L. Volakis: *A new planar feed for slot spiral antennas*. En *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, páginas 130–131, 1996.
- [20] Wang, J. H. H., J. K. Tillery y M. A. Acree: *Multioctave wideband mode-0 operation of spiral-mode microstrip antennas*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1997. IEEE., 1997 Digest*, volumen 3, páginas 1860–1863, 1997.
- [21] Nurnberger, M. W., T. Özdemir y J. L. Volakis: *A planar slot spiral for multi-funcion communications apertures*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1998. IEEE*, volumen 2, páginas 774–777, 1997.

- [22] Nurnberger, M. W. y J. L. Volakis: *Extremely broadband Slot Spiral Antenna with Shallow Reflecting Cavities*. En *Electromagnetics*, volumen 20, páginas 15–26, Diciembre 2001.
- [23] Nurnberger, M. W., T. Özdemir y J. L. Volakis: *A thin cavity-backed archimedean slot spiral for 800-3000 MHz band coverage*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1998. IEEE*, volumen 4, páginas 2336–2330, 1998.
- [24] Nurnberger, M. W., T. Özdemir y J. L. Volakis: *Analysis of thin multioctave cavity-backed slot spiral antennas*. En *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings*, volumen 146, páginas 447–454, 1999.
- [25] Nurnberger, M. W., M. A. Abdelmoneum y J. L. Volakis: *New techniques for extremely broadband planar slot antennas*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1999. IEEE*, volumen 4, páginas 2690–2693, 1999.
- [26] Acree, Michael A. y Jr. Aluzio Prata: *Archimedean spiral-mode microstrip antenna with improved axial ratio*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1999. IEEE*, volumen 2, páginas 1232–1235, 1999.
- [27] Nurnberger, M. W. y J. L. Volakis: *New termination and shallow reflecting cavity for ultra wide-band slot spirals*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2000. IEEE*, volumen 3, páginas 1528–1531, 2000.
- [28] Hirose, K., M. Miyamoto y H. Nakano: *A two-wire spiral antenna with unbalanced feed*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001. IEEE*, volumen 4, páginas 128–131, 2001.
- [29] Filipovic, D. S. y J. L. Volakis: *Design and demonstration of a novel conformal slot spiral antenna for VHF to L-band operation*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001. IEEE*, volumen 4, páginas 120–123, 2001.
- [30] Filipovic, D. S., M. W. Nurnberger y J. L. Volakis: *A broadband cavity-backed slot spiral antenna*. En *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, volumen 43, páginas 15–26, 2001.
- [31] Nakano, H., Y. Okabe, M. Ikeda, M. Sakurai, H. Mimaki y J. Yamauchi: *A low profile spiral antenna*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2002. IEEE*, volumen 3, páginas 60–63, 1993.
- [32] Filipovic, D. S. y J. L. Volakis: *Design of a multi-functional slot aperture (combo-antenna) for automotive applications*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2002. IEEE*, volumen 2, páginas 428–431, 2002.

- [33] Nurnberger, M. W. y J. L. Volakis: *New termination for ultrawide-band slot spirals*. En *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, volumen 50, páginas 82–85, 2002.
- [34] Cencich, T. y J. A. Huffman: *The analysis of wideband spiral antennas using modal decomposition*. En *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, volumen 46, páginas 20–26, 2004.
- [35] Buck, Michael C. y Dejan S. Fillipovic: *Unidirectional spiral antenna with improved gain and WoW*. En *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2005 IEEE*, volumen 3A, páginas 541–544, Agosto 2005.
- [36] Volakis, J. L.: *Broadband VHF-L band cavity-backed slot spiral antenna*. En *Air Force Research Laboratory, Information directorate, Rome research site, Roma, Nueva York*, páginas 1–58, Mayo 2005.
- [37] Buck, Michael C. y Dejan S. Fillipovic: *Spiral cavity backing effects on pattern symmetry and modal contamination*. En *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, volumen 5, páginas 243–246, 2006.
- [38] Nakano, H., K. Kikkawa y J. Yamauchi: *A low-profile equiangular spiral antenna backed by a cavity with an absorbing strip*. En *Antennas and Propagation, 2006. EuCAP 2006. First European Conference on*, páginas 1–5, 2006.
- [39] Kramer, B. A., S. Koulouridis, Chi Chih Chen y J. L. Volakis: *A novel reflecting surface for an UHF spiral antenna*. En *IEEE Antennas and Wireless Propagation*, volumen 5, 2006.
- [40] Simons, R. N. y S. R. Taub: *Coplanar waveguide radial line stub*. En *Electronic Letters*, volumen 29, páginas 412–414, 1993.
- [41] Thaysen, J., K. B. Jakobsen y J. Appel-Hansen: *A wideband balun - How does it work?* En *Applied Microwave and Wireless*, volumen 12, páginas 40–50, Octubre 2000.
- [42] Hertel, T.W. y G.S. Smith: *Analysis and design of two-arm conical spiral antennas*. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, 44(1):25 –37, feb 2002, ISSN 0018-9375.
- [43] Johnson, Richard: *Antenna Engineering Handbook*. Mc Graw Hill, 1993.
- [44] Orr, William I.: *Radio Handbook, 23rd edition*. SAMS, USA, 1993.
- [45] Kraus, J. D. y R. Marhefka: *Antennas for all applications*. Mc Graw Gill, New York, USA, 2002.

- [46] Stutzman, Warren L. y Gary A. Thiele: *Antenna Theory and Design*. Wiley, USA, 1998.
- [47] Trainotti, Valentino, Walter Gustavo Fano y Luis Antonio Dorado: *Ingeniería electromagnética, Tomo II*. Nueva Librería, Argentina, 2005.
- [48] Trainotti, Valentino y Walter Gustavo Fano: *Ingeniería electromagnética, Tomo III*. Nueva Librería, Argentina, 2009.
- [49] Fernandez, Juan Carlos: *Apuntes de Electromagnetismo*. Argentina, 2004.
- [50] Balanis, Constantine A.: *Advanced Engineering electromagnetics*. Wiley, United States of America, 1989.
- [51] Balanis, Constantine A.: *Antenna Theory Analysis and Design, 2nd edition*. Wiley, United States of America, 1997.
- [52] Agilent: *De-embedding and embedding S-parameter networks using a Vector Network Analyzer*. En *Application Note 1364-1*, 1986.
- [53] Kramer, Brad. A.: *Size reduction of an UWB low-profile spiral antenna*. Tesis de Doctorado, The Ohio State University, 2007.
- [54] Volakis, J. L.: *Slot spiral antenna with integrated balun and feed*, Septiembre 1998.
- [55] Turner, E. M. : *Slot spiral antenna*, Diciembre 1958.
- [56] *ANSI/IEEE Standard Test Procedures for Antennas*. IEEE Std 149-1979 (R2008), 2008.
- [57] *IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas*. IEEE Std 145-1993, Junio 1993.
- [58] Orfanidis, Sophocles J.: *Electromagnetic Waves and Antennas*, 2008. <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>.
- [59] Wikipedia. <http://www.wikipedia.com>.
- [60] Minicircuits Balun Transformers Application Note. <http://www.minicircuits.com/pages/BalunApplicationNote.htm>.
- [61] ETS-Lindgren. www.ets-lindgren.com.
- [62] Granger, Robin, Peter Readman y Steve Simpson: *Ready to receive: Developing a professional antenna for Galileo*. www.gpsworld.com/gps/ready-receive-developing-a-professional-antenna-galileo-1141.

-
- [63] Weisstein, Eric W.: *"Spherical Coordinates". From MathWorld – A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html>.
- [64] Software: *Qucs 0.0.16*. <http://qucs.sourceforge.net/>.

Apéndice A

Distribución de los campos en guías de ondas

Partimos siempre de las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

Las relaciones constitutivas para el medio considerado son:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Dentro del sistema de guiado suponemos que no existen fuentes de campo, por lo que las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Suponiendo que los campos son armónicos, y considerando que el medio de propagación es el vacío:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}\end{aligned}$$

En estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell nos llevan a las ecuaciones de Helmholtz.

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} + \gamma^2\mathbf{E} &= 0 & \nabla^2\mathbf{H} + \gamma^2\mathbf{H} &= 0 \\ \gamma &= \alpha + j\beta & \gamma &= \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon)}\end{aligned}$$

Como suponemos que dentro de la guía de ondas no existen fuentes de campo:

$$\sigma = 0 \implies \gamma^2 = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0 = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = -k^2$$

A.1. Guías de ondas rectangulares

Considerando la expresión del operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas cartesianas, las ecuaciones de Helmholtz resultan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} + \gamma^2\mathbf{E} &= 0 \\ \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2} + \gamma^2\mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de las ecuaciones de Maxwell del rotor para coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \implies \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} &= -j\omega\mu_0(H_x\hat{\mathbf{x}} + H_y\hat{\mathbf{y}} + H_z\hat{\mathbf{z}}) \implies \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon_0 (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_0 E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_0 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_0 E_z \end{aligned}$$

Las componentes transversales de los campos son solamente funciones de las variables x e y . Dado que los campos son armónicos y que se propagan a lo largo del eje z , sus expresiones deben incorporar el factor $e^{j\omega t - \gamma_z z}$, pero no se incluye con el fin de facilitar la escritura.

Las expresiones resultantes de analizar las ecuaciones de Maxwell del rotor quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_z E_y &= -j\omega\mu_0 H_x \\ -\gamma_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma_z H_y &= j\omega\varepsilon_0 E_x \\ -\gamma_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_0 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_0 E_z \end{aligned}$$

Trabajando las expresiones anteriores, se llega a:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ H_y &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

donde

$$k_t^2 = \gamma_z^2 + k^2$$

Las componentes longitudinales de los campos satisfacen la ecuación de Helmholtz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_t^2 E_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_t^2 H_z &= 0\end{aligned}$$

De todos los modos de propagación existentes, nos interesa el modo dominante que es el \mathbf{TE}_{10} . Para los modos \mathbf{TE} se cumple que

$$E_z = 0 \qquad H_z \neq 0$$

por lo que las expresiones de las otras componentes de los campos resultan

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{j\omega\mu_0}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= \frac{j\omega\mu_0}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= -\frac{\gamma_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_y &= -\frac{\gamma_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}\end{aligned}$$

Se determina el campo longitudinal H_z , para lo cual se aplica separación de variables.

$$\begin{aligned}H_z(x, y) &= H_z(x) H_z(y) \\ \frac{\partial^2 (H_z(x) H_z(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (H_z(x) H_z(y))}{\partial y^2} + k_t^2 H_z(x) H_z(y) &= 0 \implies \\ H_z(y) \frac{\partial^2 H_z(x)}{\partial x^2} + H_z(x) \frac{\partial^2 H_z(y)}{\partial y^2} + k_t^2 H_z(x) H_z(y) &= 0\end{aligned}$$

Dividiendo por $H_z(x) H_z(y)$:

$$\frac{1}{H_z(x)} \frac{\partial^2 H_z(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{H_z(y)} \frac{\partial^2 H_z(y)}{\partial y^2} + k_t^2 = 0$$

La ecuación de dos variables ha quedado separada en dos ecuaciones de una variable.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_z(x)}{\partial x^2} + k_x^2 H_z(x) &= 0 \implies H_z(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \\ \frac{\partial^2 H_z(y)}{\partial y^2} + k_y^2 H_z(y) &= 0 \implies H_z(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)\end{aligned}$$

donde

$$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$$

H_z puede expresarse como:

$$H_z(x, y) = H_z(x) H_z(y) = [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] [C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)]$$

Una guía de ondas rectangular impone las siguientes condiciones de contorno:

(IMAGEN)

donde z es la dirección de propagación y x, y son las direcciones transversales.

Las expresiones de las derivadas parciales de la componente longitudinal del campo resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= k_x [B \cos(k_x x) - A \sin(k_x x)] [C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)] \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] [D \cos(k_y y) - C \sin(k_y y)] \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno surgen considerando que las componentes tangenciales del campo eléctrico se anulan en las paredes metálicas de la guía de ondas, por lo que:

$$\begin{aligned} E_x(y=0) = 0 &\implies \frac{\partial H_z}{\partial y}(y=0) = 0 \\ E_x(y=b) = 0 &\implies \frac{\partial H_z}{\partial y}(y=b) = 0 \\ E_y(x=0) = 0 &\implies \frac{\partial H_z}{\partial x}(x=0) = 0 \\ E_y(x=a) = 0 &\implies \frac{\partial H_z}{\partial x}(x=a) = 0 \end{aligned}$$

Se aplican las condiciones de contorno para $\frac{\partial H_z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y}(y=0) &= k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] D = 0 \implies D = 0 \implies \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -C k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] \sin(k_y y) \\ \frac{\partial H_z}{\partial y}(y=b) &= -C k_y [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] \sin(k_y b) = 0 \implies \\ \sin(k_y b) = 0 &\implies k_y b = n\pi \implies k_y = \frac{n\pi}{b} \implies \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -C \frac{n\pi}{b} [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \end{aligned}$$

Procediendo análogamente para las condiciones de contorno de $\frac{\partial H_z}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial x} &= -A \frac{m\pi}{a} [C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)] \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \\ B &= 0 \quad k_x = \frac{m\pi}{a}\end{aligned}$$

Las expresiones de $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ y $\frac{\partial H_z}{\partial y}$ resultan

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial x} &= -AC \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -AC \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\end{aligned}$$

por lo que las expresiones de los campos, considerando $K = AC$, quedan:

$$\begin{aligned}E_x &= -j \frac{n\pi\omega\mu_0 K}{b\gamma_t^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ E_y &= j \frac{m\pi\omega\mu_0 K}{a\gamma_t^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ E_z &= 0 \\ H_x &= -\frac{m\pi\gamma_z K}{a\gamma_t^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ H_y &= -\frac{n\pi\gamma_z K}{b\gamma_t^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ H_z &= -K \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\end{aligned}$$

donde K es una constante.

Comúnmente, en las antenas de abertura y bocinas rectangulares se utiliza el siguiente sistema de referencia:

(IMAGEN)

Por lo tanto, se modifican las expresiones de los campos de acuerdo al nuevo sistema de

referencia.

$$\begin{aligned}
 E_x &= -j \frac{n\pi\omega\mu_0 K}{b\gamma_t^2} \cos \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right] \\
 E_y &= j \frac{m\pi\omega\mu_0 K}{a\gamma_t^2} \sin \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right] \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= -\frac{m\pi\gamma_z K}{a\gamma_t^2} \sin \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right] \\
 H_y &= -\frac{n\pi\gamma_z K}{b\gamma_t^2} \cos \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \sin \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right] \\
 H_z &= -K \cos \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Cada combinación de los índices m y n define un modo de propagación **TE** posible, que se designa como modo **TE_{mn}**.

Para cada modo en particular, es necesario que γ_z sea imaginario para que exista propagación, ya que en caso contrario el factor de propagación se convierte en factor de atenuación.

$$\begin{aligned}
 k_t^2 &= \gamma_z^2 + k^2 = k_x^2 + k_y^2 \implies \gamma_z^2 = k_x^2 + k_y^2 - k^2 \implies \\
 \gamma_z &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2}
 \end{aligned}$$

La frecuencia a la cual $\gamma_z = 0$ se denomina **frecuencia de corte f_c** .

$$f_c = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

A partir de la frecuencia de corte se determina la **longitud de onda de corte λ_c** .

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

Para frecuencias superiores a la frecuencia de corte se cumple que:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0 \implies \gamma_z = j\beta = \sqrt{k_t^2 - k^2} = \sqrt{-1(k^2 - k_t^2)} = j\sqrt{k^2 - k_t^2} \implies \\
 \beta &= \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{k^2 \left(1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right)} = k\sqrt{1 - \left(\frac{k_t}{k}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Considerando que

$$k_t = \frac{2\pi f_c}{c} \qquad k = \frac{2\pi f}{c}$$

la expresión de la constante de fase β resulta

$$\beta = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{2\pi f_c}{c}}{\frac{2\pi f}{c}} \right)^2} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

Se determina la **longitud de onda en la guía de ondas** λ_g a partir de β .

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}$$

Trabajando la expresión anterior, se llega a la siguiente relación:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$$

Se hallan las expresiones de la **velocidad de fase** V_f y de la **velocidad de grupo** V_g .

$$V_f = \frac{\omega}{\beta} \Rightarrow V_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}$$

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \Rightarrow V_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

Se cumple que

$$V_f V_g = c^2$$

Finalmente, se halla la expresión de la **impedancia de onda** Z_{TE} .

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \Rightarrow Z_{TE} = \frac{\eta_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}$$

donde η_o es la impedancia intrínseca del vacío.

Dado que el modo de propagación más empleado en las guías de ondas rectangulares es

el \mathbf{TE}_{10} , se determinan para dicho modo las expresiones de los campos.

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 \\
 E_y &= j \frac{\pi \omega \mu_0 K}{a \gamma_t^2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \\
 E_z &= 0 \\
 H_x &= -\frac{\pi \gamma_z K}{a \gamma_t^2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= K \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)
 \end{aligned}$$

Para el modo de propagación \mathbf{TE}_{10} , las expresión de la frecuencia de corte resulta:

$$f_c = \frac{c}{2a}$$

A.2. Guías de ondas cilíndricas

Considerando la expresión del operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de Helmholtz resultan:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \frac{1}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \gamma^2 \mathbf{E} &= 0 \\
 \frac{1}{\rho} \frac{1}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + \gamma^2 \mathbf{H} &= 0
 \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de las ecuaciones de Maxwell del rotor para coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\phi & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 (H_\rho \hat{\rho} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z}) \Rightarrow \\
 \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 H_\rho \\
 \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} &= -j\omega\mu_0 H_\phi \\
 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) &= -j\omega\mu_0 H_z
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \implies \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\phi & H_z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon_0 (E_\rho \hat{\rho} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z}) \implies$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0 E_\rho$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho} = j\omega\varepsilon_0 E_\phi$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right) = j\omega\mu_0 E_z$$

Las componentes transversales de los campos son solamente funciones de las variables ρ y ϕ . Dado que los campos son armónicos y que se propagan a lo largo del eje z , sus expresiones deben incorporar el factor $e^{j\omega t - \gamma_z z}$, pero no se incluye con el fin de facilitar la escritura.

Las expresiones resultantes de analizar las ecuaciones de Maxwell del rotor quedan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \gamma_z E_\phi &= -j\omega\mu_0 H_\rho \\ -\gamma_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial\rho} &= -j\omega\mu_0 H_\phi \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi} &= -j\omega\mu_0 H_z \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \gamma_z H_\phi &= j\omega\varepsilon_0 E_\rho \\ -\gamma_z H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial\rho} &= j\omega\varepsilon_0 E_\phi \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} &= j\omega\varepsilon_0 E_z \end{aligned}$$

Trabajando las expresiones anteriores, se llega a:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial\rho} + j\omega\mu_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \right) \\ E_\phi &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \right) \\ H_\rho &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial\rho} - j\omega\varepsilon_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \right) \\ H_\phi &= -\frac{1}{k_t^2} \left(\gamma_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} + j\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right) \end{aligned}$$

donde

$$k_t^2 = \gamma_z^2 + k^2$$

Las componentes longitudinales de los campos satisfacen la ecuación de Helmholtz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + k_t^2 E_z &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k_t^2 H_z &= 0\end{aligned}$$

De todos los modos de propagación existentes, nos interesa el modo dominante que es el **TE₁₁**. Para los modos **TE** se cumple que

$$E_z = 0 \qquad H_z \neq 0$$

por lo que las expresiones de las otras componentes de los campos resultan

$$\begin{aligned}E_\rho &= -j \frac{\omega \mu_0}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \\ E_\phi &= j \frac{\omega \mu_0}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \\ H_\rho &= -\frac{\gamma_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \\ H_\phi &= -\frac{\gamma_z}{k_t^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Se determina el campo longitudinal H_z , para lo cual se aplica separación de variables.

$$\begin{aligned}H_z(\rho, \phi) &= H_z(\rho) H_z(\phi) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial (H_z(\rho) H_z(\phi))}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (H_z(\rho) H_z(\phi))}{\partial \phi^2} + k_t^2 H_z(\rho) H_z(\phi) &= 0 \implies \\ H_z(\phi) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z(\rho)}{\partial \rho^2} \right) + H_z(\rho) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z(\phi)}{\partial \phi^2} + k_t^2 H_z(\rho) H_z(\phi) &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando por ρ^2 y dividiendo por $H_z(\rho) H_z(\phi)$:

$$\frac{1}{H_z(\rho)} \left(\rho \frac{\partial H_z(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 H_z(\rho)}{\partial \rho^2} \right) + \frac{1}{H_z(\phi)} \frac{\partial^2 H_z(\phi)}{\partial \phi^2} + (\rho k_t)^2 = 0$$

Para poder separar la ecuación de dos variables en dos de una variable, se plantea la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{H_z(\phi)} \frac{\partial^2 H_z(\phi)}{\partial \phi^2} = -n^2$$

donde n necesariamente debe ser una constante.

Se resuelve entonces la ecuación dependiente de ϕ .

$$\frac{\partial^2 H_z(\phi)}{\partial \phi^2} + n^2 H_z(\phi) = 0 \implies H_z(\phi) = A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_z(\rho)} \left(\rho \frac{\partial H_z(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 H_z(\rho)}{\partial \rho^2} \right) - n^2 + (\rho k_t)^2 &= 0 \implies \\ \rho^2 \frac{\partial^2 H_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z(\rho)}{\partial \rho} + \left[(\rho k_t)^2 - n^2 \right] H_z(\rho) &= 0 \end{aligned}$$

La expresión resultante es la ecuación diferencial de Bessel, cuya solución es:

$$H_z(\rho) = C J_n(k_t \rho) + D Y_n(k_t \rho)$$

donde

J_n = Función de Bessel de primera especie de orden n .

Y_n = Función de Bessel de segunda especie de orden n .

H_z puede expresarse como:

$$H_z(\rho, \phi) = H_z(\rho) H_z(\phi) = [A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi)] [C J_n(k_t \rho) + D Y_n(k_t \rho)]$$

Debido a la simetría axial, es posible para cada valor dado de n eliminar una de las funciones trigonométricas, por lo que:

$$B = 0 \implies H_z(\phi) = A \cos(n\phi)$$

Y_n no está definida para $\rho = 0$. Como en $\rho = 0$ el campo debe ser finito:

$$D = 0 \implies H_z(\rho) = C J_n(k_t \rho)$$

La expresión de H_z queda reducida a:

$$H_z(\rho, \phi) = H_z(\rho) H_z(\phi) = AC \cos(n\phi) J_n(k_t \rho)$$

Una guía de ondas cilíndrica impone las siguientes condiciones de contorno:

(IMAGEN)

donde z es la dirección de propagación y ρ, ϕ son las direcciones transversales.

Las expresiones de las derivadas parciales de la componente longitudinal del campo resultan

$$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = ACk_t \cos(n\phi) J_n'(k_t \rho)$$

Las condiciones de contorno surgen considerando que las componentes tangenciales del campo eléctrico se anulan en las paredes metálicas de la guía de ondas, por lo que:

$$E_\phi(\rho = a) = 0 \implies \frac{\partial H_z}{\partial \rho}(\rho = a) = 0$$

Se aplican las condiciones de contorno para $\frac{\partial H_z}{\partial \rho}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}(\rho = a) &= ACk_t \cos(n\phi) J_n'(k_t a) = 0 \implies \\ J_n'(k_t a) &= 0 \implies k_t = \frac{\chi'_{np}}{a} \implies \\ \frac{\partial H_z}{\partial \rho} &= AC \frac{\chi'_{np}}{a} \cos(n\phi) J_n'\left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho\right) \end{aligned}$$

donde χ'_{np} son las raíces de las derivadas de las funciones de Bessel.

$\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
1	3,832	1,841	3,054	4,201	5,317	6,416
2	7,016	5,331	6,706	8,015	9,282	10,520
3	10,173	8,536	9,969	11,346	12,682	13,987
4	13,324	11,706	13,170	14,586	15,964	17,313

La expresión de $\frac{\partial H_z}{\partial \phi}$ resulta

$$\frac{\partial H_z}{\partial \phi} = -ACn \sin(n\phi) J_n\left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho\right)$$

por lo que las expresiones de los campos, considerando $K = AC$, quedan:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j \frac{n\omega\mu_0 K}{\rho\gamma_t^2} \sin(n\phi) J_n \left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho \right) \\ E_\phi &= -j \frac{\chi'_{np}\omega\mu_0 K}{a\gamma_t^2} \cos(n\phi) J_n' \left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho \right) \\ E_z &= 0 \\ H_\rho &= \frac{\chi'_{np}\gamma_z K}{a\gamma_t^2} \cos(n\phi) J_n' \left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho \right) \\ H_\phi &= -\frac{n\gamma_z K}{\rho\gamma_t^2} \sin(n\phi) J_n \left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho \right) \\ H_z &= K \cos(n\phi) J_n \left(\frac{\chi'_{np}}{a} \rho \right) \end{aligned}$$

donde K es una constante.

Cada combinación de los índices n y p define un modo de propagación **TE** posible, que se designa como modo **TE_{np}**.

Para cada modo en particular, es necesario que γ_z sea imaginario para que exista propagación, ya que en caso contrario el factor de propagación se convierte en factor de atenuación.

$$k_t^2 = \gamma_z^2 + k^2 \implies \gamma_z^2 = k_t^2 - k^2 \implies \gamma_z = \sqrt{k_t^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{\chi'_{np}}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2}$$

La frecuencia a la cual $\gamma_z = 0$ se denomina **frecuencia de corte f_c** .

$$f_c = \frac{c}{2\pi} \frac{\chi'_{np}}{a}$$

A partir de la frecuencia de corte se determina la **longitud de onda de corte λ_c** .

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{\chi'_{np}}$$

Las expresiones de la **longitud de onda en la guía de ondas λ_g** , la **velocidad de fase V_f** , la **velocidad de grupo V_g** y la **impedancia de onda Z_{TE}** son las mismas que para la guía de ondas rectangular.

Dado que el modo de propagación más empleado en las guías de ondas cilíndricas es

el \mathbf{TE}_{11} , se determinan para dicho modo las expresiones de los campos.

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -j \frac{\omega \mu_0 K}{\rho \gamma_t^2} \sin(\phi) J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho \right) \\
 E_\phi &= -j \frac{\chi'_{np} \omega \mu_0 K}{a \gamma_t^2} \cos(\phi) J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho \right) \\
 E_z &= 0 \\
 H_\rho &= \frac{\chi'_{np} \gamma_z K}{a \gamma_t^2} \cos(\phi) J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho \right) \\
 H_\phi &= -\frac{\gamma_z K}{\rho \gamma_t^2} \sin(\phi) J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho \right) \\
 H_z &= K \cos(\phi) J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho \right)
 \end{aligned}$$

Para el modo de propagación \mathbf{TE}_{11} , la expresión de la frecuencia de corte resulta:

$$f_c = \frac{c}{2\pi} \frac{\chi'_{11}}{a}$$

Apéndice B

Expresiones de los campos radiados por aberturas rectangulares

B.1. Abertura rectangular con plano conductor infinito y excitación con campo uniforme

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = 0 \quad (B-1)$$

$$N_\phi = 0 \quad (B-2)$$

$$L_\theta = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [M_x \cos \theta \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (B-3)$$

$$L_\phi = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [-M_x \sin \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (B-4)$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_y E_0 & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (B-5)$$

$$\mathbf{H}_a = 0 \quad \forall x', y' \quad (B-6)$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_x 2E_0 & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

$$\mathbf{J}_s = 0 \quad \forall x', y' \quad (\text{B-8})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = 2E_0 \cos \theta \cos \phi \int_{-a/2}^{+a/2} e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-9})$$

Ambas integrales pueden resolverse a partir de la siguiente integral definida:

$$\int_{-c/2}^{+c/2} e^{j\alpha z} dz = c \left[\frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} c \right)}{\frac{\alpha}{2} c} \right] \quad (\text{B-10})$$

La expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = 2abE_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-11})$$

donde

$$X = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B-12})$$

$$Y = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B-13})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -2E_0 \sin \phi \int_{-a/2}^{+a/2} e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-14})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de L_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = -2abE_0 \left[\sin \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-15})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (\text{B-16})$$

$$E_\theta \simeq j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\sin \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-17})$$

$$E_\phi \simeq j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\sin \theta \cos \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-18})$$

$$H_r \simeq 0 \quad (\text{B-19})$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (\text{B-20})$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (\text{B-21})$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{B-22})$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B-23})$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{4\pi^2 r^2} \sin^2 \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-24})$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{4\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-25})$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{8\pi^2 \eta r^2} (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B-26})$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{8\pi^2 \eta} \quad (\text{B-27})$$

$$F(\theta, \phi) = (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-28})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

La directividad se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{(\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y}\right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y}\right)^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (\text{B-29})$$

B.2. Abertura rectangular con plano conductor infinito y excitación con campo sinusoidal en modo dominante

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = 0 \quad (\text{B-30})$$

$$N_\phi = 0 \quad (\text{B-31})$$

$$L_\theta = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [M_x \cos \theta \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-32})$$

$$L_\phi = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [-M_x \sin \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-33})$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_y E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-34})$$

$$\mathbf{H}_a = 0 \quad \forall x', y' \quad (\text{B-35})$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_x 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-36})$$

$$\mathbf{J}_s = 0 \quad \forall x', y' \quad (\text{B-37})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = 2E_0 \cos \theta \cos \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-38})$$

Ambas integrales pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_{-c/2}^{+c/2} e^{j\alpha z} dz = c \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}c\right)}{\frac{\alpha}{2}c} \right] \quad (\text{B-39})$$

$$\int_{-c/2}^{+c/2} \cos(\beta z) e^{j\alpha z} dz = \frac{c}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}c\right)}{\frac{\alpha+\beta}{2}c} + \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}c\right)}{\frac{\alpha-\beta}{2}c} \right] \quad (\text{B-40})$$

La expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = -\pi ab E_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-41})$$

donde

$$X = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B-42})$$

$$Y = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B-43})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -2E_0 \sin \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-44})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de L_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = \pi ab E_0 \left[\sin \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-45})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (\text{B-46})$$

$$E_\theta \simeq -j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{4r} \left[\sin \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-47})$$

$$E_\phi \simeq -j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{4r} \left[\sin \theta \cos \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-48})$$

$$H_r \simeq 0 \quad (\text{B-49})$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (\text{B-50})$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (\text{B-51})$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{B-52})$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B-53})$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{16r^2} \sin^2 \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-54})$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{16r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-55})$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{32\eta r^2} (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B-56})$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{32\eta} \quad (\text{B-57})$$

$$F(\theta, \phi) = (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-58})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

La directividad se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{(\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (\text{B-59})$$

B.3. Guía de ondas rectangular abierta

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [J_y \cos \theta \sin \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-60})$$

$$N_\phi = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [J_y \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-61})$$

$$L_\theta = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [M_x \cos \theta \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-62})$$

$$L_\phi = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [-M_x \sin \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-63})$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_y E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-64})$$

$$\mathbf{H}_a = \begin{cases} -\hat{\mathbf{a}}_x \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-65})$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_x E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-66})$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_a = -\hat{\mathbf{a}}_y \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-67})$$

La componente N_θ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$N_\theta = -\frac{E_0}{\eta} \cos \theta \sin \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-68})$$

Ambas integrales pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_{-c/2}^{+c/2} e^{j\alpha z} dz = c \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}c\right)}{\frac{\alpha}{2}c} \right] \quad (\text{B-69})$$

$$\int_{-c/2}^{+c/2} \cos(\beta z) e^{j\alpha z} dz = \frac{c}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}c\right)}{\frac{\alpha+\beta}{2}c} + \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}c\right)}{\frac{\alpha-\beta}{2}c} \right] \quad (\text{B-70})$$

La expresión de N_θ queda reducida a

$$N_\theta = \pi ab \frac{E_0}{2\eta} \left[\cos \theta \sin \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-71})$$

donde

$$X = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B-72})$$

$$Y = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B-73})$$

La componente N_ϕ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$N_\phi = -\frac{E_0}{\eta} \cos \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-74})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de N_ϕ queda reducida a

$$N_\phi = \pi ab \frac{E_0}{2\eta} \left[\cos \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-75})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = E_0 \cos \theta \cos \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-76})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = -\pi ab \frac{E_0}{2} \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-77})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -E_0 \sin \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-78})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = \pi ab \frac{E_0}{2} \left[\sin \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-79})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (B-80)$$

$$E_\theta \simeq -j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{4r} \left[\frac{\sin \phi (1 + \cos \theta)}{2} \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (B-81)$$

$$E_\phi \simeq -j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{4r} \left[\frac{\cos \phi (1 + \cos \theta)}{2} \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (B-82)$$

$$H_r \simeq 0 \quad (B-83)$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (B-84)$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (B-85)$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (B-86)$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (B-87)$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{16r^2} \left(\frac{\sin \phi (1 + \cos \theta)}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (B-88)$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{16r^2} \left(\frac{\cos \phi (1 + \cos \theta)}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (B-89)$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{32\eta r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (B-90)$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{32\eta} \quad (\text{B-91})$$

$$F(\theta, \phi) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-92})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

La directividad se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{\left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (\text{B-93})$$

B.4. Bocina rectangular sectorial E

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [J_y \cos \theta \sin \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-94})$$

$$N_\phi = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [J_y \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-95})$$

$$L_\theta = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [M_x \cos \theta \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-96})$$

$$L_\phi = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} [-M_x \sin \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (\text{B-97})$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_y E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-98})$$

$$\mathbf{H}_a = \begin{cases} -\hat{\mathbf{a}}_x \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-99})$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_x E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-100})$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_a = -\hat{\mathbf{a}}_y \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) & \text{si } \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq +a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq +b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{B-101})$$

La componente N_θ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$N_\theta = -\frac{E_0}{\eta} \cos \theta \sin \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-102})$$

Ambas integrales pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_{-c/2}^{+c/2} e^{j\alpha z} dz = c \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}c\right)}{\frac{\alpha}{2}c} \right] \quad (\text{B-103})$$

$$\int_{-c/2}^{+c/2} \cos(\beta z) e^{j\alpha z} dz = \frac{c}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}c\right)}{\frac{\alpha+\beta}{2}c} + \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}c\right)}{\frac{\alpha-\beta}{2}c} \right] \quad (\text{B-104})$$

La expresión de N_θ queda reducida a

$$N_\theta = \pi ab \frac{E_0}{2\eta} \left[\cos \theta \sin \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-105})$$

donde

$$X = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B-106})$$

$$Y = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \quad (\text{B-107})$$

La componente N_ϕ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$N_\phi = -\frac{E_0}{\eta} \cos \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-108})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de N_ϕ queda reducida a

$$N_\phi = \pi ab \frac{E_0}{2\eta} \left[\cos \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-109})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = E_0 \cos \theta \cos \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-110})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = -\pi ab \frac{E_0}{2} \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-111})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -E_0 \sin \phi \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{jkx' \sin \theta \cos \phi} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{jky' \sin \theta \sin \phi} dy' \quad (\text{B-112})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = \pi ab \frac{E_0}{2} \left[\sin \phi \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-113})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (\text{B-114})$$

$$E_\theta \simeq -j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{4r} \left[\frac{\sin \phi (1 + \cos \theta)}{2} \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-115})$$

$$E_\phi \simeq -j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{4r} \left[\frac{\cos \phi (1 + \cos \theta)}{2} \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad (\text{B-116})$$

$$H_r \simeq 0 \quad (\text{B-117})$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (\text{B-118})$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (\text{B-119})$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{B-120})$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B-121})$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{16r^2} \left(\frac{\sin \phi (1 + \cos \theta)}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-122})$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{16r^2} \left(\frac{\cos \phi (1 + \cos \theta)}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-123})$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{32\eta r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{B-124})$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 b^2 k^2 |E_0|^2}{32\eta} \quad (\text{B-125})$$

$$F(\theta, \phi) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \quad (\text{B-126})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

La directividad se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{\left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos X}{X^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} \right)^2 \left(\frac{\sin Y}{Y} \right)^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (\text{B-127})$$

Apéndice C

Expresiones de los campos radiados por aberturas circulares

C.1. Abertura circular con plano conductor infinito y excitación con campo uniforme

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_{\theta} = 0 \quad (C-1)$$

$$N_{\phi} = 0 \quad (C-2)$$

$$L_{\theta} = \int_0^a \int_0^{2\pi} [M_{\rho} \cos \theta \cos (\phi - \phi') + M_{\phi} \cos \theta \sin (\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (C-3)$$

$$L_{\phi} = \int_0^a \int_0^{2\pi} [-M_{\rho} \sin (\phi - \phi') + M_{\phi} \cos (\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (C-4)$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_y E_0 & \text{si } \rho' \leq +a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (C-5)$$

$$\mathbf{H}_a = 0 \quad \forall x', y' \quad (C-6)$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_x 2E_0 & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-7})$$

$$\mathbf{J}_s = 0 \quad \forall x', y' \quad (\text{C-8})$$

Considerando que

$$M_\rho = M_x \cos \phi' \quad (\text{C-9})$$

$$M_\phi = -M_x \sin \phi' \quad (\text{C-10})$$

la componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = 2E_0 \cos \theta \cos \phi \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi-\phi')} d\phi' \quad (\text{C-11})$$

La segunda integral puede resolverse a partir de la siguiente integral definida:

$$\int_0^{2\pi} e^{jz \cos(\phi-\phi')} d\phi' = 2\pi J_0(z) \quad (\text{C-12})$$

por lo que la expresión de L_θ puede escribirse como

$$L_\theta = 4\pi E_0 \cos \theta \cos \phi \int_0^a \rho' J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \quad (\text{C-13})$$

donde $J_0(z)$ es la Función de Bessel de primera especie y orden cero.

Realizando el siguiente reemplazo de variables:

$$t = k\rho' \sin \theta \implies dt = k \sin \theta d\rho' \quad (\text{C-14})$$

L_θ se expresa como

$$L_\theta = 4\pi E_0 \frac{\cos \theta \cos \phi}{(k \sin \theta)^2} \int_0^{ka \sin \theta} t J_0(t) dt \quad (\text{C-15})$$

Se utiliza la siguiente propiedad:

$$\int_0^\beta z J_0(z) dz = \beta J_1(\beta) \quad (\text{C-16})$$

donde $J_1(z)$ es la Función de Bessel de primera especie y orden uno.

La expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = 4\pi a^2 E_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-17})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -2E_0 \sin \phi \int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi-\phi')} d\phi' \quad (\text{C-18})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de L_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = -4\pi a^2 E_0 \left[\sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-19})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (\text{C-20})$$

$$E_\theta \simeq j \frac{a^2 k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-21})$$

$$E_\phi \simeq j \frac{a^2 k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\sin \theta \cos \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-22})$$

$$H_r \simeq 0 \quad (\text{C-23})$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (\text{C-24})$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (\text{C-25})$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{C-26})$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C-27})$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^4 k^2 |E_0|^2}{r^2} \sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{C-28})$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^4 k^2 |E_0|^2}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{C-29})$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^4 k^2 |E_0|^2}{2\eta r^2} (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C-30})$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^4 k^2 |E_0|^2}{2\eta} \quad (\text{C-31})$$

$$F(\theta, \phi) = (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{C-32})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

La directividad se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{(\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (\text{C-33})$$

C.2. Abertura circular con plano conductor infinito y excitación con campo sinusoidal en modo dominante

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = 0 \quad (\text{C-34})$$

$$N_\phi = 0 \quad (\text{C-35})$$

$$L_\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} [M_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + M_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-36})$$

$$L_\phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} [-M_\rho \sin(\phi - \phi') + M_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-37})$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_\rho E_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-38})$$

$$\mathbf{H}_a = 0 \quad \forall x', y' \quad (\text{C-39})$$

$$E_\rho = \frac{E_0}{\rho'} J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \sin \phi' \quad (\text{C-40})$$

$$E_\phi = E_0 J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \cos \phi' \quad (\text{C-41})$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_\rho 2E_\phi - \hat{\mathbf{a}}_\phi 2E_\rho & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-42})$$

$$\mathbf{J}_s = 0 \quad \forall x', y' \quad (\text{C-43})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = 2E_0 \cos \theta \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ - \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad (\text{C-44})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \cos \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-45})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = -\pi \cos \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-46})$$

Empleando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-47})$$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-48})$$

se llega a las expresiones

$$J_1'(z) + \frac{J_1(z)}{z} = J_0(z) \quad (\text{C-49})$$

$$J_1'(z) - \frac{J_1(z)}{z} = -J_2(z) \quad (\text{C-50})$$

por lo que la expresión de L_θ puede escribirse como

$$\begin{aligned} L_\theta = 2\pi \frac{\chi'_{11}}{a} E_0 \cos \theta \cos \phi & \left[\int_0^a \rho' J_0 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right. \\ & \left. + \int_0^a \rho' J_2 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_2(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right] \end{aligned} \quad (\text{C-51})$$

Se utiliza la fórmula integral de Lommel.

$$\int_0^z z J_n(\alpha z) J_n(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [J_n(\alpha z) J_n'(\beta z) - J_n'(\alpha z) J_n(\beta z)] \quad (\text{C-52})$$

$$\int_0^a \rho' J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_0(\beta a) J_1(\alpha a) - \beta J_0(\alpha a) J_1(\beta a)] \quad (\text{C-53})$$

$$\int_0^a \rho' J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_1(\beta a) J_2(\alpha a) - \alpha J_1(\alpha a) J_2(\beta a)] \quad (\text{C-54})$$

Sumando ambas integrales, se obtiene

$$\int_0^a \rho' [J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') + J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho')] d\rho' = \frac{2\alpha a}{\alpha^2 - \beta^2} J_1(\alpha a) J_1'(\beta a) \quad (\text{C-55})$$

La expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = 4\pi a J_1(\chi'_{11}) E_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-56})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -2E_0 \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ + \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad (\text{C-57})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-58})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-59})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de L_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = -4\pi a J_1(\chi'_{11}) E_0 \left[\sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-60})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (\text{C-61})$$

$$E_\theta \simeq j \frac{a J_1(\chi'_{11}) k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-62})$$

$$E_\phi \simeq j \frac{a J_1(\chi'_{11}) k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-63})$$

$$H_r \simeq 0 \quad (\text{C-64})$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (\text{C-65})$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (\text{C-66})$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{C-67})$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C-68})$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{r^2} \sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{C-69})$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{r^2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \quad (\text{C-70})$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{2\eta r^2} \left[\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C-71})$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{2\eta} \quad (\text{C-72})$$

$$F(\theta, \phi) = \sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \quad (\text{C-73})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

La directividad se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi} \quad (\text{C-74})$$

C.3. Guía de ondas cilíndrica abierta

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} [J_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + J_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-75})$$

$$N_\phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} [-J_\rho \sin(\phi - \phi') + J_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-76})$$

$$L_\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} [M_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + M_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-77})$$

$$L_\phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} [-M_\rho \sin(\phi - \phi') + M_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-78})$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_\rho E_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-79})$$

$$\mathbf{H}_a = \begin{cases} -\hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{E_\phi}{\eta} + \hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{E_\rho}{\eta} & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-80})$$

$$E_\rho = \frac{E_0}{\rho'} J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \sin \phi' \quad (\text{C-81})$$

$$E_\phi = E_0 J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \cos \phi' \quad (\text{C-82})$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_\rho E_\phi - \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\rho & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-83})$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_a = -\hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{E_\phi}{\eta} - \hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{E_\rho}{\eta} & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-84})$$

La componente N_θ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$\begin{aligned} N_\theta = & -\frac{E_0}{\eta} \cos \theta \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ & + \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \end{aligned} \quad (\text{C-85})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-86})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-87})$$

Empleando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-88})$$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-89})$$

se llega a las expresiones

$$J_1'(z) + \frac{J_1(z)}{z} = J_0(z) \quad (\text{C-90})$$

$$J_1'(z) - \frac{J_1(z)}{z} = -J_2(z) \quad (\text{C-91})$$

por lo que la expresión de N_θ puede escribirse como

$$\begin{aligned} N_\theta = & -\pi \frac{\chi'_{11}}{a} \frac{E_0}{\eta} \cos \theta \sin \phi \left[\int_0^a \rho' J_0 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right. \\ & \left. - \int_0^a \rho' J_2 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_2(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right] \end{aligned} \quad (\text{C-92})$$

Se utiliza la fórmula integral de Lommel.

$$\int_0^z z J_n(\alpha z) J_n(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [J_n(\alpha z) J_n'(\beta z) - J_n'(\alpha z) J_n(\beta z)] \quad (\text{C-93})$$

$$\int_0^a \rho' J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_0(\beta a) J_1(\alpha a) - \beta J_0(\alpha a) J_1(\beta a)] \quad (\text{C-94})$$

$$\int_0^a \rho' J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_1(\beta a) J_2(\alpha a) - \alpha J_1(\alpha a) J_2(\beta a)] \quad (\text{C-95})$$

Restando ambas integrales, se obtiene

$$\int_0^a \rho' [J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') - J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho')] d\rho' = \frac{2}{\alpha \beta} J_1(\alpha a) J_1(\beta a) \quad (\text{C-96})$$

La expresión de N_θ queda reducida a

$$N_\theta = -2\pi a J_1(\chi'_{11}) \frac{E_0}{\eta} \cos \theta \sin \phi \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (\text{C-97})$$

La componente N_ϕ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$N_\phi = \frac{E_0}{\eta} \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' - \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad (\text{C-98})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \cos \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-99})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = -\pi \cos \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-100})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de N_ϕ queda reducida a

$$N_\phi = -2\pi a J_1(\chi'_{11}) \frac{E_0}{\eta} \left[\cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-101})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\theta = E_0 \cos \theta \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' - \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad (\text{C-102})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \cos \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-103})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = -\pi \cos \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-104})$$

Empleando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-105})$$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-106})$$

se llega a las expresiones

$$J_1'(z) + \frac{J_1(z)}{z} = J_0(z) \quad (\text{C-107})$$

$$J_1'(z) - \frac{J_1(z)}{z} = -J_2(z) \quad (\text{C-108})$$

por lo que la expresión de L_θ puede escribirse como

$$L_\theta = \pi \frac{\chi'_{11}}{a} E_0 \cos \theta \cos \phi \left[\int_0^a \rho' J_0 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right. \\ \left. + \int_0^a \rho' J_2 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_2(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right] \quad (\text{C-109})$$

Se utiliza la fórmula integral de Lommel.

$$\int_0^z z J_n(\alpha z) J_n(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [J_n(\alpha z) J_n'(\beta z) - J_n'(\alpha z) J_n(\beta z)] \quad (\text{C-110})$$

$$\int_0^a \rho' J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_0(\beta a) J_1(\alpha a) - \beta J_0(\alpha a) J_1(\beta a)] \quad (\text{C-111})$$

$$\int_0^a \rho' J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_1(\beta a) J_2(\alpha a) - \alpha J_1(\alpha a) J_2(\beta a)] \quad (\text{C-112})$$

Sumando ambas integrales, se obtiene

$$\int_0^a \rho' [J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') + J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho')] d\rho' = \frac{2\alpha a}{\alpha^2 - \beta^2} J_1(\alpha a) J_1'(\beta a) \quad (\text{C-113})$$

La expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = 2\pi a J_1(\chi'_{11}) E_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-114})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$L_\phi = -E_0 \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ + \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad (\text{C-115})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-116})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-117})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de L_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = -2\pi a J_1(\chi'_{11}) E_0 \left[\sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-118})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (\text{C-119})$$

$$E_\theta \simeq j \frac{a J_1(\chi'_{11}) k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-120})$$

$$E_\phi \simeq j \frac{a J_1(\chi'_{11}) k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-121})$$

$$H_r \simeq 0 \quad (\text{C-122})$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (\text{C-123})$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (\text{C-124})$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (\text{C-125})$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C-126})$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad (\text{C-127})$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \quad (\text{C-128})$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{2\eta r^2} \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^2 \left[\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{C-129})$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{2\eta} \quad (\text{C-130})$$

$$F(\theta, \phi) = \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^2 \left[\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \right] \quad (\text{C-131})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.

C.4. Bocina cónica

Los campos radiados por la abertura pueden determinarse a partir de las ecuaciones, por lo que:

$$N_\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} [J_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + J_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-132})$$

$$N_\phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} [-J_\rho \sin(\phi - \phi') + J_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-133})$$

$$L_\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} [M_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + M_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-134})$$

$$L_\phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} [-M_\rho \sin(\phi - \phi') + M_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} \rho' d\rho' d\phi' \quad (\text{C-135})$$

Los campos sobre la abertura están dados por

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_\rho E_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-136})$$

$$\mathbf{H}_a = \begin{cases} -\hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{E_\phi}{\eta} + \hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{E_\rho}{\eta} & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-137})$$

$$E_\rho = \frac{E_0}{\rho'} J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \sin \phi' \quad (\text{C-138})$$

$$E_\phi = E_0 J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \cos \phi' \quad (\text{C-139})$$

por lo que las densidades de corriente se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a = +\hat{\mathbf{a}}_\rho E_\phi - \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\rho & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-140})$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_a = -\hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{E_\phi}{\eta} - \hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{E_\rho}{\eta} & \text{si } \rho' \leq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{C-141})$$

La componente N_θ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$\begin{aligned} N_\theta = & -\frac{E_0}{\eta} \cos \theta \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ & + \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \end{aligned} \quad (\text{C-142})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-143})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-144})$$

Empleando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-145})$$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-146})$$

se llega a las expresiones

$$J_1'(z) + \frac{J_1(z)}{z} = J_0(z) \quad (\text{C-147})$$

$$J_1'(z) - \frac{J_1(z)}{z} = -J_2(z) \quad (\text{C-148})$$

por lo que la expresión de N_θ puede escribirse como

$$N_\theta = -\pi \frac{\chi'_{11}}{a} \frac{E_0}{\eta} \cos \theta \sin \phi \left[\int_0^a \rho' J_0 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right. \\ \left. - \int_0^a \rho' J_2 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_2(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right] \quad (\text{C-149})$$

Se utiliza la fórmula integral de Lommel.

$$\int_0^z z J_n(\alpha z) J_n(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [J_n(\alpha z) J_n'(\beta z) - J_n'(\alpha z) J_n(\beta z)] \quad (\text{C-150})$$

$$\int_0^a \rho' J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_0(\beta a) J_1(\alpha a) - \beta J_0(\alpha a) J_1(\beta a)] \quad (\text{C-151})$$

$$\int_0^a \rho' J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_1(\beta a) J_2(\alpha a) - \alpha J_1(\alpha a) J_2(\beta a)] \quad (\text{C-152})$$

Restando ambas integrales, se obtiene

$$\int_0^a \rho' [J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') - J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho')] d\rho' = \frac{2}{\alpha \beta} J_1(\alpha a) J_1(\beta a) \quad (\text{C-153})$$

La expresión de N_θ queda reducida a

$$N_\theta = -2\pi a J_1(\chi'_{11}) \frac{E_0}{\eta} \cos \theta \sin \phi \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (\text{C-154})$$

La componente N_ϕ del potencial vectorial eléctrico \mathbf{A} puede expresarse como:

$$N_\phi = \frac{E_0}{\eta} \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ - \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad (\text{C-155})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \cos \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-156})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = -\pi \cos \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-157})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de N_θ , la expresión de N_ϕ queda reducida a

$$N_\phi = -2\pi a J_1(\chi'_{11}) \frac{E_0}{\eta} \left[\cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-158})$$

La componente L_θ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$\begin{aligned} L_\theta = E_0 \cos \theta \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) & \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ - \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) & \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \end{aligned} \quad (\text{C-159})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \cos \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-160})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \sin (\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = -\pi \cos \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-161})$$

Empleando las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-162})$$

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\text{C-163})$$

se llega a las expresiones

$$J_1'(z) + \frac{J_1(z)}{z} = J_0(z) \quad (\text{C-164})$$

$$J_1'(z) - \frac{J_1(z)}{z} = -J_2(z) \quad (\text{C-165})$$

por lo que la expresión de L_θ puede escribirse como

$$\begin{aligned} L_\theta = \pi \frac{\chi'_{11}}{a} E_0 \cos \theta \cos \phi & \left[\int_0^a \rho' J_0 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_0(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right. \\ & \left. + \int_0^a \rho' J_2 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) J_2(k\rho' \sin \theta) d\rho' \right] \end{aligned} \quad (\text{C-166})$$

Se utiliza la fórmula integral de Lommel.

$$\int_0^z z J_n(\alpha z) J_n(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [J_n(\alpha z) J_n'(\beta z) - J_n'(\alpha z) J_n(\beta z)] \quad (\text{C-167})$$

$$\int_0^a \rho' J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_0(\beta a) J_1(\alpha a) - \beta J_0(\alpha a) J_1(\beta a)] \quad (\text{C-168})$$

$$\int_0^a \rho' J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho') d\rho' = \frac{a}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_1(\beta a) J_2(\alpha a) - \alpha J_1(\alpha a) J_2(\beta a)] \quad (\text{C-169})$$

Sumando ambas integrales, se obtiene

$$\int_0^a \rho' [J_0(\alpha \rho') J_0(\beta \rho') + J_2(\alpha \rho') J_2(\beta \rho')] d\rho' = \frac{2\alpha a}{\alpha^2 - \beta^2} J_1(\alpha a) J_1'(\beta a) \quad (\text{C-170})$$

La expresión de L_θ queda reducida a

$$L_\theta = 2\pi a J_1(\chi'_{11}) E_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (\text{C-171})$$

La componente L_ϕ del potencial vectorial magnético \mathbf{F} puede expresarse como:

$$\begin{aligned} L_\phi = & -E_0 \int_0^a \rho' J_1' \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \\ & + \int_0^a J_1 \left(\frac{\chi'_{11}}{a} \rho' \right) \left[\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jk\rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' \right] d\rho' \end{aligned} \quad (\text{C-172})$$

Las integrales encerradas entre corchetes pueden resolverse a partir de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \sin(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) + J_2(z)] \quad (\text{C-173})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos(\phi - \phi') e^{jkz \cos(\phi - \phi')} d\phi' = \pi \sin \phi [J_0(z) - J_2(z)] \quad (\text{C-174})$$

Procediendo de la misma forma que en la deducción de la expresión de L_θ , la expresión de L_ϕ queda reducida a

$$L_\phi = -2\pi a J_1(\chi'_{11}) E_0 \left[\sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (\text{C-175})$$

Introduciendo las expresiones ... en las expresiones ..., los campos radiados por la abertura pueden escribirse como

$$E_r \simeq 0 \quad (C-176)$$

$$E_\theta \simeq j \frac{a J_1(\chi'_{11}) k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right) \right] \quad (C-177)$$

$$E_\phi \simeq j \frac{a J_1(\chi'_{11}) k E_0 e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right) \right] \quad (C-178)$$

$$H_r \simeq 0 \quad (C-179)$$

$$H_\theta \simeq -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (C-180)$$

$$H_\phi \simeq +\frac{E_\theta}{\eta} \quad (C-181)$$

Se determina la densidad de potencia media a partir del valor medio del vector de Poynting.

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \Re \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ 0 & E_\theta & E_\phi \\ 0 & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Re [(E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*) \hat{\mathbf{r}}] \quad (C-182)$$

Debido a que para observaciones de campo lejano los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están relacionados por la impedancia intrínseca η :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta} + E_\phi \frac{E_\phi^*}{\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = \left(\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{2\eta} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (C-183)$$

$$|E_\theta|^2 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad (C-184)$$

$$|E_\phi|^2 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \quad (C-185)$$

La expresión del valor medio del vector de Poynting queda

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{2\eta r^2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 & \left[\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \right. \\ & \left. + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (C-186)$$

Dado que la intensidad de radiación se expresa como $U = r^2 \langle \mathbf{N} \rangle = B_0 F(\theta, \phi)$

$$B_0 = \frac{a^2 [J_1(\chi'_{11})]^2 k^2 |E_0|^2}{2\eta} \quad (\text{C-187})$$

$$F(\theta, \phi) = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \left[\sin^2 \phi \left(\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi \left(\frac{J_1'(ka \sin \theta)}{1 - \left(\frac{ka \sin \theta}{\chi'_{11}} \right)^2} \right)^2 \right] \quad (\text{C-188})$$

donde B_0 es una constante y $F(\theta, \phi)$ la figura de radiación.