



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

# Estudio de estructuras de banda prohibida electromagnética (EBG) para la reducción de acoplamiento mutuo entre antenas microstrip

Tesista:

Federico Luna

[fluna@fi.uba.ar](mailto:fluna@fi.uba.ar)

Director:

Dr. Ing. Walter Gustavo Fano

[gfano@fi.uba.ar](mailto:gfano@fi.uba.ar)

Co-directora:

Mg. Ing. Silvina Boggi

[silvinaboggi@gmail.com](mailto:silvinaboggi@gmail.com)

## TESIS DE GRADO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica



26 de Octubre de 2018



*«Study hard what interests you the most in the most undisciplined, irreverent and original manner possible.»*

Richard Feynman



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ingeniería  
Departamento de Electrónica

por Federico Luna

## *Resumen*

El objetivo de este trabajo es el estudio teórico y numérico del funcionamiento de las estructuras EBG (*Electromagnetic Bandgap*), un subgrupo de metamateriales con capacidad de bloquear la propagación de ondas de superficie, a fin de aplicarlas a la disminución del acoplamiento mutuo entre antenas que comparten sustrato.

En primer lugar se estudia el fenómeno de aparición de ondas de superficie en sustratos recubiertos por un plano de tierra, a fin de conocer los parámetros que gobiernan su comportamiento. Se desarrollan conceptos provenientes de la óptica para la explicación del funcionamiento de las estructuras, y se utilizan las técnicas desarrolladas para cristales fotónicos para lograr un acercamiento teórico al problema en microondas. Además, se utilizan también herramientas propias del electromagnetismo clásico para la descripción de estructuras periódicas infinitas, así como para la obtención de diagramas de dispersión. Debido a la dificultad del problema analítico, se hace uso de numerosos métodos de simulación en el dominio del tiempo y la frecuencia, provistos por el software de simulación elegido.

Considerando que el tiempo de simulación no resulta despreciable, se propone un modelo circuital de parámetros concentrados, con respuesta similar a una estructura simulada utilizando técnicas de onda completa, que permite un análisis rápido y conceptual del comportamiento. Además, se propone, implementa y evalúa un método de simulación bidimensional en el dominio del tiempo, basado en la geometría de las estructuras periódicas propuestas.

Finalmente, se observa el comportamiento de conjuntos de antenas monopolo y *microstrip* que comparten sustrato frente a la inserción de geometrías EBG.

## *Agradecimientos*

A mis directores de tesis, el Dr. Ing. Walter Gustavo Fano y Mg. Ing. Silvina Boggi, por brindarme la posibilidad de trabajar con ellos, por la dedicación y por la paciencia que me tuvieron durante el desarrollo de este trabajo.

A Franco Spadavecchia, Santiago Caracciolo, Iván Pollitzer, Miguel Ángel Puchulu y Francisco López Destain por prestarme sus oídos y sentarse a pensar conmigo algunos de los problemas que tuve que resolver.

Al Centro de Comunicación Científica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires por cederme amablemente recursos de cómputo para que pudiera realizar las simulaciones del presente trabajo.

Al Profesor Ing. Guillermo Santiago, por haberme mostrado la elegancia del electromagnetismo, y sin cuyas clases de física nunca hubiera elegido Ingeniería Electrónica.

A quienes hacen e hicieron posible la universidad pública, gratuita y de acceso irrestricto, que me brindó la oportunidad de formarme como ingeniero.

A mi familia, por haberme acompañado en el largo camino que elegí, a pesar del esfuerzo y de las dificultades que genera la distancia.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vi</b>
<b>Índice general</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción: Fundamentos de electromagnetismo</b>	<b>1</b>
1.1. Reseña histórica . . . . .	1
1.2. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	2
1.2.1. Campos en medios materiales . . . . .	3
1.2.2. Análisis de automodos . . . . .	5
1.2.3. Condiciones de borde . . . . .	6
1.3. Ecuación de onda . . . . .	6
1.4. Guias de ondas . . . . .	9
1.5. Ondas de superficie . . . . .	10
1.6. Líneas de transmisión . . . . .	23
1.6.1. Línea <i>microstrip</i> . . . . .	28
1.7. Antenas . . . . .	29
1.7.1. Regiones de campo . . . . .	29
1.7.2. Diagramas de radiación . . . . .	30
1.7.3. Impedancia de entrada . . . . .	30
1.7.4. Conjuntos de antenas . . . . .	30
1.7.5. Acoplamiento mutuo . . . . .	32
1.7.6. Antenas <i>microstrip</i> . . . . .	33
1.7.6.1. Modelo de líneas de transmisión . . . . .	34
1.7.6.2. Modelo de cavidades multimodo . . . . .	36
1.7.7. Acoplamiento mutuo en antenas <i>microstrip</i> . . . . .	39
<b>2. Fundamentos de estructuras de EBG</b>	<b>41</b>
2.1. Introducción: Metamateriales, materiales periódicos y EBGs . . . . .	41
2.2. Difracción de Bragg . . . . .	45
2.3. Teorema de Bloch-Floquet . . . . .	47
2.4. Armónicos espaciales . . . . .	50
2.5. Celdas unitarias de cristales bidimensionales . . . . .	53
2.6. Relación y diagrama de dispersión . . . . .	56

<b>3. Estudio y diseño de estructuras de banda prohibida electromagnética</b>	<b>63</b>
3.1. Modelos analíticos de estructuras uniplanares de banda prohibida electromagnética . . . . .	63
3.2. Técnicas numéricas de onda completa . . . . .	71
3.3. Análisis de campos y modos para distintas estructuras . . . . .	74
3.3.1. Metamaterial formado por parches cuadrados unidos por finas trazas <i>microstrip</i> . . . . .	74
3.3.1.1. Análisis de un diagrama de dispersión típico . . . . .	77
3.3.1.2. Efecto de la variación del ancho del puente <i>microstrip</i> . .	79
3.3.1.3. Efecto del escalamiento de la celda unitaria . . . . .	82
3.3.1.4. Efecto de la variación del tamaño del parche metálico . .	84
3.3.1.5. Variación de la longitud de los puentes . . . . .	85
3.3.1.6. Efecto de la variación del ancho del sustrato dieléctrico .	85
3.3.2. Celda de Yang . . . . .	89
3.4. Modelado circuital . . . . .	91
3.5. Modelado por líneas de transmisión . . . . .	107
3.5.1. Algoritmo utilizando programación orientada a objetos . . . . .	108
<b>4. Aspectos de interés en el uso de EBGs en conjuntos de antenas</b>	<b>123</b>
4.1. Introducción . . . . .	123
4.2. Elección del metamaterial . . . . .	124
4.3. Monopolos . . . . .	126
4.3.1. Comportamiento de un conjunto de dos monopolos . . . . .	128
4.4. Introducción a antenas <i>microstrip</i> . . . . .	134
4.5. Diseño de una antena <i>microstrip</i> . . . . .	136
<b>5. Conclusiones</b>	<b>145</b>
5.1. Propuestas de trabajos futuros . . . . .	146
<b>Apéndices</b>	<b>149</b>
<b>A. Incidencia de una onda plana sobre una interfaz</b>	<b>151</b>
A.1. Ángulo de Brewster y ángulo crítico . . . . .	154
<b>B. Estudio de la aplicación de parches carga para el aumento del ancho de banda de una antena <i>microstrip</i></b>	<b>159</b>
<b>C. Solución general mediante el método de matriz exponencial de la ecuación diferencial de segundo orden de una onda</b>	<b>165</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>169</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>169</b>

*A mis padres, Marta y Miguel, sin cuyo apoyo, confianza, ánimo y  
esfuerzo no hubiera podido llegar hasta aquí.*



# Capítulo 1

## Introducción: Fundamentos de electromagnetismo

### 1.1. Reseña histórica

Las bases de la teoría electromagnética clásica para el dominio macroscópico fueron formuladas por James Clerk Maxwell en 1873, en base al conocimiento previo desarrollado por Gauss, Ampère y Faraday, entre otros. Entre 1885 y 1887, Oliver Heaviside simplificó las expresiones e introdujo la notación vectorial actual, facilitando así la descripción matemática de los fenómenos físicos asociados [1].

En base a estos trabajos, Heinrich Hertz diseñó, entre 1886 y 1891, una serie de experimentos que validaron la teoría de ondas electromagnéticas propuesta por Maxwell. En 1886, Hertz construyó la primer antena dipolo, y en 1888, la primer antena parabólica, alimentada por un dipolo de 450 MHz, dando el puntapié inicial para el desarrollo de la radio durante la primera mitad del siglo XX [2].

El primer análisis de la propagación de ondas electromagnéticas en guías de ondas metálicas, publicado por Lord Rayleigh en 1897, y el posterior estudio teórico del comportamiento de ondas en guías dieléctricas por Debye y Hondros, en 1910, sentaron los cimientos para que, durante la década de 1930, comenzaran trabajos experimentales en transporte de ondas electromagnéticas en los laboratorios Bell [2].

Los conjuntos de antenas se popularizaron a partir de la aparición de la antena de Yagi-Uda en 1926, formada por elementos lineales que dan lugar a una fase fija. Durante la Segunda Guerra Mundial surgieron los conjuntos de antena de fase variable [3], y las guías de ondas y las antenas tomaron un lugar prioritario entre los ingenieros, matemáticos

y físicos de la época, lo que incitó al desarrollo de métodos de análisis para facilitar la formulación de problemas con condiciones de borde complejas.

Recién finalizada la Segunda Guerra Mundial se comenzaron a fabricar circuitos *microstrip*. En 1953, G. A. Deschamps presentó el primer trabajo sobre antenas con dicha tecnología, y la primer patente en ese sentido se registró en 1955 [4]. Aún así, no fue hasta la década de 1970 que comenzaron a utilizarse en aplicaciones prácticas, principalmente gracias a la aparición de sustratos con bajas tangentes de pérdida, la mejora en técnicas de fotolitografía, y la optimización de modelos teóricos [5], que permitieron solucionar los problemas de dispersión y aparición de modos indeseados. Sin embargo, la simplificación constructiva trajo aparejados problemas de acoplamiento mutuo, que debieron ser abordados por técnicas de filtrado y blindaje.

## 1.2. Ecuaciones de Maxwell

La teoría electromagnética propuesta por Maxwell, y simplificada por Heaviside, se reduce a cuatro ecuaciones diferenciales lineales vectoriales e interdependientes que, en notación diferencial, quedan expresadas como se observa a la izquierda de la ecuación 1-1 [1], donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico, en  $(V/m)$ ;  $\mathbf{H}$  es el campo magnético, en  $(A/m)$ ;  $\mathbf{D}$  es la densidad de flujo eléctrico, en  $(C/m^2)$ ;  $\mathbf{B}$  es la densidad de flujo magnético, en  $(Wb/m)$ ;  $\mathbf{M}$  es la densidad de corriente magnética, en  $(V/m)$ , y se considera por completitud y simetría;  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente eléctrica, en  $(A/m^2)$ ; y  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica, en  $(C/m^2)$ .

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Faraday} & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M} \\ \text{Ampère} & \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \text{Gauss} & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} - \mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

De las ecuaciones 1-1 se deduce que las fuentes de campo electromagnético son la densidad de carga eléctrica  $\rho$  y las corrientes  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{J}$ . Utilizando propiedades del cálculo vectorial es posible, además, deducir<sup>1</sup> la ecuación de continuidad 1-2.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1-2)$$

<sup>1</sup>Para ello se debe aplicar la divergencia a la ecuación de Ampère, y recordar que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ .

A partir de las ecuaciones de Maxwell (1-1), y considerando relaciones constitutivas que no varían en el tiempo ni en función de la frecuencia (es decir, no hay dispersión), y donde no hay cargas libres ni corrientes ( $\rho = 0$  y  $\mathbf{J} = 0$ ), donde el material es isótropo y macroscópico, y donde no se consideran pérdidas, es posible, utilizando la linealidad de dichas ecuaciones, separar el comportamiento en el tiempo y en el espacio, expandiendo los campos en modos armónicos y expresándolos como combinaciones lineales de los mismos. Los modos, entonces, resultan de un patrón espacial ( $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  o  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ) multiplicado por un patrón temporal.

Dado que la mayor parte del análisis se realiza sobre campos de comportamiento armónico y en régimen permanente, la dependencia del tiempo de las ecuaciones de Maxwell se suele simplificar, de manera que la dependencia temporal,  $e^{j\omega t}$ , suele quedar implícita, dado que resulta común para todos los términos. Así, las derivadas respecto del tiempo resultan más sencillas, y los vectores de campos se vuelven funciones vectoriales complejas dependientes sólo de coordenadas espaciales [2]. El resultado de esta simplificación se observa en el lado derecho de la ecuación 1-1.

Bajo estas consideraciones, resulta claro que las configuraciones posibles de campo son transversales: Para cualquier campo magnético  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \exp(j\beta \cdot \mathbf{r})$ , la ecuación de la divergencia del mismo obliga a que  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ .

### 1.2.1. Campos en medios materiales

Un campo eléctrico aplicado sobre cualquier material dieléctrico genera una polarización de sus átomos y/o moléculas, creando momentos dipolares eléctricos (o alineándolos, si en el material existían previamente), y dando lugar a un vector de polarización adicional,  $\mathbf{P}_e$ , que genera un decrecimiento en el campo eléctrico total presente en el material. En el mismo sentido, un campo magnético aplicado sobre un medio material podría ser capaz de alinear los momentos dipolares magnéticos en un material magnético, produciendo un vector de polarización magnética  $\mathbf{P}_m$ . Si el medio es, además, lineal e isotrópico, dichas polarizaciones son proporcionales al campo aplicado, de forma que  $\mathbf{P}_e = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}_m = \chi_m \mathbf{H}$ , con  $\chi_e$  y  $\chi_m$  las susceptibilidades eléctrica y magnética, respectivamente. Dado que las mismas toman valores complejos, los medios materiales poseen permitividades eléctricas y permeabilidades magnéticas también complejas, asociadas a las pérdidas debidas al amortiguamiento causado por los momentos dipolares respectivos [6]. Las relaciones constitutivas resultan, entonces,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e = \epsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} = (\epsilon' - j\epsilon'') \mathbf{E} y \quad (1-3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{P}_m) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} = (\mu' - j\mu'') \mathbf{H}. \quad (1-3b)$$

Si, además, el material posee una conductividad  $\sigma$ , la aplicación de un campo eléctrico da lugar a la aparición de una densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , que en algunos casos, cuando  $\sigma$  es independiente del campo eléctrico aplicado, se puede expresar, según la ley de Ohm, como

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1-4)$$

La ecuación de Ampère de 1-1 queda, entonces, expresada como

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} = j\omega \epsilon' \mathbf{E} + (\omega \epsilon'' + \sigma) \mathbf{E} \quad (1-5a)$$

$$= j\omega \left( \epsilon' - j\epsilon'' - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}. \quad (1-5b)$$

La relación entre la parte imaginaria y la parte real de la corriente total de desplazamiento se conoce como tangente de pérdidas [1]:

$$\tan \delta = \frac{\omega \epsilon'' + \sigma}{\omega \epsilon'}. \quad (1-6)$$

Cuando el material no es homogéneo, los coeficientes  $\epsilon$  y  $\mu$  dependen de la posición. Si posee un comportamiento dispersivo, los mismos dependen de la frecuencia  $\omega$ . Si, además, el material es anisotrópico, como en el caso de los cristales y gases ionizados, la relaciones expresadas antes entre los vectores de polarización ( $\mathbf{P}_e$  y  $\mathbf{P}_m$ ) y los campos no se cumplen, sino que deben ser expresadas como tensores de rango 2 (diadas), como se muestra en la ecuación 1-7, explicitando así su dependencia de la dirección [2]. Si, además, el material no es lineal, los coeficientes  $\epsilon_{ij}$  y  $\mu_{ij}$  pueden ser funciones de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  respectivamente.

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

### 1.2.2. Análisis de automodos

Las ecuaciones del rotor de las ecuaciones de Maxwell (1-1) pueden ser desacopladas<sup>2</sup>, de manera que resulte la ecuación

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (1-8)$$

Una expresión similar se puede obtener para el campo eléctrico. Sin embargo, también es posible obtener el campo eléctrico a partir de la ecuación de divergencia, una vez resuelta la ecuación 1-8,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (1-9)$$

La ecuación 1-8 es una ecuación de autovalores: El lado izquierdo puede ser considerado un operador,  $\hat{\Theta}$ , de manera que

$$\hat{\Theta} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1-10)$$

donde los autovectores son los valores que toma  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , es decir, los patrones espaciales, y los autovalores son  $(\omega/c)^2$ , relacionados a las frecuencias de esos modos. El operador  $\hat{\Theta}$  es lineal<sup>3</sup>, de manera que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución. Este acercamiento a las ecuaciones de Maxwell permite resolver problemas tridimensionales, especialmente los relacionados a estructuras resonantes cerradas y estructuras periódicas.

---

<sup>2</sup>El desacople se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) &= -\nabla \times (j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})) = -j\omega \epsilon_0 \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) &= -j\omega \epsilon_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Es posible demostrar que, además, el operador es hermítico, lo que permite deducir que: los autovalores serán siempre no-negativos, y por lo tanto las frecuencias  $\omega$  serán siempre reales; cualesquiera dos modos armónicos de diferentes frecuencias serán siempre ortogonales, y los modos que comparten frecuencia, los modos degenerados, surgen por las simetrías e invariancias del medio; y que se cumple el teorema variacional, que indica que los autovalores más pequeños coinciden con los modos de menor energía [7].

### 1.2.3. Condiciones de borde

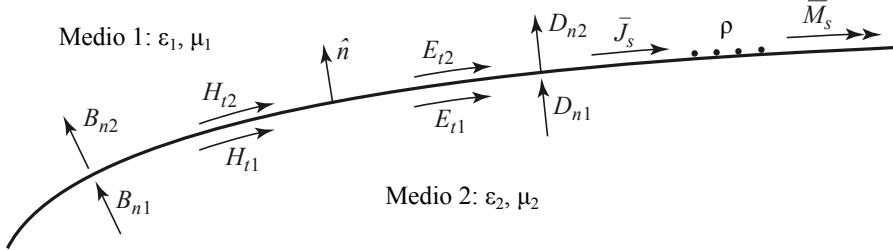


FIGURA 1.1: Corrientes, campos y carga superficial en una interfaz general entre dos medios [1].

Si se considera una interfaz entre dos medios, como la que se muestra en la Figura 1.1, a partir de las ecuaciones de Maxwell y los teoremas integrales, se pueden deducir las siguientes condiciones de borde:

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (1-11a)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (1-11b)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{M}_s \quad (1-11c)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (1-11d)$$

### 1.3. Ecuación de onda

Al considerar una región del espacio lineal, isotrópica y homogénea, se puede calcular el rotor de la primera ecuación de Maxwell y aplicar la segunda<sup>4</sup>, lo que da como resultado las expresiones<sup>5</sup>:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = j\omega \mu \mathbf{J} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (1-12a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{M} - \nabla \times \mathbf{J}. \quad (1-12b)$$

<sup>4</sup>Se deberá utilizar la identidad  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ , donde  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ . Aplicando, además, lo mismo para el campo magnético, y considerando que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ :

$$\begin{array}{lcl} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} & = & -j\omega \mu \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{M} \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} & = & -j\omega \mu \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{M} \\ \frac{\nabla \rho}{\epsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} & = & \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{M} \\ \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} & = & j\omega \mu \mathbf{J} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} + \nabla \times \mathbf{M} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} & = & j\omega \nabla \times \mathbf{D} + \nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} & = & j\omega \epsilon \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{J} \\ \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{H} & = & j\omega \epsilon (-j\omega \mathbf{B} - \mathbf{M}) + \nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{H} & = & j\omega \epsilon \mathbf{M} - \nabla \times \mathbf{J} \end{array} \right.$$

<sup>5</sup>De estas ecuaciones, se observa que el campo magnético está determinado por la componente rotacional de la corriente eléctrica, mientras que el campo eléctrico está determinado por todas las componentes de la misma. De manera análoga, se cumple la relación inversa para el caso de la corriente magnética.

Si, además, la región del espacio es libre de fuentes ( $J = 0$ ,  $M = 0$  y  $\rho = 0$ ), se deducen las ecuaciones de Helmholtz para ambos campos, donde  $\gamma$  es el número de onda, en unidades de  $(1/m)$ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\tag{1-13}$$

Para el caso sin pérdidas se puede expresar como  $\gamma = \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , mientras que si se considera que existen pérdidas óhmicas, su efecto puede ser tenido en cuenta si  $\gamma$  asume un valor complejo, tal que

$$\gamma = -j\alpha + \beta = j\omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} - j\sigma\epsilon/\omega.\tag{1-14}$$

Para el caso de un buen conductor, la expresión de  $\gamma$  resulta

$$\gamma = -j\alpha + \beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\sigma/(\omega\epsilon)} = (1+j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2},\tag{1-15}$$

lo que nos permite definir la profundidad de penetración como

$$\delta_s = -1/\alpha = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}.\tag{1-16}$$

En coordenadas cartesianas, para resolver las ecuaciones 1-13 resulta sencillo aplicar el método de separación de variables<sup>6</sup>, que da lugar a ecuaciones cuya solución es de la forma  $e^{\pm j\beta_i i}$ , con  $i = x, y$  o  $z$ , respectivamente. Las soluciones con un signo positivo en el exponente corresponden a ondas que viajan en la dirección negativa  $(-x, -y, -z)$ , mientras que las que tienen un signo negativo corresponden a ondas que viajan en la dirección positiva. Dado que ambas soluciones son válidas y posibles, en función de las condiciones de borde, en general la expresión de la propagación de los campos

---

<sup>6</sup>En coordenadas cartesianas,  $\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$ . Reemplazando las coordenadas  $E_i$  de  $\mathbf{E}$ , para  $i = x, y, z$  por funciones  $f(x), g(y), h(z)$  independientes entre sí, se obtiene que  $\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{h''(z)}{h(z)} + \beta_0^2 = 0$ . Como las funciones  $f, g$  y  $h$  son independientes, se deduce que  $\frac{f''(x)}{f(x)} = -\beta_x^2$ ,  $\frac{g''(y)}{g(y)} = -\beta_y^2$  y  $\frac{h''(z)}{h(z)} = -\beta_z^2$ .

electromagnéticos quedará establecida como la suma de ambas, afectadas por un factor de amplitud dependiente de la coordenada evaluada.

Para el caso de ondas que viajan en la dirección positiva,

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 e^{-j(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)} = \mathbf{E}_0 e^{-j\gamma \cdot \mathbf{r}}, \quad (1-17)$$

donde se consideró que  $\mathbf{E}_0 = A\hat{x} + B\hat{y} + C\hat{z}$ ,  $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  y

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \gamma^2. \quad (1-18)$$

Al expresar la divergencia del campo eléctrico de la ecuación 1-17, se obtiene<sup>7</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_0 e^{-j\gamma \cdot \mathbf{r}} = -j\gamma \cdot \mathbf{E}_0 e^{-j\gamma \cdot \mathbf{r}} = 0, \quad (1-19)$$

de lo que se puede deducir que  $\gamma \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ , de modo que el campo eléctrico, en una onda plana, es siempre perpendicular a la dirección de propagación.

De la ecuación de Faraday de 1-1, considerando espacio libre de cargas, se obtiene que, para una onda plana en un medio sin pérdidas, el campo magnético es siempre ortogonal al campo eléctrico y a la dirección de propagación, y que los campos están relacionados de forma que [6]

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{\hat{\beta} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta}, \quad (1-20)$$

donde  $\eta$  es la impedancia de onda, que tiene la forma

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}. \quad (1-21)$$

Para el caso con pérdidas, y considerando que la dirección de propagación es  $z$ , las componentes  $x$  e  $y$  se comportan como

---

<sup>7</sup> Aplicando  $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{A}$  a la expresión, resulta  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{-j\beta r} + e^{-j\beta r} \nabla \cdot \mathbf{E}_0$ , donde  $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$

$$E_i(z) = E_i e^{-j\gamma z} = E_i e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad i = x, y.$$

Si el medio es el vacío, la impedancia intrínseca se denota  $\eta_0$  y tiene un valor de  $377 \Omega$ , mientras que para otros materiales está determinada por su permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, y puede ser compleja si hay pérdidas.

La velocidad de fase se define como  $v_p = \omega/\beta$ , que de no haber pérdidas queda como  $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , y que para el caso particular del vacío, se expresa como  $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Así, la velocidad de fase en cualquier medio material sin pérdidas resulta  $c/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ .

La velocidad de grupo, en tanto, se define como  $v_g = d\omega/d\beta$ , y representa la velocidad a la que una envolvente de onda se propaga en el espacio. Para el caso en que no existe dispersión, la velocidad de fase y la velocidad de grupo coinciden, pues la derivada que define a la velocidad de grupo es constante.

La longitud de onda,  $\lambda$ , es la distancia espacial entre dos máximos sucesivos, por lo que se expresa como  $\lambda = 2\pi/\beta = v_p/f$ .

## 1.4. Guias de ondas

Suponiendo una guía de ondas de forma arbitraria en la que la energía electromagnética se propaga en la dirección  $z$ , los campos eléctrico y magnético se pueden expresar como la suma de sus componentes longitudinales (en la dirección  $z$ ) y sus componentes transversales (en el plano  $xy$ ), con constantes  $\gamma_z$  y  $\gamma_t$ , respectivamente, de modo que  $\gamma_z + \gamma_t = \gamma$ , y dependientes sólo de la posición en el plano transversal, de manera que

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [e_{xy}(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)] e^{-j\gamma_z z}. \quad (1-22)$$

Aplicando las ecuaciones rotacionales de Maxwell (Faraday y Ampère en la ecuación 1-1), considerando una región libre de cargas y un comportamiento armónico de los campos, así como un comportamiento sin pérdidas ( $\gamma_z = \beta_z$ ), se puede deducir que las componentes transversales quedan en términos de las componentes longitudinales [6]

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j}{\gamma_t^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= \frac{-j}{\gamma_t^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \\ E_x &= \frac{-j}{\gamma_t^2} \left( \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & E_y &= \frac{j}{\gamma_t^2} \left( \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \beta_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1-23)$$

donde se definió  $\gamma_t^2 = \gamma^2 - \beta_z^2$  como el número de onda de corte, siendo  $\gamma = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , que para el caso sin pérdidas es, además,  $\gamma = \beta = 2\pi/\lambda$ , el número de onda en el material que rellena la línea de transmisión.

Cuando no existen componentes de campo en la dirección de propagación,  $z$ , según las ecuaciones 1-23, no existen campos en las direcciones transversales si  $\gamma_t \neq 0$ . La indeterminación generada por el hecho de que  $\gamma_t$  se anula da como resultado que  $\beta_z = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \beta$ , de modo que no existe número de onda de corte, y haciendo que la impedancia de onda sea  $\eta$ . A este modo de propagación sobre una guía de ondas se lo llama TEM (transversal electromagnético). Los campos transversales satisfacen que el Laplaciano es 0, de modo que se comportan como un campo electrostático.

Cuando la componente  $z$  del campo eléctrico se anula, el modo de propagación se denomina TE (transversal eléctrico), y pueden utilizarse las relaciones descriptas en la ecuación 1-23 para obtener el resto de los campos. La impedancia de onda, en este caso, resulta  $Z_{TE} = \gamma\eta/\beta_z$ , dependiente de la frecuencia.

Cuando la componente  $z$  del campo magnético se anula, el modo de propagación es TM (transversal magnético), y con el mismo procedimiento que antes, se puede hallar su impedancia de onda, que resulta  $Z_{TM} = \beta_z\eta/\gamma$ .

## 1.5. Ondas de superficie

Existen estructuras abiertas que son capaces de mantener el campo electromagnético íntimamente ligadas a ellas, de forma que el mismo decaiga exponencialmente con la distancia a las mismas (comportamiento evanescente), y simultáneamente permiten propagación de energía en una dirección  $z$  paralela a la superficie (con un decrecimiento inverso a la raíz cuadrada de la distancia, debido a la expansión del frente de onda), dando lugar a lo que se conoce como ondas de superficie [8]. Estas estructuras se denominan guías de ondas superficiales, y pueden consistir en planos conductores recubiertos de dieléctrico, en planos corrugados o en simples interfaces entre dos medios distintos. Uller inauguró el campo en 1903, y luego Zenneck y Sommerfeld, entre 1907 y 1909, las utilizaron para explicar la propagación de ondas en la superficie terrestre, aunque este último utilizó la expresión «ondas de superficie» para referirse al efecto conjunto

de ondas espaciales y ondas de superficie [8], que no se corresponde completamente con la definición actual. Recién en la década de 1950 se realizaron estudios teóricos de importancia, que permitieron hallar aplicaciones y nuevas estructuras que permiten la propagación de este tipo de ondas.

En la actualidad, las ondas de superficie se clasifican en ondas Zenneck (utilizadas en bajas frecuencias, cuando los medios interviniéntes poseen altas pérdidas), ondas de tipo resonante (que surgen cuando una onda plana incide sobre un material periódico), ondas de superficie no lineales (que se generan en medios no lineales), plasmones (utilizados en altas frecuencias, cuando los medios tienen bajas pérdidas) y ondas de Dyakonov (donde al menos uno de los materiales es anisotrópico), entre otras.

Para este trabajo, resultan de importancia las ondas de Zenneck, ya que permiten explicar el comportamiento de las ondas sobre una placa dieléctrica fina que posee un plano conductor en una de sus caras. Una representación tridimensional de las mismas se puede observar en la Figura 1.2.

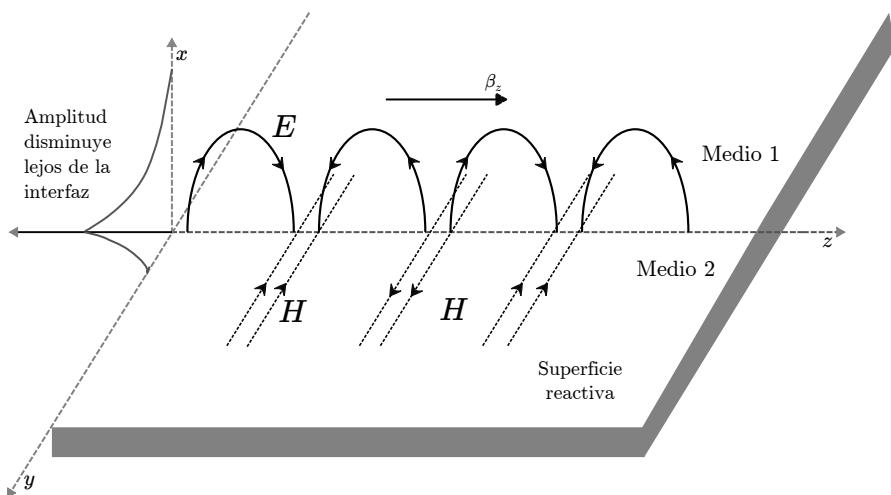


FIGURA 1.2: Representación gráfica del comportamiento de una onda de superficie TM sobre una interfaz reactiva.

Si se considera que una onda plana incide con ángulo de Brewster (concepto desarrollado en el anexo A) en modo TM sobre una interfaz entre dos medios de bajas pérdidas ( $\epsilon'' \ll \epsilon'$ ), cada uno con una permitividad eléctrica  $\epsilon_i$  y una permeabilidad magnética  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ , como indica la Figura 1.3, no existirá energía reflejada. De esta forma, toda la energía incidente es entregada a la interfaz, y se obtienen las expresiones 1-24, donde no existen componentes reflejadas y donde T es el factor de transmisión. Con el fin de simplificar dichas ecuaciones, se considera que el medio 1 es aire, de modo que  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\mu_1 = \mu_0$  y, en consecuencia,  $\eta_1 = \eta_0$ .

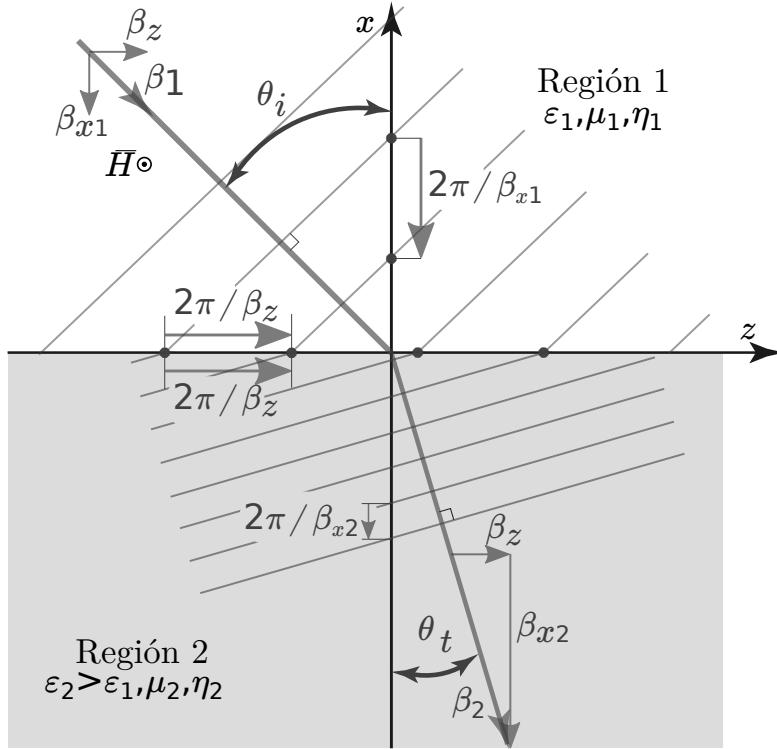


FIGURA 1.3: Ilustración del comportamiento de una onda plana durante la incidencia TM con ángulo de Brewster. Las rectas paralelas representan los frentes de onda, es decir, son rectas de fase constante. Es importante destacar que la longitud de onda paralela a la interfaz,  $2\pi/\beta_z$ , se mantiene constante a ambos lados, dado que sobre la interfaz se intersecan las rectas de fase constante.

$$H_{1y} = Ae^{-j(z \underbrace{\gamma_1 \sin \theta_i}_{\gamma_z} - x \underbrace{\gamma_1 \cos \theta_i}_{\gamma_{x1}})}, \quad x > 0 \quad j\omega\epsilon E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (1-24a)$$

$$H_{2y} = ATe^{-j(z \underbrace{\gamma_2 \sin \theta_t}_{\gamma_z} - x \underbrace{\gamma_2 \cos \theta_t}_{\gamma_{x2}})}, \quad x < 0 \quad j\omega\epsilon E_z = -\frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (1-24b)$$

La componente longitudinal de los vectores de onda,  $\gamma_z$ , es igual a ambos lados de la interfaz, como se muestra en la Figura 1.3 (en términos de  $\beta_z$ , ya que no se consideran pérdidas), de modo que

$$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_z = \gamma_2 \sin \theta_t. \quad (1-25)$$

Las componentes normales a la interfaz, que llamaremos  $\gamma_{x_i}$ ,  $i = 1, 2$ , mostradas también en la Figura 1.3, deben cumplir que

$$\gamma_{x_1}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_1^2 \quad \text{y} \quad \gamma_{x_2}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_2^2. \quad (1-26)$$

Las impedancias de onda en ambas regiones se obtienen como la relación entre los campos tangenciales a la interfaz sobre la que se incide, de modo que

$$Z_1 = \frac{E_{z1}}{H_{y1}} = \eta_0 \cos \theta_i \implies Z_1 = \frac{\gamma_{x_1}}{\gamma_1} \eta_0, \quad (1-27a)$$

$$Z_2 = \frac{E_{z2}}{H_{y2}} = \eta \cos \theta_t \implies Z_2 = \frac{\gamma_{x_2}}{\gamma_2} \eta. \quad (1-27b)$$

Para poder considerar que toda la energía de la onda incidente se transmite desde el primer medio al segundo, debe suceder que las impedancias de onda a ambos lados de la interfaz sean iguales ( $Z_1 = Z_2$ ). Igualando las ecuaciones 1-27a y 1-27b, se deduce<sup>8</sup> que, en forma general, si el medio sobre el que se incide tiene pérdidas, entonces  $\gamma_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2}$  son complejos. De esta manera,  $\gamma_{x_1} = \beta_{x_1} - j\alpha_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2} = \beta_{x_2} - j\alpha_{x_2}$ , lo que significa que además de avanzar en fase, la onda pierde energía, pues tiene un comportamiento evanescente, de modo que el vector de Poynting tiene una componente en la dirección perpendicular a la interfaz, que se atribuye al consumo de energía de la misma [8]. Dado que  $\gamma_1 = \gamma_{z_1} + \gamma_{x_1}$ , resulta conveniente considerar que la constante de propagación,  $\gamma_{z_1} = \beta_{z_1} - j\alpha_{z_1}$ , posee también un valor complejo.

El campo magnético queda, entonces, expresado como:

$$H_y = \begin{cases} Ae^{-j\beta_z z - \alpha_{z_1} z + j\beta_{x_1} x - \alpha_{x_1} x}, & x > 0, \\ Ae^{-j\beta_z z - \alpha_{z_2} z + j\beta_{x_1} x + \alpha_{x_2} x}, & x < 0. \end{cases} \quad (1-28)$$

Se observa que los planos de fase constante, en el aire, son los correspondientes a las exponenciales imaginarias de la ecuación anterior,  $\beta_z z - \beta_{x_1} x = cte$ , y se muestran en la Figura 1.3. Los planos de amplitud constante se obtienen considerando las exponenciales decrecientes de las expresiones, de forma que  $\alpha_{z_1} z + \alpha_{x_1} x = cte$ , que para el caso analizado en la Figura 1.3, son rectas con pendiente negativa (no mostradas en la figura). Esto es así porque en la expresión se considera que existen pérdidas en la dirección  $z$  paralela a

<sup>8</sup>Al igualar las expresiones de las impedancias de onda, se obtiene  $\frac{\gamma_{x_1} \eta_0}{\gamma_1} = \frac{\gamma_{x_2} \eta_2}{\gamma_2}$ . Recordando que  $\gamma_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $\gamma_2 = \omega \sqrt{\mu_0 (\epsilon' - j\epsilon'')}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  y  $\eta = \sqrt{\mu_0 / (\epsilon' - j\epsilon'')}$ , se deduce que la relación entre  $\gamma_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2}$  es compleja:  $\gamma_{x_1} (\epsilon' - j\epsilon'') = \gamma_{x_2} \epsilon_0$ , de modo que en forma general se puede considerar que tanto  $\gamma_{x_1}$  como  $\gamma_{x_2}$  son complejos.

la interfaz. De no haber pérdidas, los planos de amplitud constante resultan paralelos a la misma.

Para bajas pérdidas,  $\alpha_{z_i}$ ,  $i = 1, 2$ , será pequeño, por lo que habrá baja atenuación para la onda que se desplaza en dirección  $z$ , pero debido a que  $\alpha_{x_1}$  y/o  $\alpha_{x_2}$  también serán bajas, la energía no estará concentrada cerca de la interfaz.

Si se considera una superficie con una impedancia de onda para polarización TM normalizada respecto de  $\eta_0$ ,  $Z_s = R_s + jX_s$ , independiente del ángulo de incidencia, entonces, al igualar la impedancia de onda a la impedancia de superficie, y teniendo en cuenta las igualdades de la ecuación 1-27, resulta, en el caso TM,

$$\gamma_{x_1} = \gamma_1 \frac{Z_1}{\eta_0} = \gamma_1 Z_s = \gamma_1 R_s + j\gamma_1 X_s, \quad (1-29)$$

$$\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z = \sqrt{(\gamma_1^2 - \gamma_{x_1}^2)} = \gamma_1 \sqrt{1 + X_s^2 - R_s^2 - 2jR_s X_s}. \quad (1-30)$$

La gráfica de las componentes real e imaginaria de  $\gamma_z$  se muestra en la Figura 1.4. Se puede observar que, cuando la reactancia es inductiva (valores positivos de  $X_s$ ),  $\alpha_z$  presenta valores positivos, por lo que habrá atenuación en la dirección de propagación  $z$  ([a] en la figura)<sup>9</sup>. Esto significa que, a mayor reactancia, habrá una mayor disminución de la amplitud del campo a medida que la onda se desplace por la interfaz (aumenta el valor de  $z$ ). Sin embargo, la mayor variación en el coeficiente de atenuación se observa con el cambio de valor de la resistencia,  $R_s$  ([b] en la figura).

Si la reactancia es nula, un valor de  $\beta_z$  se obtiene sólo si la resistencia es muy baja o nula ([c] en la figura). Esto significa que sobre una superficie puramente resistiva, sólo habrá propagación de ondas de superficie cuando la resistencia sea inferior a un umbral dependiente de los medios materiales ( $\beta_z = 0$ , [d] en la figura). Cuando ese umbral de resistencia es superado, el valor de la constante de propagación paralela a la interfaz se anula.

El comportamiento de  $\gamma_{x_1}$  (la componente ortogonal a la superficie), descripto en la ecuación 1-29 también regula el comportamiento de la onda de superficie, dado que si la magnitud de la parte imaginaria de  $\gamma_{x_1}$ ,  $\alpha_{x_1}$ , es muy pequeña, la onda no estará lo suficientemente cerca de la interfaz para ser guiada por ella. Un valor alto de  $\alpha_{x_1}$  se da cuando la reactancia,  $X_s$  es inductiva ( $X_s > 0$ ), lo cual coincide con el requisito

<sup>9</sup>Esto se debe a que si el campo eléctrico en la dirección  $y$  se escribe como se indica en la ecuación 1-24,  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_{z_i}$ ,  $i = 1, 2$  y  $\gamma_{x_1} = \beta_{x_1} + j\alpha_{x_1}$ , el exponente se expresa como  $-j(\beta_z - j\alpha_{z_1})z + j(\beta_{x_1} + j\alpha_{x_1})x$ . Para dirección de propagación  $z$ , con  $z > 0$ , la componente de atenuación del exponente de la expresión dada resulta en  $-\alpha_{z_i}z$ ,  $i = 1, 2$ . Para que el comportamiento resulte decreciente,  $\alpha_{z_i}$  debe ser mayor a 0.

para  $\alpha_{z_i}, i = 1, 2$ . Dicho de otra forma, la reactancia de superficie es la responsable del decrecimiento exponencial de la onda al aumentar la distancia con la interfaz que funciona como guía.

Analizando la ecuación 1-30, se deduce que un producto  $R_s X_s$  pequeño dará lugar a atenuaciones pequeñas en la onda de superficie, de modo que para que se propague una onda sobre la interfaz, si se establece  $X_s$  grande para obtener un valor de  $\beta_z$  grande, se deben disminuir el comportamiento resistivo tanto como sea posible ([e] en la figura).

Valor de  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z$  en función de la reactancia de superficie  
para distintas resistencias de superficie, en TM

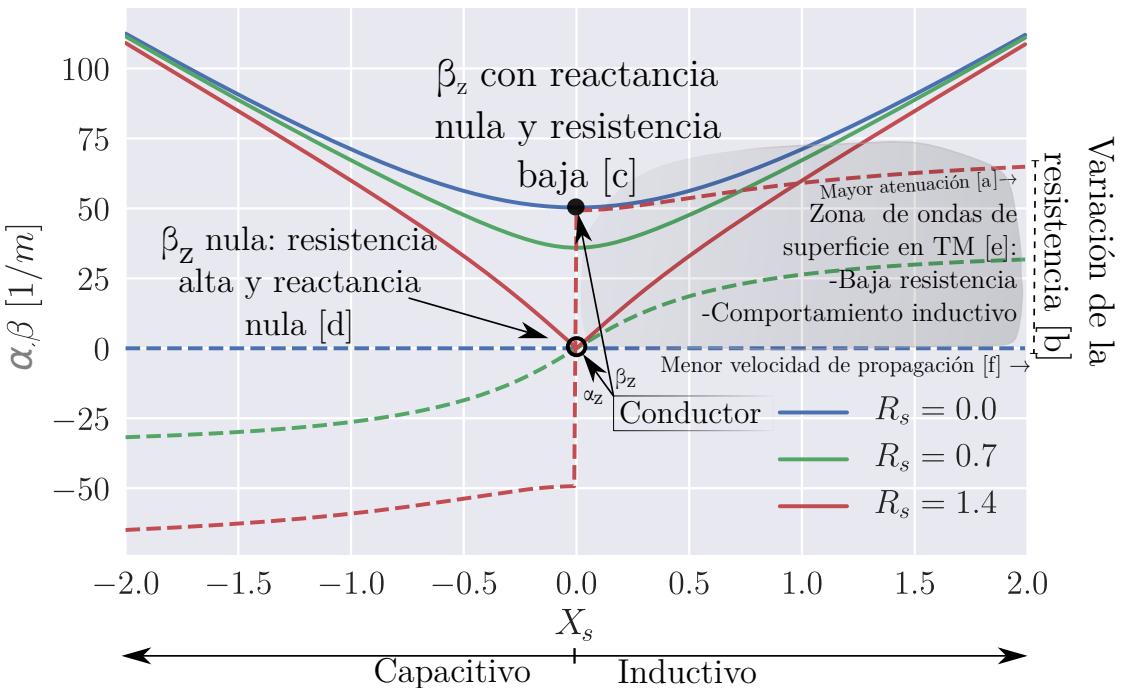


FIGURA 1.4: Comportamiento de la constante de propagación superficial  $\gamma_z$  en función de la resistencia y reactancia superficial para el caso de incidencia TM. Las líneas punteadas representan la parte imaginaria de  $\gamma_z$ , y las líneas completas representan la parte real, de forma que  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z$ .

La velocidad de propagación se obtiene directamente de la componente real de  $\gamma_z$  que, si  $R_s$  es pequeño y  $X_s$  es grande, resulta, a partir de la expresión 1-30,  $\beta_z \approx \beta_1 \sqrt{1 + X_s^2}$ , de forma que la velocidad de fase es

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c}{\sqrt{1 + X_s^2}}. \quad (1-31)$$

En los casos en que la componente reactiva de la impedancia de superficie es grande, el valor de la velocidad de propagación es menor al de la luz (denotado como [f] en la figura).

Cuando la interfaz es de tipo aire-conductor, la componente inductiva de la impedancia de superficie (relacionada a la profundidad de penetración) resulta igual a la componente resistiva, de forma que [6]

$$\eta = \frac{1+j}{\sigma\delta}. \quad (1-32)$$

Aplicando las ecuaciones 1-30, se obtiene que<sup>10</sup>

$$\gamma_x = \gamma_1(1+j)\sqrt{\frac{\gamma_1}{2\sigma Z_0}}, \quad (1-33)$$

$$\gamma_z = \gamma_1\sqrt{1 - \frac{j\gamma_1}{\sigma Z_0}} \approx \gamma_1 - \frac{j\gamma_1^2}{2\sigma Z_0}. \quad (1-34)$$

En general, un plano conductor soporta ondas de superficie, y la atenuación en la dirección de propagación es muy baja (ver Figura 1.4), pero no es capaz de lograr una atenuación en la dirección normal al mismo tal que la energía se mantenga concentrada en la superficie para poder ser utilizada como guía de ondas, debido a que la conductividad es muy alta (lo que disminuye el valor de  $\alpha_{x1}$ ). Para lograr que la energía de la onda decaiga rápidamente lejos de la interfaz es necesario aumentar notoriamente la reactancia de la superficie, para lo que se suele agregar al conductor una capa dieléctrica, que además no aumenta considerablemente la resistividad.

Para el caso de ondas de superficie en modo TE, los campos están dados por la ecuación 1-35. La impedancia de onda, en tanto, queda expresada como indica la ecuación 1-36. Considerando que, para evitar reflexiones, la impedancia de superficie tiene que ser igual a la impedancia de onda, se obtiene la expresión para la constante de propagación en el sentido perpendicular a la interfaz mostrada en la ecuación 1-37, donde nuevamente la impedancia de superficie del conductor es  $Z_s = R_s + jX_s$ .

$$E_y = Ae^{j\gamma_x x - j\gamma_z z}, \quad j\omega\mu_0 H_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad j\omega\mu_0 H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (1-35)$$

$$Z_1 = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{\omega\mu_0}{\gamma_{x1}} = -\frac{\eta\gamma_1}{\gamma_{x1}}. \quad (1-36)$$

---

<sup>10</sup>Considerando que  $\gamma = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\epsilon_0}/\sqrt{\mu_0}$  y que  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$ , se observa que  $\gamma/\eta_0 = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0}\mu_0} = \omega\mu_0$ , por lo que se puede expresar a  $\delta$  como  $\frac{2\eta_0}{\gamma\sigma}$ .

$$\gamma_{x_1} = -\frac{\gamma_1}{Z_s} = -\gamma_1 \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} - j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}. \quad (1-37)$$

Se observa que para que el valor de  $\alpha_{x_1}$  resulte positivo, de manera que se dé un decrecimiento exponencial desde la superficie, el valor de  $X_s$  tiene que ser negativo, por lo que el comportamiento de la superficie tiene que ser capacitivo.

La segunda condición para la existencia de ondas de superficie, la propagación de los campos, está asegurada si  $\gamma_z$  es positivo, y si la atenuación en la dirección de propagación, parametrizada por  $\alpha_z$ , es baja. La expresión de  $\gamma_z$  para el caso TE resulta, a partir de 1-37,

$$\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z = \sqrt{(\gamma_1^2 - \gamma_{x_1}^2)} = \frac{\gamma_1}{R_s^2 + X_s^2} \sqrt{1 + X_s^2 - R_s^2 + 2jR_sX_s}. \quad (1-38)$$

Gráficas de la expresión anterior se muestran en la Figura 1.5, donde se pueden observar valores de  $\beta_z$  y  $\alpha_{z_1}$  en función de la reactancia  $X_s$ , para algunos valores de resistencia de superficie  $R_s$ . Resulta importante destacar que para valores en que  $X_s$  es negativa (reactancia capacitiva), el valor de  $\alpha_z$  es físicamente realizable, ya que da lugar a un decrecimiento exponencial, y no a un incremento. Por otro lado, al contrario que en el caso de las ondas TM, a medida que la reactancia capacitativa aumenta en módulo, la constante de propagación tiende a estabilizarse en lugar de crecer linealmente, aunque sí decrece la constante de atenuación  $\alpha_z$ . Cuando la resistencia de superficie es muy baja, los valores de  $\beta_z$  para reactancia  $X_s$  nula tienden a ser muy altos. Cuando los valores de resistencia aumentan ligeramente, al igual que en el caso TM, el valor de  $\beta_z$  se vuelve nulo, lo que obliga a presentar un comportamiento capacitivo para la propagación de ondas de superficie en modo TE.

Entre las distintas formas de lograr que una interfaz conductor-aire permita el guiado de ondas de superficie, una de las más efectivas consiste en el recubrimiento de la superficie metálica por una capa dieléctrica fina, como se muestra en la Figura 1.6.

Para el caso TM, si se considera que el campo magnético tiene la forma de la ecuación 1-39 en el espacio libre circundante a la estructura, entonces el campo magnético en el interior del dieléctrico resultará de la forma expresada en la ecuación 1-40, donde, si el medio incidente es aire, se cumple que  $\gamma_{x_1}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_1^2$  y  $\gamma_{x_2}^2 + \gamma_z^2 = \gamma_2^2 = \epsilon_r \gamma_1^2$ .

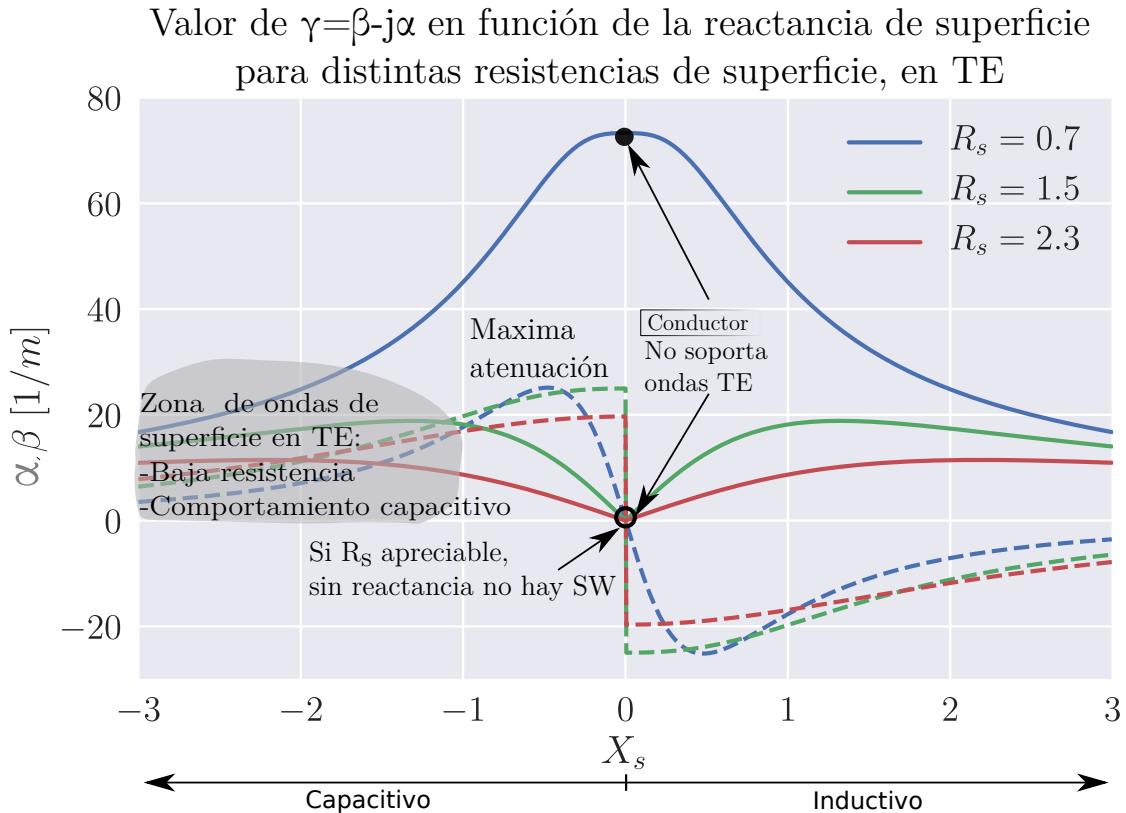


FIGURA 1.5: Comportamiento de la constante de propagación superficial  $\gamma_z$  en función de la resistencia y reactancia superficial para el caso de incidencia TE. Las líneas punteadas representan la parte imaginaria de  $\gamma_z$ , y las líneas completas representan la parte real, de forma que  $\gamma_z = \beta_z - j\alpha_z$ .

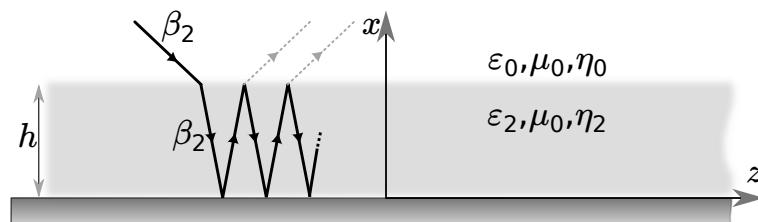


FIGURA 1.6: Incidencia sobre un conductor recubierto por un dieléctrico.

$$H_{1y} = A e^{j\gamma_{x_1} x - j\gamma_z z}, \quad x > h. \quad (1-39)$$

$$H_{2y} = [B e^{j\gamma_{x_2} x} + C e^{-j\gamma_{x_2} x}] e^{-j\gamma_z z}, \quad 0 \leq x \leq h. \quad (1-40)$$

Dado que en toda interfaz las componentes tangenciales de los campos se conservan, y a que las componentes tangenciales del campo eléctrico sobre el conductor se anulan, se

deduce que  $H_{2y}$  es un coseno, y se obtienen<sup>11</sup> las expresiones 1-41 y 1-42.

$$\gamma_{x_2} \tan(\gamma_{x_2} h) = -j\gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}, \quad (1-41)$$

$$\gamma_1^2(\epsilon_{r_2} - 1) = \gamma_{x_2}^2 - \gamma_{x_1}^2. \quad (1-42)$$

Considerando que  $\gamma_{x_1}$  es puramente imaginario positivo<sup>12</sup>, la ecuación 1-42 se puede expresar como  $\gamma_1^2(\epsilon_{r_2} - 1) = \gamma_{x_2}^2 + |\alpha_{x_1}|^2$ . Si se multiplica esta nueva expresión por  $h^2$  y a la expresión 1-41 por  $h$ , se obtienen dos expresiones que dan lugar a un sistema de ecuaciones trascendentales que se pueden resolver gráficamente, dado que representan una esfera de radio  $\gamma_1 h \sqrt{\epsilon_{r_2} - 1}$  y una tangente:

$$\begin{cases} (\gamma_{x_2} h)^2 + (\alpha_{x_1} h)^2 = (\epsilon_{r_2} - 1)(\gamma_1 h)^2 \\ \gamma_{x_2} h \tan(\gamma_{x_2} h) = |\alpha_{x_1}| \epsilon_{r_2} h. \end{cases} \quad (1-43)$$

Para el caso TE, la solución es similar, y en este caso las expresiones resultan (considerando, nuevamente, que  $\gamma_{x_1}$  es puramente imaginario positivo, es decir,  $\gamma_{x_1} = \alpha_{x_1}$ ):

$$\begin{cases} (\gamma_{x_2} h)^2 + (\alpha_{x_1} h)^2 = (\epsilon_{r_2} - 1)(\gamma_1 h)^2 \\ \gamma_{x_2} h \cot(\gamma_{x_2} h) = -|\alpha_{x_1}| \epsilon_{r_2} h. \end{cases} \quad (1-44)$$

Las soluciones se pueden obtener gráficamente para ambos casos, mediante la intersección de las curvas correspondientes a las ecuaciones del sistema. Las gráficas, para

<sup>11</sup>De la ecuación 1-39 se deriva el campo eléctrico, utilizando la ecuación de Ampère. Al establecer la condición que indica que sobre la interfaz con el conductor no existe campo eléctrico paralelo a la superficie del mismo (se asume un conductor perfecto), se concluye que el valor de B y de C en la ecuación 1-40 coinciden. Aplicando la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los campos sobre la interfaz aire-dieléctrico, se obtiene una relación entre los valores de A y B. Queda expresado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -j\gamma_{x_1} e^{-j\gamma_{x_1} h} & -2\gamma_{x_2}/\epsilon_{r_2} \sin(\gamma_{x_2} h) \\ -e^{-j\gamma_{x_1} h} & 2 \cos(\gamma_{x_2} h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que la solución no sea trivial, el determinante de la matriz del sistema tiene que ser nula, lo que da como resultado  $\gamma_{x_2} \tan(\gamma_{x_2} h) = -j\gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}$ .

<sup>12</sup>Un análisis general requiere considerar  $\gamma_{x_1}$ ,  $\gamma_{x_2}$  y  $\epsilon_2$  como complejos, de manera que se puedan tener en cuenta las pérdidas. Para simplificar el desarrollo, se puede asumir que, dado que se trata de ondas de superficie, la parte imaginaria de  $\gamma_{x_1}$  deberá ser negativa, de manera que a mayor distancia de la interfaz, la intensidad de los campos decrezca exponencialmente. La parte real de  $\gamma_{x_1}$ , si bien puede existir, a efectos del estudio del comportamiento de la onda de superficie en la dirección de propagación, puede obviarse. Por otro lado, si se considera que el ancho del dieléctrico,  $h$ , es muy pequeño, de forma que se pueda considerar que  $\tan(\gamma_{x_2} h) \approx \gamma_{x_2} h$ , entonces la expresión 1-41 resulta aproximadamente  $\gamma_{x_2}^2 h = -j\gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}$ . Asumiendo, por lo explicado antes, que  $\gamma_{x_1}$  es valor puramente imaginario positivo, el valor de  $\gamma_{x_2}$ , obtenido de  $\gamma_{x_2}^2 h = \gamma_{x_1} \epsilon_{r_2}$ , deberá ser real. Al argumento no descarta la existencia de valores complejos de  $\gamma_{x_1}$  y  $\gamma_{x_2}$ , sino que permite una validación intuitiva del desarrollo posterior.

distintas frecuencias, se muestran en la Figura 1.7. Se puede observar que, dado que  $|\alpha_{x_1}|h$  no puede tomar valores negativos, las intersecciones que se dan en esas condiciones no son válidas como soluciones del sistema planteado, bajo las hipótesis consideradas.

A medida que aumenta la frecuencia, el valor del radio de los círculos aumenta. Se observa que siempre existe, al menos, un modo TM de propagación sobre el plano de tierra, dado que todas las intersecciones entre las curvas ocurren para valores de  $|\alpha_{x_1}|h$  mayores a 0, como se muestra en la Figura 1.7(c). Para frecuencias en que el radio del círculo genera que el mismo intersecte a más secciones de la curva tangente, aparecerían modos de propagación superiores.

Para el caso TE, se observa que para frecuencias bajas no existe solución válida, como se muestra en la Figura 1.7(d), por lo que no hay un modo fundamental TE por debajo de la frecuencia de corte, que se da para  $f_c = c/(4h\sqrt{\epsilon_r} - 1)$ , que en el caso graficado es de aproximadamente 25 GHz.

Para el caso de FR4, en el rango de frecuencias de interés para este trabajo, no existe, entonces, propagación de ondas de superficie de polarización TE, por lo que el análisis del modo TM reviste mayor importancia.

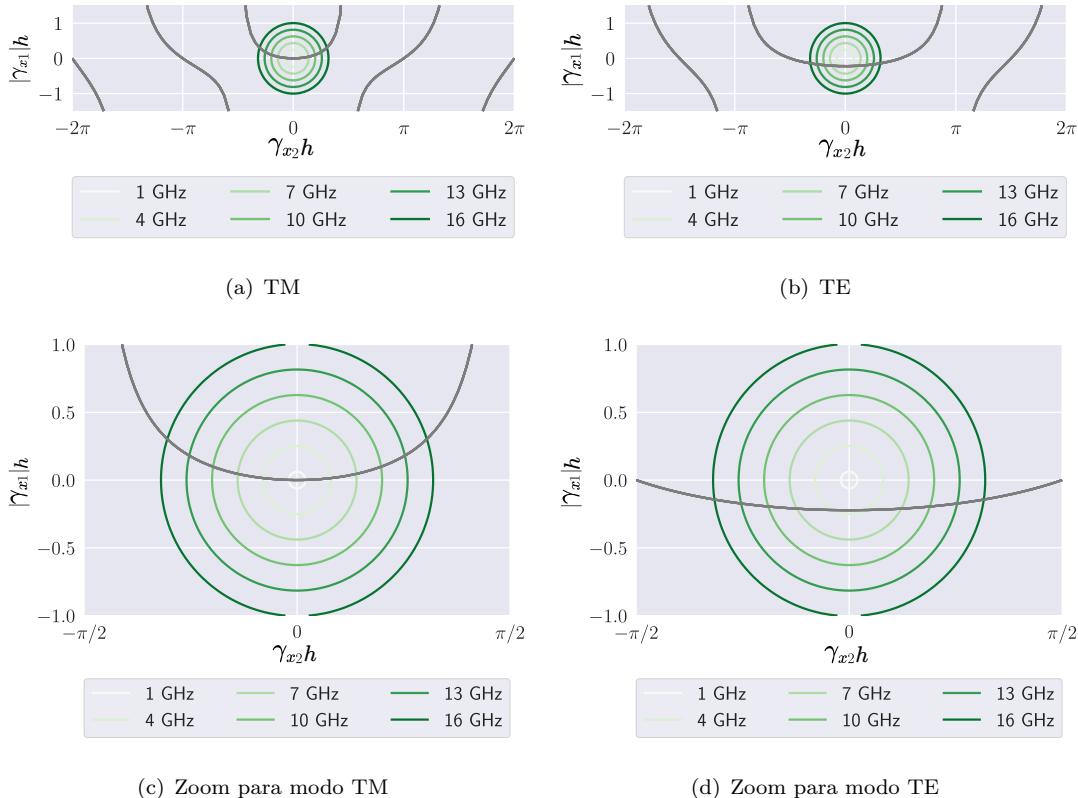


FIGURA 1.7: Curvas de los sistemas de ecuaciones que describen la existencia de ondas superficiales TM y TE, para distintas frecuencias, resuelto para el caso en que el dieléctrico es FR4 ( $\epsilon_r = 4,5$ ).

Obtenidos los valores de  $\gamma_{x_1}$  ( $\alpha_{x_1}$ ) y  $\gamma_{x_2}$ , se obtienen los campos del modo correspondiente de la onda de superficie [1]. En particular, para el análisis del comportamiento de la impedancia, las expresiones de los campos tangenciales a la interfaz resultan de mayor interés, dado que permiten obtener las impedancias de onda en el aire y el dieléctrico, como se indica en las expresiones 1-45a y 1-45b.

$$H_{y_1} = Ae^{j\gamma_{x_1}(x-h)-j\gamma_z z}, \quad E_{z_1} = \frac{A\gamma_{x_1}}{\omega\epsilon_0}e^{j\gamma_{x_1}(x-h)-j\gamma_z z} \implies Z_1 = \frac{\gamma_{x_1}}{\omega\epsilon_0} = j\frac{\alpha_{x_1}}{\omega\epsilon_0}, \quad (1-45a)$$

$$H_{y_2} = 2B \cos(\gamma_{x_2}x)e^{j\gamma_z z}, \quad E_{z_2} = \frac{-2B\gamma_{x_2} \sin(\gamma_{x_2}x)e^{-j\gamma_z z}}{j\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}} \implies Z_2 = \frac{j\gamma_{x_2} \tan(\gamma_{x_2}x)}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}}. \quad (1-45b)$$

Normalizando respecto de la impedancia intrínseca del vacío,  $\eta_0$ , se obtiene, considerando  $\theta_t$  el ángulo de transmisión desde el aire al dieléctrico que recubre el plano conductor,

$$\frac{Z_1}{\eta_0} = j\frac{\alpha_{x_1}}{\omega\epsilon_0\eta_0} = j\frac{\gamma_1 \cos \theta_i}{\omega\epsilon_0\eta_0} = j \cos \theta_i, \quad (1-46)$$

$$\frac{Z_2}{\eta_0} = j\frac{\gamma_{x_2} \tan \gamma_{x_2}x}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}\eta_0} = j\frac{\gamma_2 \cos \theta_t \tan(\gamma_2x \cos \theta_t)}{\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}\eta_0} = j\frac{\cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \tan(\gamma_2x \cos \theta_t). \quad (1-47)$$

Una onda incidente desde el aire, para evitar reflexiones y, por lo tanto, radiación desde la superficie que soporta una onda de superficie, debe estar adaptada a la impedancia de superficie que presenta el dieléctrico, que resulta de evaluar  $Z_2/\eta_0$  en la superficie, por lo que

$$Z_s^{TM} = \left. \frac{Z_2}{\eta_0} \right|_{x=h} = j\frac{\cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \tan(\gamma_2 h \cos \theta_t) = j\frac{\cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \tan(\omega\sqrt{\epsilon_{r_2}\mu_0\epsilon_0}h \cos \theta_t). \quad (1-48)$$

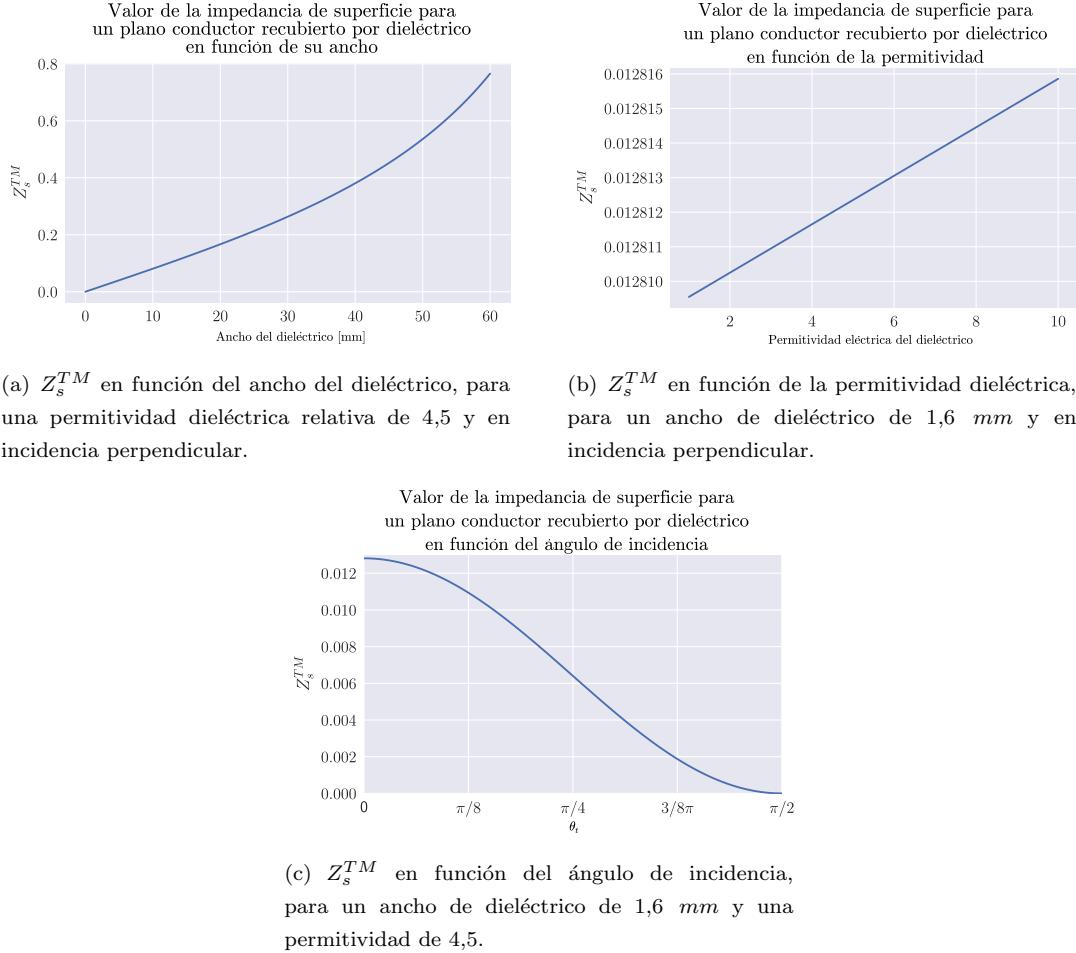


FIGURA 1.8: Valor de la impedancia de superficie en función de sus parámetros.

Esta impedancia es puramente imaginaria positiva<sup>13</sup>, por lo que tiene un comportamiento inductivo, permitiendo la formación de ondas de superficie en modo TM, dado que la constante de atenuación  $\alpha_{x_i}, i = 1, 2$  logra que el campo se concentre cerca de la superficie. Los valores de  $\beta_z$  y  $\alpha_z$  no se ven modificados, pues el aporte del dieléctrico a la reactancia no es lo suficientemente alto. El ángulo  $\theta_t$  se obtiene de las relaciones de Snell (A-4b), por lo que se deduce que el comportamiento es dependiente del ángulo de incidencia, como se muestra en la Figura 1.8(c). Por otro lado, en la Figura 1.8(a) se puede observar que el valor de la impedancia crece a medida que aumenta el ancho del dieléctrico, volviéndose más inductiva, de forma similar a la que se da cuando aumenta la permitividad (Figura 1.8(b)).

Para el caso TE, los campos paralelos a la superficie son:

<sup>13</sup>Si el dieléctrico presentara pérdidas, existiría también un término real [8], por lo que, además de facilitar la propagación de ondas de superficie, si el dieléctrico tiene bajas pérdidas, no aumenta la resistencia de superficie. Además, esta componente inductiva se debe sumar al efecto producido por la componente inductiva de la impedancia de superficie del conductor, debida a la existencia de una profundidad de penetración.

$$E_{y_1} = Ae^{-j\gamma_{x_1}(x-h)-j\gamma_z z}, \quad H_z = -\frac{A\gamma_{x_1}}{\omega\mu_0}e^{-j\gamma_{x_1}(x-h)-j\gamma_z z}. \\ \implies Z_1 = -\frac{\gamma_{x_1}}{\omega\mu_0}, \quad (1-49)$$

$$E_{y_2} = A \sec(\gamma_{x_2} h) \cos(\gamma_{x_2} x) e^{-j\gamma_z z}, \quad H_{z_2} = -\frac{A\gamma_{x_2} e^{j\gamma_z z}}{j\omega\mu_0} \sec(\gamma_{x_2} h) \sin(\gamma_{x_2} x), \\ \implies Z_2 = \frac{j\omega\mu_0 \cot(\gamma_{x_2} x)}{\gamma_{x_2}}. \quad (1-50)$$

Siguiendo la misma metodología que en el caso TM, la impedancia para  $x = h$  resulta:

$$Z_s^{TE} = j \frac{\omega\mu_0 \cot(\gamma_2 h \cos \theta_t)}{\gamma_2 \cos \theta_t}. \quad (1-51)$$

Vale aclarar, sin embargo, que para las frecuencias de trabajo de esta tesis, esta expresión resulta meramente ilustrativa, dado que no es posible contar con ondas de superficie para frecuencias menores a 25 GHz en FR-4 de 1.6 mm de espesor dispuesto sobre un plano de tierra, como se explicó para la Figura 1.7.

## 1.6. Líneas de transmisión

La teoría de líneas de transmisión representa el paso intermedio entre el estudio de campos electromagnéticos y de circuitos de parámetros concentrados, permitiendo considerar el fenómeno de propagación de ondas como una extensión de la teoría de circuitos (aplicable cuando la longitud eléctrica del circuito es mucho menor a la longitud de onda de operación), o como una solución particular de las ecuaciones de Maxwell [1].

Las líneas de transmisión son redes de parámetros distribuidos, donde las corrientes y las tensiones, en contraposición a los circuitos de parámetros concentrados, pueden variar en magnitud y fase, debido a la dimensión física del circuito. El análisis de una línea se puede llevar a cabo estableciendo el comportamiento de los trozos infinitesimales que la componen, dispuestos en cascada para formar la estructura final, de forma que cada uno de ellos se pueda modelar utilizando circuitos de parámetros concentrados independientes de la frecuencia, estableciendo, entonces, impedancias  $Z'$  ( $\Omega/m$ ) y admitancias  $Y'$  ( $S/m$ ) por unidad de longitud, como se muestra, de forma general, en la Figura 1.9.

La impedancia y la admitancia por unidad de longitud se pueden expresar como indican las expresiones de la ecuación 1-52. Se debe tener en cuenta que los subíndices R y L

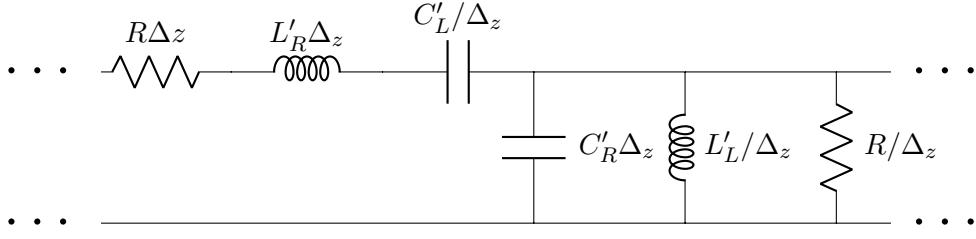


FIGURA 1.9: Circuito equivalente de porción de línea de transmisión.

se deben al comportamiento de «mano izquierda»<sup>14</sup> o «mano derecha» asociado a cada componente. Si  $L'_R$  y  $C'_R$  son nulos, existe sólo un comportamiento «de mano izquierda», donde las velocidades de fase y de grupo son antiparalelas, y donde tanto la permitividad eléctrica  $\epsilon$  como la permeabilidad magnética  $\mu$  son negativas, de forma que el índice de refracción también lo sea, dando lugar a una propagación de ondas en sentido inverso. Cuando  $L'_L$  y  $C'_L$  son nulos, el comportamiento es denominado «de mano derecha», y es el que corresponde a propagación de onda comúnmente analizada. Las componentes que corresponden al comportamiento de mano izquierda no existen de manera independiente, dado que las que generan comportamiento de mano derecha aparecen naturalmente por efectos constructivos. Las resistencias del circuito, por otro lado, representan las pérdidas dieléctricas y conductoras.

$$Z' = j \left( \omega L'_r - \frac{1}{\omega C'_L} \right), \quad Y' = j \left( \omega C'_R - \frac{1}{\omega L'_L} \right). \quad (1-52)$$

Una descripción completa del análisis del caso general, que describe el comportamiento de numerosos metamateriales, se puede consultar en [9]. En adelante se analizará únicamente el caso tradicional, de mano derecha, ya que es el que se aplica al tipo de estructura analizado en este trabajo.

Considerando una línea de transmisión que representa un comportamiento puramente de mano derecha, obteniendo el circuito equivalente de un infinitesimal de línea de la Figura 1.9, aplicando las leyes de Kirchhoff, dividiendo por  $\Delta z$  y aplicando el límite para  $\Delta z \rightarrow 0$ , para obtener expresiones diferenciales, se obtienen las ecuaciones del telegrafista, expresadas en la ecuación 1-53, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia [6]. La solución simultánea de ambas ecuaciones tiene un comportamiento de onda, expresado en 1-54, donde  $\gamma$  es la constante de propagación, cuyo valor se expresa en 1-55.

<sup>14</sup>La expresión «material de mano izquierda» fue utilizada por primera vez por físico ruso Viktor Veselago en 1967, cuando propuso la posibilidad de la existencia de materiales en que la propagación de ondas se daría de forma que el campo eléctrico, el campo magnético y el vector de propagación formaran una triada de mano izquierda [9].

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -Ri(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z). \end{array} \right. \quad (1-53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(z)}{dz^2} + \gamma^2 V(z) &= 0, \\ \frac{d^2I(z)}{dz^2} + \gamma^2 I(z) &= 0. \end{aligned} \quad (1-54)$$

$$\gamma = -j\alpha + \beta = \sqrt{-ZY} = \sqrt{-(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (1-55)$$

En base a esta constante de propagación, es posible definir la velocidad de fase  $v_p$  como

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}, \quad (1-56)$$

que para el caso sin pérdidas resulta

$$v_p = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1-57)$$

Las ecuaciones de onda tienen como solución la superposición de una onda en dirección  $+z$  y otra en dirección  $-z$ , tanto para la tensión como para la corriente, con velocidad de fase  $\omega/\beta$ . La relación entre las componentes de onda que viajan en dirección positiva se conoce como impedancia característica,  $Z_0$ , definida, según los parámetros de una línea de transmisión, en la ecuación 1-58.

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \quad (1-58)$$

Cuando una línea de transmisión es terminada en una impedancia arbitraria  $Z_L$ , se producen fenómenos de transmisión y reflexión de potencia, de manera análoga al caso de incidencia de campos electromagnéticos sobre interfaces entre medios de impedancias intrínsecas diferentes analizado en el Apéndice A. Existe, también en este caso, un coeficiente de reflexión  $\Gamma$ , definido como la relación entre la tensión reflejada y la tensión

incidente, como indica la ecuación 1-59. Cuando el coeficiente de transmisión es nulo, se dice que la carga está adaptada, de modo que  $Z_L = Z_0$ .

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}. \quad (1-59)$$

Si se generaliza el concepto de coeficiente de transmisión a cualquier punto de la línea, y no únicamente al nodo donde se coloca la carga  $Z_L$ , se obtiene el coeficiente de reflexión para cualquier punto  $l$  de la línea a partir del que corresponde al nodo de carga, ubicado en la posición 0, como se indica en la ecuación 1-60 y en la Figura 1.11.

$$\Gamma(l) = \Gamma e^{-2j\gamma l} = \Gamma e^{-2j\beta l} e^{-2\alpha l}. \quad (1-60)$$

La impedancia de entrada también varía con la distancia a la carga, de forma que:

$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l}. \quad (1-61)$$

En la Figura 1.10 se puede observar una gráfica de  $\Gamma$  y  $Z_{in}$  en función de la distancia a la carga, para una línea de impedancia característica  $Z_0$  de  $50 \Omega$ , con una carga de  $100 \Omega$ , considerando pérdidas y constante de propagación arbitrarias.

Variación de la impedancia de entrada y el coeficiente de reflexión, según la distancia a la carga.

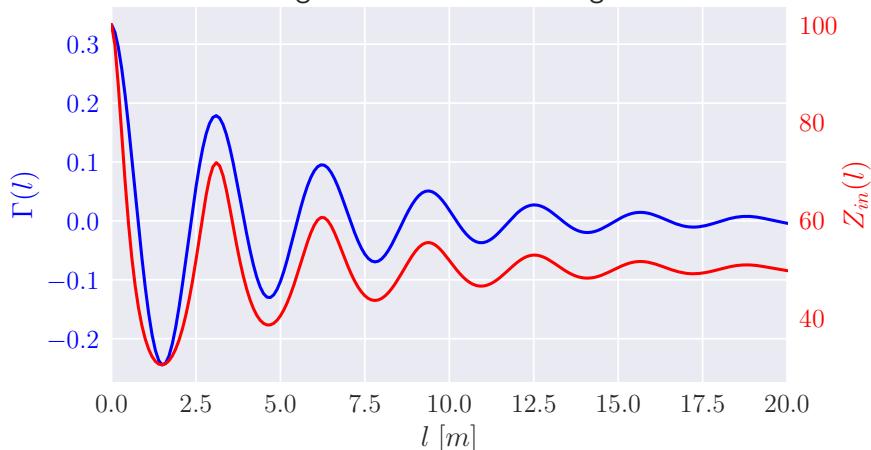


FIGURA 1.10: Impedancia de entrada y coeficiente de reflexión en función de la distancia a la carga, en una línea de transmisión de  $50\Omega$ .

En base a este análisis, resulta útil conocer la matriz de transferencia  $ABCD$  que corresponde a una línea de transmisión ideal. La misma relaciona las tensiones y corrientes en un nodo con las de otro de forma que

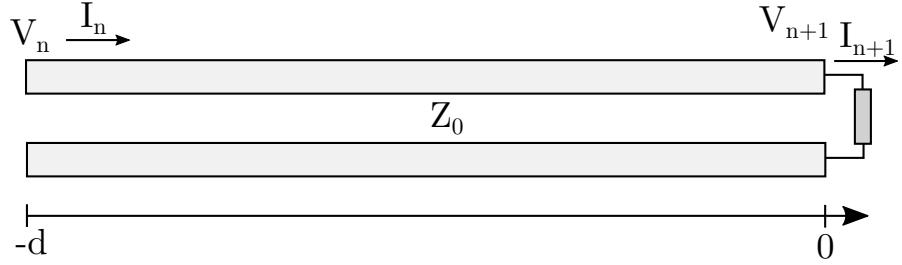


FIGURA 1.11: Línea de transmisión con carga.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (1-62)$$

La deducción de los componentes de la matriz de transferencia requiere del análisis de las ondas incidentes y reflejadas que inciden sobre terminales ubicados a una distancia  $d$  de la carga, que puede ser un cortocircuito (para obtener los valores de  $B$  y  $D$ ) o un abierto (de donde se pueden deducir los valores de  $A$  y  $C$ ).

Dado que la tensión reflejada vista a distancia  $d$  de la carga,  $V^-(d)$ , se calcula como  $-Z_0I^-$ , y que la tensión total sobre dicho nodo resulta de la suma de ambas tensiones (la incidente y la reflejada), para el caso de una carga cortocircuito ( $Z_L = 0$ ), donde la tensión sobre la carga es  $V_{n+1} = 0$ , resulta que:

$$\Gamma = -1 \implies V(d) = V_n e^{-j\gamma d} - V_n e^{j\gamma d} = 2jV_n \sin(\gamma d) = B, \quad (1-63)$$

$$I_n(d) = I_n e^{-j\gamma d} + I_n e^{j\gamma d} = 2I_n \cos(\gamma d) = D. \quad (1-64)$$

De forma similar, para el caso de una carga de tipo circuito abierto,  $Z_L \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma = 1$  y

$$V(d) = V_n e^{-j\gamma d} + V_n e^{j\gamma d} = 2V_n \cos(\gamma d) = A, \quad (1-65)$$

$$I_n(d) = I_n e^{-j\gamma d} - I_n e^{j\gamma d} = 2jI_n \sin(\gamma d) = C. \quad (1-66)$$

En forma normalizada, la matriz resulta [1]

$$\begin{bmatrix} \cos(\gamma d) & \sin(\gamma d) \\ \sin(\gamma d) & \cos(\gamma d) \end{bmatrix}. \quad (1-67)$$

### 1.6.1. Línea *microstrip*

Algunas de las líneas de transmisión más comunes están basadas en tecnologías de circuitos impresos, entre las que se destacan las *striplines* (donde el dieléctrico circundante al conductor es homogéneo), las líneas *microstrip* (donde el dieléctrico circundante es aire en la mitad superior, y otro dieléctrico en la mitad inferior), y las guías de ondas coplanares (donde el plano de tierra y la línea de señal comparten la misma cara del sustrato). Algunas de ellas son esquematizadas en la Figura 1.12. Los costos de fabricación de las mismas suelen ser muy bajos, y ofrecen comodidades para la implantación de componentes discretos, aunque en muchos casos se generan modos indeseados, que pueden ser disminuidos manteniendo el espesor del sustrato en valores despreciables respecto de la longitud de onda, lo que los vuelve frágiles. Además, los sustratos dieléctricos suelen presentar pérdidas que modifican el comportamiento de la señal. Las principales aplicaciones se relacionan con el diseño de filtros microondas, acopladores direccionales, transformadores de impedancia, planos de tierra y redes de distribución de energía de circuitos impresos e integrados [10].

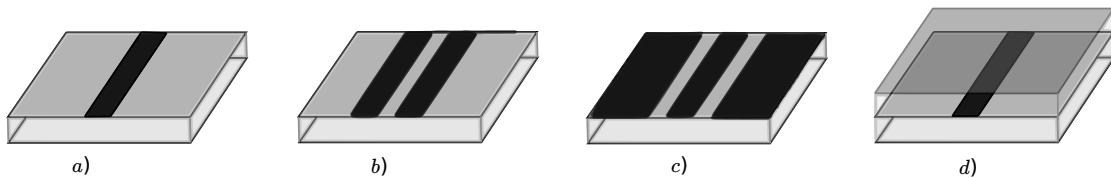
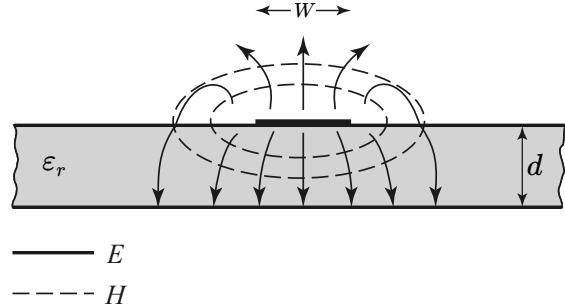


FIGURA 1.12: Tecnologías de líneas de transmisión planares. De izquierda a derecha: *Microstrip*, *twinstrip*, línea coplanar y *stripline*.

Las *striplines*, debido a la homogeneidad del dieléctrico, soportan modos TEM. Las líneas *microstrip*, en cambio, sólo pueden presentar modos TE y TM, aunque en frecuencias bajas tienen un comportamiento que puede denominarse cuasi-TEM, dado que la mayor parte del campo se concentra en el dieléctrico<sup>15</sup>. Un diagrama simplificado de los campos y los parámetros de una línea *microstrip* se muestran en la Figura 1.13

En general, para simplificar el análisis, se considera que la cinta *microstrip* es una *stripline*, donde el dieléctrico tiene una constante dieléctrica efectiva, menor a la constante dieléctrica del sustrato, pero mayor a la del aire, dependiente del ancho del sustrato, el ancho del conductor y la frecuencia de trabajo. La expresión de esta constante es

<sup>15</sup>Un comportamiento puramente TEM impediría el cumplimiento de la condición de fase en la interfaz, dado que las velocidades de propagación en ambos medios es distinta [1]

FIGURA 1.13: Campos de una línea *microstrip* [Basado en representación de [1]].

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left( 1 + 12 \frac{h}{W} \right)^{-1/2} \right). \quad (1-68)$$

## 1.7. Antenas

Una antena es un dispositivo que actúa como fuente de ondas electromagnéticas. Es una interfaz entre el espacio libre y un dispositivo de guiado (como una guía de ondas o una línea de transmisión), y puede ser modelada como una carga que, en general, está adaptada. Su función es recibir o transmitir energía, usualmente optimizando algunas direcciones, y suprimiendo o disminuyendo su valor en otras, para lo que se utilizan distintas tecnologías, entre las que se destacan las antenas de hilo, de apertura y *microstrip*, muchas veces dispuestas en arreglos geométricos y con componentes reflectores [11]. En este trabajo resultarán de mayor importancia las regiones más cercanas al radiador, y el control del comportamiento de los campos en las mismas modificará el comportamiento en la región de Fraunhoffer.

### 1.7.1. Regiones de campo

El espacio que rodea a una antena se suele dividir en tres regiones: Campo cercano reactivo (donde predominan los campos reactivos), campo de radiación cercano (Fresnel, donde la distribución angular de energía depende de la distancia a la antena) y campo lejano (Fraunhoffer, donde la distribución angular de energía es, en términos prácticos, independiente de la distancia al elemento radiante). En general, se considera que la región de campo lejano se encuentra a distancias mayores a  $2D^2/\lambda$ , donde D es la máxima dimensión de la antena, y  $\lambda$  es la longitud de onda de trabajo.

### 1.7.2. Diagramas de radiación

El diagrama de radiación es una representación gráfica o función matemática que representa las propiedades de radiación de una antena como función de las coordenadas espaciales. En general, se especifica para la región de campo lejano, y en función de las coordenadas direccionales  $\theta$  y  $\phi$ , que representan el ángulo de elevación y el azimutal, respectivamente, para una orientación arbitraria del radiador.

En general, se calcula el patrón de potencial o el patrón de campo eléctrico, y se los normaliza respecto de su máximo valor, para luego graficarlos en escala logarítmica o en decibeles.

Sobre el patrón se distinguen lóbulos, clasificados como principal (en la dirección de mayor radiación) y menores (en otras direcciones). El diagrama de radiación de una antena isotrópica, de ser físicamente realizable, se correspondería con una esfera, dado que no existen direcciones privilegiadas. Cuando no existen lóbulos distinguibles en un dado plano, lo cual es común es antenas con simetría cilíndrica, el comportamiento se denomina omnidireccional.

### 1.7.3. Impedancia de entrada

La impedancia de entrada de una antena es la que presenta a la línea de transmisión o guía de ondas que la alimenta. En general tiene una componente resistiva y una componente reactiva, de manera que  $Z_A = R_A + jX_A$ . En general,  $R_A$  tiene dos componentes:  $R_r$ , la resistencia de radiación, y  $R_L$ , la resistencia de pérdidas. Como en general no coincide con la impedancia característica de la línea de transmisión que la alimenta, se aplican métodos de adaptación de impedancias.

### 1.7.4. Conjuntos de antenas

Un grupo de antenas dispuestas geométricamente, y alimentadas de manera tal que conformen un único sistema radiante, conforman un conjunto de antenas. El primer conjunto de antenas usado extensivamente fue la antena Yagui-Uda, inventada en 1926, cuya fase no puede variarse electrónicamente. Recién durante la Segunda Guerra Mundial se inventaron los conjuntos de antena de fase variable, y a partir de 1950, con la invención de los defasadores de ferrita, la modificación de fase completa fue posible [3].

El análisis más sencillo del comportamiento de conjuntos de antenas se presenta al analizar uno formado por antenas de iguales propiedades, cuyas amplitudes y fases pueden ser modificados, tanto en transmisión (a través de mecanismos de desfase)

como en recepción (debido a diferencias e camino y circuitos de desfasaje). En general, el diagrama de radiación se puede calcular en base a la multiplicación del patrón de uno de los elementos y el patrón del arreglo, para el cual se asumen puntos de radiación isotrópicos en la posición de las antenas [11].

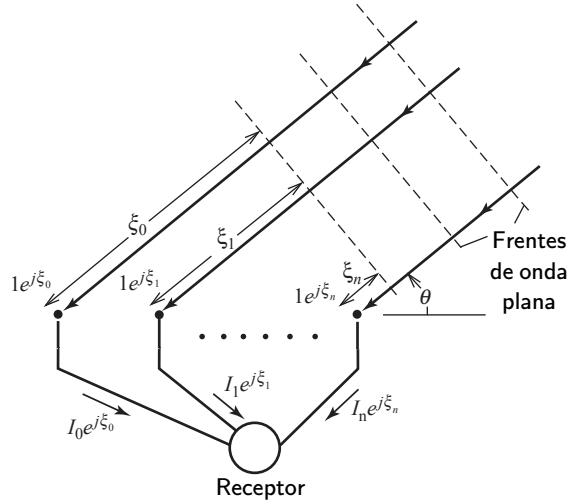


FIGURA 1.14: Incidencia de una onda plana sobre un arreglo de antenas [Basado en la representación del fenómeno en [11]].

El factor de *array*, reemplazando cada elemento por radiadores isotrópicos, se obtiene considerando que una onda plana incide con ángulo  $\theta$  sobre el conjunto, como se muestra en la Figura 1.14. Cada elemento es excitado con una fase  $\xi_i$ , debida a la diferencia de caminos y a las diferencias entre las líneas de transmisión de cada antena, de modo que

$$AF = I_0 e^{j\xi_0} + I_1 e^{j\xi_1} + \dots = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n d \cos(\theta)} = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn\Phi}. \quad (1-69)$$

Normalizando y simplificando la expresión, la misma queda

$$f(\Phi) = \frac{\sin(N\Phi/2)}{N \sin(\Phi/2)} \quad (2\pi - \text{periódica}), \quad (1-70)$$

con  $N$  la cantidad de elementos radiantes. Se observa que si hay una mayor cantidad de elementos radiantes, los lóbulos, tanto secundarios como primarios, tiende a aumentar. Además, al mismo tiempo, la cantidad de lóbulos secundarios también crece (hay  $N-1$  lóbulos secundarios), al mismo tiempo que disminuye la altura de los mismos [3].

### 1.7.5. Acoplamiento mutuo

Cuando se considera acoplamiento mutuo entre los elementos del *array*, la multiplicación del patrón de radiación por el patrón del arreglo ya no es válida. Los elementos interactúan entre sí y alteran sus corrientes, y por lo tanto sus impedancias. La radiación de una antena induce corrientes sobre las antenas cercanas, que también radian e influyen sobre la corriente de la primera antena. Es un efecto de campo cercano.

La impedancia de entrada de un elemento aislado en el espacio se denomina «Impedancia de elemento aislado», o simplemente impedancia de antena. La impedancia de entrada de una antena que está dispuesta en un ambiente con elementos activos se denomina «impedancia activa», y varía según las excitaciones a las que se someta al arreglo de antena. En general, la caracterización de los elementos radiantes sometidos a efectos de acoplamiento mutuo consisten en la obtención de la «impedancia pasiva», que se logra excitando un elemento y conectando a cargas adaptadas los demás.

Hay 3 efectos responsables del acoplamiento mutuo en conjuntos de antenas:

- Acoplamiento espacial entre elementos.
- Acoplamiento espacial por *scattering* en elementos cercanos.
- Acoplamiento por la red de alimentación, que puede ser minimizado usando técnicas de acoplamiento apropiadas en cada elemento.

Si el acoplamiento en la red de alimentación se minimiza, se puede considerar que cada antena está alimentada independientemente con una tensión  $V_m^g$ , cuyo generador tiene una impedancia asociada  $Z_m^g$ . Sobre la antena se genera una diferencia de tensión  $V_m$ , y una corriente  $I_m$ , que incluye los efectos de acoplamiento. Un *array* de N elementos es entonces una red de N puertos, representada por la ecuación 1-71, donde todos los elementos que pertenecen a la diagonal de la matriz  $Z$  son las impedancias de elemento aislado, mientras que los elementos fuera de la diagonal representan las impedancias mutuas  $Z_{mn}$ , que no es más que la tensión impresa sobre el elemento  $m$  por la corriente  $n$ , cuando todos los demás terminales están a circuito abierto ( $Z_{mn} = V_m/I_n|_{I_i=0} \forall i \neq n$ , lo que significa que la corriente es nula para todo el cuerpo de la antena). En general estos cálculos se realizan de forma numérica, tras las correspondientes simulaciones, y considerando a las antenas en modo transmisor [12].

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{12} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{1N} & Z_{2N} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix}}_Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}. \quad (1-71)$$

Si suponemos que la antena no excitada tiene una impedancia de carga  $Z_j^g$  sobre sus terminales (y que el generador de esa antena está apagado,  $V_j^g = 0$ ), la corriente entrante generada sobre el elemento  $j$  debido a la radiación del elemento  $i$  será tal que  $V_j = -Z_j^g I_i$ , por lo que

$$V_j = -Z_j^g I_j = Z_{jj} I_j + \sum_{i=1, i \neq j}^N Z_{ji} I_i. \quad (1-72)$$

En el caso en que se consideren sólo dos antenas, de la ecuación 1-72 para dos elementos, podemos obtener la expresión de la corriente en el segundo elemento, que da lugar a la expresión de la impedancia total vista por el primer elemento, por efecto propio y de la radiación del segundo, como muestra la ecuación 1-73, donde se asumió que la matriz  $Z$  es simétrica, y que permite deducir la ecuación 1-74, que es la impedancia de entrada de cada elemento, en función de impedancias mensurables.

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = -Z_2^g I_2 = Z_{22} I_2 + Z_{21} I_1. \end{cases} \quad (1-73)$$

$$I_2 = \frac{-Z_{21} I_1}{Z_{22} + Z_2^g} = \frac{-Z_{12} I_1}{Z_{22} + Z_2^g} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{I_1} = Z_1 = Z_{11} - \frac{(Z_{12})^2}{Z_{22} + Z_2^g}. \quad (1-74)$$

### 1.7.6. Antenas *microstrip*

Las antenas *microstrip* cumplen varias de las especificaciones más importantes que imponen las diversas aplicaciones de antenas: Pueden ser pequeñas, tienen bajo peso, son económicas y fáciles de fabricar, y tienen bajo perfil, lo que permite adaptarlas a numerosos diseños. Suelen, sin embargo, tener un alto Q, ya que funcionan debido a sus propiedades resonantes, suelen tener baja eficiencia, son de baja potencia, y presentan polarización impura.

En general, el diseño de una antena *microstrip* se realiza de forma tal que el máximo de radiación se concentre en la dirección normal al parche, aunque también es posible

lograr radiación en dirección paralela al mismo, dependiendo de la geometría elegida. El sustrato elegido para la fabricación suele influir en el ancho de banda y la eficiencia: Una mayor permitividad dieléctrica genera una menor eficiencia, un menor ancho de banda y, si se ignora el efecto de ondas de superficie, un menor acoplamiento con elementos cercanos, debido a que los campos se encuentran contenidos en el sustrato.

Existen múltiples formas de alimentación de una antena *microstrip*, entre las que se destacan la línea microstrip de alimentación, que suele dar lugar a radiación espuria y a polarización cruzada, debido a la asimetría que impone; y la conexión directa de cable coaxil, donde el conductor central del mismo se conecta en un punto del parche, y la malla se conecta al plano de tierra que funciona como reflector, ubicado en la cara opuesta del sustrato.

Existen varios métodos de análisis de antenas *microstrip*, entre los que se destacan, por su sencillez, el modelo de líneas de transmisión y el modelo de cavidades resonantes, principalmente aplicables a parches rectangulares, que son los de interés en este trabajo. Sin embargo, estos métodos no consideran acoplamiento mutuo ni ondas de superficie, por lo que resultan incompletos [13].

#### 1.7.6.1. Modelo de líneas de transmisión

El modelo de líneas de transmisión es el más sencillo y el que ofrece una mayor intuición física, ya que usa los conceptos fundamentales de líneas *microstrip*, analizados en la Sección 1.6.1. Consiste en considerar a la antena como dos aperturas radiantes de ancho  $W$  y altura  $h$  separadas una distancia  $L$  por una línea de transmisión de impedancia característica conocida  $Z_0$ , cada una de las cuales puede ser representada, en el modelo, como una conductancia  $G$  y una susceptancia  $B$ , como se indica en la Figura 1.15, que se obtienen del modelo de apertura radiante, que puede consultarse en [11].

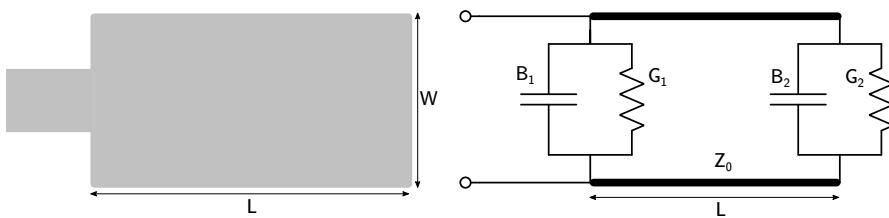


FIGURA 1.15: Circuito equivalente, según el modelo de líneas de transmisión, de una antena *microstrip*.

Al igual que en el caso de las líneas *microstrip*, se debe considerar una constante dieléctrica efectiva  $\epsilon_{r_{eff}}$ , que depende no sólo del ancho del sustrato, sino también de la frecuencia, debido a que a mayor frecuencia hay una mayor concentración de campo sobre el dieléctrico, otorgando mayor prevalencia, en el cálculo de la constante dieléctrica

efectiva, a la constante dieléctrica del sustrato que a la del aire circundante. La expresión es la misma utilizada para líneas *microstrip* (ecuación 1-68), siempre y cuando  $W > h$ .

El efecto de *fringing* en los bordes del parche, que da lugar a un aumento del tamaño eléctrico, se modelan mediante la consideración de una extensión en la línea de transmisión que une a las aperturas radiantes, en función de la altura del sustrato. El cambio en la extensión de la línea de transmisión sugiere un cambio en la frecuencia de resonancia de la antena sin una modificación del tamaño físico. En la ecuación 1-75 se muestra una expresión aproximada de la variación del tamaño eléctrico, de forma que la longitud efectiva de la línea de transmisión resulta  $L_{eff} = L + 2\Delta L$ . Esta expresión se utiliza para la obtención de la frecuencia de resonancia, como indica la expresión 1-76 para el modo dominante,  $TM_{010}$ .

$$\Delta L = h \cdot 0,412 \frac{(\epsilon_{eff} + 0,3)(W/h + 0,264)}{(\epsilon_{eff} - 0,258)(W/h + 0,8)}. \quad (1-75)$$

$$f_{r010} = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{c/\sqrt{\epsilon_{eff}}}{2L_{eff}} = \frac{1}{2L_{eff}\sqrt{\epsilon_{eff}}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{1}{2(L + 2\Delta L)\sqrt{\epsilon_{eff}}\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \quad (1-76)$$

La impedancia de entrada de una antena *microstrip* depende fuertemente de la posición de la alimentación, además de los valores de  $G$  y  $B$  de los *slots* radiantes [14]. Cuando la alimentación se realiza mediante una cinta *microstrip*, se suele terminar la misma en el interior del parche, a una distancia  $y_0$  del borde, como se indica en la Figura 1.16, permitiendo una mejor adaptación, aunque introduciendo una capacidad de juntura que afecta a la frecuencia de resonancia. La distancia del punto de alimentación al borde del parche será menor a la mitad de la longitud total del parche, en lo que se identificó como «zona de adaptación» en la misma figura.

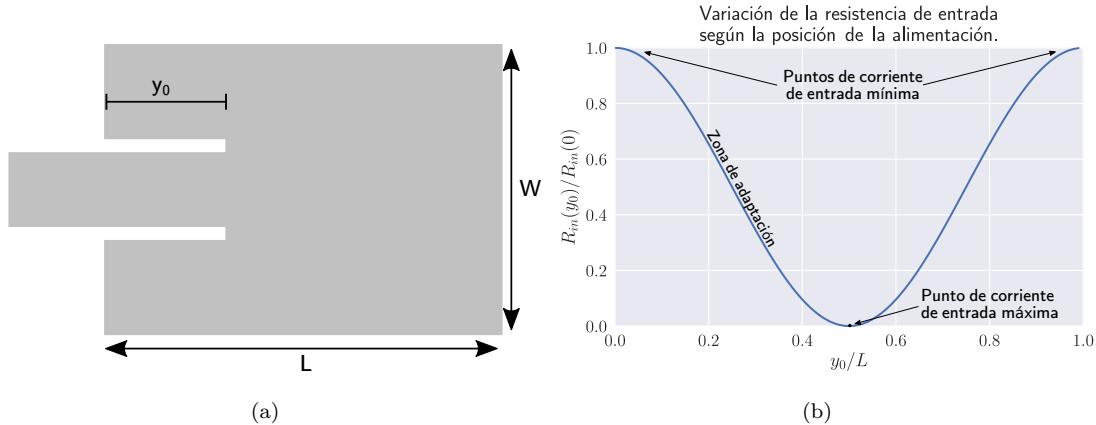


FIGURA 1.16: Esquema y gráfica del comportamiento de la impedancia de entrada según la posición de la alimentación.

El factor de antena, el ancho de banda y la eficiencia son valores interdependientes, y entre ellos se presenta una relación de compromiso. El factor de antena representa las pérdidas de la misma, en general dominadas por la radiación (relacionada a la conductancia asociada a las aperturas radiantas), la conducción (en función de la conductividad del metal), las pérdidas dieléctricas (expresada según la tangente de pérdidas) y las ondas de superficie (despreciables si el sustrato es demasiado fino). Además, se debe tener en cuenta la adaptación de la antena, que limita fuertemente el ancho de banda de uso. En general, se observa que [11] a mayor volumen de la antena, el ancho de banda aumenta. Un aumento de la permitividad dieléctrica genera una disminución del ancho de banda, debida a la disminución de los campos de borde (*fringing*) y una disminución de la eficiencia de radiación, dado que da lugar a antenas de menor tamaño. Un sustrato de mayor constante dieléctrica, entonces, da lugar a antenas de menor volumen, lo cual genera un menor ancho de banda.

#### 1.7.6.2. Modelo de cavidades multimodo

El modelo de cavidad resonante se utiliza principalmente para predecir el comportamiento en modos superiores de la antena. Para ello se considera que la región dieléctrica bajo el parche consiste en una cavidad cargada dieléctricamente, limitada por conductores eléctricos en las caras superior e inferior, y por conductores magnéticos en las caras laterales. Esta configuración conlleva a una impedancia de entrada puramente reactiva, incompatible con el comportamiento radiante del sistema, pero consistente con el comportamiento de otros parámetros. Para considerar las pérdidas por radiación, se añaden efectos de pérdidas dentro de la cavidad, relacionados con el factor de antena correspondiente.

La consideración de paredes laterales como conductores magnéticos deviene de la consideración de la disposición de las cargas sobre el parche conductor y sobre el plano de tierra, donde se asume que el espesor del dieléctrico es lo suficientemente pequeño como para que no se presenten modos superiores sobre el eje vertical. Las cargas sobre la cara inferior del parche son atraídas por las cargas opuestas correspondientes en el plano de tierra, y su concentración genera una repulsión, hacia la cara superior, a otras cargas de la misma polarización, generando una corriente superficial en cada cara, como se indica en la Figura 1.17. Al disminuir el ancho del sustrato, el efecto de atracción del plano del tierra supera, en magnitud, al efecto de repulsión por la concentración de cargas en la cara inferior del parche, por lo que el flujo decrece, pudiendo considerarse nulo. Dado que el flujo de cargas, a través de los bordes, entre la cara superior y la inferior del parche metálico dispuesto sobre el sustrato, es el responsable del campo magnético tangencial a los bordes, la desaparición de dicho flujo disminuiría considerablemente este campo, permitiendo asumir que las paredes se comportan como conductores magnéticos. La baja altura del sustrato, además, permite considerar sólo las configuraciones TM para las frecuencias de interés, dado que, como se explicó antes,  $h \ll \lambda$ .

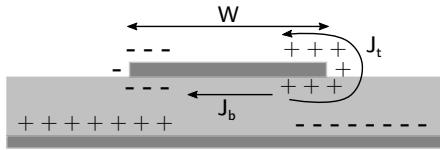


FIGURA 1.17: Corrientes sobre el parche en una antena *microstrip*, según el modelo de cavidad, basado en la representación en [11].

La obtención de los campos se detalla en [14], donde, considerando las hipótesis descritas antes, asumiendo que el vector de potencial  $\mathbf{A}$  tiene que cumplir la ecuación de Helmholtz (1-13), y utilizando separación de variables, se obtienen soluciones para distintos modos, todos transversales magnéticos, con frecuencias de resonancia dadas por 1-77, donde  $n, m$  y  $p$  son los índices del modo, uno por coordenada. El modo dominante, dado que  $h < L$  y  $h < W$ , es el  $TM_{010}$ , cuya distribución de campos se muestra en la Figura 1.18.

$$(f_r)_{nmp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{W}\right)^2}. \quad (1-77)$$

A pesar de que hay cuatro aperturas en una antena *microstrip* rectangular, sólo dos, las radiantes, aportan significativamente a la radiación en el modo principal, dado que lo radiado por las otras dos se cancelan sobre los planos principales. Las paredes separadas aproximadamente  $\lambda/2$  tienen campos en direcciones opuestas en el mismo momento, por

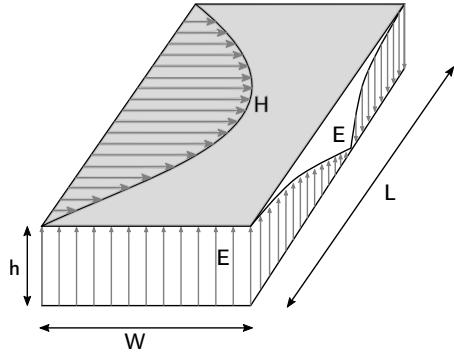


FIGURA 1.18: Distribución de campos eléctrico y magnético en la cavidad de *microstrip*, para el modo  $TM_{010}$ .

lo que se suman en la dirección normal al parche, dando lugar a un comportamiento *broadside*.

Un aspecto importante del análisis por el modelo de cavidad radica en las densidades de corriente equivalentes. Según lo descripto antes, existe una corriente,  $\mathbf{J}$ , sobre la superficie del parche. Debido a que la polarización es TM, sobre las aperturas laterales debe existir también una densidad de corriente eléctrica,  $\mathbf{J}_s$ , y una densidad de corriente magnética,  $\mathbf{M}_s$ , de modo que, en función de los campos en las aperturas,

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}_a, \quad \mathbf{M}_s = -\hat{n} \times \mathbf{E}_a \quad (1-78)$$

Según las hipótesis dadas antes, y como se muestra en la Figura 1.18, la magnitud del campo magnético tangencial a las paredes es despreciable, de modo que la corriente sobre las paredes,  $\mathbf{J}_s$ , también lo es. La corriente sobre el parche, debido a la baja distancia con el plano de tierra, es baja, por lo que también puede considerarse despreciable. De esta forma, la única densidad de corriente apreciable es  $\mathbf{M}_s$ . El efecto del plano de tierra se puede tener en cuenta considerando teoría de imágenes. Según la misma, dado que se trata de un conductor eléctrico, las corrientes magnéticas imagen tienen el mismo sentido que las originales, de modo que la densidad de corriente magnética equivalente resulta el doble que la original, como se expresa en la ecuación 1-79, y se observa en la Figura 1.19.

$$\mathbf{M}_s = -2\hat{n} \times \mathbf{E}_a. \quad (1-79)$$

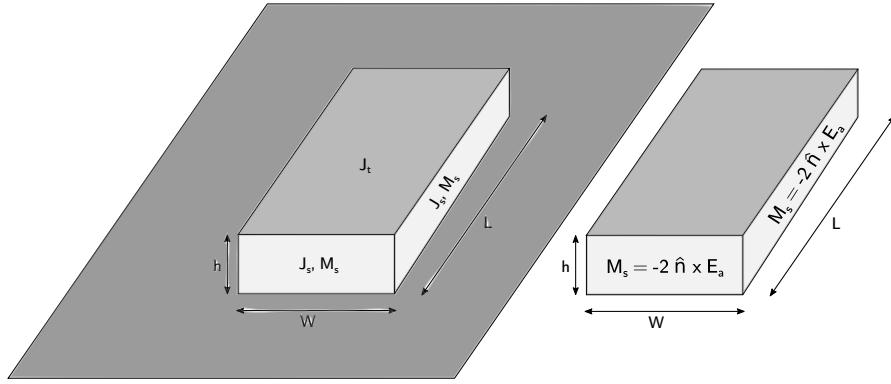


FIGURA 1.19: Densidades de corrientes eléctricas y magnéticas en una antena *microstrip*.

Se puede considerar, entonces, que cada apertura actúa como un dipolo magnético con densidad de corriente  $\mathbf{M}_s$ . Cuando las aperturas están separadas una distancia de  $\lambda/2$ , forman un arreglo de dos elementos, que tiene un comportamiento *broadside*.

### 1.7.7. Acoplamiento mutuo en antenas *microstrip*

El acoplamiento mutuo está determinado principalmente por los campos que existen sobre la interfaz dieléctrico-aire: la onda espacial (decrece como  $1/\rho$ ), los campos cercanos de superior (decreciendo como  $1/\rho^2$ ), la onda de superficie (con dependencia de tipo  $1/\rho^{1/2}$ ) y las ondas de tipo *leaky* (con dependencia exponencial decreciente) [14]. A mayor distancia del elemento radiante fuente, las ondas de superficie son las que tienen carácter dominante, siempre que en esa dirección existan [15]. En general, si la distancia entre los elementos radiantes es grande (mayor a  $0,8\lambda$ ), la influencia de las ondas de superficie es baja y el acoplamiento es por tanto bajo. Aún así, si el conjunto es grande, la suma de los efectos de los distintos parches puede dar lugar a efectos de acoplamiento significativos, incluso entre elementos no adyacentes [16]. Como en todo conjunto de antenas, el acoplamiento mutuo es función, además de la distancia, de la posición entre los elementos radiantes.

En un *array* planar de antenas se deben considerar la amplitud y la fase de la onda incidente. Si se ubican en forma colineal sobre el plano anche, el acoplamiento mutuo entre las antenas es menor al que se observa si se ubican de forma colineal sobre el plano E (Figura 1.20), [17], [13], y el aumento de la distancia entre los parches reduce el acoplamiento [16]. Si los elementos se ubican en forma colineal sobre el plano E, el decrecimiento del parámetro  $S_{12}$  es mucho más lento, debido a la presencia de ondas de superficie, comenzando a partir del modo TM, que no posee frecuencia de corte inferior, y aumentando con la aparición de modos TE y TM de orden superior, fruto del aumento de espesor del sustrato y el crecimiento de la constante dieléctrica [15]. La ubicación sobre

el plano H genera que las ondas responsables del acoplamiento sean de polarización TE, mientras que la ubicación sobre el plano E genera que las mismas sean de polarización TM, que es la polarización dominante en las antenas *microstrip*. Un aumento en el ancho del sustrato permitiría la aparición de modos TE, generando un mayor acoplamiento en el arreglo sobre el plano H.

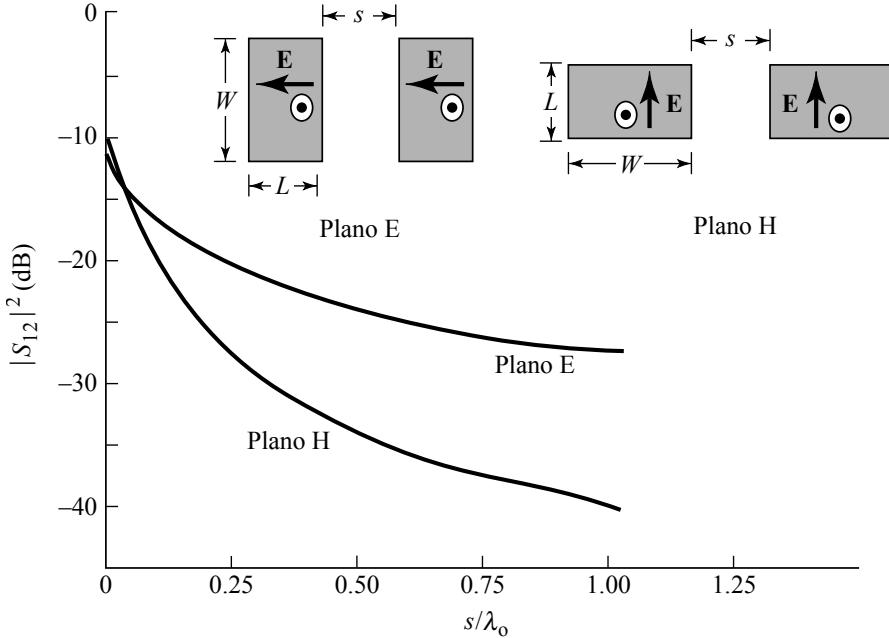


FIGURA 1.20: Acoplamiento mutuo entre antenas *microstrip*, para posición colineal en plano E y plano H. Parámetros: W: 10.57 cm, L: 6.55 cm, h: 0.1588 cm,  $\epsilon_r$ : 2.55,  $f_r$ : 1.410 MHz [13].

Según [16], los efectos de onda de superficie son importantes cuando el valor de  $\epsilon_r$  del sustrato es alto, y si las pérdidas son bajas, la onda de superficie se mantiene en un valor estable cuando se aumenta la distancia [18]. Esto hace que el acoplamiento mutuo entre las antenas sea mayor, porque existe una onda de superficie notoria. Por otro lado, según [19], si el ancho del dieléctrico es bajo, las ondas de superficie son despreciables. Para separaciones pequeñas, los efectos de campo cercano son los que dominan; en la zona intermedia ( $0.4\lambda < d < 0.8\lambda$ ), los efectos de la onda espacial directa son visibles, y en la zona más lejana sólo son reconocibles los efectos originados por las ondas de superficie [15].

La búsqueda de antenas de menor tamaño (aumentando la constante dieléctrica del sustrato) y mayor ancho de banda (aumentando el ancho del dieléctrico) tiene como obstáculo la relación de compromiso con el acoplamiento causado por ondas de superficie, que son amplificadas cuando la constante dieléctrica aumenta o el sustrato es de mayor altura. En el caso de los llamados *phased arrays* de antenas *microstrip*, el acoplamiento mutuo genera, además de modificaciones en el diagrama de radiación, una limitación en el ángulo de escaneo y puntos ciegos [20].

## Capítulo 2

# Fundamentos de estructuras de EBG

### 2.1. Introducción: Metamateriales, materiales periódicos y EBGs

La definición de metamaterial aún está en discusión aunque, en términos generales, la más aceptada indica que son estructuras electromagnéticas artificiales efectivamente homogéneas que presentan propiedades que no se encuentran en la naturaleza [9]. Los materiales EBG (de banda prohibida electromagnética, *Electromagnetic Bandgap*), PBG (de banda prohibida fotónica, *Photonic Bandgap*) o cristales fotónicos son un tipo de estructura artificial, dieléctrica o metalodieléctrica, en algunos casos clasificadas como metamateriales, con capacidades para controlar ondas electromagnéticas [21] a partir de una variación periódica en el espacio de la constante dieléctrica  $\epsilon$  o, en términos más generales, de las propiedades de propagación electromagnética del medio. Tienen la capacidad de permitir la propagación en direcciones determinadas, o de impedirla completamente, debido que presentan una banda prohibida electromagnética, concepto análogo al de banda prohibida electrónica que controla el movimiento de ondas de electrones que viajan en un potencial periódico cristalino.

La condición de homogeneidad efectiva de los metamateriales se cumple si las estructuras que forman al EBG están a distancias mucho menores a la longitud de onda guiada incidente,  $\lambda_g$  [9], de forma que la naturaleza de la estructura básica que se periodiza, denominada celda unitaria, determine parámetros constitutivos ( $\epsilon$  y  $\mu$ ) electromagnéticamente uniformes en la dirección de propagación, para la frecuencia de interés. En función de la relación entre estos parámetros constitutivos, las ondas electromagnéticas

que lo atraviesan tienen comportamientos diferentes, como se muestra en la Figura 2.1. El estudio de estructuras periódicas permitió, entonces, la fabricación de materiales con características en los cuatro cuadrantes del plano  $\mu-\epsilon$ .

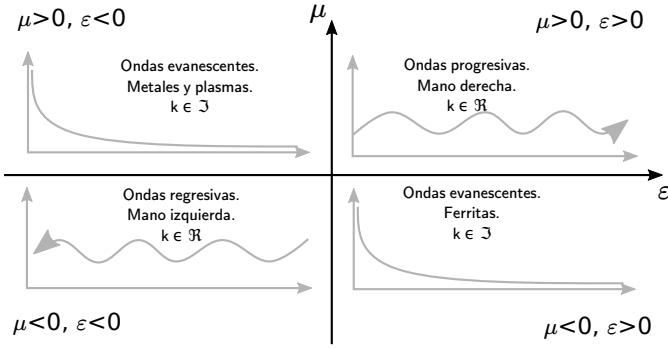


FIGURA 2.1: Tipos de ondas en función de los valores de  $\epsilon$  y  $\mu$ .

A fines del siglo XVIII, el físico estadounidense David Rittenhouse observó que algunos de los colores del espectro de luz visible desaparecían cuando una lámpara era vista a través de un pañuelo [22], mostrando por primera vez que un medio discontinuo puede presentar propiedades de transmisión diferentes en función de la frecuencia incidente. El estudio teórico del comportamiento de ondas electromagnéticas en medios periódicos comenzó a principios del siglo XX, aunque no fue hasta finalizada la segunda guerra mundial que se formalizaron algunos conceptos. Ya en 1919, Guglielmo Marconi y Charles Samuel Franklin utilizaron una estructura de conductores horizontales que operaban como una superficie reflectiva para cierta frecuencia, que podría considerarse la primera superficie selectora de frecuencias (FSS).

En 1946, Louis Brillouin publicó su libro sobre ondas mecánicas, «*Wave propagation in periodic structures: Electric filters and crystal lattices*» [23], donde demostró que un arreglo o *array* periódico impone restricciones a los vectores de onda  $\gamma$  que pueden propagarse en él, dado que el mismo establece condiciones de contorno para los modos permitidos. Aquellas ondas que no cumplen las condiciones derivadas de la periodicidad de la estructura, no son capaces de propagarse.

En 1968, el físico ruso Viktor Veselago describió por primera vez, de forma teórica, la posibilidad de que existieran sustancias naturales con índice de refracción negativo, denominados LHS (*Left Handed Substances*, sustancias de mano izquierda), cuya permitividad eléctrica y permeabilidad magnética fueran simultáneamente negativas, de modo que la velocidad de fase de una onda que se propagara por ese medio resultara antiparalela a la velocidad de grupo. Treinta años más tarde, a fines de la década de 1990, Smith propuso la primera forma de fabricación de un medio con esas características en una banda limitada de frecuencia, utilizando SSRs (*Split-ring resonators*, resonadores de aro dividido), responsables de la permeabilidad magnética negativa, y

cables conductores, responsables de la permitividad eléctrica negativa, ubicados en forma periódica, y estudiados previamente por Pendry (Figura 2.2). Recién en el año 2000 se construyó el primer metamaterial sobre las propuestas de Smith, mostrado en la Figura 2.3, y varios experimentos confirmaron refracción negativa en los mismos. Hasta la fecha, no han sido encontrados materiales naturales con este comportamiento.

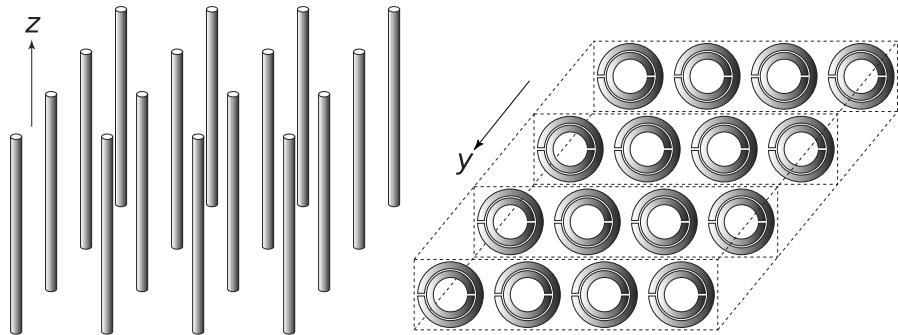


FIGURA 2.2: Metamateriales propuestos por Pendry. A la izquierda, un WSM (*Wire Screen Medium*), que posee  $\epsilon < 0$  y  $\mu > 0$  cuando el campo eléctrico es longitudinal a los cables, para un rango de frecuencias determinado. A la derecha, un medio de SRR, que posee  $\epsilon > 0$  y  $\mu < 0$  cuando el campo magnético es perpendicular al eje de los anillos, para una frecuencia determinada [9].

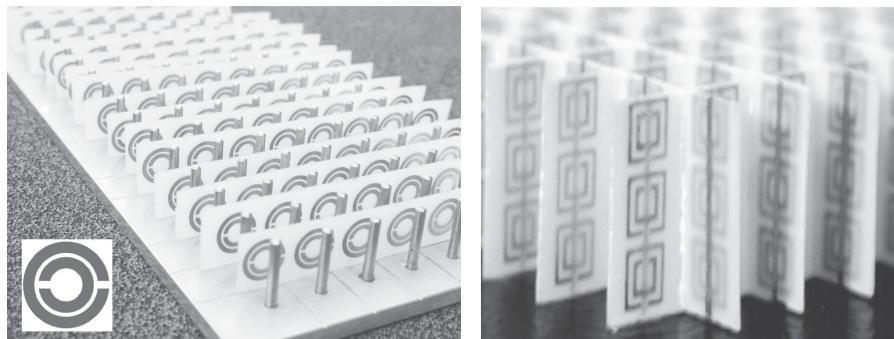


FIGURA 2.3: Estructuras metamateriales propuestas por Smith [9].

En el contexto de una línea de investigación, en principio independiente de los trabajos previos de Veselago, la primera descripción de estructuras dieléctricas periódicas con una banda prohibida completa fue dada, en 1990, por Ho, Chan y Soukoulis, en Iowa, Estados Unidos, quienes propusieron un conjunto periódico de esferas dieléctricas, dispuestas en forma de capas. Para un rango amplio de radios de esferas, el efecto de banda prohibida se daba en todas direcciones. Posteriormente, Yablonovitch divisó una estructura cristalina simétrica de más fácil fabricación, que consistía en la producción de tres agujeros cilíndricos en un prisma dieléctrico, repetido periódicamente. Demostró, además, usando dichas estructuras, que la existencia de una banda prohibida electromagnética podía ser predicha teóricamente, en base, principalmente, a la constante de periodicidad del dieléctrico artificial.

Los trabajos de Yablonovitch, en estructuras de banda prohibida electromagnética, y Pendry, en metamateriales de índice de refracción negativo, se hicieron sobre estructuras con banda de interés en microondas, pero bajo modelos fotónicos, gracias a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell. Esto permitió el uso de distintas técnicas conocidas y desarrolladas durante el siglo XX en microondas para el diseño de materiales fotónicos de estas características a partir de finales de la década de 1990, principalmente en ámbitos de investigación de ciencias básicas.

Al mismo tiempo, comenzaron los estudios sobre las denominadas «superficies electromagnéticas» (*electromagnetic surfaces*), que consisten en superficies texturadas, generalmente conductoras (en contraposición a los trabajos tridimensionales) que imponen condiciones de contorno particulares, capaces de lograr cambiar la polarización de una onda incidente, influir sobre las ondas de superficie y controlar la fase de reflexión, actuando como estructuras de banda electromagnética bidimensionales. La más simple consiste en una placa metálica coarrugada, como la mostrada en la Figura 2.4(a), de forma que las variaciones de altura sean de  $\lambda/4$ , que puede comportarse como una «superficie blanda» (*soft surface*) o una «superficie dura» (*hard surface*), en función de la polarización de la onda que se propaga<sup>1</sup>. Los primeros trabajos sobre estructuras bidimensionales con comportamiento de banda prohibida electromagnética dieron lugar a las denominadas FSS (*Frequency Selective Surfaces*, superficies selectoras de frecuencias) [24]. En 1999, Sievenpiper [25] propuso, en su tesis doctoral, estructuras superficiales compactas de alta impedancia, de manera que no fuera necesario el uso de una distancia de  $\lambda/4$  entre la superficie superior y la inferior para lograr el efecto deseado, dado que se cargaba capacitivamente a la estructura [26] [27]. Estas nuevas superficies periódicas consisten en un arreglo metalodieléctrico de subestructuras denominadas «hongos» (*mushrooms*), como se muestra en la Figura 2.4(b), y proveen condiciones de borde de alta impedancia para polarizaciones TE y TM al mismo tiempo.

El principal interés práctico de las estructuras propuestas por Sievenpiper radica en que actúan como conductores magnéticos artificiales, es decir, tienen una fase de reflexión nula para ondas incidentes, al mismo tiempo que presentan una banda prohibida electromagnética para las ondas de superficie. Esto se puede explicar a baja frecuencia considerando un modelo cuasiestático, dado que la distancia entre los parches conductores de la capa superior dan lugar, debido a la distancia que los separa, a una capacidad. La corriente que circula entre parches vecinos por efecto de una onda de superficie da lugar, análogamente, a una inductancia. Cuando el circuito resonante paralelo que forman resuena, la impedancia aumenta, dando lugar a una banda prohibida. Para frecuencias

<sup>1</sup>Si el campo eléctrico es perpendicular a las ranuras, la hendidura de profundidad  $\lambda/4$  actúa como una línea de transmisión de cuarto de onda cortocircuitada, lo que, en la parte superior de las ranuras, se convierte en un circuito abierto, actuando como una superficie de alta impedancia. Si, en cambio, el campo eléctrico es paralelo a las ranuras, la impedancia que presenta es baja.

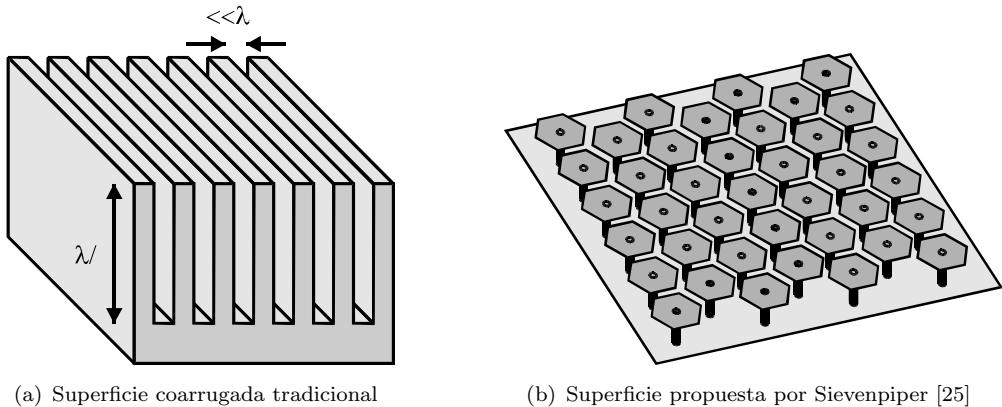


FIGURA 2.4: Superficie coarrugada tradicional para lograr superficies blandas y duras, y superficie propuesta por Sievenpiper [25].

menores a la de resonancia, la superficie es inductiva y soporta ondas TM, mientras que para frecuencias mayores a la misma, la superficie es capacitiva, lo que permite la existencia de ondas TE. La explicación para las bandas prohibidas en mayores frecuencias requiere un análisis de redes y campos.

En base a la propuesta de Sievenpiper, y en búsqueda de una mayor facilidad de fabricación, en 2001 Yang propuso la aplicación de los conceptos de superficies selectoras de frecuencias (FSS) con la intención de lograr un comportamiento similar, pero evitando el uso de vías entre el plano conductor inferior y las estructuras ubicadas en la capa superior. Estas nuevas estructuras uniplanares son de más fácil fabricación, reduciendo al mismo tiempo el costo, aunque los anchos de banda prohibida electromagnética para ondas de superficie se redujeron ampliamente. El bajo costo, el bajo peso y el bajo perfil de estas estructuras las volvieron de particular interés en el diseño de antenas.

## 2.2. Difracción de Bragg

Los primeros trabajos sobre cristales fotónicos y estructuras de banda prohibida electromagnética se basaron en el fenómeno de difracción de Bragg [9]. El mismo requiere que la periodicidad del material sea de  $n\lambda_g/2$ , con  $\lambda_g$  la longitud de onda guiada de la misma, dado que las ondas que se propagan y son difractadas por los elementos de capas adyacentes interfieren destructivamente para ciertos ángulos de incidencia, dando lugar a un rechazo neto de la energía incidente y, por lo tanto, a velocidad de grupo  $V_g$  nula.

Como se muestra en la Figura 2.5 para incidencia normal, sin importar qué tan pequeñas son las reflexiones sobre cada uno de los elementos del sistema periódico, la reflexión completa de una estructura semi-infinita resulta:

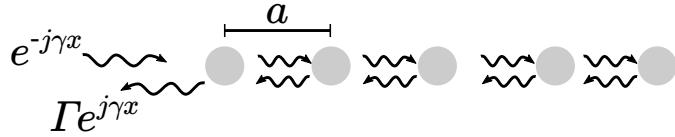
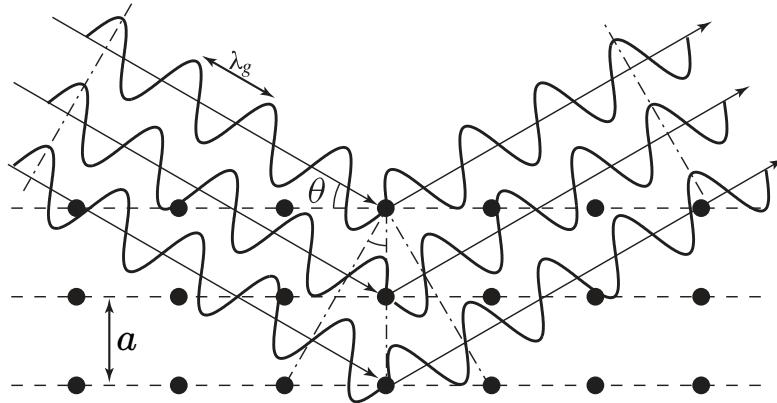


FIGURA 2.5: Incidencia de una onda electromagnética y efecto de Bragg.

$$\Gamma_t = \Gamma e^{-j\gamma x} + \Gamma e^{-2j\gamma a} e^{-j\gamma x} + \Gamma e^{-4j\gamma a} e^{-j\gamma x} + \dots = \Gamma e^{-j\gamma x} \frac{1}{1 - e^{-2j\gamma a}}, \quad (2-1)$$

donde se consideró la progresión geométrica de parámetro  $e^{-2j\gamma a}$ .

De la ecuación se deduce que si  $e^{-2j\gamma a} = 1$ , la expresión diverge, dando lugar, si se ignora la solución trivial, a la condición de Bragg, que establece que  $\gamma = n\pi/a$ . Este es el origen del *bandgap* fotónico.

FIGURA 2.6: Incidencia de una onda electromagnética y efecto de Bragg, con un ángulo  $\theta$  [9].

Una expresión más general se puede obtener de la Figura 2.6, en que la incidencia de la onda se da con un ángulo  $\theta$ , por lo que la condición de Bragg se convierte en

$$2a \sin \theta = n\lambda_g, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2-2)$$

y sabiendo que  $\beta = 2\pi/\lambda_g$ , se obtiene la inversa de la relación de dispersión (definida como  $\omega(\beta)$ ),

$$\beta(\omega) = \frac{n\pi}{a \sin(\theta(\omega))}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2-3)$$

de la que se puede deducir que la velocidad de grupo,  $v_g = d\omega/d\beta$ , es cero cuando se cumple la condición de Bragg.

### 2.3. Teorema de Bloch-Floquet

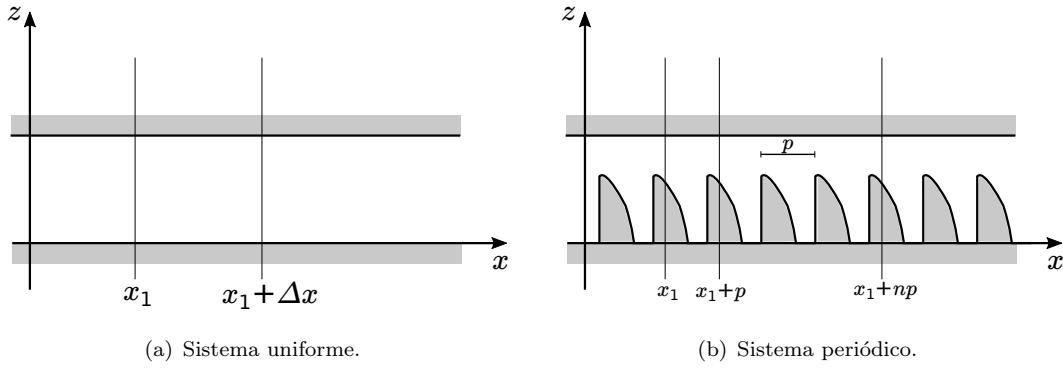


FIGURA 2.7: Figura de análisis de sistema uniforme y periódico.

En condiciones de uniformidad, como en la Figura 2.7 a), para un dado modo de propagación, a una frecuencia conocida y con el sistema en estado estacionario, los campos sobre una sección transversal a la de propagación de una onda electromagnética difieren de otros, ubicados a una distancia arbitraria en la dirección de propagación, sólo por una constante compleja que depende únicamente de dicha distancia. Esto significa que, si la dirección de propagación es  $x$ ,

$$E(x_1, y, z, t) = E(x_2, y, z, t) e^{-j\gamma(x_2 - x_1)}. \quad (2-4)$$

Dado que  $y, z$  y  $t$  se mantienen constantes en la igualdad, y que consideramos condiciones de uniformidad infinita (de modo que no exista diferencia entre dos puntos ubicados sobre el eje  $x$ ), la única posible dependencia de  $x$  tiene que estar dada por la constante compleja descripta antes, y los campos transversales sólo pueden depender de  $y$  y  $z$ , que no varían. De esta forma,

$$E(x, y, z, t) = F(y, z) e^{-j\gamma x} e^{j\omega t}, \quad (2-5)$$

lo que da como resultado el comportamiento senoidal del campo eléctrico de una onda plana, como es conocido, con comportamiento senoidal puro.

Para el análisis de ondas electromagnéticas en un material periódico como el mostrado en la Figura 2.7 b), se puede considerar el caso particular en que, dado que varían las condiciones de propagación periódicamente, como se describió en la Sección 2.5, existe una periodicidad en el espacio de los número de onda  $\gamma$ . En el mismo sentido, una variación de los valores de permitividad eléctrica y permitividad magnética generan una variación en la constante de propagación, sin necesidad de considerar el análisis de estructuras cristalinas de la sección anterior. Entonces, en el caso en que se desea describir el comportamiento de una onda en un sistema periódico, donde la forma, el tamaño y el material pueden variar a lo largo del eje de propagación  $x$ , no se puede considerar que la variación del campo a lo largo de ese eje  $x$ , con  $y$  y  $z$  constantes, dependa únicamente de la constante compleja presentada antes. De esta forma, en contraposición a la ecuación 2-5, la amplitud  $F$  del campo depende de  $x$ ,

$$E(x, y, z, t) = F(x, y, z)e^{-j\gamma x}e^{j\omega t}. \quad (2-6)$$

Sin embargo, si la función  $F(x, y, z)$  es  $p$ -periódica en dirección  $x$ , se puede expresar

$$E(x + np, y, z, t) = F(x + np, y, z)e^{-j\gamma(x+np)}e^{j\omega t} = F(x, y, z)e^{-\gamma x}e^{-j\gamma np}e^{j\omega t}, \quad (2-7)$$

donde, según la expresión 2-6,  $F(x, y, z)e^{-j\gamma x}e^{j\omega t} = E(x, y, z, t)$ , de modo que

$$E(x + np, y, z, t) = E(x, y, z, t)e^{-j\gamma np}, \quad (2-8)$$

lo que significa que, en un sistema periódico, para un dado modo de propagación, a una frecuencia conocida y con el sistema en estado estacionario, los campos sobre una sección transversal a la de propagación de una onda electromagnética difieren de otros, ubicados a una distancia equivalente a un múltiplo de un periodo, sólo por una constante compleja,  $e^{-j\gamma np}$ , que depende únicamente de dicha distancia y del periodo del sistema.

La idea intuitiva detrás del resultado radica en que si la estructura es infinitamente periódica, con celdas unitarias idénticas, las mismas deberían ser indistinguibles, por lo que los campos electromagnéticos presentarían también un comportamiento periódico, a excepción de un corrimiento de fase. Por lo tanto, se puede escribir

$$E(x + d, y, z) = e^{-j\beta d} E(x, y, z), \quad (2-9)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación en el medio periódico, considerando que no hay pérdidas ( $\gamma = \beta$ ) [28]. El valor de la diferencia entre los campos en dos bordes de una celda unitaria, entonces, es  $\beta d$ .

Estas consideraciones pueden ser generalizadas para cualquier ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\Phi''(x) + \gamma^2(x)\Phi(x) = 0, \quad (2-10)$$

donde se asume que  $\gamma(x) = \gamma(x + np)$ . Si  $\phi(x)$  es solución, se puede probar que también  $\phi(x + np)$  es también solución, ya que, al reemplazar,

$$\phi''(x + np) + \gamma^2(x + np)\phi(x + np) = 0 \quad (2-11)$$

$$\phi''(x + np) + \gamma(x)^2\phi(x + np) = 0, \quad (2-12)$$

se observa que  $\phi(x + np)$  cumple con la ecuación.

Este resultado fue obtenido por el matemático Gaston Floquet en 1883, y se conoce como Teorema de Floquet. El mismo explicita la forma canónica de las soluciones a ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes periódicos, de la forma  $x' = A(t)x$ , con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ , donde  $A(t)$  es una función periódica con periodo  $p$ . Si  $x = \phi(t)$  es solución, entonces también lo es  $x = \phi(x \pm np)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Esto significa que toda solución encontrada para el sistema con condiciones de contorno periódicas, es también periódica, con la misma periodicidad que las condiciones de borde, debiendo considerar, además, un factor de fase. Si bien el teorema aplica a ecuaciones de primer orden, toda ecuación de segundo orden puede ser transformada en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Dado que el vector de onda de la ecuación de Helmboltz (1-13) varía periódicamente ( $\gamma = \gamma(x)$ ), se puede plantear el sistema

$$\begin{bmatrix} \phi'_1(x) \\ \phi'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2-13)$$

donde  $\gamma(x)$  es el vector de onda, variable en el espacio, de modo que en la estructura periódica,  $\gamma(x) = \gamma(x + np)$ ,  $\phi_1(x) = E(x)$  y  $\phi_2(x) = \frac{\partial E(x)}{\partial x} = \phi'_1(x)$ .

Si se resuelve el sistema utilizando el método de la exponencial matricial, como se desarrolla en el Apéndice C utilizando la generalización de la serie de Maclaurin para matrices, se obtiene una expresión que presenta una periodicidad en  $x$ .

La aplicación del teorema de Floquet a la física del estado sólido se denomina teorema de Bloch, e indica que las soluciones a la función de onda de un electrón en un cristal tiene la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{j\gamma \cdot \mathbf{r}} u(\mathbf{r}), \quad (2-14)$$

donde  $\gamma$  es el vector de onda cristalino,  $\mathbf{r}$  es la posición y  $u(\mathbf{r})$  es una función periódica con igual periodicidad que el cristal. El factor exponencial se corresponde con el comportamiento de una onda plana incidente en un espacio sin obstáculos, mientras que el factor periódico,  $u(\mathbf{r})$ , deviene del efecto del sistema. El efecto se puede observar gráficamente en la Figura 2.8.

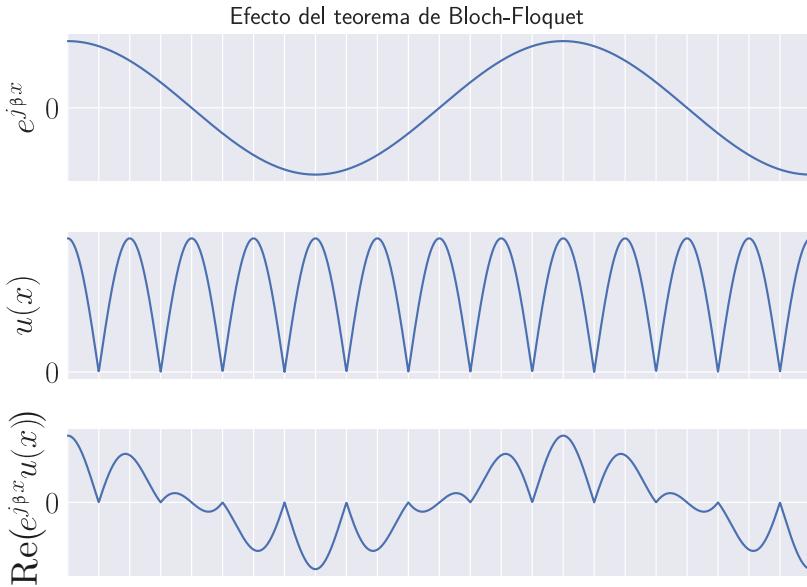


FIGURA 2.8: Comportamiento de una onda monocromática sobre un medio periódico.  
La función  $u(\mathbf{r})$  tiene un comportamiento de igual periodicidad que el medio.

## 2.4. Armónicos espaciales

Dado la función  $F(x, y, z)$  de la expresión 2-6 es  $p$ -periódica en la dirección  $x$ , se puede obtener su serie de Fourier en  $x$ , de la forma

$$F(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(y, z) e^{-jn\frac{2\pi}{p}x}, \quad (2-15)$$

donde los coeficientes de Fourier se expresan como  $F_n(y, z)$  por comodidad, pues representan la amplitud del campo eléctrico según las componentes transversales de propagación para cada modo, dado que la dependencia de  $x$  es la única que se desarrolló por Fourier.

La expresión 2-6 del campo, entonces, resulta

$$E(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(y, z) e^{-j(\gamma+n\frac{2\pi}{p})x} e^{j\omega t}. \quad (2-16)$$

Resta encontrar los coeficientes de Fourier, que se calculan como

$$\int_{x_0-p/2}^{x_0+p/2} F(x, y, z) e^{j\omega t} e^{j(m\frac{2\pi}{p})x} dx = e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{x_0-p/2}^{x_0+p/2} E_n(y, z) e^{j(m-n)\frac{2\pi}{p}x} dx. \quad (2-17)$$

Las funciones  $e^{jn\frac{2\pi}{p}x}$  son ortogonales, y la integral de las mismas sobre el intervalo  $[x_0 - p/2, x_0 + p/2]$  cuando  $n = 0$  resulta  $p$ , de modo que los coeficientes de Fourier se expresan como

$$E_n(y, z) = \frac{1}{p} \int_{x_0-p/2}^{x_0+p/2} F(x, y, z) e^{j\omega t} e^{jn\frac{2\pi}{p}x} dx \quad (2-18)$$

$$= \frac{1}{p} \int_{x_0-p/2}^{x_0+p/2} F(x, y, z) e^{j\omega t} e^{-j\gamma x} e^{j(\gamma+n\frac{2\pi}{p})x} dx \quad (2-19)$$

$$= \frac{1}{p} \int_{x_0-p/2}^{x_0+p/2} E(x, y, z, t) e^{j\gamma_n x} dx, \quad (2-20)$$

donde

$$\gamma_n = \gamma_0 + n\frac{2\pi}{p}. \quad (2-21)$$

Finalmente, entonces, el campo queda expresado como

$$E(x, y, z, t) = e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(y, z) e^{-j\gamma_n x}, \quad (2-22)$$

donde cada término de la serie es una armónica espacial asociada a una constante de propagación  $\gamma_n$  o, en el caso sin pérdidas, a una constante de fase  $\beta_n$ . La armónica fundamental se da en  $n = 0$ .

Entonces, el campo desarrollado en un medio periódico es periódico en sí mismo y no es una armónica pura, sino que su comportamiento tiene que ser expresado como la suma de infinitas armónicas.

La velocidad de fase de cada armónica resulta

$$v_p^n = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + 2\pi n/p}, \quad (2-23)$$

diferente para cada modo.

La velocidad de grupo, en cambio, presenta el mismo valor para todas las armónicas, dado que

$$v_g^n = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \frac{d\omega}{d(\beta_0 + 2\pi n/p)} = \frac{d\omega}{d\beta_0} = v_g^0. \quad (2-24)$$

Dado que la velocidad de fase no es constante, la forma de onda no será constante durante la propagación, por lo que la forma de onda variará con el avance de la misma.

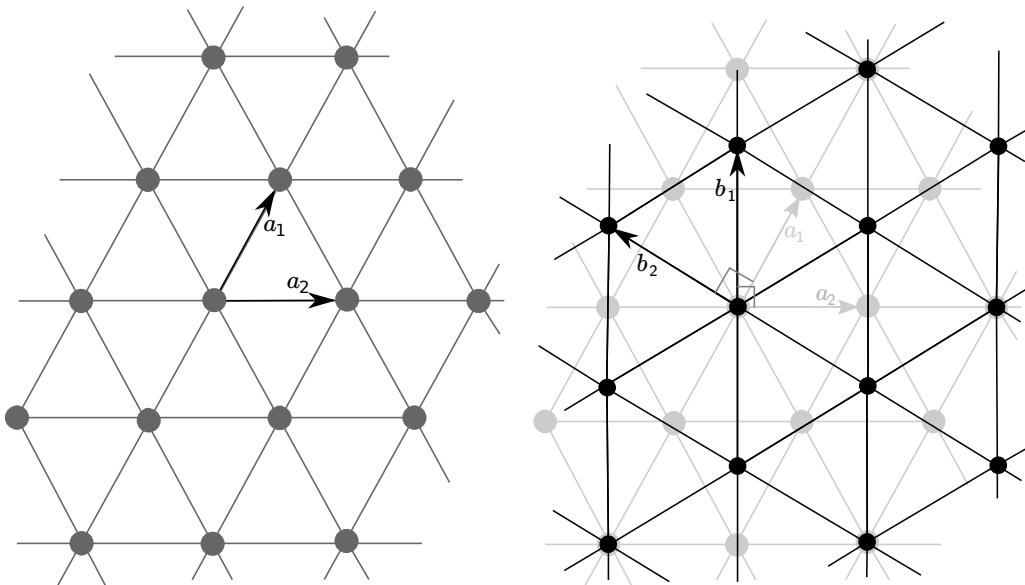
Considerando que, en base a la ecuación 2-21, para el caso sin pérdidas, para un dado sistema con un  $\beta_0$  determinado, un  $\beta_n$  se puede obtener con sólo sumarle  $2\pi n/p$ , se deduce que, si se graficar a la curva  $\omega - \beta_n$ , la misma consistiría en la curva  $\omega - \beta_0$  desplazada un valor  $2\pi n/p$ , lo que indica que  $\omega$  es una función periódica de  $\beta$  cuando se analiza un sistema periódico. En general, entonces, el análisis se realiza sólo sobre la relación  $\omega - \beta_0$ , a lo que se conoce como celda de Brillouin.

## 2.5. Celdas unitarias de cristales bidimensionales

En base a lo descripto antes, en un material periódico se puede definir una red de Bravais, que indica la forma en que los elementos están físicamente dispuestos en la red cristalina. En la Figura 2.9(a),  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  son la base de vectores que permite expresar la posición de cualquier elemento del conjunto como una combinación lineal de coeficientes enteros:

$$\mathbf{R}_{n_1, n_2} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2, \quad n_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2. \quad (2-25)$$

La celda unitaria de la red de Bravais se denomina celda de Wigner-Seitz, y restringe la región del espacio más cercana a cada elemento de la red cristalina. Se puede observar, para el caso de una red triangular, en la Figura 2.10(a).



(a) Red de Bravais correspondiente a una estructura periódica con disposición triangular de los elementos

(b) Superposición de la red recíproca y la red directa de Bravais correspondiente a una estructura periódica con disposición triangular de los elementos

FIGURA 2.9: Red de Bravais y red recíproca correspondiente a una estructura periódica. Los vectores  $\mathbf{a}_i$  son los que corresponden a la red directa o red de Bravais, y unen a los elementos físicos del sistema periódico. Los vectores  $\mathbf{b}_j$  son los correspondientes a la red recíproca. Las respectivas redes no están dibujadas a escala y, de hecho, pertenecen a espacios diferentes.

En la Sección 2.3 se asumió, mediante argumentos intuitivos, que la función  $F(x, y, z, t)$  es periódica en  $x$ . En términos más generales, bajo la notación de la ecuación 2-14, la función  $u(\mathbf{r})$  toma el lugar de  $F$ . Para el caso bidimensional, entonces, la función  $u(\mathbf{r})$  es periódica, según la red de Bravais del sistema.

Según lo expuesto en la ecuación 2-8, al evaluar, en dos puntos separados una distancia múltiplo de la periodicidad, una solución al problema periódico, los valores sólo difieren por una constante. Se puede considerar, entonces, que las funciones que resuelven el problema ( $E(x, y, z, t)$  o, en el caso más general,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ) son *autofunciones* o *autoestados* de cualquier operador de traslación sobre la superficie periódica. Por lo tanto,

$$\phi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_j) = c_j \phi(\mathbf{r}) \quad (2-26)$$

donde sabemos, por el análisis anterior, que  $c_j = e^{j\gamma \cdot \mathbf{r}}$ .

Si se despeja  $u(\mathbf{r})$  de la expresión 2-14, y se evalúa en un punto arbitrario  $\mathbf{r} + \mathbf{a}_j$ , se obtiene

$$u(\mathbf{r} + \mathbf{a}_j) = e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{a}_j)} \phi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_j) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j} \phi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_j) = u(\mathbf{r}), \quad (2-27)$$

igualdad que sólo se cumple si  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j = 2n\pi$ . Los vectores que cumplen esta condición se pueden expresar como  $\mathbf{k} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2$ , donde  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$  conforman la denominada red dual o recíproca. Cada uno de ellos resulta ortogonal a uno de los vectores  $\mathbf{a}_i$  de la red de Bravais, como se muestra en la Figura 2.9(b). Esto da lugar a que  $a_i$  y  $b_j$  sean inversamente proporcionales.

La red recíproca es, entonces, una representación de la red en el espacio de los números de onda  $\beta$ , de manera que la distancia entre los elementos de la red resulte  $2\pi/a$ , con  $a$  la separación entre los elementos de la red física o de Bravais. Dicho de otra manera, mientras la red de Bravais representa la periodicidad de los elementos que conforman la red física en  $(x, y, z)$ , la red recíproca es la representación de la misma estructura, pero en el espacio de los vectores de onda,  $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ . La red recíproca es también periódica, y sobre ella se pueden buscar, también, celdas unitarias, denominadas regiones de Brillouin o celdas de Wigner-Seitz de la red recíproca, como se muestra en la Figura 2.10(b).

Si, además, la celda de Brillouin es lo suficientemente simétrica, se puede definir la denominada zona irreducible de Brillouin, que forma parte de la primer zona de Brillouin, pero está limitada por sus líneas de simetría. Para el análisis de una estructura periódica cualquiera, sólo es necesario analizar esta zona irreducible, dado que el resto son simplemente sus reflexiones espejadas.

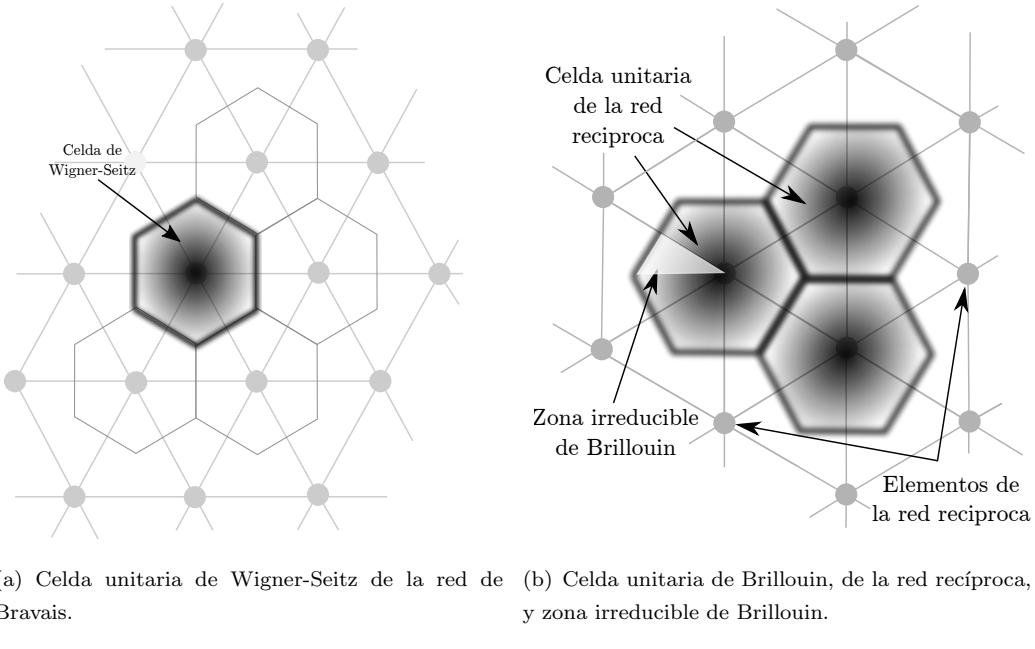


FIGURA 2.10: Celdas unitarias de las redes de Bravais y recíproca.

Para el caso en que las celdas unitarias son rectangulares, la red recíproca está también dada por una disposición rectangular de elementos, y la zona de Brillouin resulta también cuadrada. La zona irreducible de Brillouin depende de las líneas de simetría, por lo que puede resultar rectangular, a excepción del caso de celdas unitarias cuadradas, donde la mínima unidad que se repite resulta triangular, como se muestra en la Figura 2.11.

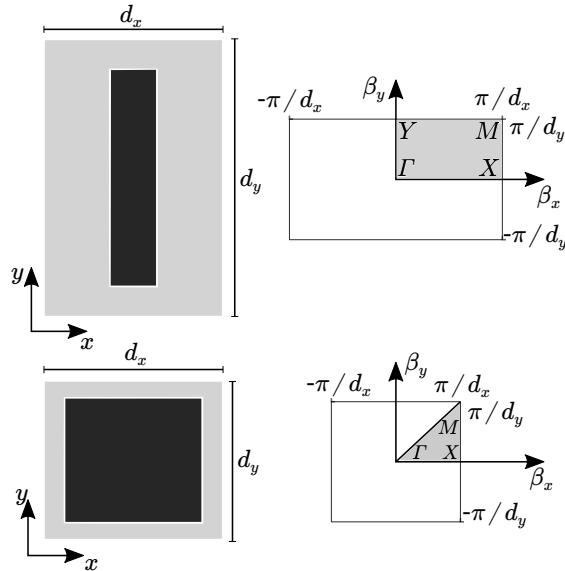


FIGURA 2.11: Celda unitaria en el espacio recíproco, y zona irreducible de Brillouin, para celdas unitarias en el espacio de Bravais rectangulares y cuadradas. Notar que la celda rectangular tiene dos ejes de simetría ortogonales, mientras que la celda cuadrada tiene los mismos ejes, y además con el que corresponde a una recta de 45°.

## 2.6. Relación y diagrama de dispersión

Las estructuras periódicas se usan comúnmente en microondas, principalmente como filtros, dado que pueden ser modeladas como líneas de transmisión cargadas, lo que permite describir las características que comparten con los mismos, utilizando nomenclaturas similares para fenómenos similares.

Una línea de transmisión infinita cargada periódicamente puede analizarse planteando las matrices ABCD<sup>2</sup> de cada celda unitaria, considerando puntual el efecto de carga que impone la geometría, de forma que:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

Si se considera que la línea está cargada con una impedancia y una admitancia, como indica la Figura 2.12, entonces se puede dividir a cada celda unitaria en secciones diferenciadas, y multiplicar las matrices ABCD<sub>i</sub> de cada sección para obtener la matriz ABCD que corresponde a la celda unitaria completa.

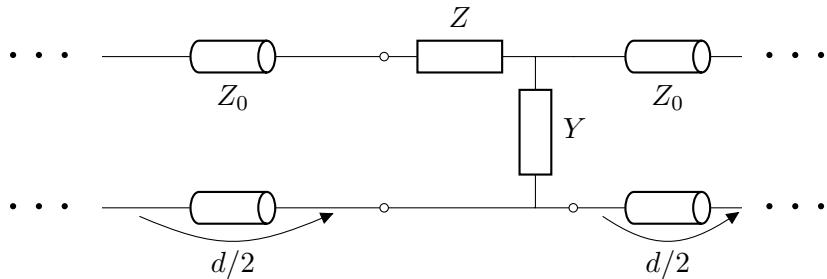


FIGURA 2.12: Circuito equivalente de porción de línea de transmisión cargada, de longitud  $d$ .

1. La primera mitad de la línea de transmisión, de largo  $d/2$ , cuya matriz ABCD es, considerando  $Z_0$  su impedancia característica y  $\beta_{TL}$  la constante de propagación [1]:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{1,3} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{TL}d/2) & jZ_0 \sin(\beta_{TL}d/2) \\ jY_0 \sin(\beta_{TL}d/2) & \cos(\beta_{TL}d/2) \end{bmatrix}. \quad (2-29)$$

<sup>2</sup>Las matrices ABCD son matrices que relacionan la corriente y la tensión a la entrada con la corriente y la tensión a la salida de un sistema. De esta manera, los parámetros A y D son adimensionales, el parámetro B tiene dimensiones de impedancia, y el parámetro C tiene dimensiones de admitancia.

2. La carga, que comprende a la impedancia  $Z$  y la admitancia  $Y$  asociada a la línea de transmisión. La matriz resulta

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 + ZY & Z \\ Y & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-30)$$

3. La segunda mitad de la línea de transmisión, de largo  $d/2$ , de igual expresión que la primera mitad.

Si se considera que la relación entre las tensiones y corrientes de entrada y salida, respectivamente, están relacionadas por el factor de propagación  $e^{-j\gamma d}$ , donde  $\gamma$  es el módulo del vector de onda en el medio metamaterial que se quiere obtener, entonces:

$$\begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n+1} e^{j\gamma d} \\ I_{n+1} e^{j\gamma d} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} A - e^{\gamma d} & B \\ C & D - e^{j\gamma d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-31)$$

La existencia de una solución no trivial del sistema de ecuaciones planteado requiere que el determinante de la matriz se anule. Recordando, además, que en las redes recíprocas,  $AD - BC = 1$  [1]:

$$AD + e^{2j\gamma d} - (A + D)e^{j\gamma d} - BC = 0 \implies 1 + e^{2j\gamma d} - (A + D)e^{j\gamma d} = 0 \quad (2-32a)$$

$$\cosh(j\gamma d) = \frac{A + D}{2} \quad (2-32b)$$

Reemplazando los valores de A y D de la matriz de transmisión de la celda unitaria completa, que surge de la multiplicación de las matrices de transmisión que la componen:

$$\cosh(\gamma d) = \frac{YZ}{2} \cos(\beta_{TLD}) + \frac{iYZ_0}{2} \sin(\beta_{TLD}) + \frac{iZ}{2Z_0} \sin(\beta_{TLD}) + \cos(\beta_{TLD}) \quad (2-33)$$

Dado que  $\gamma = \beta - j\alpha$  es la constante de onda en el material, resulta conveniente considerar el caso en que no hay comportamientos exponenciales negativos para las ondas que los atraviesan, de modo que  $\alpha = 0$ <sup>3</sup>. Se obtiene, entonces, la ecuación de dispersión para una dimensión:

---

<sup>3</sup> $\cosh(\gamma d) = \cosh(\beta d) \cos(\alpha d) + j \sinh(\beta d) \sin(-\alpha d) = \cosh(\beta d)$

$$\cosh(\beta d) = \frac{YZ}{2} \cos(\beta_{TL}d) + \frac{iYZ_0}{2} \sin(\beta_{TL}d) + \frac{iZ}{2Z_0} \sin(\beta_{TL}d) + \cos(\beta_{TL}d) \quad (2-34)$$

El diagrama de dispersión es un gráfico que muestra la relación entre la frecuencia angular,  $\omega$ , y el módulo del vector de onda,  $|\beta|$ . En la ecuación 2-34, si se reemplaza  $\beta_{TL}$  por  $\omega/v_p$ , con  $v_p$  la velocidad de fase de una onda monocromática que viaja por la línea de transmisión, se obtiene la relación buscada. Para el caso en que no existen discontinuidades periódicas, sino que la onda se desplaza sobre un medio homogéneo sin pérdidas, la relación es independiente de la frecuencia:  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ , la velocidad de la luz en el medio.

Para el caso bidimensional, el análisis es similar, aunque se obtiene mayor información si se analizan simultáneamente las componentes ortogonales del vector  $\beta$ . Para el caso de un medio homogéneo, el diagrama de dispersión es un cono, denominado comúnmente «cono de luz», como se muestra en la Figura 2.13, que surge de la expresión  $\omega = c\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$ .

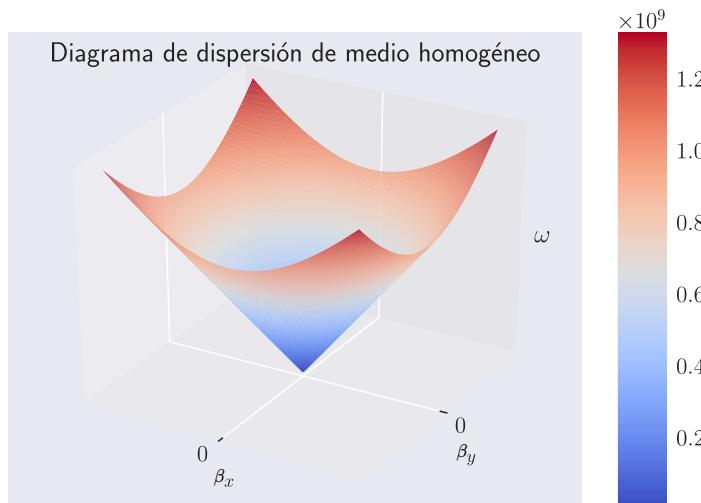


FIGURA 2.13: Gráfica del diagrama de dispersión tridimensional para el caso del vacío, denominado cono de luz.

El análisis tridimensional del diagrama de dispersión de una estructura periódica bidimensional posee, en muchos casos, información redundante, y su lectura puede ser complicada.

En función de lo explicado en la Sección 2.5, y en base a lo analizado sobre el teorema de Bloch, resulta evidente que un análisis del comportamiento de una onda plana que viaja por un material periódico se reduce a comprender el mismo en una región limitada del espacio, conocida como la zona de Brillouin. Si, además, existen simetrías, las mismas permiten reducir aún más el espacio de análisis, dando lugar a la zona irreducible de

Brillouin, de la cual las demás regiones del material son reflexiones y traslaciones. Sobre esta zona se presentan todos los posibles vectores de onda del espacio.

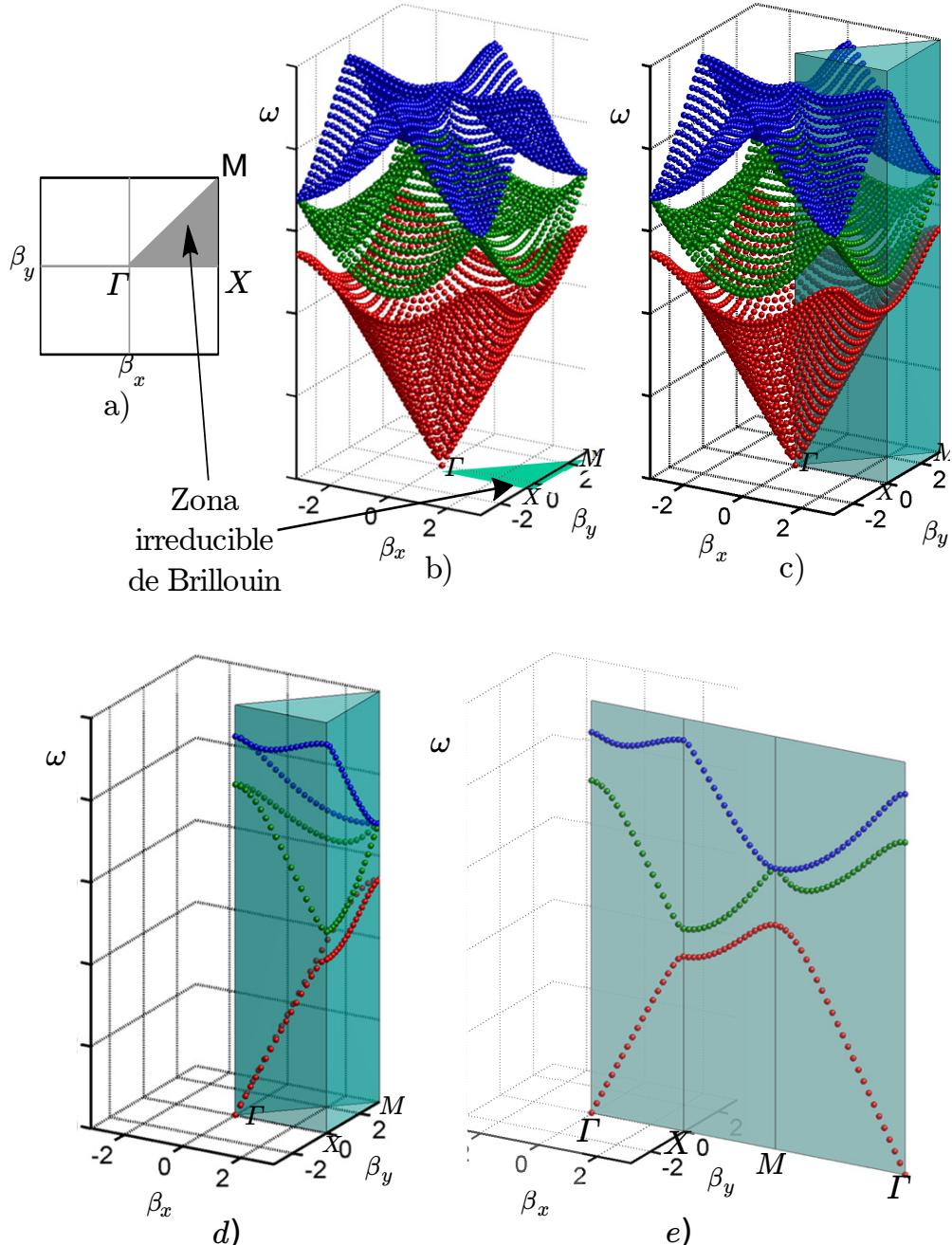


FIGURA 2.14: Gráficas ilustrativas del análisis del diagrama de dispersión sobre la zona de Brillouin [Raymond C. Rumpf, diapositivas del curso *21st Century Electromagnetics*].

Para una superficie bidimensional, el análisis requiere que para cada punto dentro de la zona de Brillouin, se analice el valor de  $\omega$  correspondiente. Para un caso sencillo como el mostrado en la Figura 2.11, el cálculo se debe realizar para todas las combinaciones posibles de valores de  $\beta_x$  en el intervalo  $[0, \pi/d_x]$  y de  $\beta_y$  en el intervalo  $[0, \pi/d_y]$ . Este análisis da lugar a el diagrama de dispersión o diagrama de bandas completo, que sigue

requiriendo una representación tridimensional, como se muestra en las Figura 2.14c), que explica que el análisis del diagrama completo sobre una celda unitaria se puede realizar sobre la zona irreducible de Brillouin. Una simplificación muy utilizada, que reduce la cantidad de información a considerar, aunque vuelve incompleto el diagrama, es la mostrada en la figura d), donde se analizan únicamente los valores del diagrama de dispersión sobre los bordes de la zona irreducible de Brillouin. De esta forma, resulta fácil expresar un diagrama de dispersión en un gráfico bidimensional, como se muestra en la figura e). Los puntos denominados  $\Gamma$ ,  $X$  y  $M$  representan los vértices de la zona de análisis, y se conocen como *puntos críticos*. En función del tipo de sistema cristalino (cúbico simple, cúbico centrado, cúbico centrado en las caras, hexagonal, etc), los nombres y posiciones de los puntos críticos varían.

Para el caso particular del vacío, el diagrama de dispersión simplificado, calculado a partir del que se observa en la Figura 2.13, es el mostrado en la Figura 2.15.

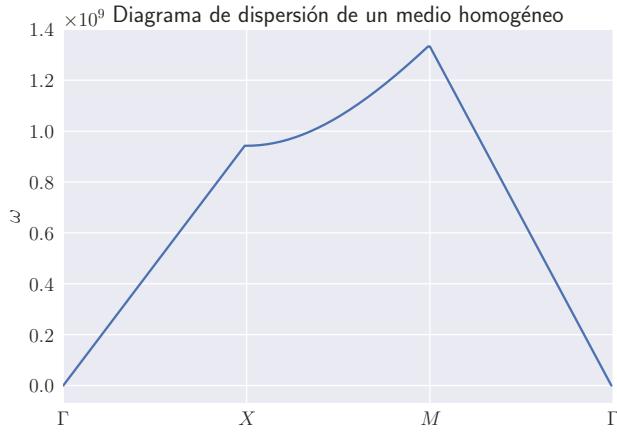


FIGURA 2.15: Diagrama de dispersión del vacío, calculado a partir de su representación tridimensional mostrada en la Figura 2.13. Para el vacío no existen modos de propagación.

Una explicación intuitiva sobre el comportamiento en cada punto de la frontera de la zona irreducible de Brillouin se puede observar en la Figura 2.16. En el centro de la misma se ubica una celda de Brillouin, que equivale a una celda de Wigner-Seitz del espacio recíproco. En la misma se destaca la zona irreducible de Brillouin de una celda cuadrada, cuyos vértices se denominan  $\Gamma$ ,  $X$  y  $M$ . Alrededor de la gráfica de la zona de Brillouin, se muestra una representación gráfica de una onda plana incidente, para el modo más bajo (la frecuencia más baja de las posibles).

La gráfica de la zona de dispersión comienza en el punto  $\Gamma$  de la zona irreducible de Brillouin, que corresponde a un valor de  $\beta_x = 0$  y  $\beta_y = 0$ , por lo que no hay variación espacial del valor de los campos. El recorrido de las abscisas continúa hacia el punto  $X$ , que corresponde a un valor de  $\beta_x$  equivalente a  $\pi/d$ , con  $d$  la periodicidad en  $x$ , como se

muestra en la figura. Los valores intermedios entre  $\Gamma$  y  $X$  representan valores de  $\beta_x$  cada vez mayores, mientras se mantiene la frecuencia espacial en el eje  $y$  en cero. El aumento de la frecuencia espacial da lugar a longitudes de onda menores.

Una vez alcanzado el punto  $X$  de la zona irreducible de Brillouin, el recorrido continúa hacia el punto  $M$ , donde el cambio se da sólo para el valor de  $\beta_y$ , con  $\beta_x$  fijo en  $\pi/a$ . Esto indica una incidencia oblicua, como se esquematiza en las figuras que rodean a la zona de Brillouin.

El recorrido se completa con el camino entre el punto  $M$  y el punto  $\Gamma$ , donde ahora los valores de  $\beta_x$  y  $\beta_y$  disminuyen simultáneamente, a la misma velocidad, y en la dirección correspondiente a  $45^\circ$ , como se observa en las gráficas de la zona superior izquierda de la figura.

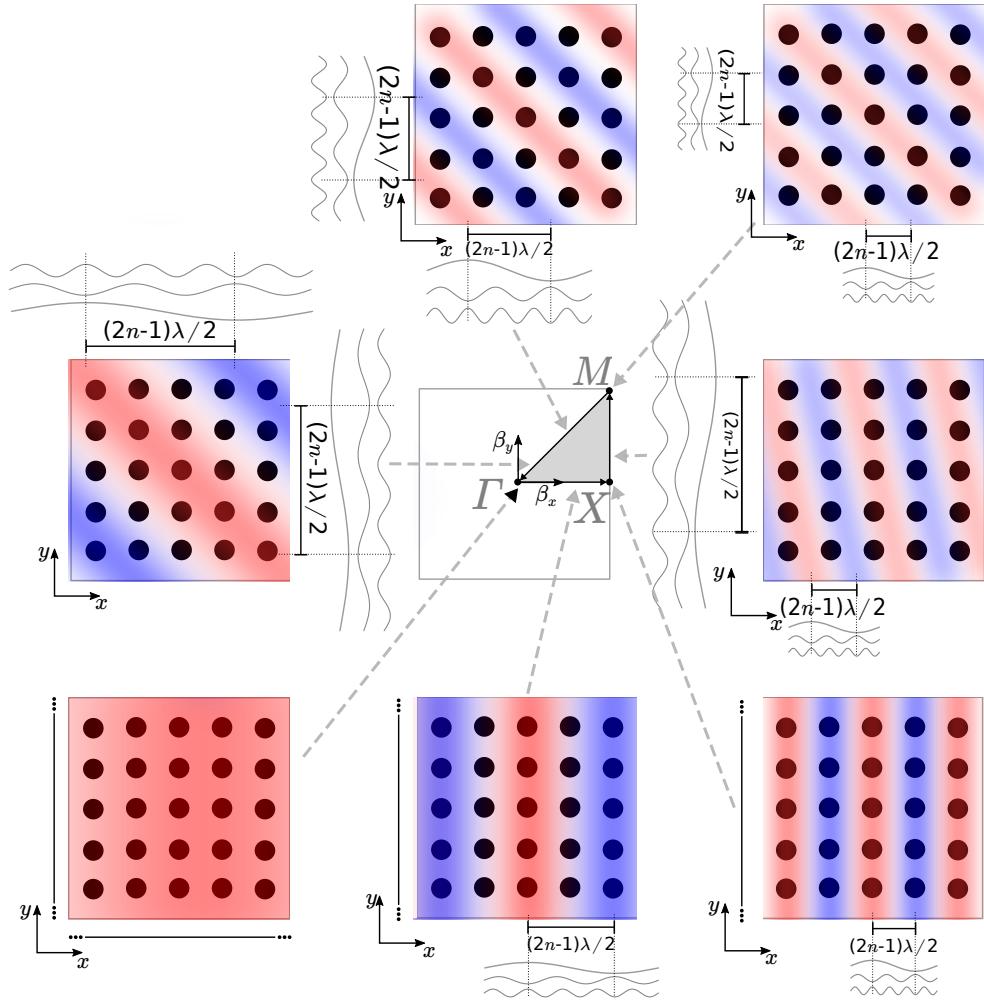


FIGURA 2.16: Explicación gráfica de la incidencia de ondas planas para cada punto del borde de la zona irreducible de Brillouin que da lugar al diagrama de dispersión.

Se debe tener en cuenta que, dado que existen distintos modos, frecuencias de incidencia mayores darían lugar a modos superiores, que compartirían el valor de  $\beta_i$  con los modos inferiores. Esto se debe a que la diferencia de fase medida en los extremos de la celda unitaria de la red de Bravais no tiene en cuenta la cantidad de ciclos que le dieron origen (es decir, una diferencia de fase de  $\phi$  da lugar al mismo  $\beta_i$ ,  $i = x, y$  que una diferencia de  $\pi + 2n\pi$ ). Esto es esquematizado en la parte superior y los lados de las figuras que representan al conjunto periódico.

## Capítulo 3

# Estudio y diseño de estructuras de banda prohibida electromagnética

### 3.1. Modelos analíticos de estructuras uniplanares de ban- da prohibida electromagnética

El análisis de estructuras de banda prohibida electromagnética, así como de superficies selectoras de frecuencia (FSS), se suele realizar a través de simulaciones numéricas de onda completa, utilizando el método de elementos finitos (FEM) o métodos en el dominio del tiempo, como FDTD, dado que permiten la resolución de los problemas de forma tridimensional, lo que habilita al diseñador a conocer el comportamiento de configuraciones de una o más capas, así como los efectos de curvaturas y discontinuidades en la periodicidad. Estos métodos, si bien son flexibles, no otorgan intuición física y resultan computacionalmente demandantes. Análisis de tipo numérico en dos dimensiones han sido propuestos, principalmente utilizando el método de momentos (MOM), a partir de los cuales han surgido otras técnicas de estudio de las estructuras bidimensionales, basadas en la búsqueda de capacidades e inductancias equivalentes, dispuestas de forma tal que la respuesta en frecuencia tenga un comportamiento similar al observado en las simulaciones. Estos métodos, que en ocasiones derivan en aproximaciones de primer orden a elementos circuitales, se denominan semi-analíticos, y se usan especialmente cuando la periodicidad es mucho menor a la longitud de onda incidente. Este tipo de análisis ha permitido la aplicación de otros métodos numéricos, como TMM (*Transmis-  
sion Matrix Method*) y TLM (*Transmission-Line Matrix Method*), de mayor simplicidad

$a = 20 \text{ mm}$	$b = 18 \text{ mm}$	$g = 4 \text{ mm}$	$w = 1 \text{ mm}$	$h = 1,6 \text{ mm}$
$\epsilon_r = 4,4$	$C_p = 7,9 \text{ pF}$	$L_p = 2 \text{ nH}$	$C_g = 790 \text{ fF}$	$L_b = 0,46 \text{nH}$

TABLA 3.1: Valores geométricos de la celda unitaria analizada.

y con suficiente acercamiento al problema físico para que el resultado resulte intuitivo para el diseño preliminar.

Los métodos de modelado orientados a la descripción del comportamiento en el primer modo (en bajas frecuencias) de estructuras de banda prohibida electromagnética bidimensionales no requieren de una simulación numérica de onda completa previa [29]. En ellos, como se muestra en la Figura 3.1, las inductancias y capacidades surgen del análisis intuitivo y cuasiestático del efecto de cada aspecto de la geometría de la estructura metalodieléctrica de las celdas unitarias. Así, para las celdas de dicha figura, formadas por parches rectangulares unidos por puentes *microstrip*, se debe considerar que cada parche presenta una capacidad contra el plano conductor ( $C_p$ ), dada simplemente como la expresión de capacidad entre placas planas paralelas, y una inductancia  $L_p$ , dada por:

$$C_p = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 b^2}{h} \quad (3-1)$$

$$L_p = \mu_0 h \quad (3-2)$$

Los parches cercanos dan lugar a una capacidad ( $C_g$ ) [26] [25] [29], y los puentes entre parches generan una inductancia ( $L_b$ ) [29]:

$$C_g = \frac{b \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)}{\pi} \cosh^{-1}(a/g) \quad (3-3)$$

$$L_b = 0,2 \text{ nH/mm} \cdot \ln(2\pi \frac{h}{w}) \quad (3-4)$$

donde  $a$  es el tamaño de la celda unitaria,  $h$  es el ancho del dieléctrico y  $w$  es el ancho del puente. En la tabla 3.1 se muestran los valores testigo elegidos arbitrariamente y utilizados en esta sección, según los nombres de la Figura 3.1.

El análisis de la expresión de dispersión no se puede realizar utilizando el acercamiento circuital propuesto, debido a que cada nodo del circuito posee una fase establecida por los parámetros concentrados.

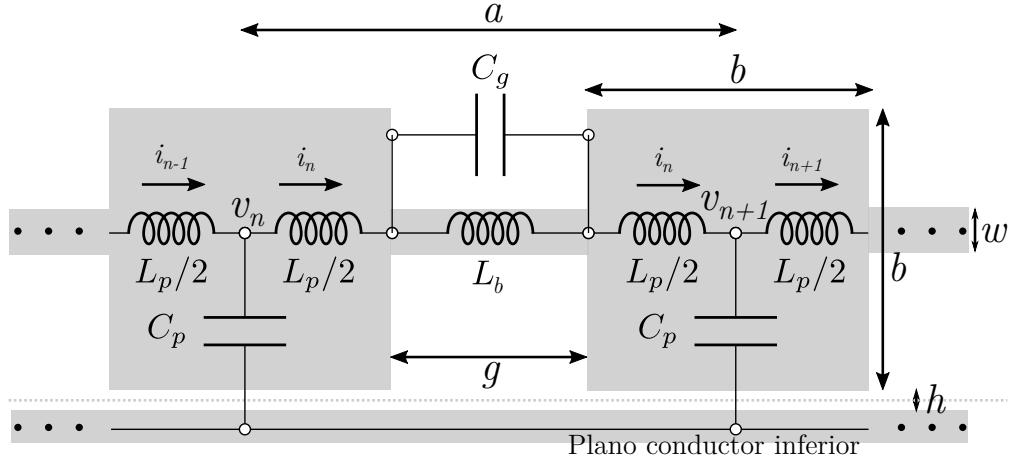


FIGURA 3.1: Circuito equivalente propuesto para el análisis de primer modo de una celda unitaria bidimensional arbitraria, propuesto por [29].

Si se procede de forma similar a la explicada en la Sección 2.6, se debe dividir a cada celda unitaria en trozos de línea de transmisión de impedancias diferentes, en función de su ancho, como se muestra en la Figura 3.2.

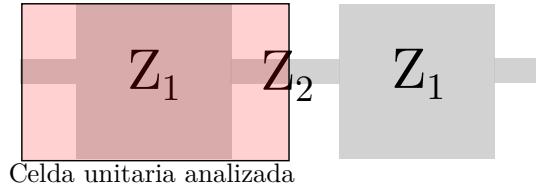


FIGURA 3.2: Líneas de transmisión requeridas para el análisis de la ecuación de dispersión.

De esta manera, en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , que representan la fase entre la entrada y salida de cada una de las líneas, se puede plantear, en base a la expresión 1-67 que:

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & j \sin(\phi) \\ j \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3-5)$$

lo que resulta en la matriz de transferencia

$$\begin{bmatrix} -2 \sin(\phi) \sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & j(2 \sin(\phi) \cos\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) \\ j(2 \sin(\phi) \cos\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) & -2 \sin(\phi) \sin\left(\phi + \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

Aplicando los mismos pasos que en la Sección 2.6, considerando el teorema de Bloch-Floquet, que indica que  $i_{n+1} = i_n e^{-\gamma a}$ , y que  $v_{n+1} = v_n e^{-\gamma a}$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(2\phi + \frac{\theta}{2}) - e^{-ja\gamma} & j(2\sin(\phi)\cos(\phi + \frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})) \\ j(2\sin(\phi)\cos(\phi + \frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})) & \cos(2\phi + \frac{\theta}{2}) - e^{-ja\gamma} \end{bmatrix}. \quad (3-7)$$

Esta matriz de transferencia es tal que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_n e^{-j\gamma a} \\ v_n e^{-j\gamma a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_n e^{-j\gamma a} \\ v_n e^{-j\gamma a} \end{bmatrix}. \quad (3-8)$$

Lo que se reduce a

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_n \\ v_n \end{bmatrix} = 0. \quad (3-9)$$

Para que la solución no sea la trivial, el determinante se debe anular, de forma que

$$\left(-e^{ja\gamma}\cos\left(2\phi + \frac{\theta}{2}\right) + 1\right)^2 e^{-2ja\gamma} + \sin^2\left(2\phi + \frac{\theta}{2}\right) = 0. \quad (3-10)$$

Desarrollando el cuadrado, aplicando la identidad  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  y despejando  $\cos(2\phi + \theta/2)$ , resulta

$$\cosh(\gamma a) = \cosh(\alpha d)\cos(\beta d) - j \sinh(\alpha d)\sin(\beta d) = \cos(2\phi + \theta/2) \quad (3-11)$$

Dado que la expresión de la derecha es real, también lo debe ser el coseno hiperbólico, expresado en la ecuación del centro. Esto sólo se puede dar si  $\sinh(\alpha d) = 0$  o si  $\sin(\beta d) = 0$ , lo que significa que  $\alpha$  o  $\beta$  deben ser 0 o múltiplos de  $\pi$ .

En el caso en que  $\alpha = 0$  y  $\beta \neq 0, n\pi$ , la onda existente es propagante sobre la estructura periódica. Esto se da si

$$\cos(\beta d) = \cos(2\phi + \theta/2) \implies \pm\beta d = 2\phi + \theta/2, \quad (3-12)$$

ecuación que es satisfecha para infinitos valores de  $\beta$ , exceptuando  $\beta = 0, n\pi$ , dado que resultan valores prohibidos por la hipótesis.

En el caso en que  $\alpha \neq 0$  y  $\beta = 0, n\pi$ , la expresión resulta

$$\cosh(\alpha d) = \cos(2\phi + \theta/2), \quad (3-13)$$

que tiene solución si  $|\cos(2\phi + \theta/2)| \geq 1$ , lo cual genera soluciones separadas cada  $n\pi$ , dado que es en esos valores en que el coseno obtiene módulo 1, como se muestra en la Figura 3.3. Esto demuestra que los *bandgaps* producidos se deben principalmente a un efecto de difracción de Bragg, dado que la suma de las fases en cada tramo de las líneas de transmisión que dan lugar a la celda unitaria debe ser múltiplo de  $\pi$ .

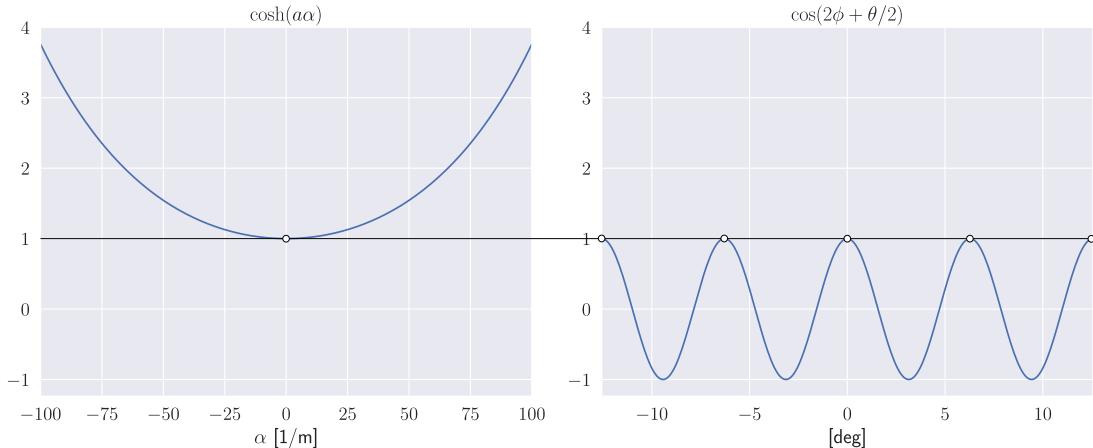


FIGURA 3.3: Gráficas correspondientes a la ecuación 3-13.

Es posible vincular los valores de  $\phi$  y  $\theta$  con la frecuencia angular  $\omega$ , a través de la velocidad de propagación del medio, que será distinta para cada tramo de línea, para una proporción de  $\theta$  y  $\omega$  determinada. Según los valores de longitud de los tramos de líneas mostrados en la Figura 3.1, a partir de la ecuación 3-12, y asumiendo que las longitudes eléctricas  $\theta$  y  $\phi$  resultan, respectivamente,  $\beta_1(a - b)$  y  $\beta_2 b$ , se puede reescribir la expresión para los puntos en que  $\alpha \neq 0$  como

$$\beta_1(a - b) + \beta_2 b = n\pi. \quad (3-14)$$

La velocidad de propagación, como de mostró en la ecuación 1-57, resulta  $V_{pi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$ , donde el subíndice  $i = 1, 2$  indica la línea de transmisión que se está evaluando

(el tramo más delgado y el más ancho, respectivamente). De esta forma, reemplazando  $\beta_i$  por su valor en función de la frecuencia y los componentes circuitales, resulta

$$\omega_{(\alpha \neq 0)} \sqrt{L_1 C_1} (a - b) + \omega_{\alpha \neq 0} \sqrt{L_2 C_2} b = n\pi \quad (3-15)$$

$$\omega_{(\alpha \neq 0)} = \frac{n\pi}{(a - b)\sqrt{L_1 C_1} + b\sqrt{L_2 C_2}}, \quad (3-16)$$

que representa, en forma aproximada, el conjunto de frecuencias para el que la estructura resuena, dificultando la propagación de ondas de superficie.

Además del acercamiento a través del uso de circuitos equivalentes de primer orden, en general es posible expresar el problema a partir de su generalización como un conjunto de líneas de transmisión efectivas (en lugar de líneas de transmisión propiamente dichas), discretizando el espacio de forma que cada paso de discretización resulte mucho menor a  $\lambda/4$  [9], aproximadamente.

En base al modelo circuital de la Figura 3.1, y en base a la teoría desarrollada en la Sección 1.6, es posible analizar la estructura como una única línea de transmisión formada por trozos infinitesimales que cumplen con el circuito equivalente propuesto. La impedancia y admitancia por unidad de longitud, entonces, se pueden expresar como:

$$Z' a = j\omega L_p + \frac{j\omega L_b}{1 - \omega^2 L_b C_g}, \quad (3-17)$$

$$Y' a = j\omega C_p. \quad (3-18)$$

Según la ecuación 1-55, es posible describir el valor de la constante compleja de propagación de una onda electromagnética sobre la línea en base a su impedancia y admitancia. De esta forma:

$$\gamma = \sqrt{-Z'Y'} = \frac{\omega}{a} \sqrt{C_p \left( L_p + \frac{L_b}{1 - \omega^2 L_b C_g} \right)}. \quad (3-19)$$

La solución se grafica en la Figura 3.4, donde se puede observar que se genera un *bandgap* cuando el valor de  $\alpha$  crece mucho, para una frecuencia de aproximadamente 8 GHz.

Este análisis, al contrario que en el caso anterior, no tiene en cuenta el desarrollo espacial de la estructura: cada celda unitaria considerada, cada sección del circuito, representa a

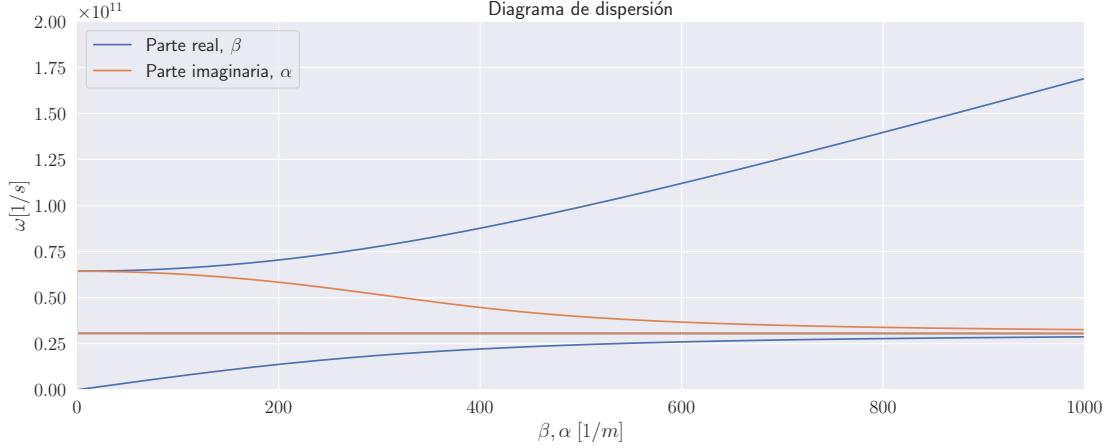


FIGURA 3.4: Diagrama de dispersión calculado en base a la ecuación 3-19.

una sección pequeña del mismo, donde se pueden considerar condiciones cuasiestáticas. Dado que el circuito equivalente de cada sección de la línea de transmisión propuesta representa a una celda unitaria completa, se debe cumplir, al menos, la condición [9]

$$a < \frac{\lambda_g}{4}, \quad (3-20)$$

que en base al análisis de la velocidad de propagación, y considerando que una longitud eléctrica de  $\pi$  representa  $\lambda_g/2$ , da lugar a que el dominio de validez se ubique en

$$\omega = \frac{n\pi}{2(a-b)\sqrt{L_1C_1 + 2b\sqrt{L_2C_2}}} = \frac{\omega_{(\alpha \neq 0)}}{2}, \quad (3-21)$$

es decir, por debajo de la frecuencia de resonancia. Esto significa que sólo es posible confiar en los valores de  $\beta$  más bajos de la gráfica 3.4 para establecer la posición de los modos.

Resulta necesario aclarar, además, que en el circuito propuesto se puede observar únicamente el comportamiento de los modos cuasi-TEM sobre las celdas unitarias de la estructura periódica, pues es a partir de los mismos que se obtienen las expresiones y disposiciones de capacidades e inductancias utilizadas en el modelo. Esto significa que existirán modos superiores con distintas polarizaciones, pero que no pueden ser predichos por el modelo cuasiestático planteado.

Para el caso de las superficies de alta impedancia sin vías de conexión entre la geometría superior y el plano de tierra inferior, Tretyakov y otros [30], [31] han propuesto un

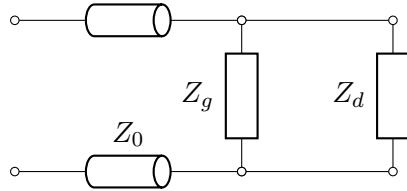


FIGURA 3.5: Circuito equivalente propuesto por [31] para un EBG.

análisis centrado en la similitud con las FSS (*Frequency Selective Surfaces*), considerando a las superficies EBG uniplanares como FSS con un plano de tierra. De esta manera es posible utilizar los modelos desarrollados durante el siglo XX para el análisis de las superficies selectoras de frecuencias, en el estudio de EBGs, dado que el comportamiento de banda prohibida se da por el mismo motivo que el comportamiento de filtro de las FSS [32], relacionado a la frecuencia de resonancia del conjunto de elementos. Para ello, se considera el circuito equivalente de la Figura 3.5, donde  $Z_g$  es la impedancia que impone la FSS que se dispone sobre el plano dieléctrico, y  $Z_d$  es la impedancia del conjunto formado por el dieléctrico y el plano conductor. De esta forma, la impedancia de superficie resulta del paralelo de ambas. La impedancia del conjunto dieléctrico-plano conductor fue analizada en el capítulo anterior, y depende de la polarización (TE o TM). La impedancia que impone el arreglo periódico bidimensional, la FSS, requiere de un análisis particular de cada caso, y los resultados analíticos en la literatura están limitados a conjuntos de rectángulos, dipolos y cruces, y sus correspondientes estructuras complementarias.

Un planteo intuitivo de los resultados de Tretyakov requiere comenzar el análisis a partir del conocimiento de que, como se demostró en la Sección 1.5, y como se muestra en la Figura 1.4, una superficie con impedancia inductiva es capaz de soportar ondas TM. La impedancia de un plano de tierra recubierto por un material dieléctrico,  $Z_d$ , como se muestra en la ecuación 1-48, resulta inductiva. Para lograr una impedancia superficial  $Z_s$  menos inductiva, en vistas de disminuir el comportamiento de guía de ondas de la estructura, se debe imponer una impedancia  $Z_g$  acorde.

El metamaterial basado en FSS más usual, el conjunto o *array* de parches, da lugar a una impedancia  $Z_g$  capacitiva, tanto por la capacidad impuesta entre los parches y el plano de tierra, como por la capacidad entre los parches adyacentes. Para frecuencias bajas, el comportamiento del circuito equivalente es inductivo, pero para frecuencias por encima de la de resonancia, el comportamiento es capacitivo. Por otro lado, es posible considerar, si los parches son lo suficientemente grandes, que los mismos presentan una inductancia, en serie con las capacidades parásitas descriptas antes. Un inductor en paralelo con el inductor correspondiente al plano conductor de la cara inferior del dieléctrico disminuye la inductancia total, por lo que se logra el efecto deseado. Finalmente, si los parches

son conectados, como se mostró en la Figura 3.1, la inductancia en paralelo con la capacidad entre parches acrecentará este efecto. Los efectos que se presentan por encima de la frecuencia de resonancia impiden que el análisis intuitivo describa la existencia de modos superiores, por lo que estas consideraciones no son completas, lo que obliga a que la frecuencia de resonancia no esté muy por debajo de la frecuencia de ondas de superficie que se desea bloquear con la estructura EBG.

### 3.2. Técnicas numéricas de onda completa

El análisis mediante circuitos equivalentes sólo permite el modelado de efectos de primer orden y, en general, en sólo dos dimensiones. El uso de herramientas tridimensionales de cálculo numérico permite observar los efectos de orden superior, así como evaluar los campos radiados por la estructura y los posibles efectos de campo cercano [33].

Las técnicas de simulación de onda completa son aquellas en las que se resuelven las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones 1-1) sin simplificaciones, por lo que los campos solución son, en general, variables en el tiempo y dependientes de la frecuencia, y el cálculo es más lento que en los métodos simplificados. Requieren del establecimiento de condiciones de borde, y permiten conocer el comportamiento de estructuras arbitrarias.

La solución de las ecuaciones diferenciales vectoriales en el espacio y el tiempo se pueden obtener utilizando distintas técnicas, entre las que destacan el método de momentos (MOM), el método de elementos finitos (FEM) y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD).

- **Método de elementos finitos (FEM):** Tiene su origen en el análisis estructural, y desde su primer aplicación al electromagnetismo, en 1968, se convirtió en uno de los métodos diferenciales más importantes. Consiste en dividir en recinto en un número finito de regiones o elementos pequeños (habitualmente triángulos), deducir las ecuaciones que describen los campos dentro de un elemento cualquiera (habitualmente utilizando polinomios de orden  $n$ ), plantear las ecuaciones que dan las condiciones de ajuste de las soluciones en las superficies frontera (en general, agregando como requisito que la solución sea la de mínima energía) y, finalmente, resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante [6]. Debido a que se debe discretizar el espacio completo sobre el que se realizará la simulación, la cantidad de incógnitas es proporcional al volumen y la resolución considerada, aunque no de la complejidad de la estructura simulada, de modo que resulta especialmente útil en aplicaciones pequeñas y complejas (con inhomogeneidades). Para solventar el problema de la simulación de volúmenes abiertos, han surgido diversas estrategias,

entre las que destaca el uso de *Absorbing Boundary Conditions* (ABC) y *Perfectly Matches Layers* (PML) en los límites del dominio de cálculo para simular espacio abierto. Su implementación más conocida está incluida en el programa Ansoft HFSS.

- Método de momentos (MOM): Se suele utilizar para el cálculo de estructuras radiantes, debido a que es un método de resolución de ecuaciones integrales, donde se formula el problema del campo electromagnético en términos de corrientes desconocidas que circulan por los objetos modelados. Estas corrientes se acoplan a través de las funciones tensoriales de Green, y tienen en cuenta automáticamente el espacio circundante. Para esto se debe establecer el operador lineal, para luego resolver un sistema de ecuaciones operacionales lineales relacionadas con el conjunto de las corrientes que circulan sobre los conductores, donde la función solución (los campos que se desea hallar) se representan como un desarrollo en serie de funciones base a las que se aplica el operador, y donde las incógnitas son los coeficientes constantes utilizados en el desarrollo en serie de la función resultado. Es un método en el dominio de la frecuencia, y sus implementaciones más conocida son las usadas por el software *NEC-2* [6], *Keysight Advanced Design Systems* (ADS) y *FEKO*.
- Método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD): Consiste en la discretización en el espacio y el tiempo, mediante las denominadas celdas de Yee, que permiten el uso de la técnica numérica de salto de rana: Dado que las derivadas temporales de cada uno de los campos dependen del rotor del otro, los campos eléctrico y magnético se evalúan en puntos alternados (en la mitad de los puntos se evalúa únicamente el campo eléctrico, y en la otra mitad, campo magnético), de forma que cada punto donde se evalúa campo eléctrico quede rodeado de cuatro componentes donde se calcula campo magnético, y viceversa. La evaluación en el tiempo es también alternada: los campos magnéticos se obtienen  $\Delta t/2$  más tarde que los campos eléctricos, de forma que resulte fácil calcular las derivadas en el tiempo y el espacio mediante diferencias finitas. Dado que la solución se obtiene en el dominio del tiempo, este método resulta útil para aplicaciones de banda ancha. El software comercial más conocido que aplica esta técnica es *CST Microwave Studio*.

Para el caso particular del FDTD, es posible resolver problemas de autovalores (particularmente, el analizado en la Sección 1.2.2), útiles en la descripción de guías de onda y metamateriales periódicos. Una vez impuesta una excitación en el tiempo  $t = 0$ , los valores de campos se actualizan tiempo a tiempo para todos los puntos del dominio de cálculo de forma iterativa, hasta que se logra una señal resonante estable.

Para el caso del estudio de cavidades y guías de ondas, las condiciones de borde para el análisis de autovalores suelen ser conductores eléctricos, con o sin pérdidas. Cuando se analizan estructuras periódicas, es común utilizar condiciones de borde periódicas (PBC, *periodic boundary conditions*), que modelan el efecto de replicación periódica, de manera que es posible simular una única celda unitaria para obtener el efecto del metamaterial completo en base a su diagrama de dispersión [34], utilizando la disposición mostrada en la Figura 3.6.

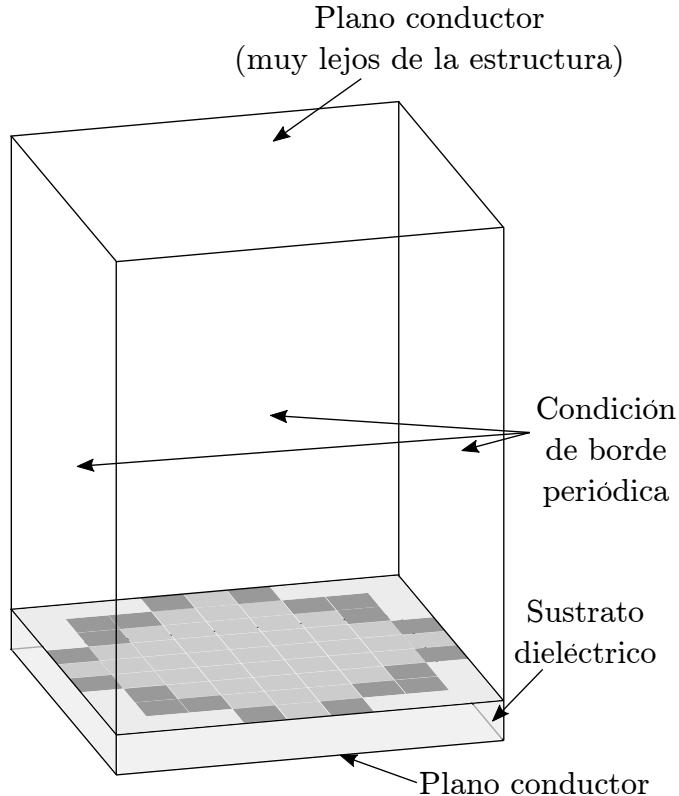


FIGURA 3.6: Dominio de simulación de una celda unitaria de un metamaterial bidimensional, utilizando condiciones de borde periódicas.

El fundamento del uso de estas condiciones de borde periódicas deriva del teorema de Bloch-Floquet, tratado en la Sección 2.3. Como se muestra en la ecuación 2-9, el campo eléctrico (o magnético) resulta periódico, con la misma periodicidad que el material, a excepción de una variación de fase, dada por el valor de la constante de propagación  $\beta$  del medio.

Para obtener el diagrama de dispersión, cada frecuencia  $\omega$  debe estar asociada a una o más constantes de propagación de onda  $\beta$ . O, dicho de otra forma, dada una constante de propagación  $\beta$ , es necesario encontrar las autofrecuencias asociadas. Fijar el valor de la constante de propagación  $\beta$ , según la ecuación 2-9, equivale a establecer la diferencia de fase entre las paredes opuestas de la celda unitaria ( $e^{-j\beta d}$ ). Una simulación del comportamiento en el tiempo, y una posterior transformada de Fourier para obtener

el comportamiento en frecuencia, permite observar picos de amplitud de campo para algunas frecuencias en particular, que son las que autofrecuencias del problema. Dado que la misma diferencia de fase se puede obtener para frecuencias mayores (un ciclo más tarde), se presentará más de un modo.

Como se observó en la Sección 2.6, para la descripción del comportamiento de la relación de dispersión sólo es necesario el cálculo en la denominada zona irreducible de Brillouin, dado que a partir de reflexiones y transposiciones de la misma es posible reconstruir la celda unitaria en el espacio recíproco. Para el caso de celdas unitarias en que hay simetría sobre los ejes  $x$  e  $y$ , y además hay simetría diagonal, la zona irreducible es un triángulo, como se mostró en la Figura 2.11.

De esta forma, únicamente hay que fijar, como condiciones de borde, diferencias de fase que se correspondan, entre los distintos puntos que forman una celda de Wignet-Seitz y que se corresponden a la zona irreducible de Brillouin.

### 3.3. Análisis de campos y modos para distintas estructuras

#### 3.3.1. Metamaterial formado por parches cuadrados unidos por finas trazas *microstrip*

Uno de los metamateriales más fáciles de construir, y que en general presenta buenos resultados al mismo tiempo que mantiene una geometría sencilla es el que posee celdas como las que se observan en la Figura 3.7. En la misma,  $d$  es el lado de la celda unitaria (cuadrada),  $l$  es el tamaño del lado del cuadrado metálico (de cobre), y  $l_m$  y  $w_m$  son el largo y el ancho de los puentes que comunican a los parches, respectivamente.

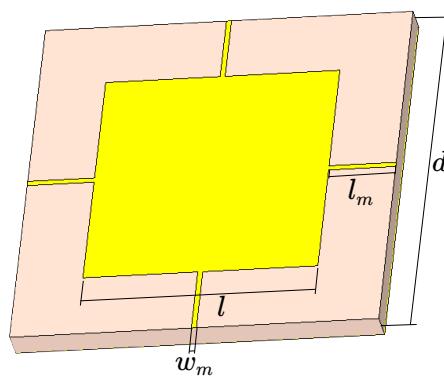


FIGURA 3.7: Celda unitaria de un metamaterial formado por parches cuadrados unidos por finas trazas *microstrip*.

Esta geometría resulta sencilla de analizar, debido principalmente a que, como se estudió en la Sección 3.1, cada aspecto de la misma tiene un equivalente circuital, al menos para

las frecuencias más bajas, que varía en función de los parámetros constructivos. La celda unitaria propuesta posee una simetría tal que permite realizar un análisis en una zona de Brillouin triangular, como la que se mostró, teóricamente, en la Figura 2.16.

Aplicando el análisis de autovalores explicado en la sección precedente, es posible obtener, para cada condición de borde periódica en que va variando la fase de las paredes opuestas que conforman el contorno condicionado, un conjunto de frecuencias que representan los modos de propagación en cada dirección analizada, lo que permite crear un diagrama de dispersión, similar al mostrado en la Figura 2.15, aunque con modos superiores.

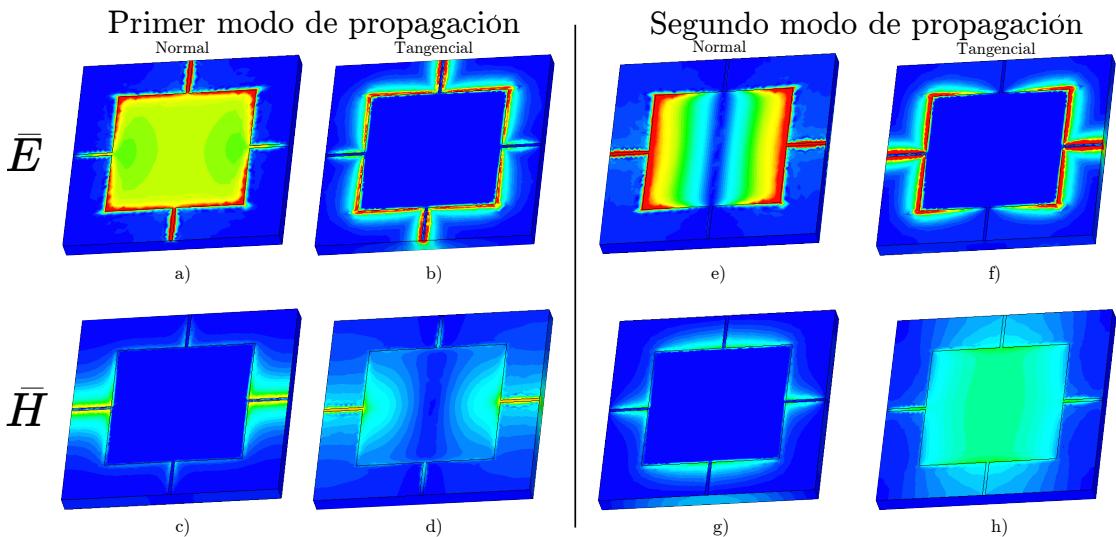


FIGURA 3.8: Comportamiento, en promedio temporal, de los campos eléctrico y magnético sobre una celda unitaria formada por un parche central y 4 puentes laterales, para el primer y segundo modo de propagación.

En la Figura 3.8 se ilustran<sup>1</sup>, para los dos primeros modos de propagación, los campos eléctrico y magnético en dirección normal y tangencial a la superficie, considerando una dirección de propagación horizontal (equivalente al punto  $M$  en la Figura 2.16).

En la Figura 3.8 a) se muestra el comportamiento del campo eléctrico promedio perpendicular a la superficie para el primer modo de propagación. Resulta claro que el mismo se concentra debajo del parche metálico que conforma a la celda unitaria, debido a que la presencia de un plano de tierra genera un comportamiento de placas planas paralelas, conformando efectivamente un capacitor. Es también notoria la presencia de campo eléctrico en dirección normal a la superficie en los puentes *microstrip* superior e inferior, debido principalmente a que no hay movimiento de cargas en dirección longitudinal a los

<sup>1</sup>Debido a la naturaleza de la simulación con autovalores, que no impone una tensión inicial, los valores obtenidos de los campos no son representativos de la situación física (aunque sí la morfología espacial). Estos valores obtenidos, no mostrados en la figura, suelen ser altos debido al mecanismo de simulación. El análisis que se pretende realizar aquí del comportamiento de los campos es puramente conceptual.

mismos, sino que actúan como extensiones al parche central, aumentando ligeramente la capacidad del dispositivo.

El campo eléctrico en la dirección tangencial, también para el primer modo de propagación, es ilustrado en la Figura 3.8 b), y permite observar la existencia de notorios efectos de *fringing* alrededor de todo el parche, que deben ser considerados en el análisis. Estos efectos son mayores sobre los puentes superior e inferior, nuevamente, mientras que sobre los puentes ubicados horizontalmente parece no haber concentración de cargas. Esto se confirma al analizar las figuras 3.8 c) y d), que ilustran el campo magnético en dirección normal y tangencial a la superficie, respectivamente. Se puede observar que no existen campos magnéticos normales a la superficie debajo del parche metálico, sino que, como muestra la figura d), son puramente tangenciales. Debajo del parche, entonces, para el primer modo de propagación, los campos son cuasi-TEM. La presencia de campo magnético sobre los puentes horizontales corrobora la hipótesis de que sobre los mismos se genera corriente, que ingresa al parche metálico para ser conducida.

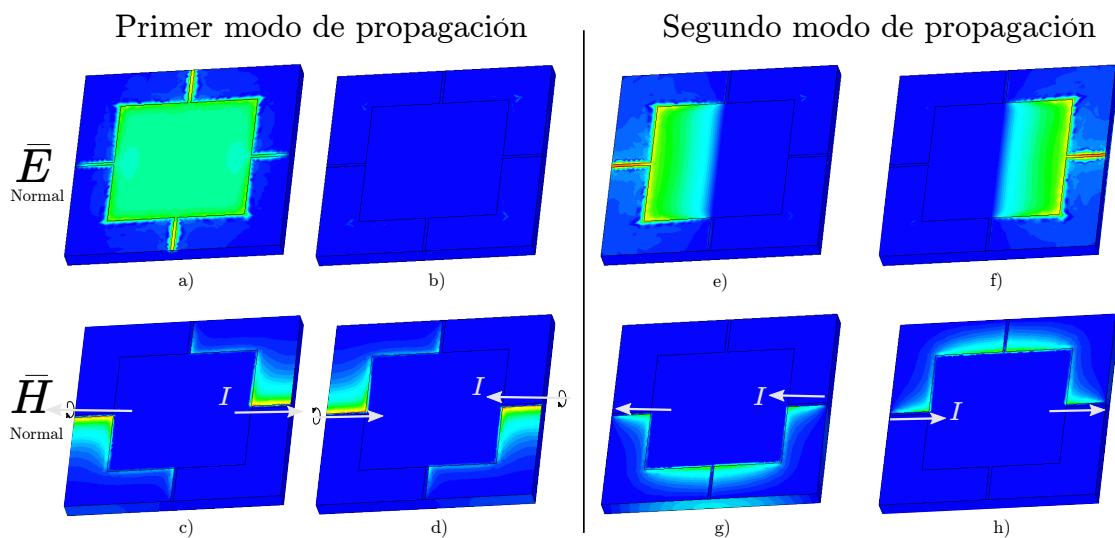


FIGURA 3.9: Comportamiento, para dos tiempos diferentes, de los campos eléctrico y magnético normales a la superficie, sobre una celda unitaria formada por un parche central y 4 puentes laterales, para el primer y segundo modo de propagación.

El análisis para el primer modo de propagación continúa en la Figura 3.9. En las figuras 3.9 a) y b) se muestra el comportamiento del campo eléctrico para dos tiempos diferentes. Se observa que el parche almacena cargas durante un breve tiempo, y las expelle inmediatamente después. Esto se ve corroborado por el comportamiento del campo magnético normal a la superficie, mostrado en escala lineal en las figuras 3.9 c) y d), para dos tiempos distintos, y donde se ven colores cuando el campo es positivo en la dirección perpendicular saliente a la superficie del parche. A través del uso de la regla de la mano derecha, se pueden deducir las direcciones de las corrientes sobre los puentes, que son las especificadas por flechas, y donde se observa que son opuestas en

el primer modo. Es decir, de forma intuitiva, las corrientes son entrantes al parche de todas direcciones al mismo tiempo, y son salientes del mismo hacia todas direcciones en un tiempo subsiguiente. De esta forma, el parche posee cargas positivas completamente en un tiempo, y luego cargas negativas en el tiempo siguiente, lo cual coincide con la intuición del concepto de un primer modo de propagación, y con el análisis intuitivo detallado.

El segundo modo de propagación, para la misma dirección y posición sobre el diagrama de dispersión (punto «M»), posee un comportamiento más complejo. Como se observa en la Figura 3.8 e), el campo eléctrico presenta un cero en el centro de la celda unitaria, en la figura f) es coherente con esta observación, dado que cerca del centro y de los puentes verticales no hay campo de *fringing*. El campo magnético, por otro lado, mostrado en las figuras g) y h), nuevamente no parece permitir concebir corrientes sobre los puentes verticales, aunque sí en el interior del parche metálico propiamente dicho.

El análisis de dos tiempos diferentes dentro del ciclo para el segundo modo de propagación, mostrado en las figuras 3.9 e)-h), permite comprender más intuitivamente el comportamiento. Se observa que el parche central es excitado (posee campo eléctrico vertical) en dos tiempos diferentes, y sólo una de sus mitades lo es cada vez. Hay un desfasaje de  $180^\circ$  entre ambos lados del parche. Observando el campo magnético, resulta también intuitivo considerar que cuando la mitad izquierda del parche está excitada, es decir, cuando posee cargas almacenadas, formando un capacitor con el plano de tierra, se genera una corriente hacia la celda vecina, que posee un parche con tensión opuesta. En el lado derecho, el efecto es análogo. Es importante notar que, al contrario que en el caso del primer modo, en el segundo modo de propagación las corrientes de los puentes tienen el mismo sentido en cada tiempo.

La Figura 3.10 ilustra, de forma esquemática e informal, sin considerar los mencionados comportamientos de los campos en un material periódico, el comportamiento de la fase del campo eléctrico para ambos modos de propagación, de manera que se pueda apreciar el requerido aumento de frecuencia para la concreción del segundo modo.

Para comprender el efecto de la variación de distintos parámetros geométricos, se realizaron varias simulaciones, obteniendo de ellas los diagramas de dispersión.

### 3.3.1.1. Análisis de un diagrama de dispersión típico

En la Figura 3.11 se puede observar un diagrama de dispersión típico.

La línea azul corresponde al primer modo de propagación, la marrón al segundo, la verde al tercero, la roja al cuarto y la violeta al quinto. Además, se dibujaron las líneas de

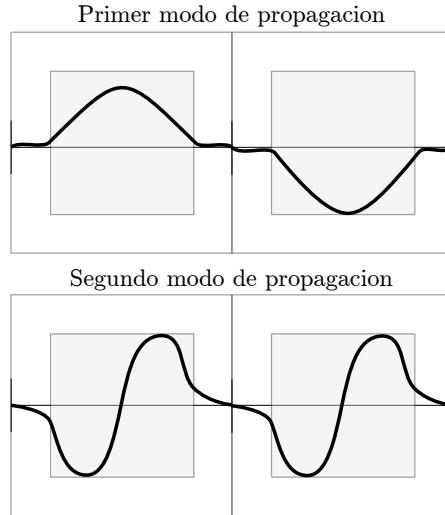


FIGURA 3.10: Comportamiento, para dos tiempos diferentes, del campo eléctrico sobre una celda unitaria formada por un parche central y 4 puentes laterales, para el primer y segundo modo de propagación.

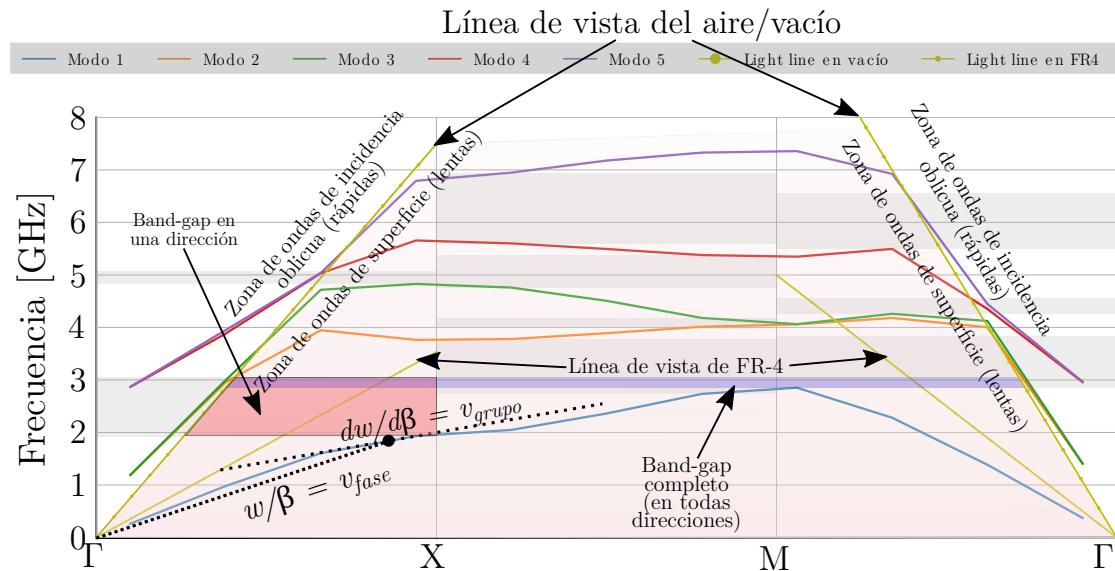


FIGURA 3.11: Ejemplo típico de un diagrama de dispersión que presenta un metamaterial bidimensional.

vista (*light-lines*) para vacío y para FR-4, que indican el comportamiento de una onda plana que circula por esos materiales, cuando son homogéneos y libres de obstáculos. Representan el corte del diagrama de dispersión tridimensional mostrado en la Figura 2.13 sobre los bordes de la celda de Brillouin, como se ve en la Figura 2.15, para los dos materiales. La línea de vista del FR-4 presenta, naturalmente, una pendiente menor a la del vacío, pues la velocidad de propagación sobre ese medio es menor.

La línea de vista del vacío separa las llamadas ondas lentes (*slow waves*), que poseen una velocidad de fase menor a la del vacío ( $c$ ), de las ondas rápidas (*fast waves*), con velocidad de fase superior a  $c$ . Dado que, para el vacío,  $\beta = \omega/c$ , si se extiende a definición

a dos dimensiones, se obtiene que  $\beta_x^2 + \beta_y^2 = \omega^2/c^2$ . Cuando el valor de  $|\beta|$  supera al correspondiente a la propagación en el vacío para la misma frecuencia, necesariamente la velocidad de fase es menor ( $\beta = \omega/v_p$ ). Cuando la velocidad es mayor, es decir, cuando se analizan resultados para pares  $(\omega, \beta)$  que están por encima de la línea de vista, el estudio no se da sobre ondas de superficie, sino sobre ondas incidentes o reflejadas con ángulo determinado. En algunos casos [35], para algunos usos de metamateriales (especialmente cuando se los diseña de forma que actúen como paredes conductoras magnéticas), esa zona del diagrama de dispersión resulta de gran utilidad [34].

Las zonas demarcadas en gris representan, para cada una de las direcciones analizadas, la zona de frecuencias prohibidas o *band-gap*. En particular, para la zona  $\Gamma - X$ , el primer *band-gap* se demarcó en rojo. Se debe tener en cuenta que se calculan los *band-gaps* para las tres direcciones de forma separada. Existe un *band-gap* completo (en azul), cuando existe en todas las direcciones analizadas. Para las frecuencias dentro de la zona prohibida completa, no existirá ángulo de incidencia que permita su propagación. Es importante notar que, para los intervalos  $\Gamma - X$  y  $M - \Gamma$ , las zonas prohibidas para la propagación de ondas lentas (*slow-waves*) de superficie se calculan por debajo de la línea de vista del vacío. Por encima de dicha línea, las ondas se propagan libremente.

En general, el diseño de EBGs tiene como objetivo aumentar el ancho de la banda prohibida de frecuencias para la propagación de ondas de superficie, la variación de la frecuencia central de los *band-gaps*, y la independización del mismo de la dirección de propagación (que equivale a lograr *band-gaps* completos). Estos objetivos se logran modificando la geometría de la celda unitaria, aumentando el acoplamiento entre las mismas y conectando los parches al plano de tierra [26]. La independización de las zonas prohibidas para cualquier dirección azimutal de propagación de ondas de superficie requiere celdas simétricas, aunque para ciertas aplicaciones la anisotropía es buscada [35].

El diagrama de dispersión, además, da una idea de las velocidades de fase ( $v_p = \omega/\beta$ ) y grupo ( $v_g = d\omega/d\beta$ ) para los modos existentes.

### 3.3.1.2. Efecto de la variación del ancho del puente *microstrip*

La primera variación analizada es la del ancho de los puentes *microstrip* que unen a los parches metálicos que conforman la estructura. Estableciendo una celda de 2 cm de lado, y un parche de 1,8 cm, para el caso de sustrato FR4 de 1,6 mm de espesor, se obtuvieron los diagramas de dispersión sobre el borde de la celda de Brillouin que se muestran en la Figura 3.12.

En la misma se observa que la formación de una zona prohibida completa entre los dos primeros modos de propagación, se ve dificultada cuando el ancho del puente aumenta,

### Celda de parches metálicos unidos por puentes *microstrip*

#### Variación de ancho del puente

Lado de celda: 20 mm. Lado del parche: 18 mm.  $\epsilon_r$ : 4.5. Ancho FR-4: 1.6 mm

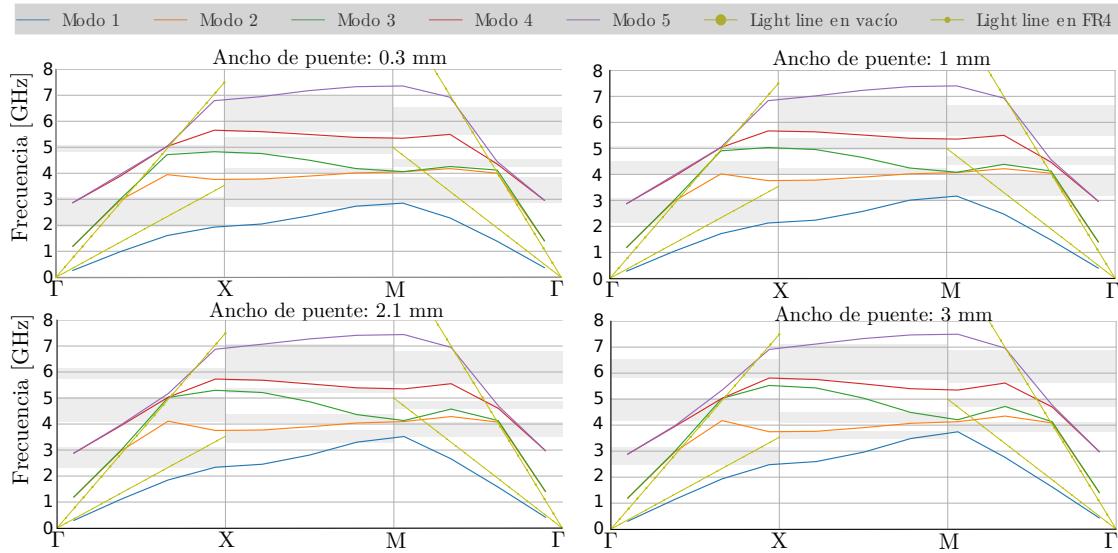


FIGURA 3.12: Diagramas de dispersión para la variación del ancho de los puentes *microstrip* que conforman una celda unitaria cuadrada, de lado 2 cm, parche de 1,8 cm, con sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

debido a que, para todas las direcciones de propagación, el ancho de los *band-gaps* disminuye drásticamente.

Variación, según región, del primer bandgap en función de la variación de ancho del conector  
Lado de celda: 20 mm. Lado de parche 18 mm.  $\epsilon_r$ : 4.5. Ancho FR4: 1.6 mm

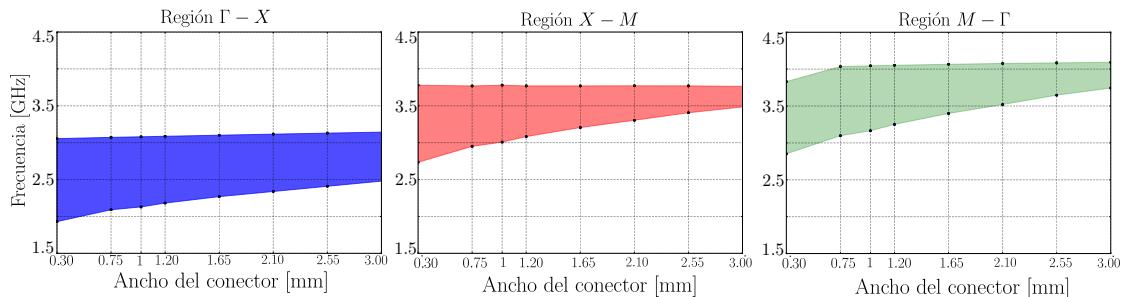


FIGURA 3.13: Comparación del ancho del primer bandgap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del ancho del puente que une los parches metálicos.

La principal causa se puede deducir de la Figura 3.13, donde es notorio el crecimiento generalizado de las frecuencias necesarias para obtener el primer modo de propagación (la curva azul de la Figura 3.12 se eleva), lo que se condice con una aumento en la velocidad de propagación en el metamaterial. Una explicación intuitiva, válida únicamente para las frecuencias en las que se puede aplicar el modelo cuasiestático y considerar corrientes y tensiones sobre los conductores que conforman la estructura, se basa en la posible disminución de la resistencia al paso de corriente, lo que permite una carga y descarga

del capacitor de placas planas paralelas (formado por el parche y el plano de tierra) más rápida.

Para modos superiores, especialmente para el rango de frecuencias entre el cuarto y el quinto modo, existe una zona prohibida que se extiende en todas direcciones, pero se da para frecuencias mucho más altas, de escaso valor práctico.

### 3.3.1.3. Efecto del escalamiento de la celda unitaria

Celda de parches metálicos unidos por puentes microstrip

#### Variación del tamaño de la celda unitaria

Lado de celda: d (variable). Lado del parche: 0.75d.  $\epsilon_r=4.5$ . Ancho FR-4: 1.6 mm. Ancho del puente: 1 mm.

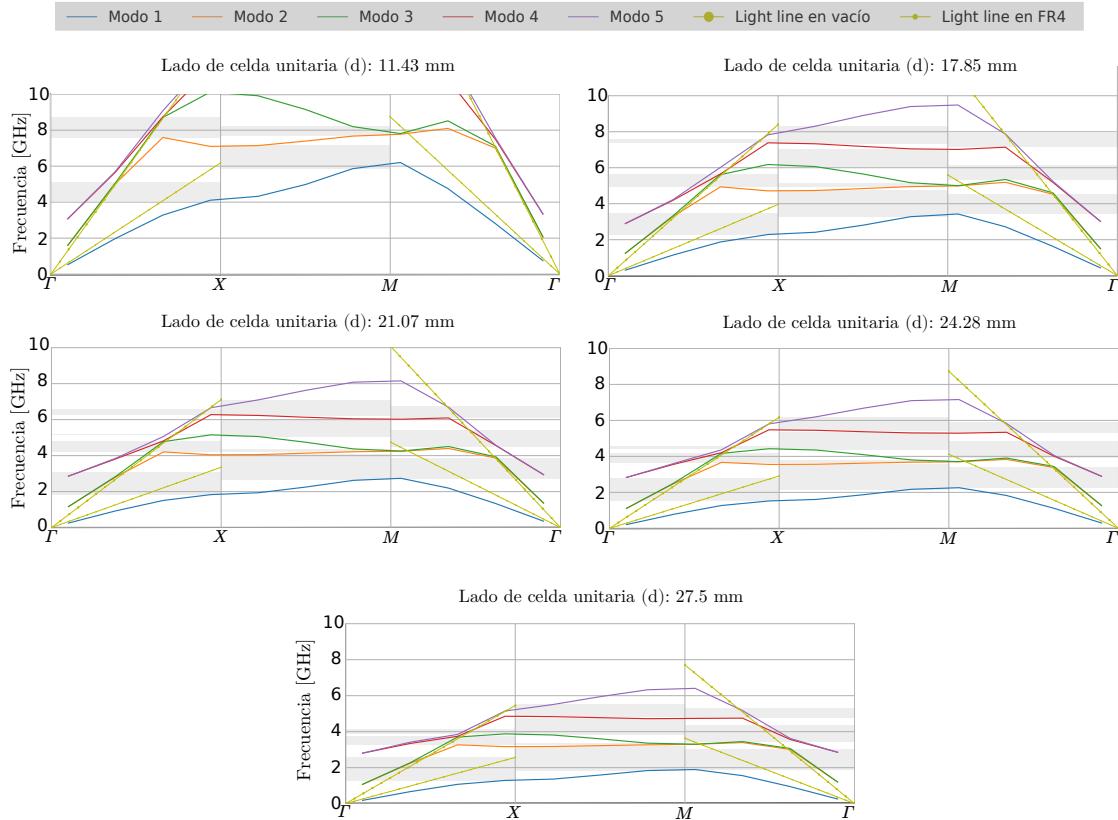


FIGURA 3.14: Diagramas de dispersión para la variación del ancho de las celdas unitarias (y, en consecuencia, también del parche que contiene) que conforman una celda unitaria cuadrada. El lado del parche es  $3/4$  del lado de la celda unitaria. El sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

Un escalamiento de la celda unitaria, debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, debería únicamente generar un cambio en las frecuencias centrales de los *band-gaps*. Para celdas unitarias pequeñas, las frecuencias centrales de las zonas prohibidas son altas, y resulta más difícil obtener un *bandgap* completo, como se observa en la Figura 3.14.

En la Figura 3.15 se puede observar el comportamiento del primer *bandgap* (ubicado entre el primer y el segundo modo de propagación), en función del tamaño de la celda unitaria analizada. A medida que la misma disminuye, las frecuencias centrales decaen. La variación del tamaño de la celda unitaria, por sí solo, facilita la superposición de zonas prohibidas en todas las direcciones sólo para frecuencias bajas, y cuando la celda unitaria es grande. La superposición de las tres direcciones de propagación analizadas se puede observar en la gráfica inferior de la Figura 3.15.

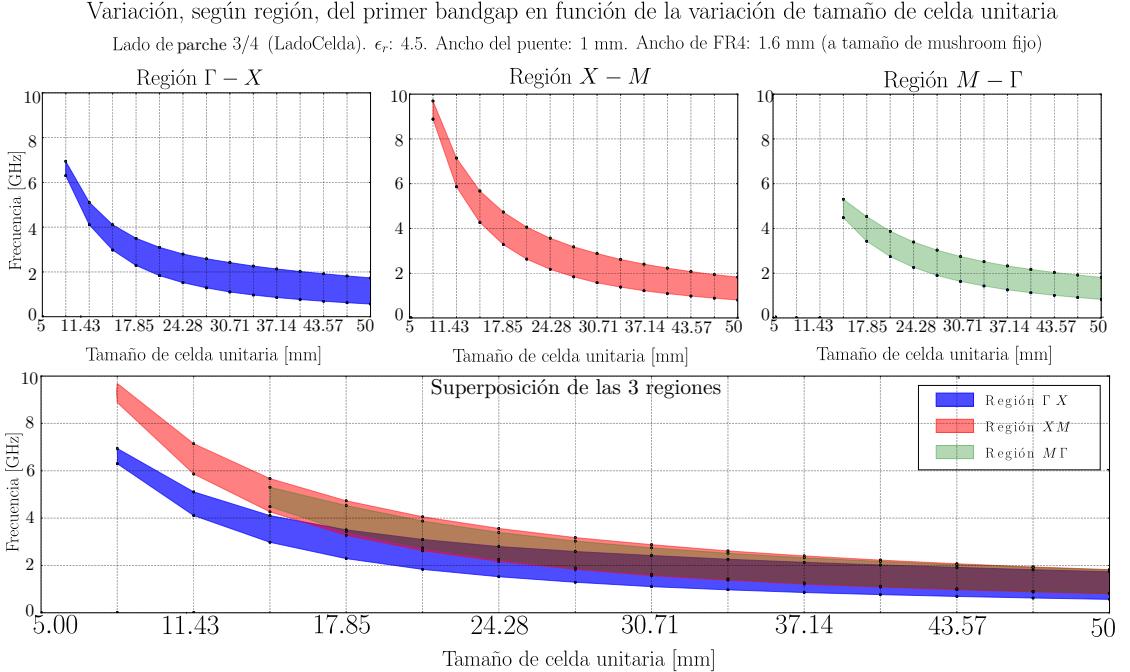


FIGURA 3.15: Comparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del tamaño de la celda unitaria.

El comportamiento de la primera zona prohibida se puede explicar intuitivamente considerando que, de no variar la velocidad de propagación en el medio, y dado que  $\omega = k * v_p$ , entonces al variar el número de onda requerido por aumentar el tamaño de la celda unitaria (disminuye, permitiendo que el primer modo se corresponda con una longitud de onda mayor), el valor de  $\omega$  debe disminuir en consecuencia.

A este efecto se debe añadir el correspondiente al aumento del efecto capacitivo por el aumento del tamaño del parche. Si se considera, como se explicó antes, que un análisis a bajas frecuencias, utilizando razonamientos cuasiestáticos, nos conduce a un filtro LC equivalente. La frecuencia de resonancia de ese tipo de filtro es, en general, y sin considerar pérdidas,  $f_r \approx 1/\sqrt{LC}$ . Dado que se está escalonando la celda unitaria, y que por tanto también está creciendo el tamaño del parche, el valor de la capacidad aumenta. La relación entre la capacidad y el tamaño del parche es cuadrática, como se puede ver en la ecuación 3-1, y la inductancia no aumentará apreciablemente en comparación. De esta forma:  $f_r \propto 1/\sqrt{l^2} = 1/l$ , con  $l$  el tamaño del parche, según la Figura 3.7.

Resulta importante destacar que la variación del tamaño de la celda unitaria en su conjunto es la forma más fácil (aunque en general, la menos conveniente) de modificar la frecuencia de trabajo del EBG.

### 3.3.1.4. Efecto de la variación del tamaño del parche metálico

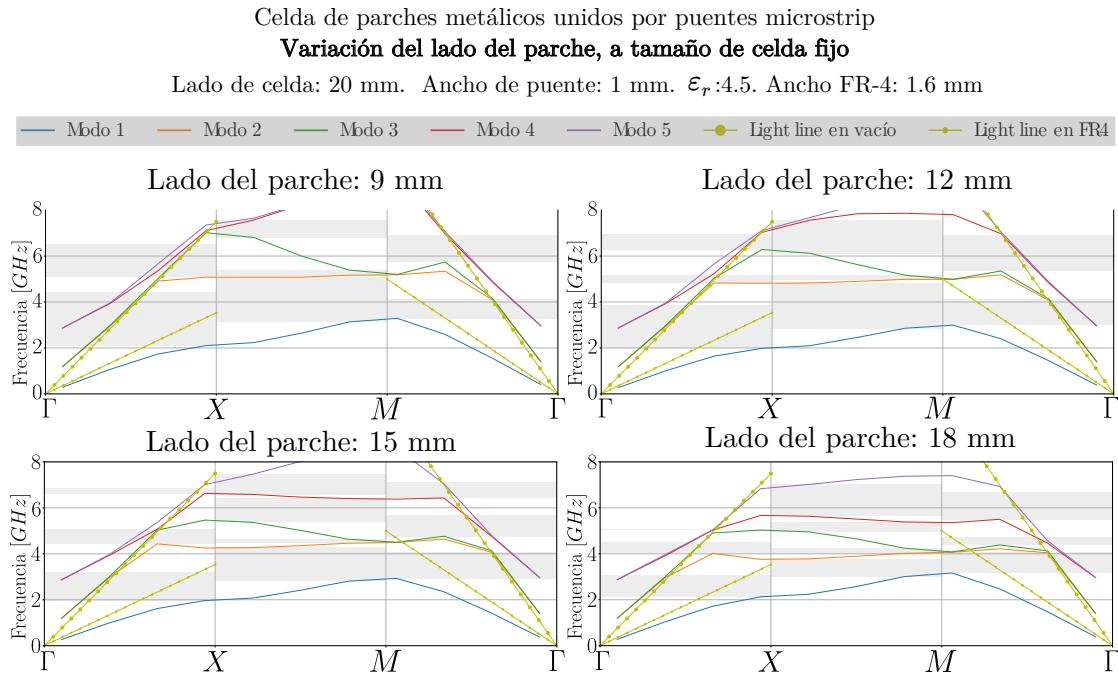


FIGURA 3.16: Diagramas de dispersión para la variación del tamaño del parche metálico, sin una variación en el tamaño de la celda unitaria. El sustrato de FR-4 de 1,6 mm de espesor.

La Figura 3.16 muestra que, al contrario que en el caso anterior, la mera variación del tamaño del parche metálico, sin la modificación del tamaño de la celda unitaria, no genera los mismos efectos. La variación de la capacidad, como antes, da lugar a una disminución en la frecuencia central del primer *bandgap*.

Por otro lado, la inductancia impuesta por los puentes disminuye considerablemente cuando el tamaño del parche aumenta sin que lo haga la celda unitaria en general. En este sentido, manteniendo la analogía con el filtro LC presentado antes, dado que el ancho de banda de resonancia de un filtro LC es aproximadamente  $BW_r \approx \sqrt{L/C}$ , si disminuye el valor de la inductancia (por puentes más cortos) y, al mismo tiempo, aumenta el valor de la capacidad (por el aumento del efecto de capacitor de placas planas paralelas y las capacidades mutuas entre celdas vecinas), el ancho de banda disminuirá notablemente.

Como se puede ver en la Figura 3.17, un mayor ancho de banda prohibida se obtiene con parches de tamaño moderado, con los que además es posible obtener bandas prohibidas completas.

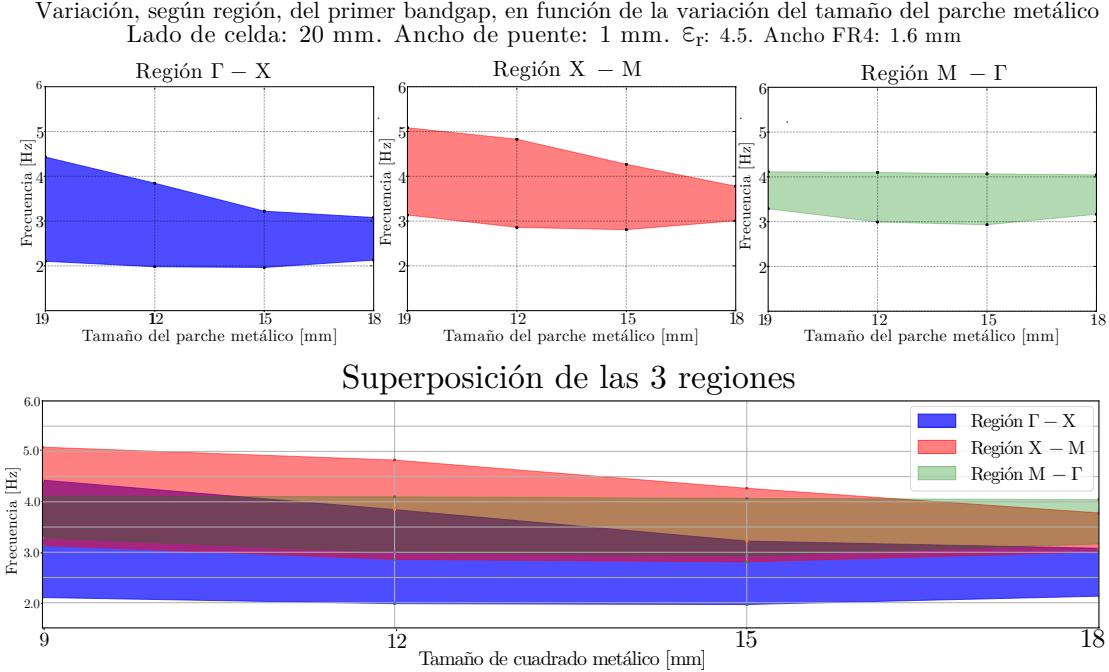


FIGURA 3.17: Comparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del tamaño del parche.

### 3.3.1.5. Variación de la longitud de los puentes

Para la variación de la longitud de los puentes es necesario, nuevamente, modificar el tamaño de la celda unitaria, por lo que, necesariamente, a medida que exista una mayor separación entre los parches (y por tanto una mayor longitud de puentes), la frecuencia central de la banda prohibida disminuirá.

Por otro lado, dado que la capacidad no cambiará (excepto aquella correspondiente al efecto de capacidad entre parches cercanos, que estarán cada vez más alejados), los efectos más notorios, bajo un análisis cuasiestático, se darán por el aumento de la inductancia. El alejamiento de los parches metálicos entre sí disminuirá la capacidad total de cada celda unitaria, pero los efectos no son lo suficientemente notorios. Si los puentes no existieran, el efecto sería el opuesto al que se da en esta geometría [34]. Este aumento en la inductancia generará un mayor ancho de banda, que se ve reflejado en la Figura 3.19.

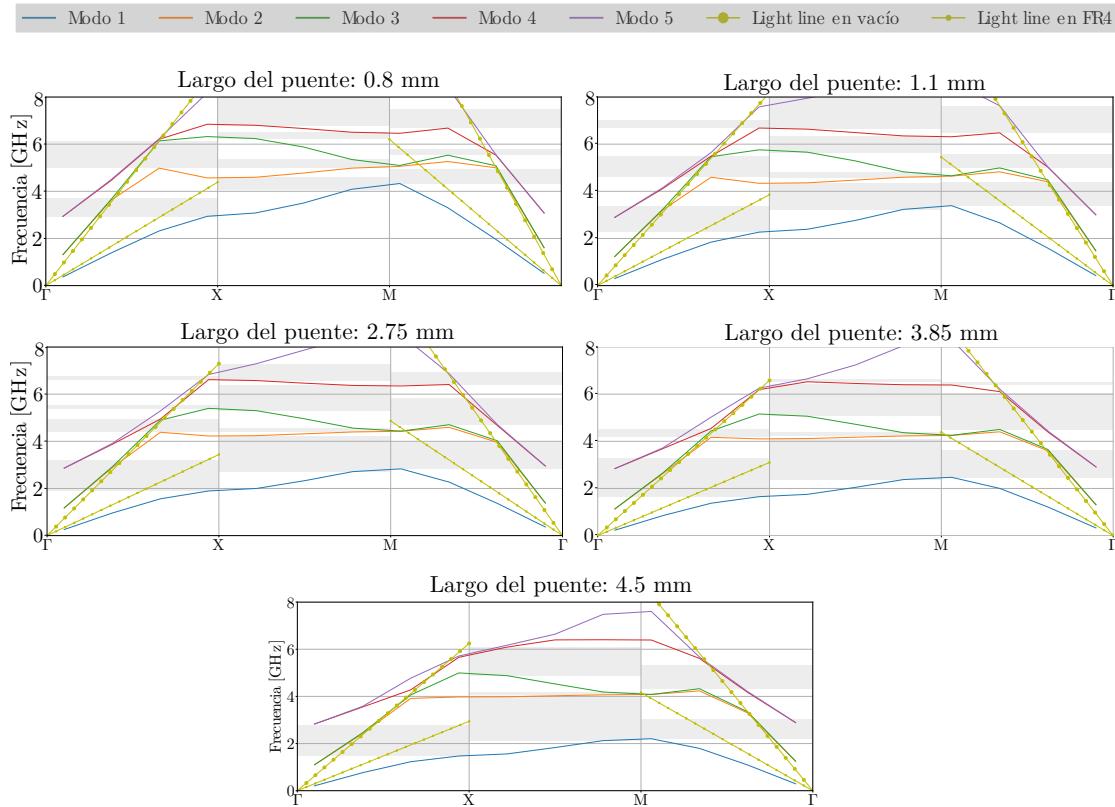
### 3.3.1.6. Efecto de la variación del ancho del sustrato dieléctrico

La variación del ancho del sustrato tiene importantes consecuencias en el EBG. Por un lado, es importante notar que el comportamiento del ancho de banda es opuesto al que se obtiene considerando el modelo cuasiestático: Un aumento en la capacidad (debido

Celda de parches metálicos unidos por puentes *microstrip*

#### Variación de largo del puente (hasta el borde de la celda)

Lado del parche: 15 mm. Ancho del puente: 1 mm.  $\epsilon_r=4.5$ . Ancho FR-4: 1.6 mm

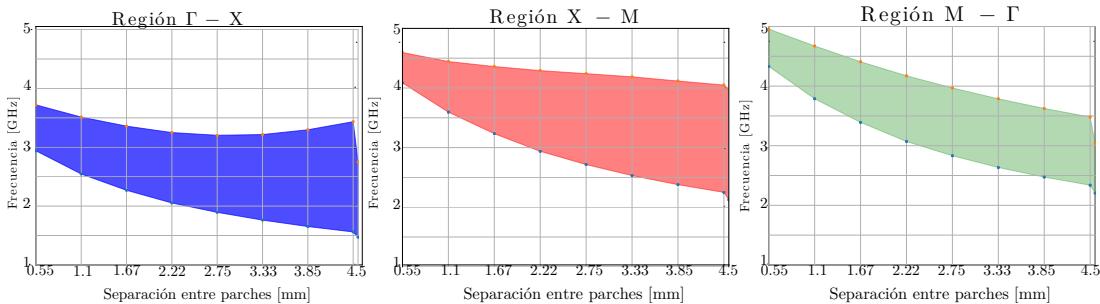


al acercamiento de los planos paralelos que forman los parches y el plano conductor inferior, cuando disminuye el ancho del sustrato), debería dar lugar a una disminución notoria en el ancho de banda. Sin embargo, como se observa en la Figura 3.21, se da el efecto contrario.

El comportamiento resulta más intuitivo si se recuerda que, como se explicó en la Sección 1, un sustrato delgado dificulta la aparición de ondas de superficie, volviendo a las zonas prohibidas de propagación más notorias.

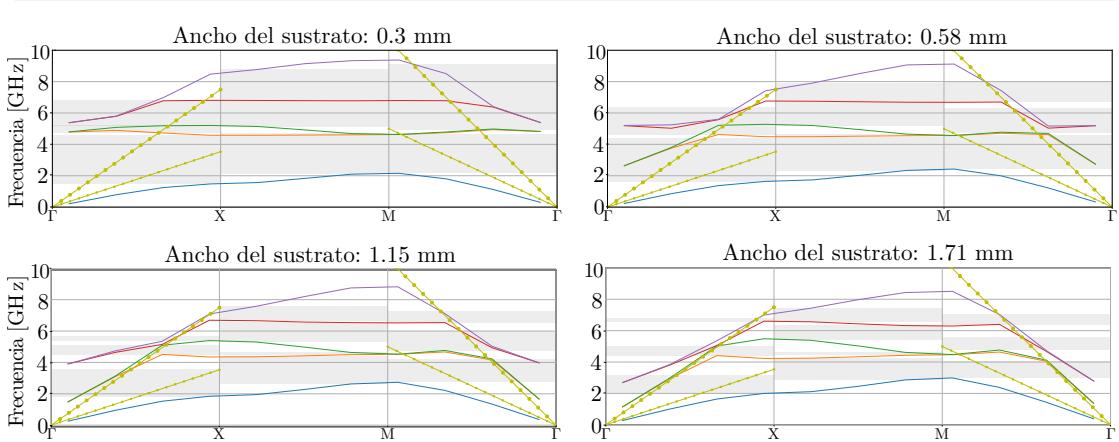
A medida que aumenta el tamaño del mismo, disminuye el ancho de banda de la zona prohibida, y resulta más difícil obtener un *bandgap* completo.

Variación, según región, del primer bandgap en función de la variación del largo de los puentes  
 Lado del parche: 15 mm. Ancho del puente: 1 mm.  $\epsilon_r$ : 4.5. Ancho de FR4: 1.6 mm.



Celda de parches metálicos unidos por puentes *microstrip*  
**Variación del ancho del sustrato dieléctrico**

Lado del parche: 15 mm. Lado de la celda: 20 mm. Ancho del puente: 1 mm.  $\epsilon_r$ : 4.5. Dieléctrico: FR-4.



Variación, según región, del primer bandgap en función de la variación de ancho de sustrato  
 Lado de celda: 20 mm. Lado de mushroom: 15 mm.  $\epsilon_r$ : 4.5. Ancho del puente: 1 mm.

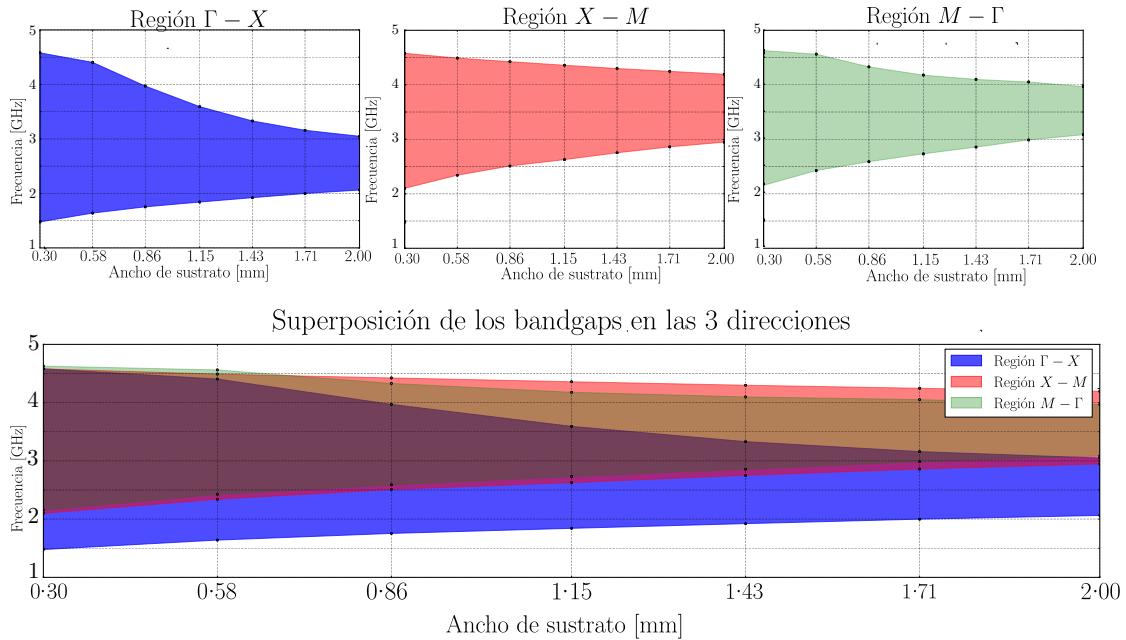


FIGURA 3.21: Comparación del ancho del primer band-gap (entre el primer y el segundo modo de propagación) para las tres direcciones analizadas, en función del ancho del sustrato dieléctrico.

### 3.3.2. Celda de Yang

La búsqueda de estructuras que requirieran un menor tamaño de celda unitaria para lograr zonas prohibidas en frecuencias bajas, impulsó a Fei-Ran Yang, Kuang-Ping Ma, Yongxi Qian y Tatsuo Itoh, en 1991, a presentar [36] la geometría mostrada en la Figura 3.22. En la misma, como se puede observar, se intentó maximizar la longitud de los puentes, estableciendo lo que se conoce como un *inset* en el parche *microstrip*. De esta forma, el parche puede crecer, y por tanto aumentar la capacidad, sin que por ello la inductancia deba disminuir. Esto permite, además, que los parches de las distintas celdas unitarias se ubiquen a corta distancia unos de otros, aumentando entonces el acoplamiento capacitivo entre ellos, y por tanto la capacidad del sistema completo. A pesar de las modificaciones, la simetría se mantuvo, por lo que las rectas de análisis de la zona irreducible de Brillouin son las mismas que para el caso de la celda analizada en la Sección 3.3.1.

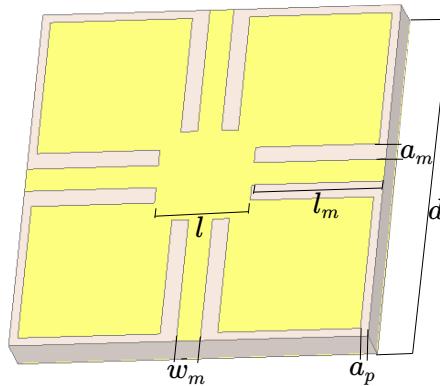


FIGURA 3.22: Celda unitaria del metamaterial presentado en 1999 por Yang, Ma, Qian e Itoh.

Aplicando, nuevamente el análisis de autovalores con condiciones de borde periódicas, se puede observar el comportamiento de los campos, más complejo que en la celda unitaria analizada antes. El mismo se muestra en la Figura 3.23.

Para el primer modo de propagación, resuelta evidente que, como en la estructura de parches cuadrados unidos por puentes analizada antes, el campo eléctrico es principalmente normal al plano sobre el que se ubica la estructura, y se ubica mayormente bajo el parche, donde se presenta el efecto de placas planas paralelas. Sin embargo, debido a que ahora los puentes parten desde el interior del parche, existen también componentes tangenciales a la superficie. Estas componentes, como se puede observar en la Figura 3.23 b) (para el primer modo) y f) (para el segundo modo), son muy notorias en los bordes de la celda unitaria, por lo que los efectos de acoplamiento capacitivo mutuo entre celdas son mucho más notorios que en la celda analizada antes.

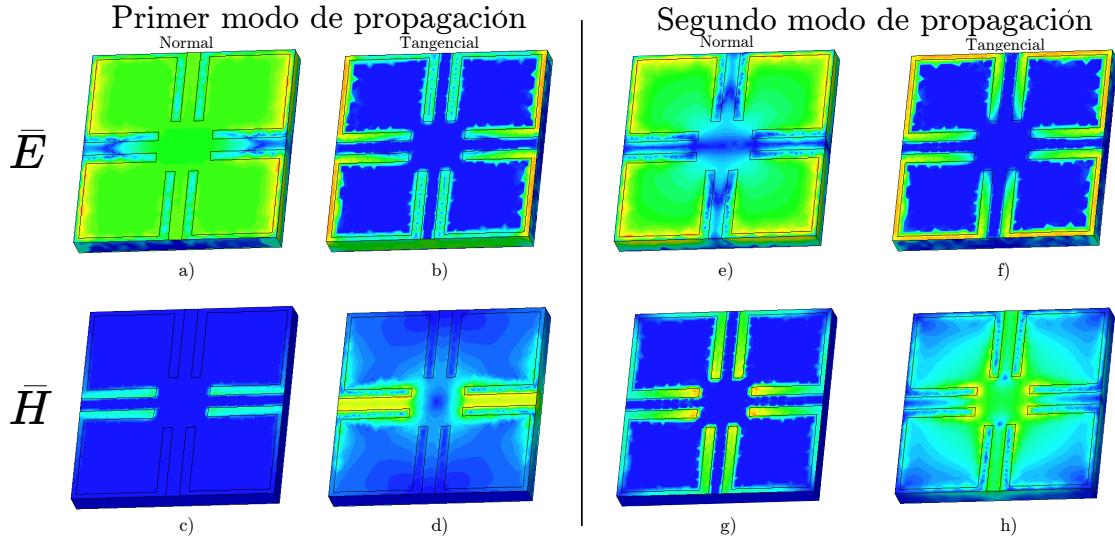


FIGURA 3.23: Comportamiento, en promedio temporal, de los campos eléctrico y magnético sobre una celda unitaria de Yang, para el primer y segundo modo de propagación.

Los campos magnéticos, por otro lado, para el primer modo de propagación son muy similares a los que presenta la celda analizada antes, incluyendo su variación temporal, que puede verse en las figuras 3.24 c) y d) para dos tiempos distintos dentro del periodo. En el primero de ellos, cuando el campo eléctrico tiene amplitud máxima sobre el parche (figura a)), la corriente saliente al parche a través de los puentes horizontales crece. De la misma forma, cuando la tensión en el parche decrece a su mínimo, la corriente entrante al parche es máxima.

Para el segundo modo de propagación, el campo eléctrico, en promedio (Figura 3.23 e) y f)) tiene un comportamiento muy similar al primer modo de propagación, pero como se puede observar en las figuras correspondientes de la Figura 3.24, para tiempos distintos, el campo es mayor, alternadamente, en la parte superior e inferior de los parches. El campo magnético normal a superficie, en promedio, se puede observar, para este modo de propagación, presente en todas las aperturas metálicas de la celda unitaria, indicando que sobre los parches y los bordes del parche circula una corriente notoria. En las figuras 3.24 g) y h) se puede observar el campo magnético para dos momentos de tiempo distinto. Este campo magnético sugiere que en los puentes horizontales hay corrientes en ambas direcciones en todo momento (debido a que las dos aperturas que lo rodean presentan un campo magnético normal saliente), mientras que los puentes verticales poseen corrientes en un único sentido y, al contrario que para el caso de los puentes horizontales del primer modo, en este caso el sentido es el mismo.

Se debe tener en cuenta que el uso de esta estructura presenta mayores dificultades, especialmente cuando su construcción se realiza por técnicas rudimentarias. Sin embargo, gracias a un mejor aprovechamiento del espacio, que permiten obtener una mayor

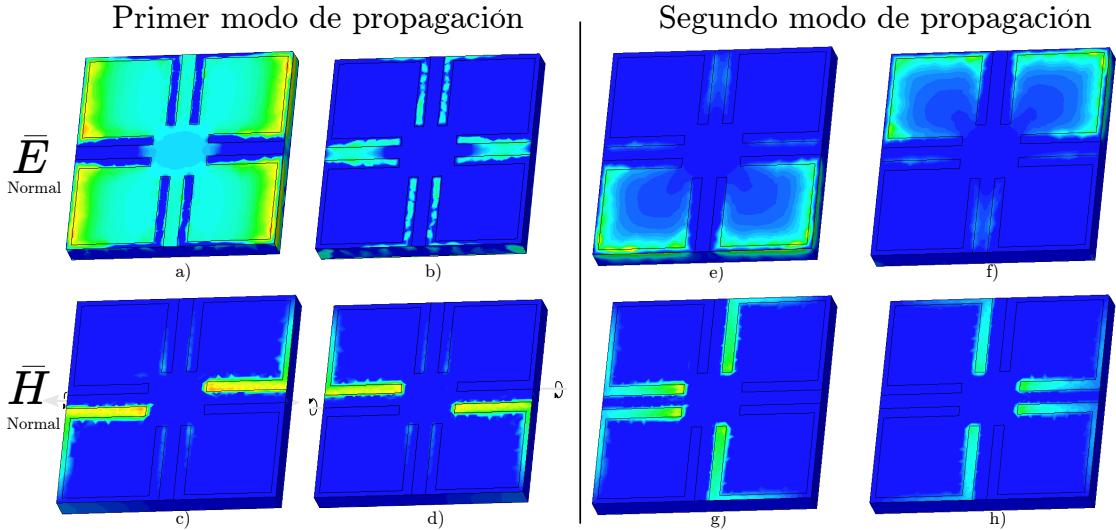


FIGURA 3.24: Comportamiento, para dos tiempos diferentes, de los campos eléctrico y magnético normales a la superficie, sobre la celda propuesta por Yang, Ma, Qian e Itoh, para el primer y segundo modo de propagación.

capacidad e inductancia por celda unitaria, la geometría permite diseñar celdas unitarias más pequeñas para lograr zonas prohibidas para frecuencias de microondas que las que se pueden lograr utilizando la geometría analizada en la Sección 3.3.1.

### 3.4. Modelado circuital

La forma más sencilla de modelar el comportamiento resonante es la representación circuital, como la discutida en la Sección 3.1. En la misma deben intervenir capacitores e inductores con valores seleccionados en función del comportamiento de la energía en la estructura. Si bien los efectos de altas frecuencias no podrán ser analizados bajo esta representación, dado que no se consideran parámetros distribuidos ni se tiene en cuenta la variación de las capacidades e inductancias asociadas en función de la frecuencia, sí debería ser posible observar, al menos en forma general, los fenómenos analizados para las frecuencias de trabajo, de manera que se pueda abordar el problema intuitivamente.

Para el caso particular de la celda de Yang presentada en la Sección 3.3.2, a raíz del análisis del comportamiento de los campos, resulta fácil comprender que, si bien los fenómenos que intervienen son numerosos, los más importantes están fuertemente vinculados a la circulación de corriente por el puente y al desarrollo del campo eléctrico entre las celdas.

Se propusieron distintos circuitos, de diversa complejidad, para representar a cada celda unitaria propuesta por Yang, basados principalmente en el circuito mostrado en la Figura 3.1 y se analizaron los parámetros  $S_{21}$  de cada uno, en vistas de lograr un

$d$	$l$	$w$	$d_l$	$g$	$h$	$d_w$
22,6 mm	6 mm	1,1 mm	0,8 mm	0,8 mm	1,6 mm	16,6 mm

TABLA 3.2: Valores geométricos de la celda unitaria analizada., elegidos arbitrariamente.

comportamiento similar al obtenido cuando se utiliza el software *CST Microwave Studio* para simular la estructura. El primero de los circuitos propuestos se puede observar en la Figura 3.25, junto con los parámetros geométricos que dan lugar a los valores de los componentes circuitales. En el mismo se intentó utilizar la estructura LC paralela resonante para obtener un *bandgap* para el rango de frecuencias estudiado.

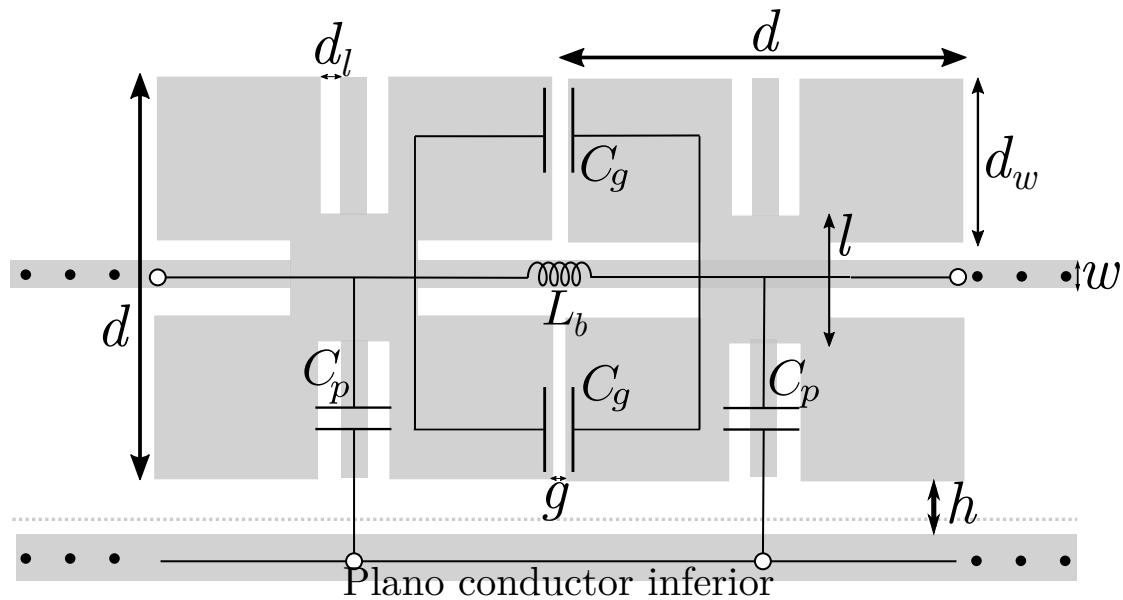


FIGURA 3.25: Primer circuito equivalente propuesto, con LC paralelo para obtener efecto *notch*.

La estructura LC paralela posee una frecuencia de resonancia en  $f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ , en la que abandona su comportamiento inductivo, y adopta uno predominantemente capacitivo. Para esa frecuencia, existe un intercambio de energía entre el inductor y el capacitor, de forma que la impedancia de entrada presenta un máximo. A esta frecuencia, entonces, el circuito se comporta como un filtro de tipo *notch*, que podría explicar parte del comportamiento de *bandgap* en microondas.

Por otro lado, la existencia de una capacidad de las celdas contra el plano de tierra da lugar, al menos para las bajas frecuencias, a un comportamiento pasabajos, debido a la relación entre los componentes  $L_b$  y  $C_p$ .

Los valores geométricos de la celda unitaria utilizada como testigo son los que se muestran en la tabla 3.2, en función de los valores descriptos en la Figura 3.25. Se consideró la permitividad relativa del FR-4, de 4,4.

La inductancia parcial del puente,  $L_b$ , se obtiene en base a 3 cálculos independientes, provenientes de modelos distintos de comportamiento de estructuras *microstrip*. El primero de ellos es el mostrado en la ecuación 3-3 [29], repetido en la ecuación 3-22 por comodidad.

$$L_b = 0,2 \text{ nH/mm} \cdot \ln \left( 2\pi \frac{h}{w} \right). \quad (3-22)$$

El segundo método es el propuesto por C. Paul en [37]:

$$L_b = \begin{cases} \frac{60l}{c} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right) & \text{para } \frac{w}{h} \leq 1 \\ \frac{120\pi l}{c} \frac{1}{w/h+1,393+0,667 \ln(w/h+1,444)} & \text{para } \frac{w}{h} > 1 \end{cases} \quad (3-23)$$

Por último, la inductancia parcial se calculó utilizando el software *Ansys Q3D Extractor* de *Ansoft*, que realiza simulaciones cuasiestáticas utilizando el método BEM (*Boundary Element Method*), basado en la resolución de las funciones de Green, y que por lo tanto sólo requiere la discretización de la fuente de campo, y no del espacio circundante.

Los valores de  $L_b$  obtenidos se muestran en la tabla 3.3.

Método 1	Método 2	Método 3
7,34 nH	8,2 nH	7,7 nH

TABLA 3.3: Valores de inductancia de puente  $L_b$  calculados por distintos métodos.

El valor de la capacidad entre las protuberancias de las celdas unitarias,  $C_g$ , se calculó utilizando la expresión de la ecuación 3-22 [37], repetida aquí por comodidad, y bajo la nomenclatura del problema:

$$C_g = \frac{d_w \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)}{\pi} \cosh^{-1} \left( \frac{2d_w + g}{g} \right). \quad (3-24)$$

Además, se utilizó también *Q3D Extractor* para obtener un valor aproximado de capacidad entre dos celdas unitarias, utilizando la geometría mostrada en la Figura 3.26. Se consideró, tanto en la ecuación 3-24 como en la simulación, que la principal responsabilidad por la capacidad entre celdas vecinas recae sobre las esquinas más próximas de las celdas unitarias. Además, para la simulación fue necesario eliminar el puente *microstrip* que las conectaba, debido a que, dado que la simulación es cuasiestática, si el conductor es el mismo, la capacidad resulta nula.

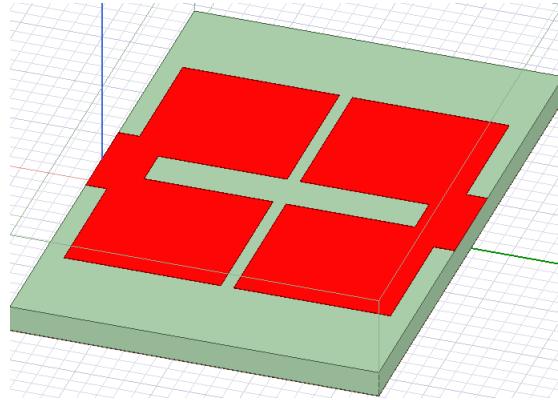


FIGURA 3.26: Geometría utilizada para calcular la capacidad entre celdas vecinas con Q3D Extractor.

Aproximación matemática	Simulación
$475 fF$	$130 fF$

TABLA 3.4: Valores de capacidad de *gap* calculados por distintos métodos.

Superficie	Cálculo analítico	Q3D Extractor
$458 mm^2$	$11,14 pF$	$12,26 pF$

TABLA 3.5: Valores de capacidad  $C_p$  calculados por distintos métodos.

Se observa que los valores son disímiles entre sí, por lo que, en el circuito, el valor de esta capacidad deberá ser obtenido por deducción en base al comportamiento en frecuencia, manteniendo estos valores como referencia o cotas aproximadas.

Finalmente, la capacidad contra el plano de tierra,  $C_p$  se calculó utilizando la noción de capacitor de placas planas paralelas, debido a la corta distancia entre las celdas unitarias y el plano de tierra (según la tabla 3.2,  $h = 1,6 mm$ ). El área total resulta:

$$Sup = l^2 + 4d_w^2 + 4\frac{d-l}{2}w - 4\left(\frac{l-w-2d_l}{2}\right)^2 \quad (3-25)$$

$$C_p = \frac{Sup \epsilon_0 \epsilon_r}{h} \quad (3-26)$$

Además, se utilizó el software de simulación *Q3D Extractor* para obtener un resultado comparativo. Los resultados se muestran en la tabla 3.5, en donde se observa que la aproximación de placas planas paralelas ofrece un valor cercano al simulado utilizando BEM, incluso cuando no considera los efectos de *fringing* en los bordes.

Tras la estimación de los valores circuitales correspondientes, se debe analizar el comportamiento del parámetro  $S_{21}$  de la estructura, para estudiar el efecto de atenuación. El mismo se muestra en la Figura 3.27, donde se grafica, además, el comportamiento

de este parámetro según simulaciones de onda completa realizadas con *CST Microwave Studio*, utilizando FEM (*Finite Elements Method*), que es un método numérico en el dominio de la frecuencia. Como resultaba previsible, la frecuencia de resonancia cumple, al menos en forma aproximada (sin considerar más efectos que los expuestos hasta el momento) que  $1,8 \text{ GHz} \approx 1/(2\pi\sqrt{L_b 2C_g}) \leq 3,75 \text{ GHz}$ , según los máximos y mínimos valores posibles de  $L_b$  y  $C_g$  mostrados en las tablas 3.3 y 3.4 respectivamente.

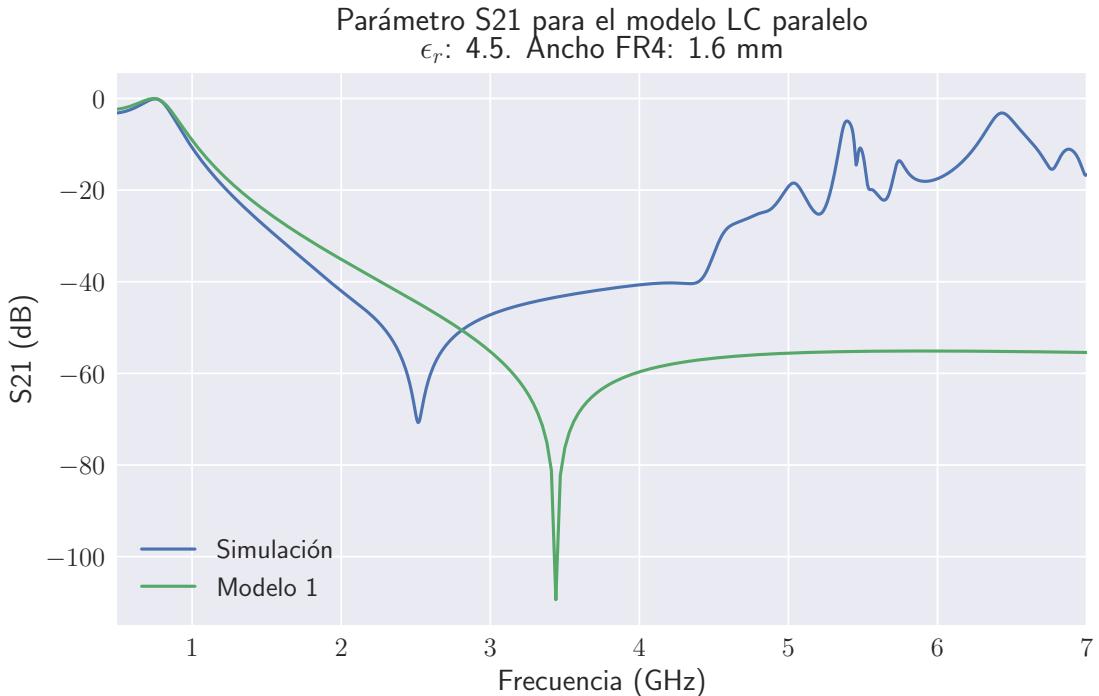


FIGURA 3.27: Comportamiento del parámetro  $S_{21}$  para el modelo 1.

Como se puede observar, el comportamiento del modelo circuital difiere del obtenido mediante la simulación de onda completa, en particular en lo que respecta a la posición de la frecuencia de resonancia y al comportamiento en altas frecuencias, donde resulta esperable que el *bandgap* ya no sea observable.

Bajo estas consideraciones, resulta menester considerar más condiciones que las seleccionadas inicialmente, nuevamente en base al circuito 3.1. Si se asume que las esquinas presentan una inductancia que no resulta despreciable, la misma resonará en serie con el capacitor  $C_g$ , imponiendo una menor impedancia para un rango de frecuencias, habilitando un camino de corriente, y mejorando la transferencia a través de la celda unitaria, lo que efectivamente limitaría el ancho de banda del *bandgap*. El circuito propuesto se muestra en la Figura 3.28.

Si de esta estructura sólo se analiza intuitivamente el fenómeno de resonancia serie, se puede trabajar sobre el circuito mostrado en la Figura 3.29 a), cuya gráfica de parámetro

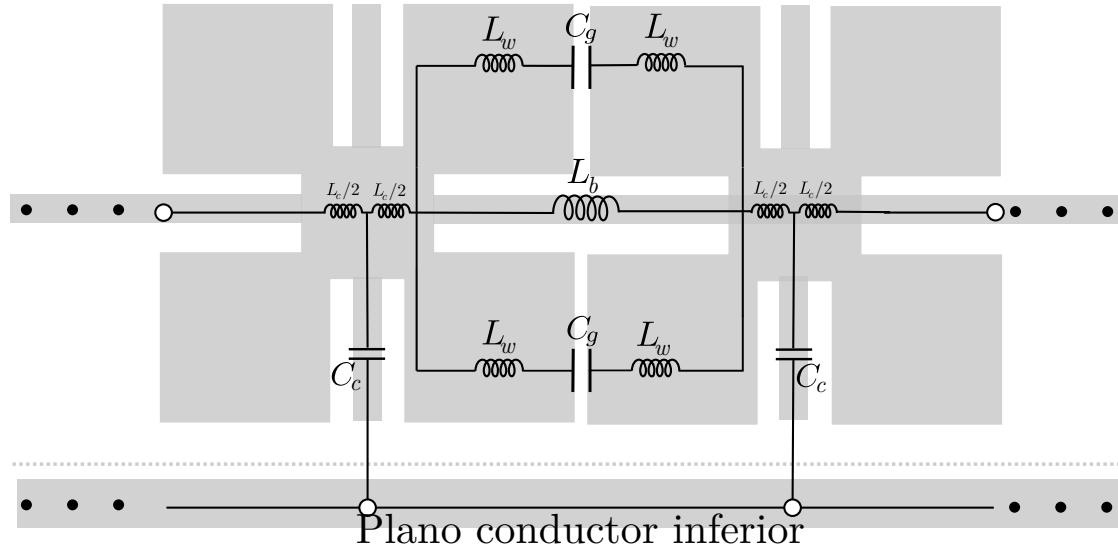
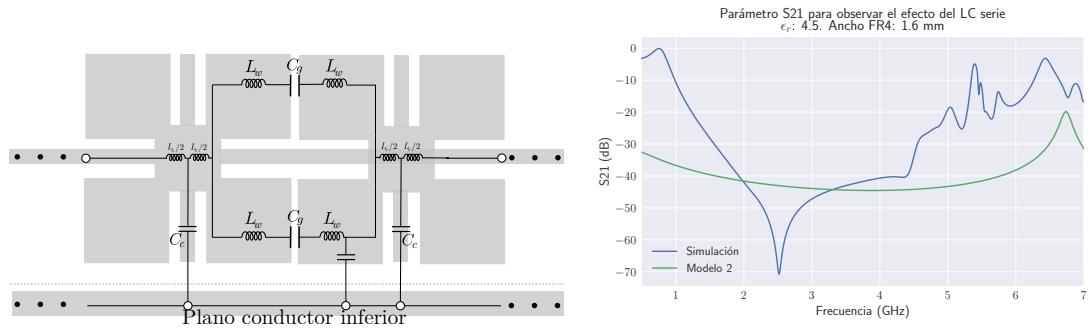


FIGURA 3.28: Segundo circuito equivalente propuesto.

S12 se observa en la Figura 3.29 b). Para el caso graficado, la frecuencia de resonancia serie se ubica en aproximadamente 6,7 GHz, donde se manifiesta el efecto descripto.



(a) Circuito equivalente considerando sólo el efecto de la resonancia serie.

 (b) Parámetro  $S_{21}$  considerando resonancia serie únicamente.

FIGURA 3.29: Análisis de la resonancia serie.

El valor de la inductancia que imponen los parches de las esquinas se calculó de tres formas. La primera se basa en el uso de la expresión de la inductancia de la ecuación 3-1. La segunda consiste en el uso de las ecuaciones presentadas en 3-23. Finalmente, además, se realizaron simulaciones utilizando Q3D Extractor, para validar el uso de las expresiones. Los resultados se muestran en la tabla 3.6. Resulta importante, sin embargo, señalar que, si bien la inductancia es un parámetro puramente geométrico, las posiciones de los puertos de entrada y salida modifican su valor. Estas posiciones no son tenidas en cuenta en las expresiones propuestas por la literatura, pero se las considera lo suficientemente cercanas al valor final.

La frecuencia de resonancia serie resulta, entonces, de

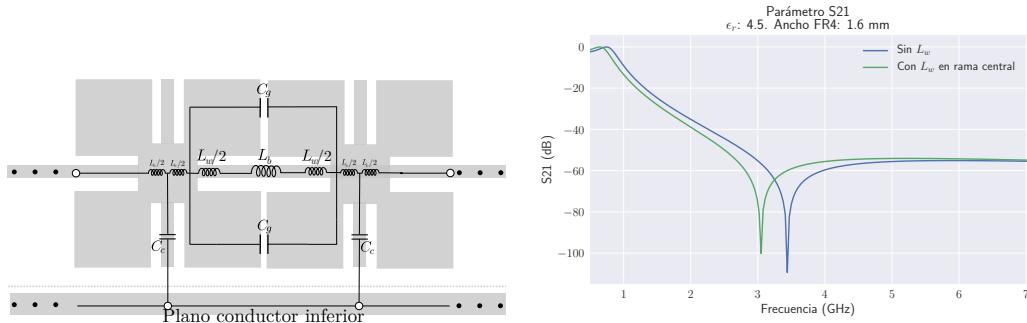
Según expresión 3-1	Según expresión 3-23	Q3D Extractor
$2 \text{ nH}$	$1,55 \text{ nH}$	$4 \text{ nH}$

TABLA 3.6: Valores de inductancia  $L_w$  calculados por distintos métodos.

$$f_r^{\text{serie}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_g 2L_w}}, \quad (3-27)$$

que, para los parámetros geométricos establecidos, varía entre  $3,6 \text{ GHz}$  y  $8 \text{ GHz}$ . La amplitud del rango de valores posibles se debe a la propia incertidumbre del valor la capacidad  $C_g$ .

Sin embargo, la aparición de estas nuevas inductancias  $L_w$  modificará fuertemente la frecuencia de resonancia del circuito LC paralelo analizado antes. Para este nuevo circuito, la inductancia vista por sus terminales está dada por  $L_b + 2L_w/2$ , debido a que por los componentes circuitales correspondientes a las esquinas sólo circula la mitad de la corriente que lo hace por la inductancia central. El valor de la frecuencia de resonancia, entonces, debido al aumento de la inductancia equivalente, disminuye, para adoptar valores entre  $1,4 \text{ GHz}$  y  $2,6 \text{ GHz}$ . Este mismo cambio de resonancia se observaría si las inductancias  $L_w$  estuvieran dispuestas sobre la rama central, como se muestra en la Figura 3.30, lo cual valida el análisis, debido a que el hecho de que no estén en serie con los capacitores elimina el efecto de resonancia LC.



(a) Circuito equivalente para el cálculo de la frecuencia de resonancia paralela, considerando las inductancias de las esquinas.  
(b) Parámetro  $S_{21}$  del circuito, comparado con el comportamiento mostrado en la Figura 3.27.

FIGURA 3.30: Análisis del efecto sobre la resonancia LC paralelo de las inductancias de ala consideradas.

En la Figura 3.31 se pueden observar que la composición de los dos efectos más importantes analizados hasta el momento (las resonancias serie y paralela) da lugar a un comportamiento similar a transferencia del circuito analizado.

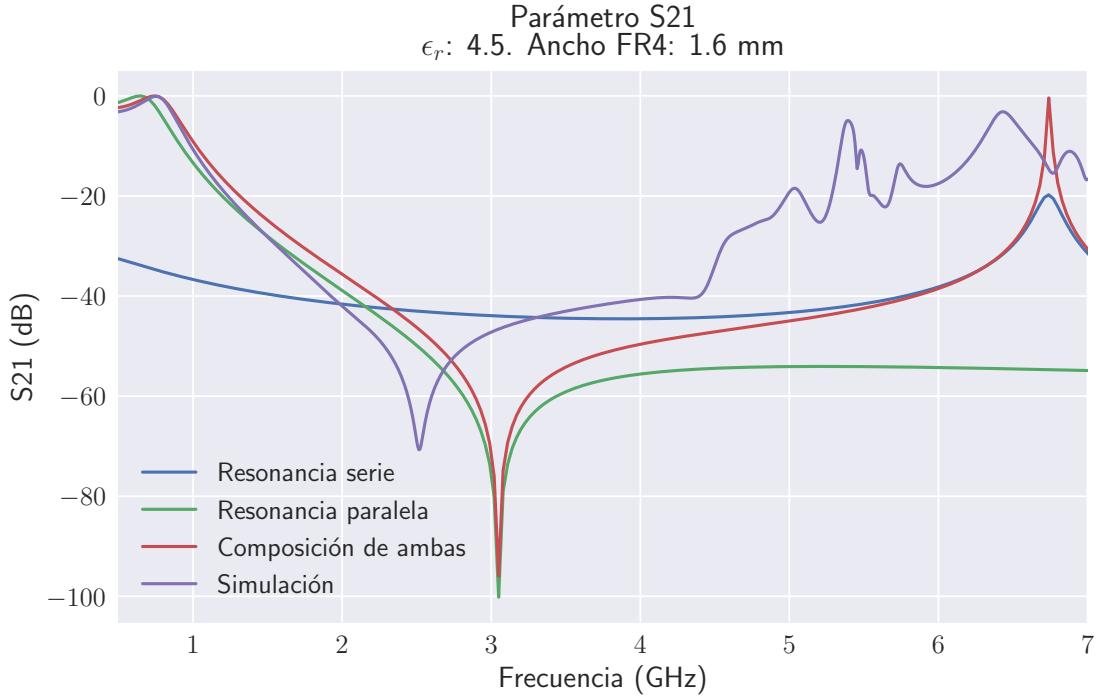


FIGURA 3.31: Superposición de los comportamientos de los circuitos analizados hasta el momento y la simulación obtenida con *CST Microwave Studio*.

En este punto, es posible obtener el diagrama de dispersión en base a un método similar al utilizado para obtener de la Figura 3.4, a efectos puramente ilustrativos, y utilizando el circuito de la Figura 3.28. Para el mismo, los valores de impedancia y admitancia por unidad de longitud resultan

$$Z'a = j\omega L_c + j\omega \frac{L_b - \omega^2 L_w C_g}{1 - \omega^2 C_g (L_w + 2L_b)}, \quad (3-28)$$

$$Y'a = j\omega C_c, \quad (3-29)$$

por lo que el valor de la constante de propagación  $\gamma$  resulta

$$\gamma = \sqrt{-Z'Y'} = \frac{\omega}{a} \sqrt{L_c C_c + C_c \frac{L_b - \omega^2 L_w C_g L_b}{1 - \omega^2 (L_w C_g + 2L_b C_g)}}, \quad (3-30)$$

cuya gráfica se puede observar en la Figura 3.32. Resulta importante recordar que, si bien la gráfica es obtenida en base a los valores circuitales, la misma pierde validez si no se cumple la hipótesis descripta antes, que indica que  $a < \lambda_g/4$ , por lo que sólo se puede confiar en los valores bajos de  $\beta$ .

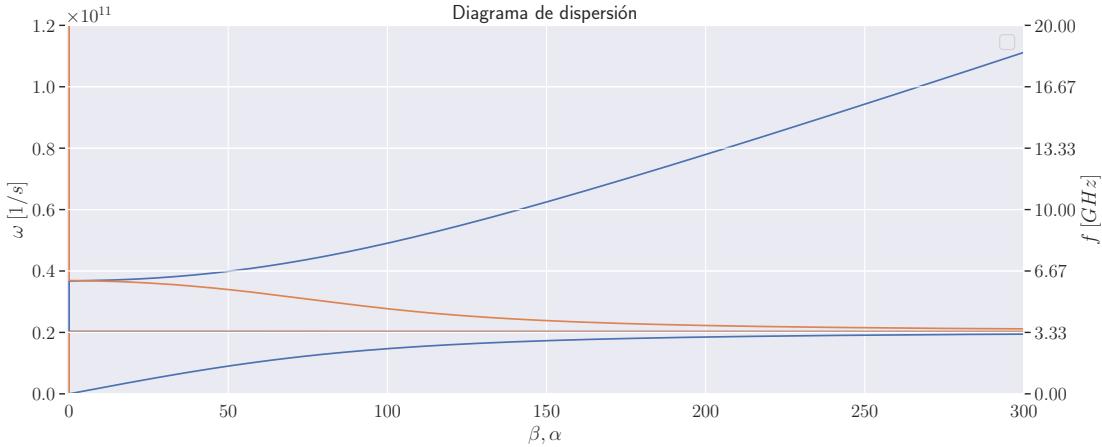


FIGURA 3.32: Diagrama de dispersión para la celda de Yang, en base a la ecuación 3-30.

Resulta ilustrativo comparar el diagrama de dispersión obtenido con la gráfica del parámetro  $S_{21}$  en función de la frecuencia de la Figura 3.31, dado que si bien el análisis es diferente, la situación física es la misma. La comparación se observa en la Figura 3.33, donde el *bandgap* está marcado en un tono más oscuro. Se observa que el mismo comienza en la frecuencia de resonancia paralela, y continúa hasta las inmediaciones de la frecuencia de resonancia serie analizada antes.

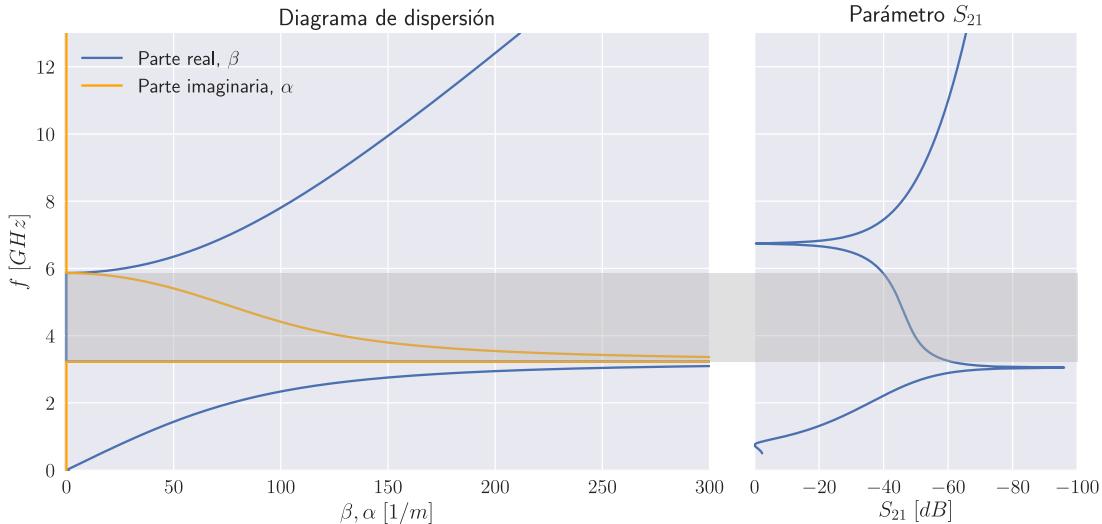


FIGURA 3.33: Comparación del diagrama de dispersión obtenido de la ecuación 3-30 y el obtenido mediante simulación del parámetro  $S_{21}$  de la Figura 3.31.

Queda aún por explicar el comportamiento de la transferencia en la banda ubicada entre las dos frecuencias de resonancia, donde los efectos no pueden considerarse fruto de la relación entre los elementos de un subconjunto del circuito. Resulta necesario tener en cuenta la inductancia que impone el parche central, análoga a la que imponen las esquinas de la celda unitaria. Esto obliga a que la capacidad de la celda unitaria no

sea única y centralizada, como hasta el momento, sino que debe estar correctamente distribuida en la geometría: parte de la capacidad se debe al aporte de las esquinas, y otra parte al parche central. El circuito, más complejo, se muestra en la Figura 3.34.

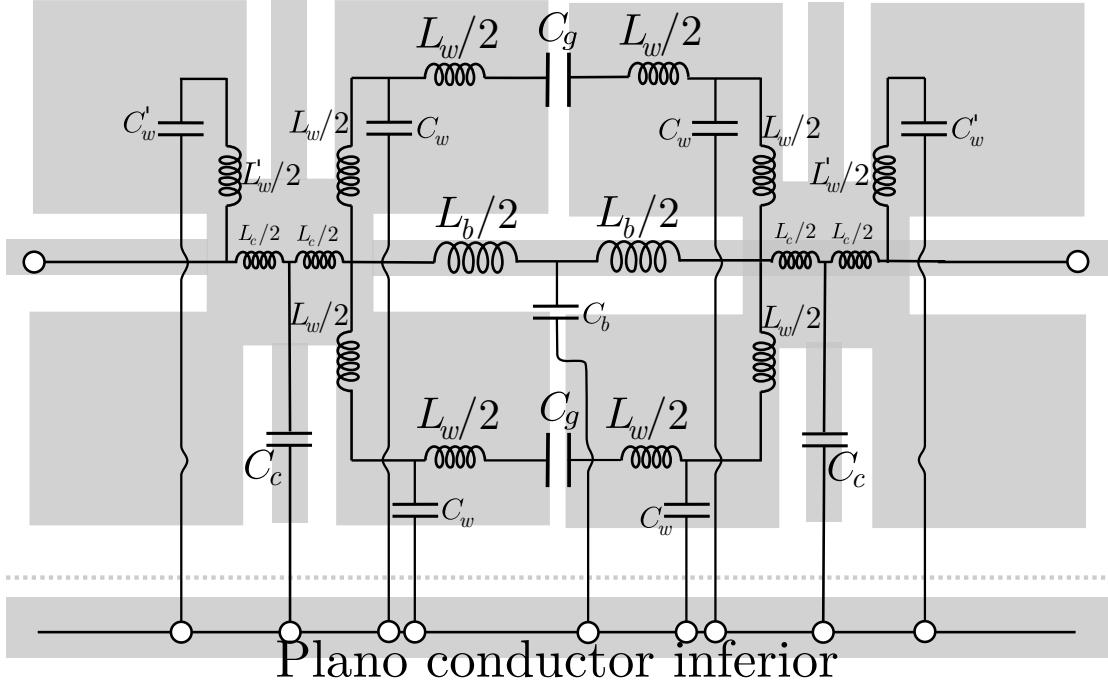


FIGURA 3.34: Tercer circuito equivalente propuesto, considerando inductancias y capacidades distribuidas en la celda unitaria.

Se puede observar que se agregaron las capacidades de las secciones de las esquinas ( $C_w$ ), y se ubicaron en un nodo intermedio, entre la capacidad de gap  $C_g$  y la capacidad del bloque central  $C_c$ , que ahora queda redefinida, dado que deja de representar a toda la superficie de la cara superior de la celda unitaria, para restringirse al cuadro central. Este cuadro, además, ahora presenta inductancia  $L_c$ . Además, se tuvo en cuenta la capacidad contra el plano de tierra del puente,  $C_b$ . Finalmente, se consideró el efecto de aquellas esquinas que no poseen una celda vecina, lo que aumenta la capacidad de la esquina (debido al efecto de *fringe*) y la inductancia a considerar. Estos nuevos valores están representados por  $C'_w$  y  $L'_w$ , y resultan importantes debido a que esta capacidad e inductancia resuenan a la frecuencia de interés, generando un camino de baja impedancia para la corriente y disminuyendo, por tanto, la transferencia.

El comportamiento del parámetro S21 se puede observar en la Figura 3.35. En la misma, se destaca que la frecuencia de resonancia, así como los efectos para frecuencias cercanas a 6 GHz, se predicen adecuadamente, aunque no así los efectos de orden superior para esas frecuencias.

Por último, resta considerar las pérdidas por conductividad y las pérdidas dieléctricas, para incorporarlas al circuito equivalente propuesto.

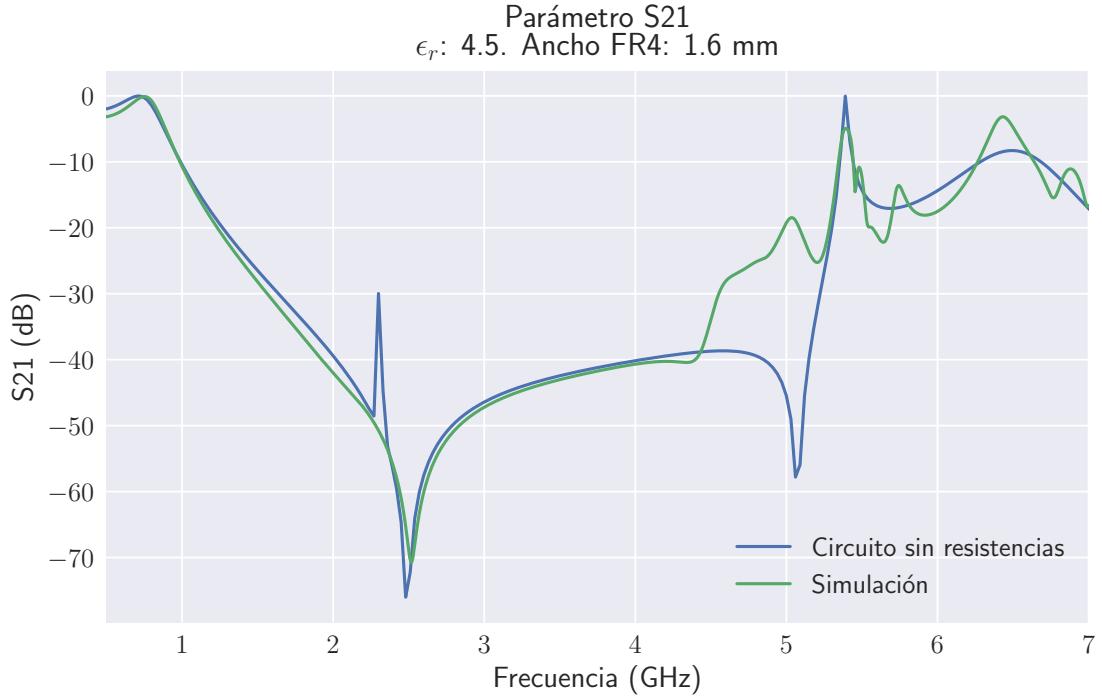


FIGURA 3.35: Comportamiento del parámetro  $S_{21}$  para el modelo propuesto, comparado a la simulación obtenida con *CST Microwave Studio*.

Las pérdidas por conductividad pueden ser representadas por una resistencia representando el comportamiento en corriente continua y otra en corriente alterna. Para la corriente continua, la resistencia que impone una cinta *microstrip* depende de su largo  $l$  y la superficie que es atravesada por el flujo,  $S$ . Para el caso de corriente alterna, debido al efecto *skin* descripto en la ecuación 1-16, se debe tener en cuenta la profundidad de penetración  $\delta_s$ , de manera que

$$R_{dc} = \frac{l}{\sigma S}, \quad (3-31)$$

$$R_{ac} = \frac{l}{\sigma(2w\delta_s + 2t\delta_s)} = \frac{l}{2\sigma\delta_s(w+t)} = \frac{l\sqrt{2\pi f \mu \sigma}}{2\sqrt{2}\sigma\delta_s(w+t)}, \quad (3-32)$$

$$R_s = R_{dc} + R_{ac} = \frac{l}{\sigma} \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}{2(w+t)} \right) \quad (3-33)$$

donde  $w$  es el ancho de la cinta *microstrip* considerada,  $t$  es su ancho vertical, y  $f$  es la frecuencia a la que se desea encontrar la resistencia que modela el efecto en corriente alterna. El valor de la conductividad del cobre,  $\sigma$ , es de  $5,7 \cdot 10^{-7}$  S.

Para el caso de las pérdidas dieléctricas, las pérdidas se representan como una conductancia  $G$  dispuesta en paralelo a los capacitores que vinculan la capa superior de la celda unitaria con el plano de tierra.

Dicha conductancia puede ser calculada en base a la tangente de pérdidas del material, que es un parámetro ofrecido por el fabricante, y que fue definido en la ecuación 1-6. El uso de una tangente de pérdidas asume la existencia de una impedancia compleja entre la capa superior y el plano de tierra en una celda unitaria, de manera que esta tangente representa la relación entre las partes real e imaginaria:

$$\tan(\delta) = X/R = \frac{1/\omega C}{R} = \frac{G}{\omega C}, \quad (3-34)$$

$$G = \omega C \tan(\delta) = \frac{1}{R_p} \quad (3-35)$$

Para el caso de FR-4, la tangente de pérdidas posee el valor de 0.017.

El circuito final, considerando resistencias, se puede observar en la Figura 3.36.

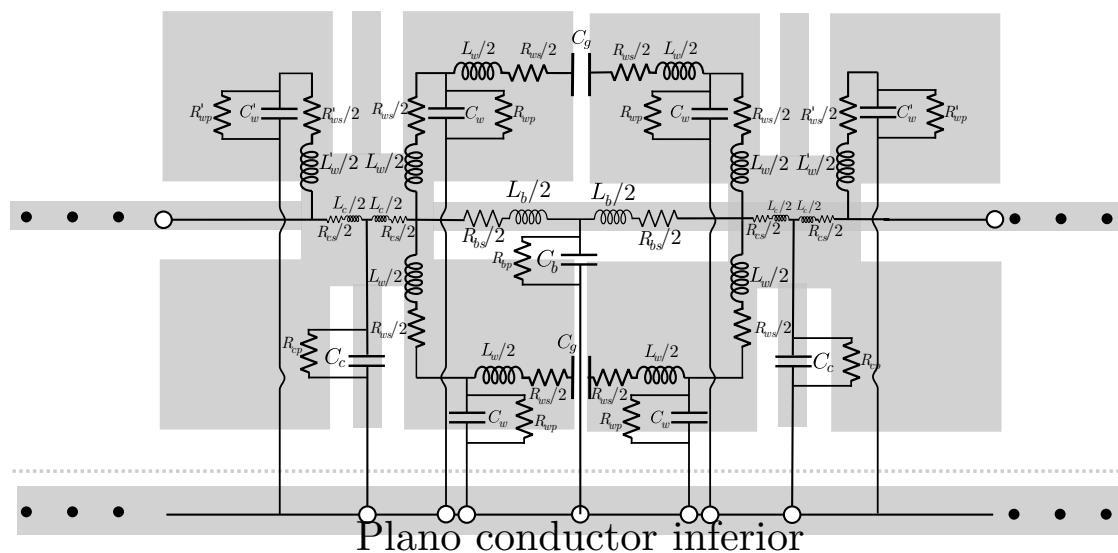


FIGURA 3.36: Circuito final equivalente propuesto, considerando inductancias y capacidades distribuidas en la celda unitaria, y resistencias de pérdidas.

Una comparación entre el comportamiento del parámetro  $S_{21}$  considerando y sin considerar resistencias se puede observar en la Figura 3.37.

Los valores finales de los parámetros utilizados para modelar la celda unitaria estudiada se muestran en la tabla 3.7.

El comportamiento del parámetro  $S_{21}$  según del modelo circuital se puede comparar al simulado utilizando *CST Microwave Studio* en la Figura 3.38.

Resulta posible, además, comparar las simulaciones de parámetros  $S_{21}$  con las simulaciones de celdas unitarias con condiciones de borde periódicas. Para el caso de la celda unitaria analizada, el diagrama de dispersión obtenido a partir de la simulación

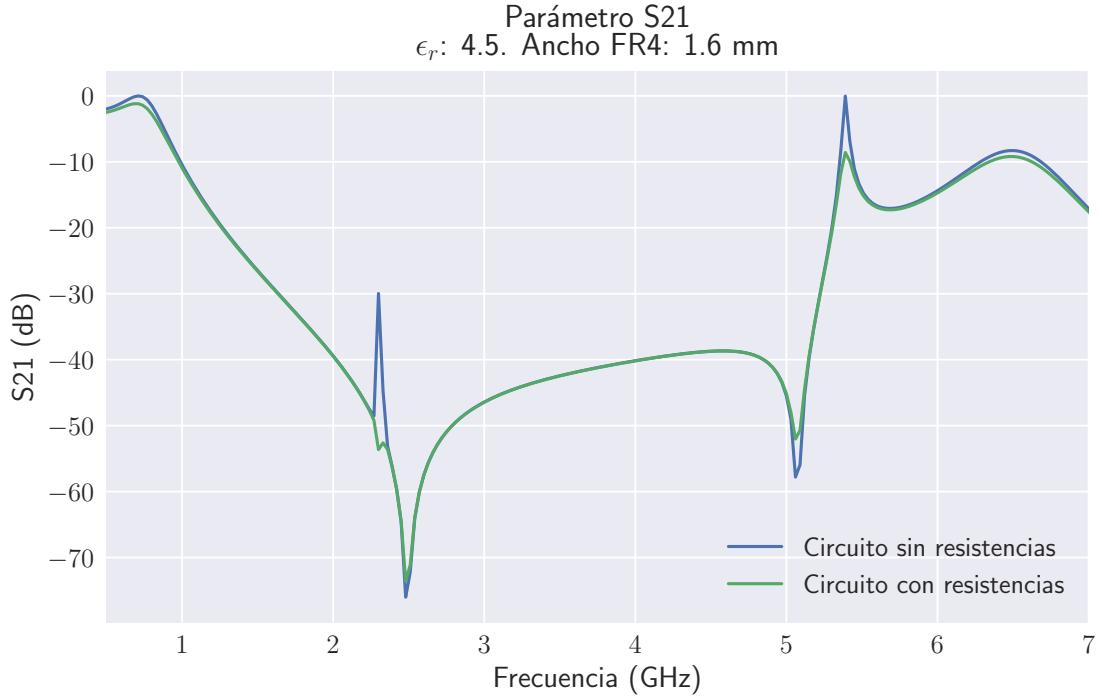


FIGURA 3.37: Comportamiento del parámetro  $S_{21}$  para el modelo propuesto, con y sin resistencias de pérdidas.

$L_b$	6,8 nH	$C_g$	135 fF	$L_w$	1,47 nH
$C_c$	1,56 pF	$C_b$	487 fF	$C_w$	2 pF
$C'_w$	2,53 pF	$L'_w$	2,54 nH	$L_c$	0,75 nH
$R_{wp}$	936 $\Omega$	$R_{ws}$	0,01 $\Omega$	$R_{cs}$	0,01 $\Omega$
$R_{bp}$	0,15 $\Omega$	$R_{bs}$	4953 $\Omega$	$R_{cp}$	1509 $\Omega$

TABLA 3.7: Tabla de valores finales elegidos.

tridimensional se muestra en la Figura 3.39, donde se puede observar que se da un *bandgap* completo entre los 2,5 y 3,7 GHz. En el análisis circuital sólo se consideró la dirección  $\Gamma - X$ , en la que el mismo comienza en 2 GHz. Una comparación de ambos análisis se puede observar en la Figura 3.40.

Finalmente, es posible analizar el comportamiento del parámetro  $S_{11}$ , en vistas de comprobar que el comportamiento de *bandgap* se debe principalmente al fenómeno de Bragg descripto en la Sección 2.2, que está vinculado a la resonancia en la celda unitaria, ya que esta es la principal causante de la variación de la velocidad de propagación en la estructura. La comparación de las gráficas según el modelo y según la simulación de onda completa realizada con CST se puede observar en la Figura 3.41, de la que se puede deducir que la energía, en el *bandgap*, es devuelta casi en su totalidad al puerto de entrada.

Bajo las mismas consideraciones, es posible analizar la fase de las señales que regresan

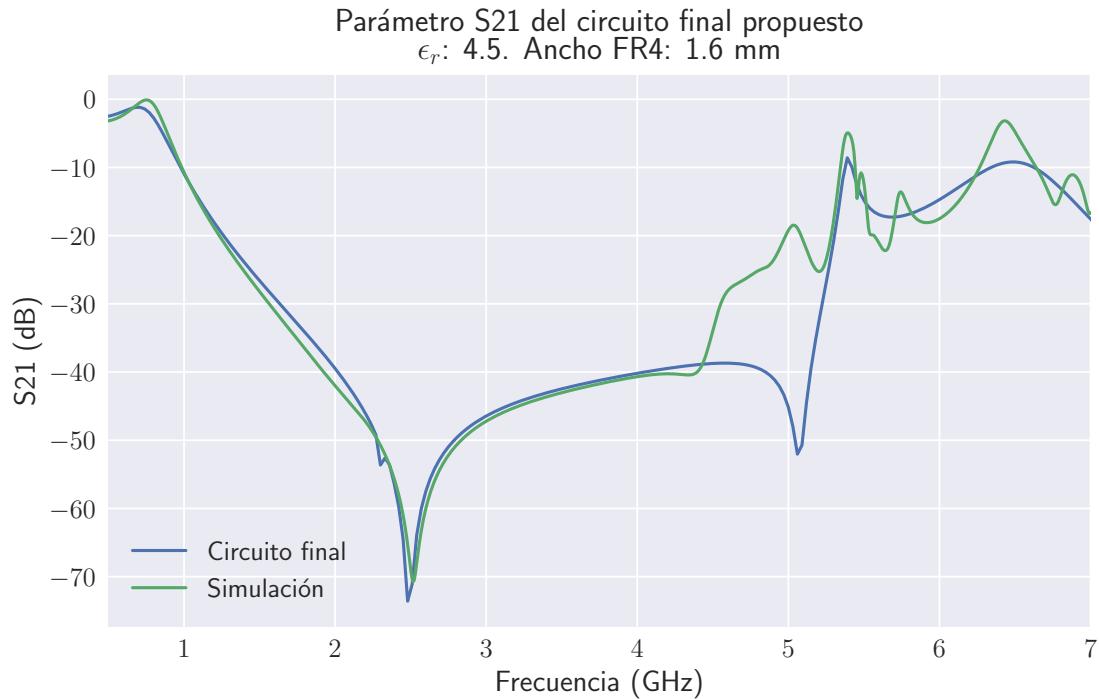


FIGURA 3.38: Comportamiento del parámetro  $S_{21}$  para el modelo propuesto, comparado con el obtenido mediante simulación con *CST Microwave Studio*.

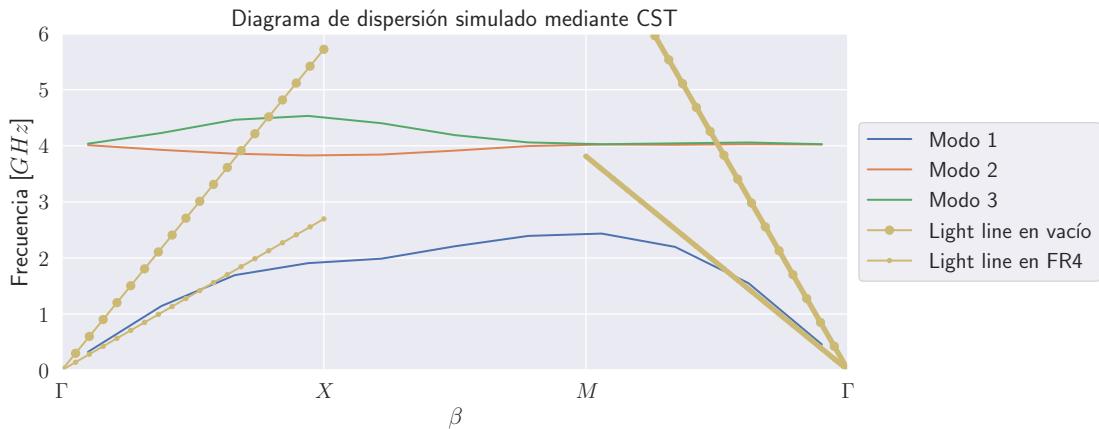


FIGURA 3.39: Diagrama de dispersión obtenido mediante el software *CST Microwave Studio* para la celda de Yang, según los parámetros definidos en la tabla 3.2.

al puerto de incidencia respecto de la señal original, para lo que resulta útil considerar la fase del parámetro  $S_{11}$ . Cuando la fase es de  $180^\circ$ , la señal es reflejada en contrafase, efectivamente impidiendo o dificultando la propagación de la onda. Las gráficas, también para el caso simulado y el modelado circuitualmente, se muestran en la Figura 3.42.

El comportamiento del parámetro  $S_{21}$  de un conjunto de celdas unitarias dispuestas sobre una fila se muestra, para distintas posiciones dentro de dicha fila, en la Figura 3.43. A medida que se simula un punto más lejano a la fuente, de forma que energía atraviese una mayor cantidad de capas del metamaterial propuesto, el efecto es más notorio: Si bien

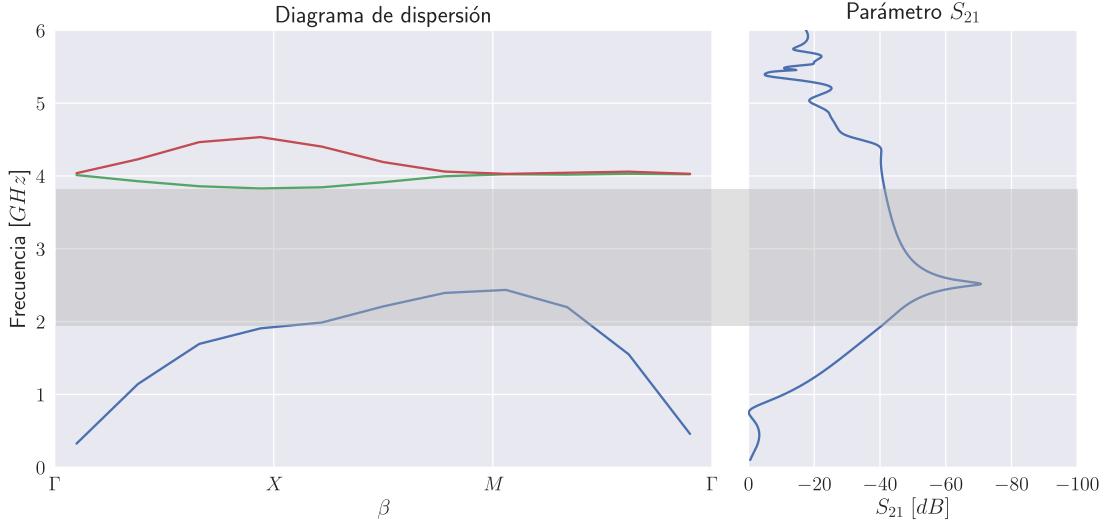


FIGURA 3.40: Comparación entre el diagrama de dispersión obtenido considerando condiciones de borde periódicas y resultado de la simulación de parámetros S. Resaltada en gris se puede observar la banda de frecuencias de *bandgap* según el diagrama de dispersión.

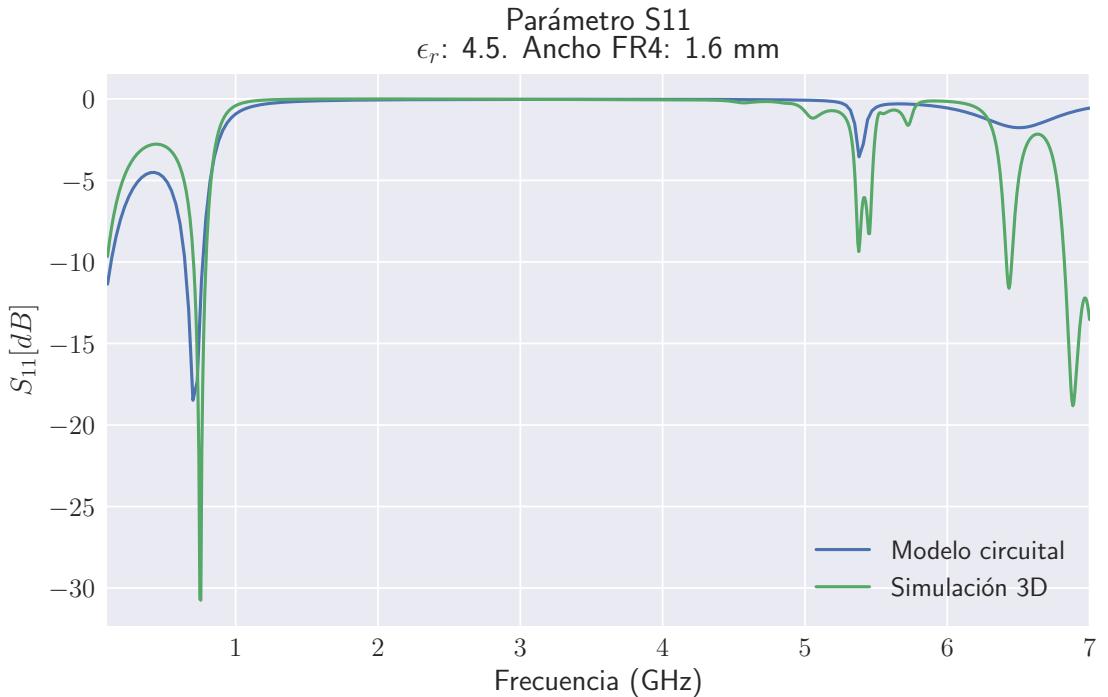


FIGURA 3.41: Comparación entre la magnitud del parámetro  $S_{11}$  simulado con *CST Microwave Studio* y el obtenido mediante el modelo propuesto.

la magnitud se mantiene aproximadamente constante, el ancho de banda del *bandgap* aumenta considerablemente.

Similar comportamiento, aunque con mayores pendientes, se observa en el caso en que se simula una estructura bidimensional con las mismas celdas unitarias. Para dos puertos separados por seis celdas unitarias, como se muestra en la Figura 3.44 b), el resultado

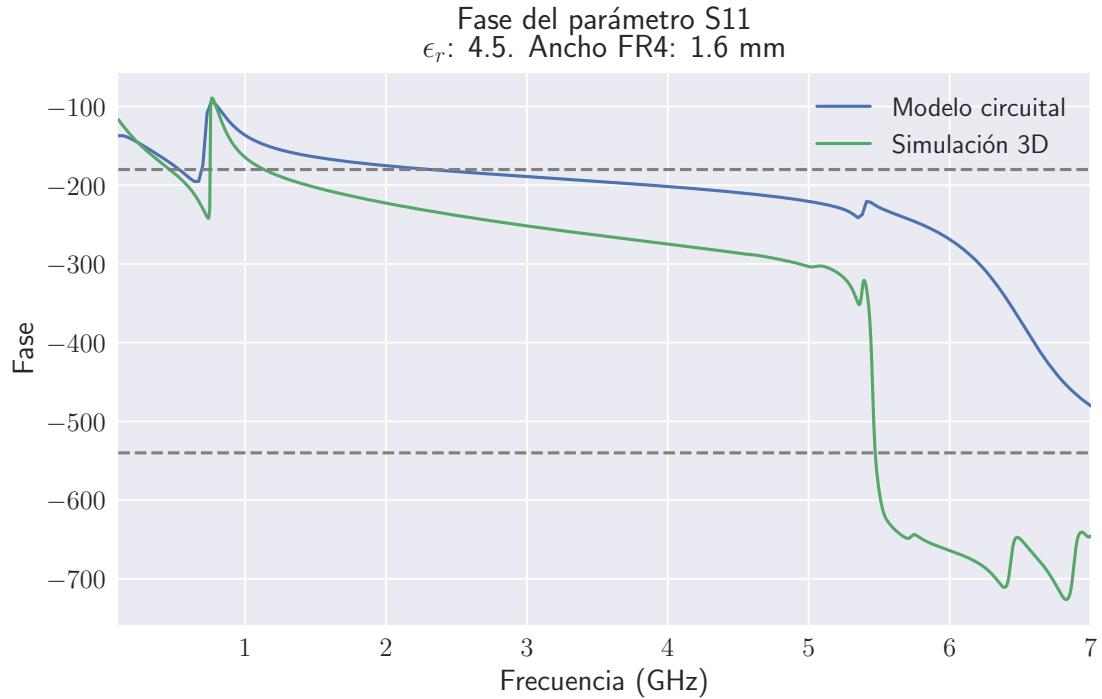
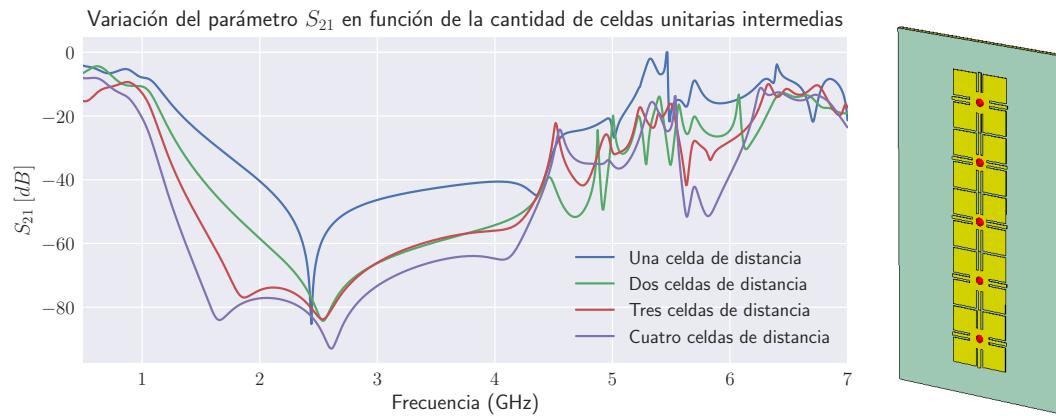


FIGURA 3.42: Comparación entre la fase del parámetro  $S_{11}$  simulado con *CST Microwave Studio* y el obtenido mediante el modelo propuesto. Se marcan con líneas punteadas las fases que son múltiplo impar de  $180^\circ$ .



(a) Comportamiento, obtenido mediante simulación con *CST Microwave Studio*, del parámetro  $S_{21}$ , para distintas distancias a la fuente. (b) Estructura simulada.

FIGURA 3.43: Comportamiento de una fila de celdas unitarias.

es el mostrado en la figura a). Al igual que en análisis de la fila de celdas unitarias, para el caso de esta estructura bidimensional el ancho de banda del *bandgap* es grande, y la pendiente inicial es muy notoria. Vale aclarar que los efectos alrededor de 1  $GHz$  se deben a resonancias intermedias de la estructura completa.

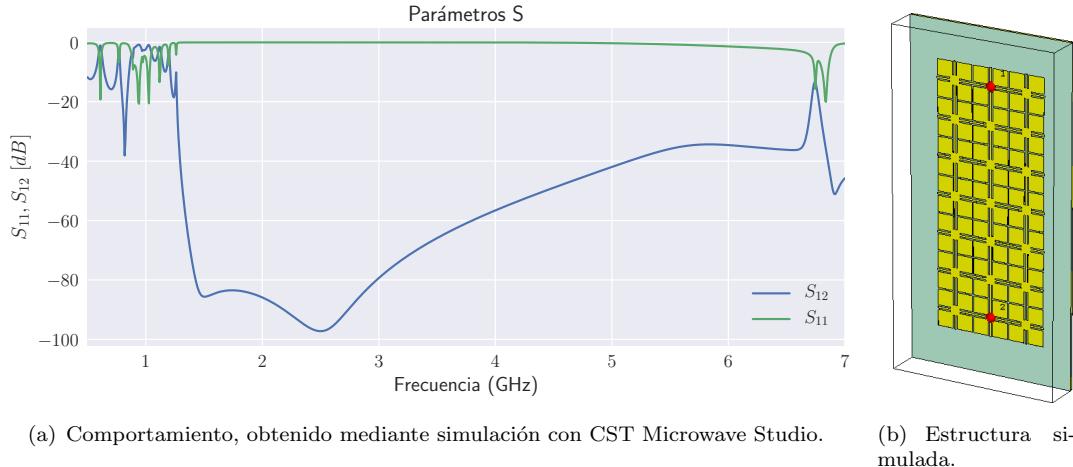


FIGURA 3.44: Comportamiento de una estructura bidimensional de celdas unitarias.

### 3.5. Modelado por líneas de transmisión

Para el caso bidimensional, la discretización debe ser también bidimensional, lo que conlleva mayores esfuerzos numéricos. Un problema práctico cualquiera puede contener una enorme cantidad de celdas unitarias, con bordes complejos y medios inhomogéneos, lo que obliga a considerar las propiedades de las celdas unitarias de la forma lo más sencilla posible, y para aumentar la densidad de las mismas con el menor impacto posible en el tiempo de procesamiento.

Existen numerosos métodos que utilizan líneas de transmisión para simular metamateriales, entre los que destacan el método de TMM (*Transmission-Matrix Method*) y de TLM (*Transmission-Line Matrix Method*). Si bien los nombres son similares, la resolución del problema varía fundamentalmente [9]. En este trabajo se desarrollará brevemente una variante del método TLM, implementada y explicada en detalle en la Sección 3.5.1.

El método de matrices<sup>2</sup> de líneas de transmisión consiste en la discretización espacial del problema físico en pequeñas subceldas. El comportamiento de los campos electromagnéticos en las mismas se concentra en un nodo o punto en el espacio, y las relaciones de adyacencia entre ellas se modelan utilizando líneas de transmisión que vinculan los nodos. Estas líneas son capaces de transmitir impulsos cortos sin distorsión, y de distribuirlos, en cada uno de los nodos, de acuerdo a un algoritmo local para cada subcelda [9], hacia cada uno de los nodos adyacentes. Este algoritmo local no es más que la multiplicación del pulso incidente por los parámetros S de transmisión y reflexión en cada tiempo, que se pueden obtener a partir del análisis de la celda y sus vecinas. De esta manera, se discretiza un circuito equivalente al problema físico a resolver, y se

<sup>2</sup>Aquí el término matrices se refiere a un conjunto bidimensional, y no a un objeto matemático.

simula la propagación de ondas electromagnéticas a partir del *scattering* de impulsos en una red  $n$ -dimensional de nodos unidos por líneas de transmisión.

El algoritmo fue propuesto inicialmente en 1971 por Johns y Beurle [38], y provee soluciones en el dominio del tiempo, a partir del estudio de la propagación de impulsos electromagnéticos muy cortos en las estructuras. La información en el dominio de la frecuencia se obtiene realizando una transformada de Fourier<sup>3</sup> de la respuesta de la red al impulso, como en todo método numérico en el dominio del tiempo. Esta metodología lo vuelve útil especialmente para aplicaciones de gran ancho de banda, donde se desea obtener características en un amplio rango de frecuencias con una única simulación.

El método fue generalizado, más tarde, al estudio de estructuras tridimensionales, donde se reemplazaron los conceptos de capacidad e inductancia de la línea de transmisión, por parámetros físicos del medio. En general, la capacidad e inductancia asociadas a las líneas de transmisión que unen los nodos que representan un medio en particular son elegidas de forma que la impedancia característica coincida con la impedancia intrínseca del mismo. Las pérdidas en el medio se suelen tener en cuenta a partir del uso de resistencias, o la aplicación de una constante de atenuación en cada cálculo de *scattering* sobre los nodos.

### 3.5.1. Algoritmo utilizando programación orientada a objetos

La simulación se corre a través de un *script* editable de Python, donde se establecen las condiciones de la simulación en forma manual, y se determina si se leerán resultados calculados previamente o se calcularán nuevos. En el mismo, además, se permite elegir si se considerarán las capacidades de acople entre elementos, la cantidad de tiempos a simular y las frecuencias superior e inferior de análisis. Se debe tener en cuenta, además, que se especifica la discretización espacial (cantidad de milímetros de cada estructura simulada, denominada *Pixel*). La discretización espacial se relaciona con la temporal, dado que en TLM están vinculadas por la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el medio. Así, la primera deberá asegurar que la segunda permita cumplir con las condiciones del teorema de Nyquist para la caracterización de las señales calculadas (esto significa que, dado que la velocidad de propagación,  $v_p = \frac{\Delta l}{\Delta t}$  relaciona las discretizaciones espacial y temporal, la discretización espacial debe ser tal que  $\Delta l = v_p \frac{\Delta t}{2}$  para cumplir las condiciones del teorema de Nyquist, lo que deriva en que  $\Delta l = \frac{v_p}{2f}$ , con  $f$  la frecuencia de interés, que en nuestro caso es 2,4 GHz).

---

<sup>3</sup>Numéricamente, se suele realizar una transformada discreta de Fourier, cuya implementación más conocida es la Fast Fourier Transform (FFT).

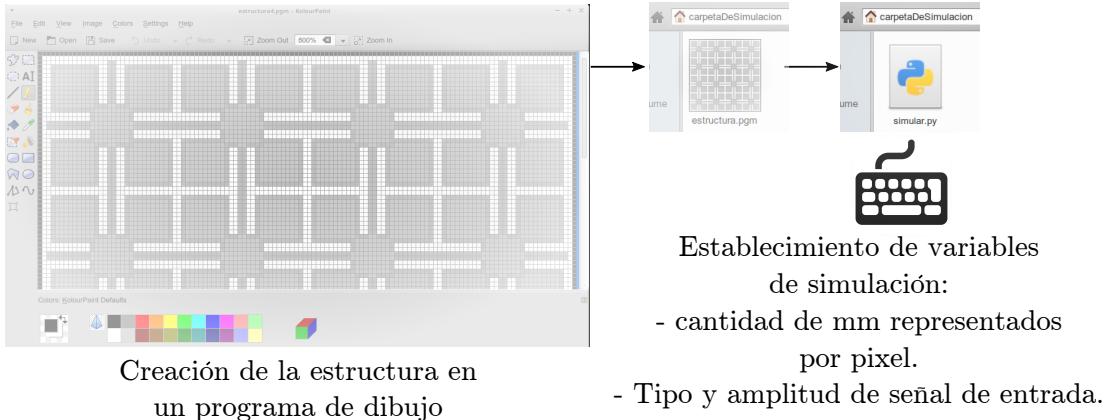


FIGURA 3.45: Esquema de ingreso de datos al simulador.

Como se esquematiza en la Figura 3.45, la entrada de datos se realiza a través de un archivo con formato .PGM ASCII<sup>4</sup>, que establece una matriz de *píxeles*, cada uno con un valor, entre 1 y 255, donde 1 representa el negro, 255 el blanco, y los valores intermedios corresponden a una escala de grises. El archivo se puede generar a partir de un programa de edición de imágenes, lo que facilita la creación de estructuras a simular, ya que la misma sólo debe ser dibujada con la resolución requerida. Si la imagen creada ocupa una mayor cantidad de *píxeles* (tiene una mayor resolución), la granularidad espacial utilizada en la simulación será mayor, dado que existe una relación 1 a 1 entre la densidad de *píxeles* gráficos y la discretización utilizada, lo que significa que la discretización temporal es realizada por el usuario en el momento de crear la imagen, y el mallado es rectangular y estático.

La lectura de la imagen del disco genera un objeto *Superficie*, que almacena, en forma ordenada, los *Píxeles* dibujados, que son objetos con características eléctricas variables, en función de su color en la imagen, como se muestra en la Figura 3.46. En la misma se pueden observar 4 tipos de *píxeles*:

1. **Interno.** Representan superficies metálicas que se encuentran en el interior de un plano conductor.

<sup>4</sup>El formato PGM es un antiguo formato de almacenamiento de imágenes en escala de grises. Estos archivos pueden ser modificados por programas de edición de imágenes, como Microsoft Paint y Kolourpaint, y además por editores de texto plano. Cuando se utiliza uno de estos últimos, se observa que las primeras líneas indican la cantidad de filas ( $n$ ) y columnas ( $m$ ) en que se disponen los píxeles de la imagen, y luego la lista de valores entre 1 y 255 que indican la opacidad/claridad del pixel. Los primeros  $m$  valores corresponden a los píxeles, de izquierda a derecha, que corresponden a la primera fila; los siguientes  $m$  valores corresponden a la segunda fila, etc.

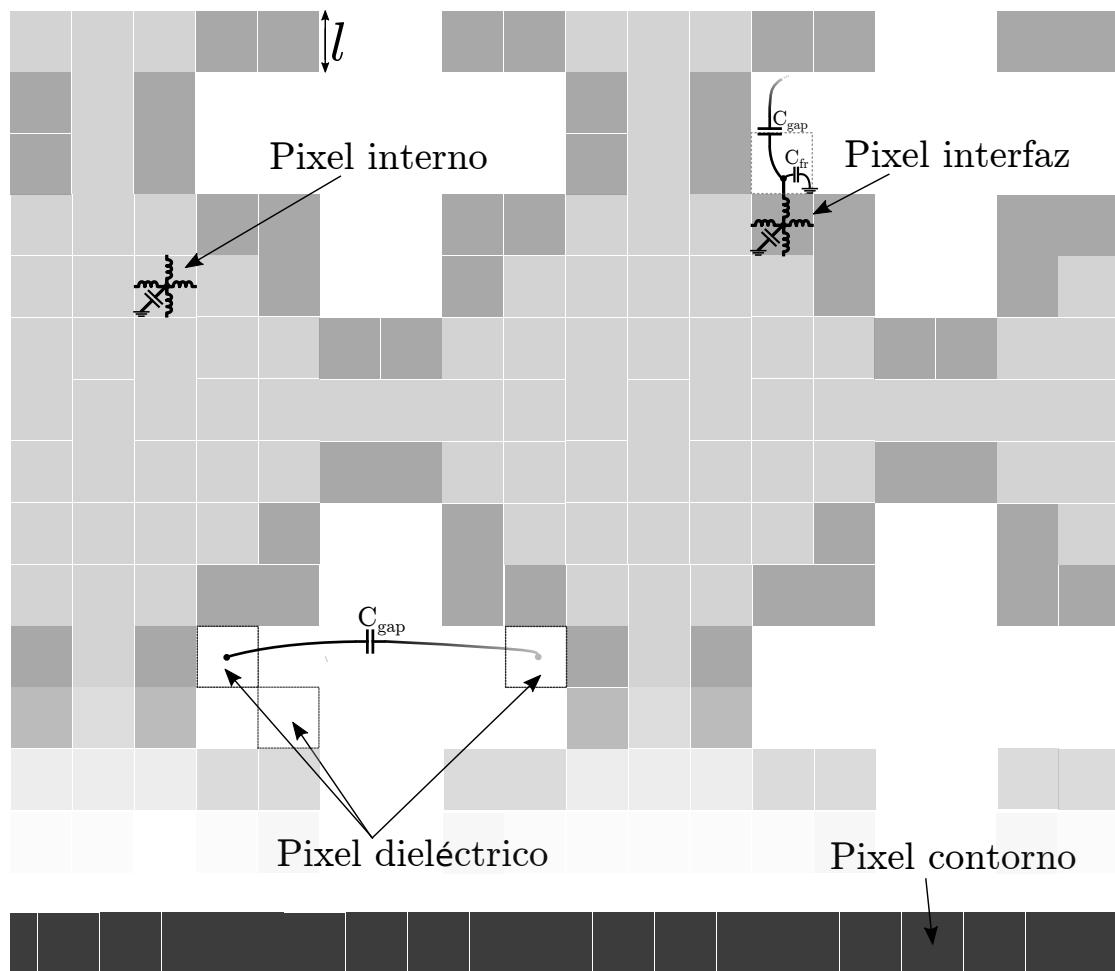


FIGURA 3.46: Circuitos equivalentes propuestos para cada tipo de pixel.

2. **Interfaz.** Representan superficies metálicas que se encuentran en los bordes de una estructura metálica, lo que significa que tienen vecinos que son otros *píxeles* de tipo metálico (de interfaz o internos) y vecinos dieléctricos. Son los *píxeles* que poseen la propiedad de capacidad de *fringe*.
3. **Dieléctricos.** Representan las zonas donde no hay cobre, sino simplemente dieléctrico desnudo (en particular, FR-4). Estos *píxeles* no participan del intercambio de energía en el modelo.
4. **Contorno.** Pueden intentar simular una superficie perfectamente adaptada, o una superficie metálica, en función de las necesidades de la simulación. Se ubican en el borde de la imagen .PGM creada, para que actúen como el borde del espacio de simulación.

Una vez cargada la imagen en memoria, creado el objeto *Superficie* y los objetos *Píxeles*, se los vincula.

Como se observa en la Figura 3.46, los pixeles metálicos (internos y de interfaz) tienen una capacidad y varias inductancias asociadas (una para cada dirección). Las mismas quedan descriptas en base a las ecuaciones 3-1, y a partir de ellas es posible obtener una impedancia característica, como se muestra en la Figura 3.47, en base a las ecuaciones 3-36:

$$L_{inn} = \mu_0 h / 2 \quad (3-36a)$$

$$C_{inn} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 l^2}{h} \quad (3-36b)$$

$$Z_{inn} = \sqrt{L_{inn}/C_{inn}} \quad (3-36c)$$

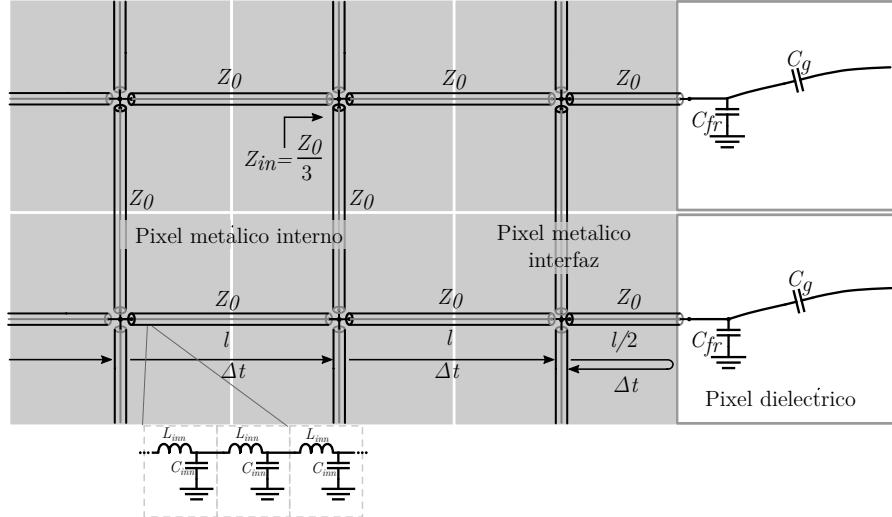
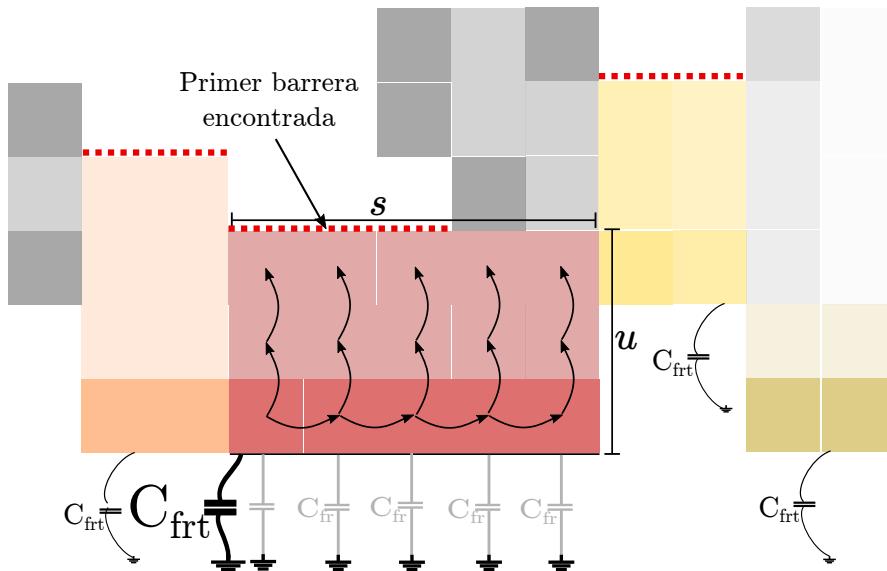


FIGURA 3.47: Circuito equivalente de líneas de transmisión, donde se observa la relación con la capacidad e inductancia de cada *Pixel*.

Los pixeles interfaz poseen, además, una capacidad de *fringe*, que se relaciona al comportamiento no-TEM de las líneas de campo cerca de los bordes de las estructuras *microstrip*, mostrado en la Figura 1.13. La expresión de la capacidad de *fringe* para cada borde es la siguiente [39], donde  $s$  es la longitud de *microstrip* sobre la que se desea calcular la capacidad de *fringe* y  $C'$  es la capacidad por unidad de longitud de las ecuaciones 3-36:

$$C_{fr} = C' h 0,102 \frac{s/h + 0,106}{s/h + 0,264} \left( 1,166 + \frac{\epsilon_r + 1}{\epsilon_r} (0,9 + \ln(s/h + 2,475)) \right) \quad (3-37)$$

Al momento de crear la superficie, además, se realizan dos acciones previas a la simulación:

FIGURA 3.48: Cálculo de la capacidad de *fringe* de una pared horizontal.

1. **Vincular capacitivamente los bordes de las estructuras metálicas**, como se indica en la Figura 3.49. Para esto se toman todos los bordes de las estructuras metálicas (los pixeles de tipo *Interfaz*), y se recorre horizontal y verticalmente la matriz, una vez por dirección, vinculando los bordes interfaz de a pares, teniendo en cuenta que aquellos *pixeles* de interfaz que corresponden a la misma estructura (a la misma isla metálica) no deben ser vinculados.

Por cada par encontrado, se obtiene la capacidad de acople,  $C_{gt}$ , utilizando la expresión 3-3, reescrita aquí con los nombres de los parámetros definidos en esta sección, para simplificar la lectura:

$$C_{gt} = \frac{b\epsilon_0(1 + \epsilon_r)}{\pi} \cosh^{-1}(a/g)$$

En esta expresión,  $a$  es el tamaño de las islas metálicas y  $g$  representa la distancia entre las islas conductoras. El valor de  $s$ , en tanto, representa la longitud del *gap*, que se obtiene calculando la cantidad de *pixeles* enfrentado a distancia constante que existen (paso 1 en la figura). Hecho esto, considerando todos los pixeles a uno y otro lado del *gap*, se busca la «profundidad» de la celda,  $u$ , que no es más que la cantidad de pixeles metálicos detrás de los pixeles frontera que pueden hallarse simultáneamente a ambos lados del *gap*, manteniendo al cantidad longitudinal de pixeles metálicos del borde (paso 2 en la figura). Así, el valor de  $a$  queda representado por, aproximadamente,  $2 \cdot u + g$ , con  $u$  en unidades de metro.

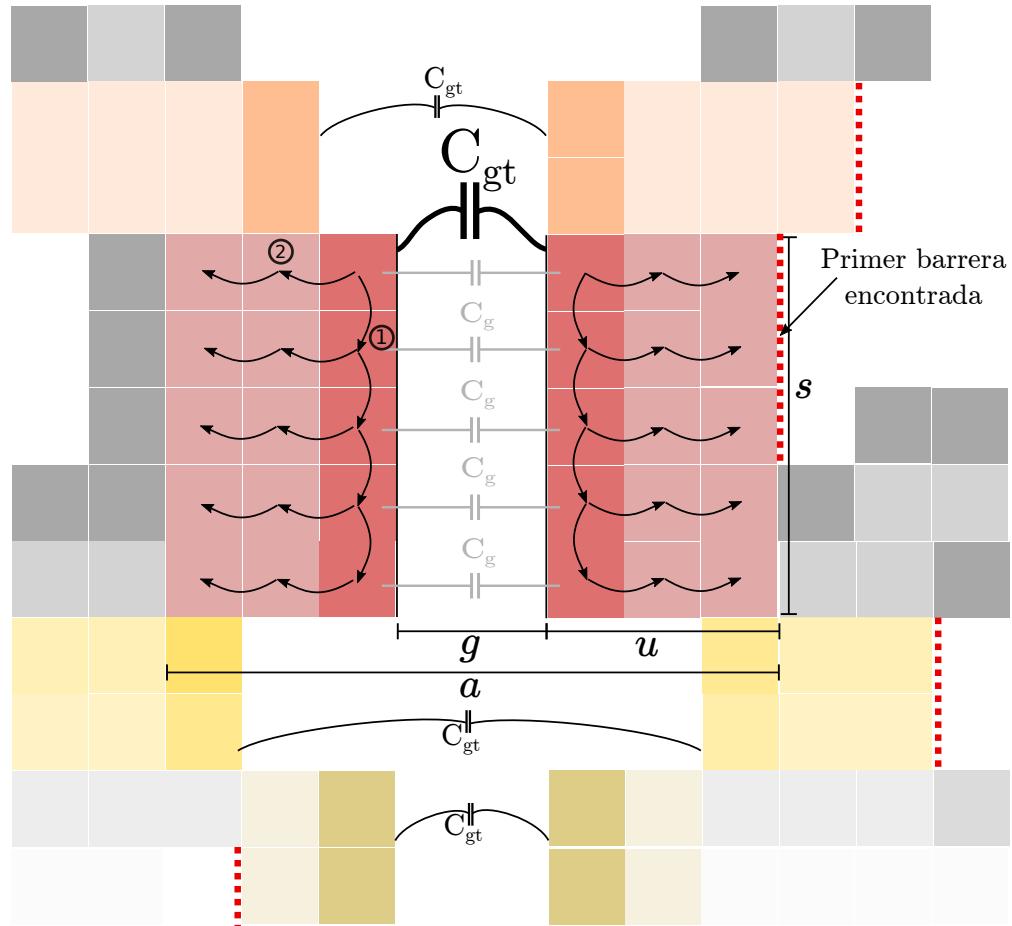


FIGURA 3.49: Cálculo de las distintas capacidades de acople horizontales para los pixeles que participan del cálculo numérico. Para un caso particular se muestran las capacidades de acople asociadas a los pixeles enfrentados por un *gap*.

El valor de la capacidad total de acople se divide entre la cantidad de pares de pixeles que participan del cálculo, de manera que a cada par se le asigna una capacidad  $C_g$ , como se indica en la figura para los pixeles de color rojo.

2. **Calcular las matrices S asociadas a cada pixel metálico.** Las matrices S son las matrices que, multiplicadas por un vector de tensiones incidentes,  $V_i$  a cada pixel, devuelven un vector de igual cantidad de componentes de tensiones reflejadas,  $V_r$ , en los mismos, como se muestra en la ecuación 3-38 y en la Figura 3.50. Cada uno de los elementos de estos vectores representan una dirección (izquierda, derecha, arriba y abajo) de la celda unitaria. Las expresiones de la matriz S son las mostradas en la ecuación 3-39:

$$\begin{bmatrix} V_r^{izq} \\ V_r^{der} \\ V_r^{arr} \\ V_r^{aba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{izq-izq} & s_{der-izq} & \dots & \dots \\ s_{izq-der} & s_{der-der} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{izq-izq-aba} & \dots & \dots & s_{aba-aba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i^{izq} \\ V_i^{der} \\ V_i^{arr} \\ V_i^{aba} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

$$S_{i,i} = \frac{(Z_j||Z_k||Z_l) - Z_i}{(Z_j||Z_k||Z_l) + Z_i} \quad (3-39a)$$

$$S_{j,i} = \frac{2(Z_j||Z_k||Z_l)}{(Z_j||Z_k||Z_l) + Z_i} \quad (3-39b)$$

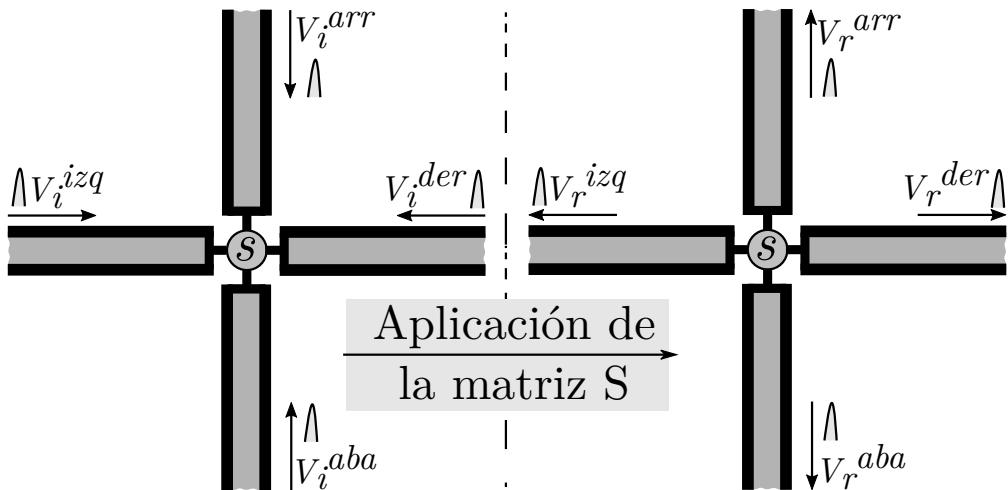


FIGURA 3.50: Descripción gráfica del uso de la matriz S.

Se debe tener en cuenta que, para el caso de las líneas de transmisión que unen *píxeles* metálicos (*internos* y de *interfaz*), como se muestra en la Figura 3.47, cada una de las 4 líneas de transmisión que confluyen en un nodo representante de un pixel son iguales, por lo que el valor de los elementos de la diagonal de la matriz S será  $-0,5$ , mientras que los elementos no diagonales valdrán  $0,5$ .

Además, se pueden establecer pérdidas para el transporte de tensión de un *pixel* a otro, de manera que se puedan simular, de forma simplificada, las pérdidas por conductividad.

Los *píxeles* de tipo *dielectrico* no poseen matriz S, debido a que en su mayoría no tendrán información de tensión incidente.

Para el análisis de transferencia entre un punto y otro de la estructura, se debe fijar una posición de entrada y una posición de salida, cuya tensión, para cada tiempo, deberá ser almacenada.

Una vez creada la matriz a partir de la información obtenida de la imagen, se debe establecer una tensión inicial en el nodo de entrada. Se puede establecer un  $\delta(t)$  de tensión, de manera que se fija el valor de tensión inicial y luego se lo deja libre para todos los tiempos posteriores, permitiendo que el *Pixel* de entrada tenga el mismo comportamiento que el resto de los *Pixeles* del mallado, con su tensión variando por el efecto de las tensiones incidentes desde los nodos vecinos, en cada tiempo. También puede establecerse un seno, un coseno elevado y un pulso Gaussiano. Estos dos últimos permiten una excitación limitada en frecuencia [5].

La simulación es de tipo TLM, donde existe una tensión inicial impuesta para  $t = 0$ , y elegida previamente al cálculo. A partir de la tensión ubicada en uno de los nodos, se calcula, en cada tiempo discreto, el valor de las tensiones incidentes a cada nodo, y a partir de las mismas, se calculan las tensiones reflejadas en todas las direcciones (*scattering*), sumándose los efectos en todas ellas.

Así, como se muestra en la Figura 3.51, si se inicia el cálculo en el nodo denominado  $a$ , se impondrá una tensión inicial en el mismo, que será la que se transmita a los nodos adyacentes ( $t_{1_b}$ ), denominados  $b_i$ . Esta tensión será recibida por los nodos  $b_i$ , quienes multiplicarán las tensiones incidentes en todas las direcciones (en el tiempo  $t_{2_a}$ , los nodos  $b$  sólo tienen una dirección de incidencia) por su matriz  $S$  asociada, para obtener las tensiones reflejadas y transmitidas. Estas tensiones, en el tiempo siguiente ( $t_{2_b}$ ) son las que se transmiten a los respectivos nodos adyacentes,  $c_j$ , quienes repetirán la operación. El cálculo proseguirá hasta que se interrumpa la simulación.

Para el caso particular de los *pixeles* de tipo *interfaz*, existen dos situaciones especiales: La correspondiente al efecto de la capacidad de *fringe* y el truncamiento de la línea de transmisión, y el correspondiente al acoplamiento con otras estructuras de la *Superficie*.

Dado que el análisis es cuasiestático, debido a las dimensiones pequeñas de los *gaps* y los *Pixeles* en comparación con la longitud de onda, se puede utilizar un modelo de bajas frecuencias de acoplamiento mutuo para describir el fenómeno de acoplamiento entre islas metálicas distintas. Este acoplamiento, en términos generales, se da por fenómenos inductivos y capacitivos al mismo tiempo. Si se considera que existe un elemento fuente y un elemento víctima del acoplamiento, se puede afirmar que cada uno de ellos expone una capacidad y una inductancia al ambiente, que son excitadas por los circuitos cercanos. El acoplamiento inductivo se debe a la inductancia mutua  $M$  entre las inductancias expuestas de ambos, relacionada al campo magnético presente, mientras que el acoplamiento inductivo se debe a la capacidad de acople entre los circuitos ( $C_g$ ).

En términos generales, dado que los *pixeles* y las estructuras son pequeñas y no están conectadas al plano de tierra, en general no existirá un acoplamiento inductivo notorio.

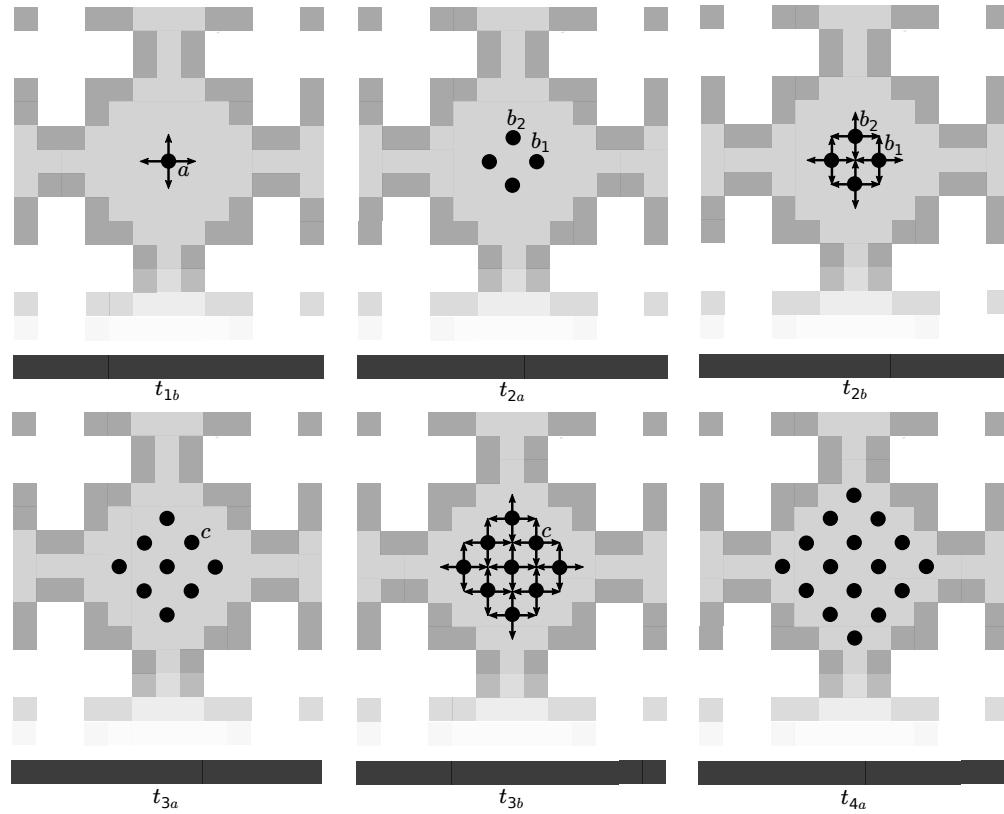
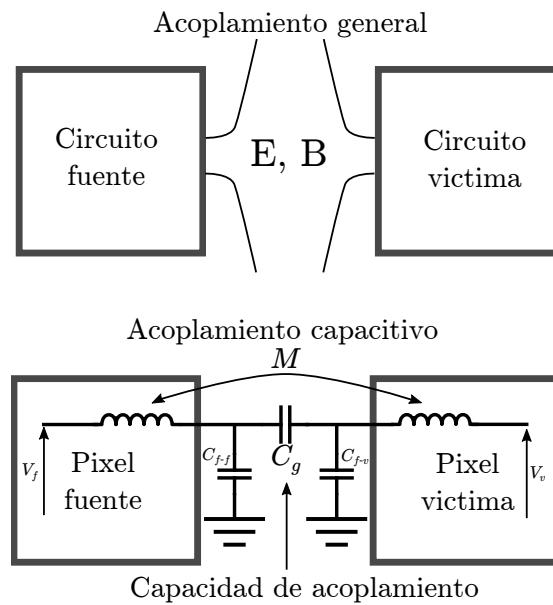


FIGURA 3.51: Proceso de cálculo en el dominio del tiempo.

Sí se presentará, debido a la cercanía entre las islas metálicas, un acoplamiento capacitivo de mayor magnitud. En vistas de simplificar los cálculos, y bajo estas consideraciones prácticas, será este el tipo de acoplamiento que se analizará, mostrado en la Figura 3.52.

FIGURA 3.52: Modelo de acoplamiento capacitivo entre dos *pixels*.

En el mismo sentido, debido a que el efecto capacitivo de placas planas paralelas enfrentadas (relacionado a la capacidad de *fringe*) es mucho mayor al de placas planas paralelas coplanares (relacionada a la capacidad entre islas metálicas cercanas), se puede considerar que el acoplamiento es de tipo capacitivo débil [40] (donde no se considerarán efectos de re-acoplamiento y acoplamiento inverso), lo que permite utilizar un modelo simplificado de acoplamiento, considerando fuentes controladas de corriente, mostrado en la Figura 3.53. Los valores de las fuentes controladas se muestran en la ecuación 3-40, aunque en términos prácticos el valor de  $M$ , la inductancia mutua, se despreciará, por lo que no existirá una fuente controlada de tensión.

$$i' = j\omega C_g v_f \quad (3-40a)$$

$$v' = j\omega M i_f \approx 0 \quad (3-40b)$$

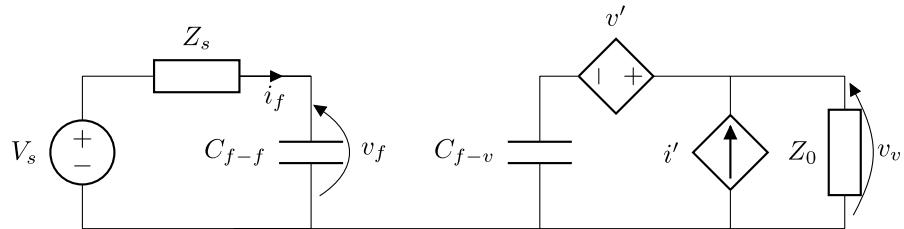


FIGURA 3.53: Circuito equivalente del modelo de acoplamiento capacitivo débil, utilizando fuentes de corriente, para una carga de impedancia igual a la impedancia característica de la línea de transmisión conectada.

Para adaptar este circuito al modo de funcionamiento de TLM, es posible considerar a la fuente de corriente y el capacitor de *fringe* como un equivalente Norton, y convertirlo en un equivalente Thévenin, de modo que la tensión desarrollada sobre  $Z_0$ , y por lo tanto, la tensión transmitida al nodo correspondiente al *pixel* víctima, resulte de un divisor de impedancias:

$$v_{th} = i' \frac{1}{j\omega C_{f-v}} = \frac{j\omega C_g v_f}{j\omega C_{f-v}} = \frac{C_g v_f}{C_{f-v}} \quad (3-41)$$

$$v_v = v_{th} \frac{Z_0}{Z_0 + \frac{1}{j\omega C_{f-v}}} = v_f \frac{C_g}{C_{f-v}} \frac{Z_0}{Z_0 + \frac{1}{j\omega C_{f-v}}} \quad (3-42)$$

La tensión  $v_f$  es la que desarrolla el capacitor de *fringe* del *pixel* fuente. Utilizando consideraciones similares, el efecto de este capacitor para el circuito fuente se podría obtener, para el acoplamiento capacitivo, como el paralelo de la capacidad de *fringe* fuente con el circuito que lo conecta al circuito víctima. Sin embargo, dado que, como se

dijo antes, la capacidad  $C_g$  es mucho menor a las capacidades de *fringe*,  $C_f$ , los efectos del circuito víctima y de la capacidad de acople son despreciables. De esta forma, el valor del coeficiente de reflexión, para el caso del acoplamiento capacitivo analizado, resulta sólo generado por la capacidad de *fringe* del circuito fuente:

$$\rho = \frac{|1/(j\omega C_{f-f})| - Z_0}{|1/(j\omega C_{f-f})| + Z_0} \quad (3-43)$$

Se debe tener en cuenta que, dado que la señal recorre un camino de  $\Delta l/2$  desde el nodo hasta el capacitor de *fringe*, el cálculo de la tensión reflejada se debe realizar en  $n\Delta t/2$ . Esto es porque en el tiempo siguiente, exactamente un  $\Delta t$  luego de enviada la señal, la tensión reflejada debe impactar en el nodo original, como se esquematizó sobre el *pixel* metálico de la Figura 3.47.

El resultado arrojado por la simulación será un archivo, de formato .NPY, que es una matriz tridimensional, que puede ser considerada como un apilamiento, de altura igual a la cantidad de tiempos simulados, de matrices bidimensionales con largo y ancho iguales a los de la estructura, como se muestra en la Figura 3.54. En cada una de estas matrices bidimensionales, cada elemento posee un valor, que no es más que la tensión vista en ese nodo en el tiempo  $t_k$  al que corresponde la altura  $k$  en que se evalúa la matriz bidimensional. De ser necesario, se pueden establecer los parámetros de una ventana de Hanning para disminuir el comportamiento espúreo de alta frecuencia debido a la limitación en tiempo de la señal de salida.

Los valores en tiempo discreto de la tensión en el nodo de entrada y en el nodo de salida se pueden observar en la Figura 3.55. Aunque se excitó con un único pulso de amplitud 1 V, las sucesivas reflexiones sobre los nodos adyacentes modifican la tensión del nodo de entrada mientras dura la simulación. Como se puede observar, los valores de tensión en los nodos decrecen rápidamente, y el *pixel* de salida tiene un retardo hasta recibir la onda de tensión, como es esperable.

El análisis de la tensión del nodo de salida, teniendo en cuenta la tensión del nodo de entrada aplicada, da lugar a una transferencia de tensión que, al aplicar la transformada de Fourier, y considerando impedancias de  $50 \Omega$  permite obtener el parámetro  $S_{12}$ . En la Figura 3.56 se puede observar el resultado para el mismo caso analizado mediante elementos circuitales discretos. La comparación en la banda de frecuencia de interés se muestra en la figura b).

Como se puede observar, si bien en términos generales el método propuesto permite conocer de forma aproximada el ancho de banda, así como el comportamiento general,

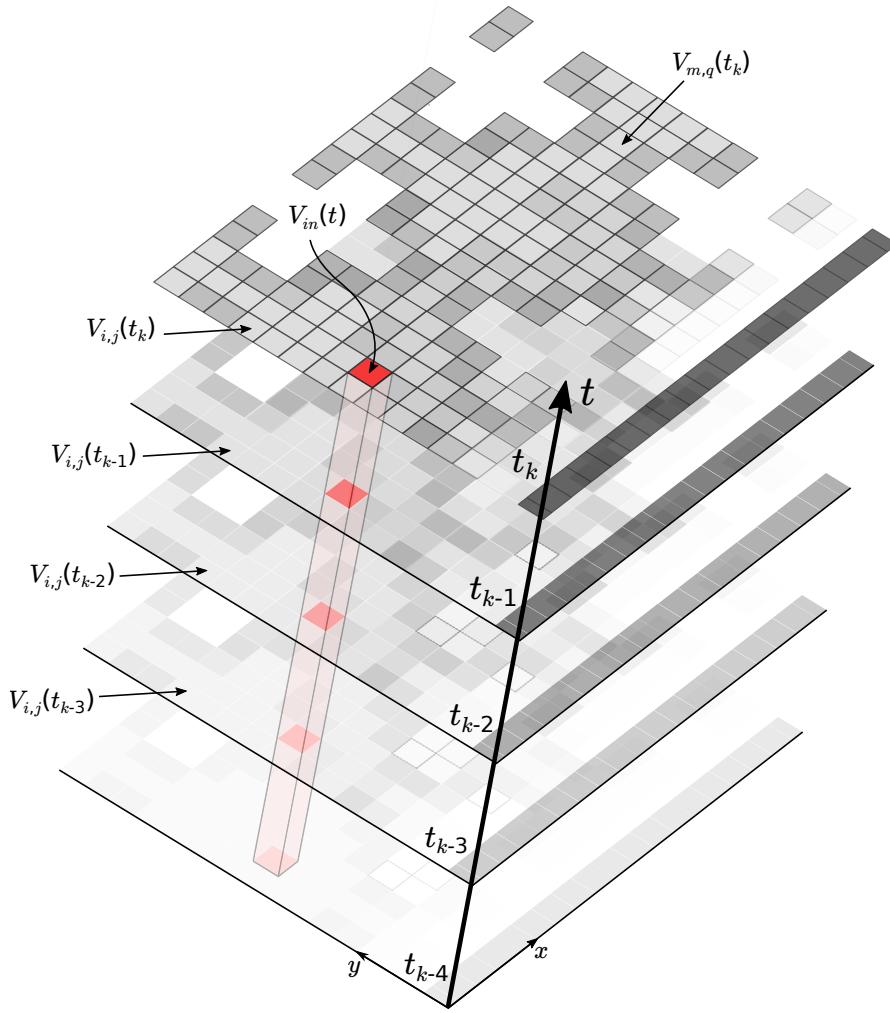


FIGURA 3.54: Estructura de la matriz que se guarda y se lee del disco rígido. La estructura posee todas las tensiones calculadas para cada tiempo y para cada pixel en particular.

no predice correctamente la frecuencia de resonancia ni es capaz de predecir los picos que se observan al simular con CST. Esto puede deberse a múltiples factores, entre los que se destacan:

- El proceso de simulación requiere conocer el valor de la impedancia en cada momento. Dado que la impedancia es un concepto definido en el dominio de la frecuencia, se debió elegir una frecuencia a la que obtener cada valor de impedancia. Esta decisión conlleva a que se deba acotar el análisis a un espectro acotado alrededor de la frecuencia elegida como referencia. Existen métodos propuestos para subsanar este problema en TLM [41].
- El mallado propuesto resulta insuficiente. Mallas más finas requieren un mayor tiempo de simulación, especialmente cuando son utilizadas utilizando el algoritmo propuesto, implementado en Python. El algoritmo sólo admite mallado rectangular

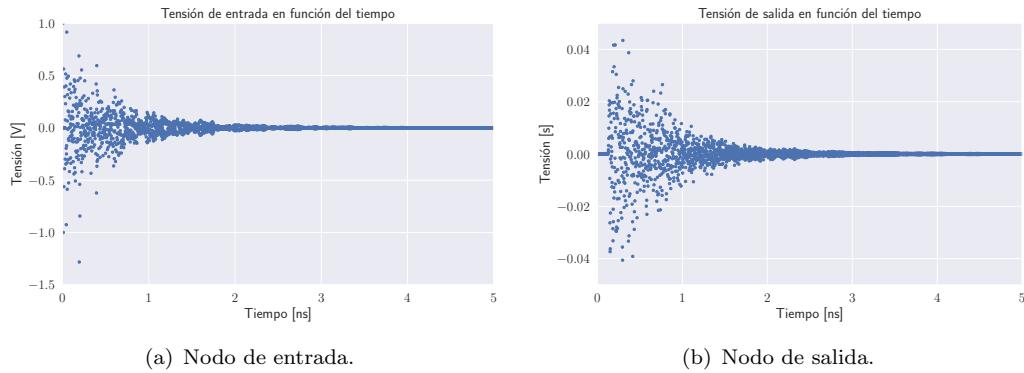
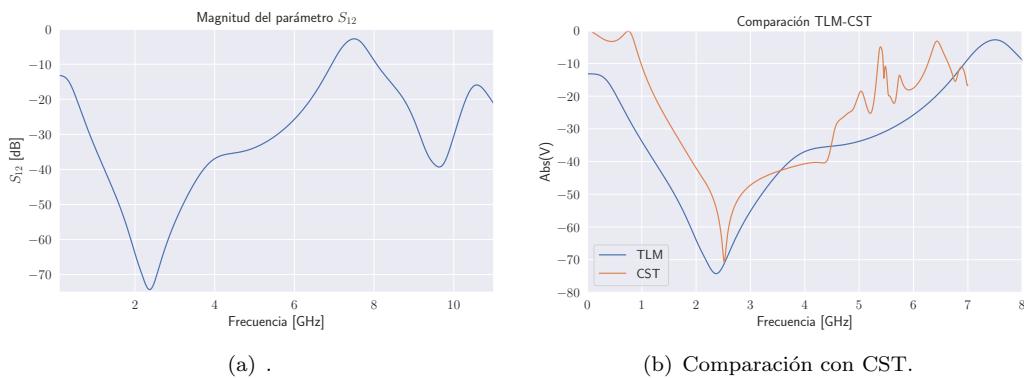


FIGURA 3.55: Comportamiento en el tiempo de los nodos de entrada y salida.

FIGURA 3.56: Resultado al obtener  $S_{12}$  mediante Fourier, y comparación con el resultado esperado.

y equiespaciado. En muchos casos resulta conveniente utilizar mallas más densas cerca de los bordes de la estructura, donde los campos presentan comportamientos más complejos.

- Resulta evidente que la frecuencia de resonancia no coincide con la esperada, posiblemente debido al error inherente de las fórmulas utilizadas para calcular la capacidad e inductancia de cada *pixel* analíticamente.
- Si bien se tuvo en cuenta la amplitud  $\rho$ , debido a que la fase no se consideró en la simulación, el comportamiento de las capacidades de *fringe* está modelado de forma incompleta.
- El frente de ondas es plano, y no cilíndrico o radial. Esto viene aparejado a la limitación del mallado equiespaciado: cualquier pulso que parte de un nodo, sólo puede llegar a los nodos que son vecinos directos no diagonales en un único tiempo de simulación.

En las figuras que componen al mosaico de figuras 3.57 se puede observar cómo se comporta el algoritmo frente a la celda propuesta.

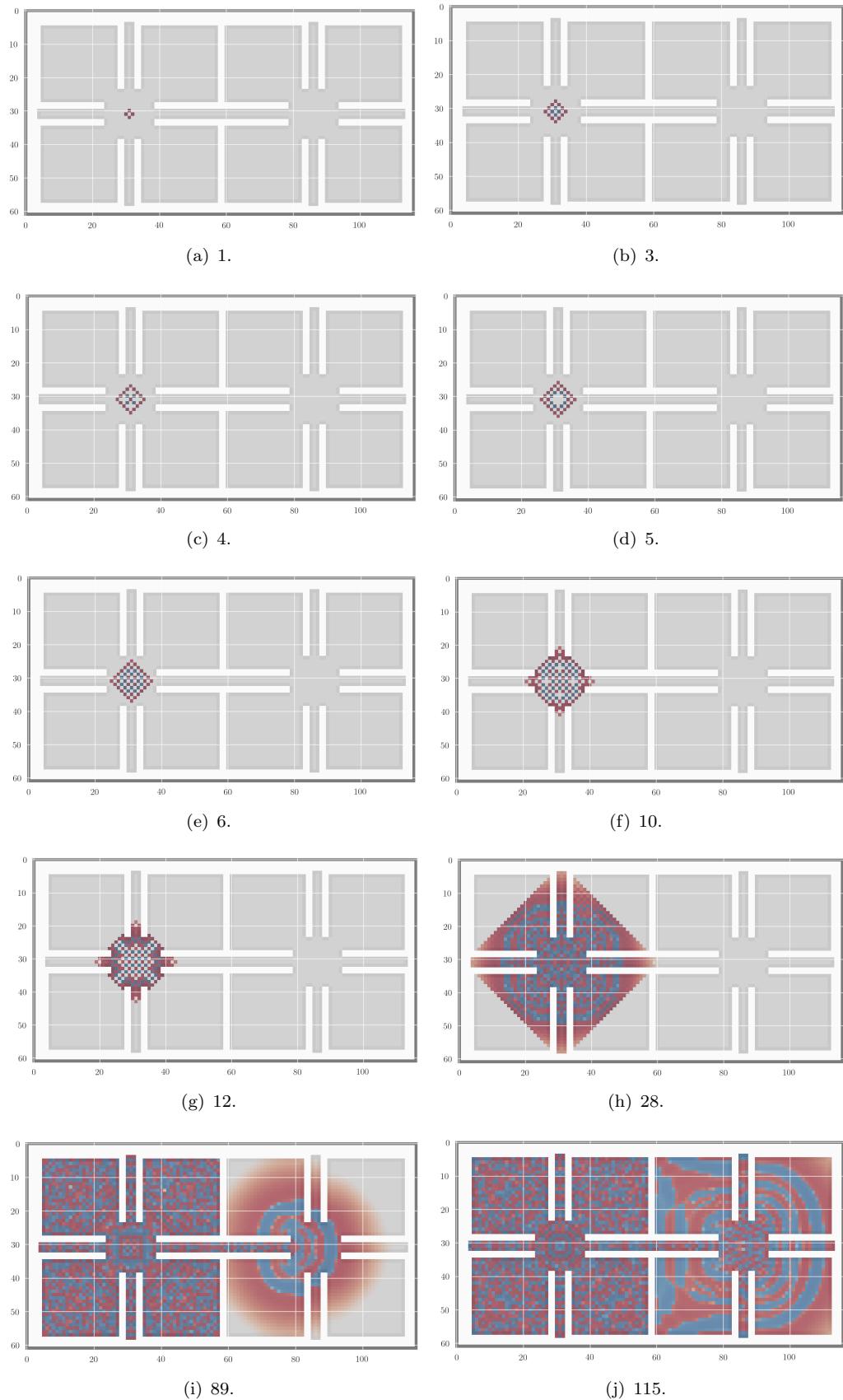


FIGURA 3.57: Comportamiento del algoritmo frente a la celda propuesta, en distintos tiempos discretos..



## Capítulo 4

# Aspectos de interés en el uso de EBGs en conjuntos de antenas

### 4.1. Introducción

El análisis del capítulo 3 permite comprender de forma intuitiva el comportamiento de las estructuras EBG uniplanares dispuestas sobre un plano de tierra cubierto por sustrato dieléctrico. Sin embargo, el análisis sólo se propuso para energía conducida, debida al comportamiento de corrientes sobre el metamaterial que dan lugar a una modificación en la estructura y capacidad de propagación de ondas. Este análisis, si bien importante para la comprensión de los efectos ligados a las estructuras periódicas, no se centra en el análisis del comportamiento de las mismas en cercanías de radiadores electromagnéticos.

En este capítulo se iniciará, aunque no se concluirá completamente, el estudio sobre el efecto de estas estructuras sobre las propiedades de radiación y de campo cercano de antenas ubicadas sobre el sustrato. El análisis comenzará con la revisión del comportamiento cuando las antenas en cuestión son monopolos eléctricos referenciados al plano conductor inferior, y una vez destacados los efectos más importantes que se dan para este tipo de antenas, se procederá a mostrar los efectos para el caso en que los radiadores son antenas *microstrip*, donde aparecen fenómenos más complejos.

El motivo por el que se comienza el análisis para monopolos eléctricos verticales gira en torno a la capacidad que estos poseen para generar, sobre la capa dieléctrica, ondas de superficie TM en forma isotrópica, sin efectos de borde ni asimetrías que dificulten el análisis.

## 4.2. Elección del metamaterial

Existen numerosas posibles celdas unitarias uniplanares, que fueron creadas a partir de la propuesta inicial de Yang y otros [36], y que procuran aumentar el ancho de banda prohibida y el valor de atenuación, muchas veces utilizando técnicas de miniaturización, que buscan lograr geometrías que presenten una mayor o menor inductancia, y una mayor o menor capacidad con el plano de tierra y con celdas vecinas, en función de las necesidades. La búsqueda, en el contexto de la disminución del acoplamiento mutuo entre antenas *microstrip*, de celdas unitarias óptimas, gira alrededor de la búsqueda de anchos de banda prohibidos lo suficientemente amplios para cubrir el ancho de banda de las antenas *microstrip* en cuestión.

Para este trabajo se seleccionó la celda de Yang, analizada en la Sección 3.3.2, debido a que fue la primer variante publicada, y posee optimizaciones sobre la celda de Orlandi, analizada en la Sección 3.3.1.

Sin embargo, existen numerosos diseños y geometrías, entre las que destacan la celda analizada por Goussetis [32], que consiste en parches cuadrados sin interconexión entre sí, como el mostrado en la Figura 2.11. Si bien, debido a su geometría, estas celdas unitarias presentan capacidad con el plano de tierra y con otros parches aledaños, presentan una baja inductancia, lo que los vuelve subóptimos, dado que resulta complejo obtener frecuencias de resonancia lo suficientemente bajas con un tamaño de celda viable. Otros trabajos de interés son los de Abidin [42], quien propuso las estructuras mostradas en las figuras 4.1(a) y 4.1(b), que poseen un ancho de banda mayor al de las celdas de Yang, aunque requieren más iteraciones de simulación al momento de diseñarlas para una aplicación particular, debido a la complejidad de las geometrías.

Estructuras más sencillas son propuestas en [43], mostradas en las figuras 4.1(c), 4.1(d) y 4.1(e), con resultados similares a la geometría elegida en este trabajo.

Entre los esfuerzos más intuitivos para aumentar la inductancia, disminuyendo así la frecuencia de resonancia y, por tanto, el tamaño de las celdas unitarias, se destaca el propuesto por [44], mostrado en la Figura 4.1(f). En ella se observa que se aumentó el largo y la capacidad de las cintas *microstrip* que unen los parches, modificando las líneas para que ocuparan la mayor cantidad de espacio posible. Las simulaciones de esta estructura ofrecen mejores resultados que los de la celda elegida, aunque al costo de dificultar su diseño en programas CAD. Un modelo utilizando líneas de transmisión para caracterizar el comportamiento de estas celdas está presentado en [10].

En este sentido, [45] propone, en su tesis doctoral, un algoritmo genético capaz de obtener un mayor ancho de banda prohibida mediante sucesivas simulaciones, sin la intervención

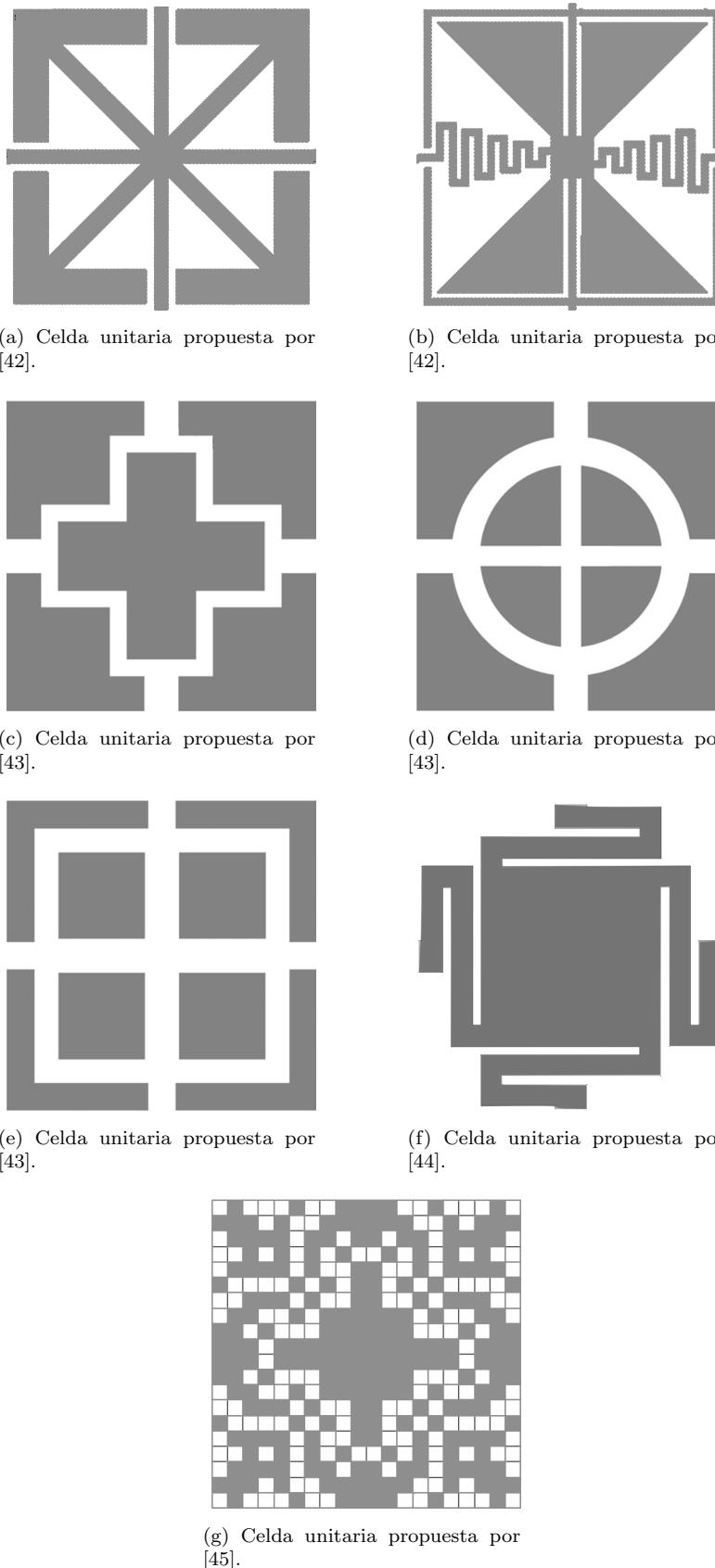


FIGURA 4.1: Variación del parámetro  $S_{11}$  del puerto en función de distintos parámetros del parche único, y antena optimizada final.

de un diseñador, obteniendo celdas complejas pero muy efectivas, como la mostrada en la Figura 4.1(g).

La miniaturización cumple un papel importante debido a que es necesaria una cantidad (o profundidad) mínima de celdas unitarias entre los parches para que el efecto de disminución de acoplamiento resulte notorio. Si cada una de las celdas unitarias ocupara demasiada superficie, obligaría a separar los parches aún más, consecuencia que resulta indeseable. Además, entre la estructura de celdas unitarias y los parches se debe mantener una distancia  $g$  mínima, de modo que los efectos de acoplamiento de campo cercano entre la antena y la estructura EBG puedan considerarse despreciables. Estos efectos no son despreciables y, en muchos casos, generan un acoplamiento aún mayor al que se da si no se utilizan estructuras EBG.

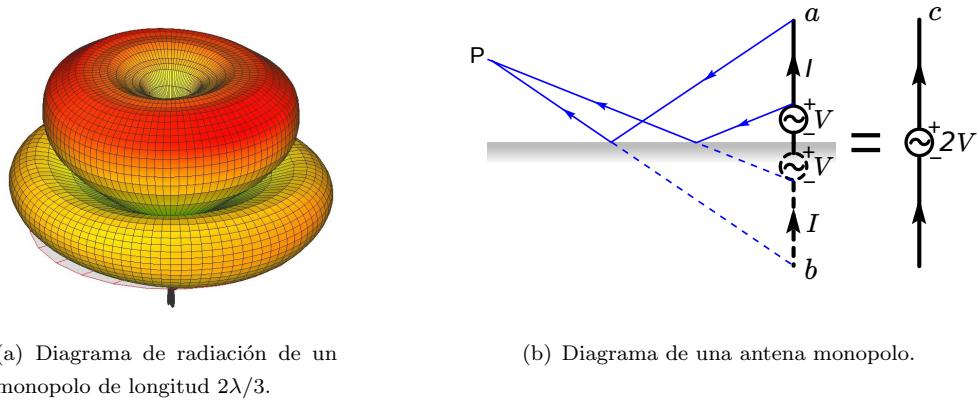
Para el caso de una distancia entre los parches de aproximadamente  $3\lambda/2$ , la cantidad de filas de celdas unitarias que se pueden ubicar entre los mismos para observar efectos de atenuación del acoplamiento mutuo varía entre 3 y 5. Las técnicas de modelado presentadas, y en particular las que requieren de simulación de una celda unitaria y la aplicación de condiciones de borde periódicas, describen el comportamiento de la estructura EBG cuando ésta se extiende infinitamente. Como, en general, este no es el caso, se procedió, utilizando como base la información brindada por los diagramas de dispersión (que en nuestro caso, debido a que la cantidad de celdas unitarias es finita, describen en forma aproximada las zonas frecuencia de atenuación), a obtener la relación del parámetro  $S_{21}$  con la frecuencia para distintos valores geométricos, simulando la estructura completa.

En general, un mayor tamaño de celda da lugar a una banda de atenuación ubicada a frecuencias más bajas. La elección gira en torno a que la frecuencia de resonancia del sistema sobre el que se desea probar el comportamiento de la estructura se ubique en una zona segura ante problemas y tolerancias de fabricación.

### 4.3. Monopolos

Las antenas monopolo consisten en un conductor dispuesto verticalmente sobre un plano de tierra u otra superficie conductora, alimentado o conectado a un receptor en su base a través de una línea de transmisión cuyos terminales están conectados al plano de tierra y al conductor vertical respectivamente, como se muestra en la Figura 4.2 b). A diferencia del dipolo, que consiste en dos conductores idénticos dispuestos de forma tal que comparten su eje principal, el monopolo suele ser más corto, posee un diagrama de radiación más elevado (como se observa en la Figura 4.2 a)), una resistencia de radiación

menor, una mayor directividad, y da lugar a ondas de superficie considerables sobre el plano conductor.



(a) Diagrama de radiación de un monopolo de longitud  $2\lambda/3$ .

(b) Diagrama de una antena monopolo.

FIGURA 4.2: Imágenes extraídas de *Wikipedia*.

El análisis de un monopolo suele derivar de la aplicación de teoría de imágenes sobre un dipolo dispuesto a cierta distancia del plano de tierra. Este método de análisis considera fuentes virtuales de radiación bajo el plano conductor que, combinadas con las fuentes reales (el conductor vertical del monopolo), dan lugar a un sistema equivalente para la zona del espacio que se ubica por encima del plano de tierra, dado que describe las reflexiones sobre el mismo. Las fuentes virtuales tienen, sobre un plano conductor, el comportamiento mostrado en la Figura 4.3.

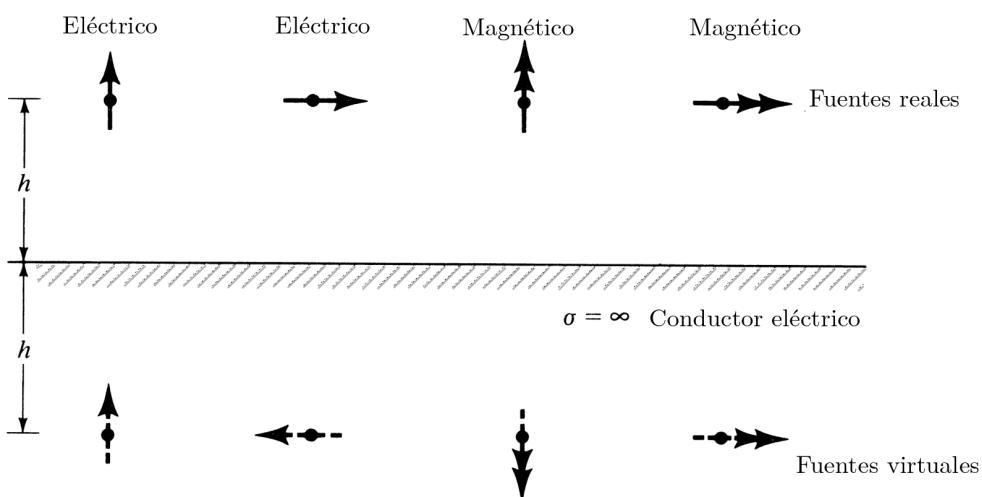


FIGURA 4.3: Fuentes virtuales generadas por cercanía con un conductor eléctrico [11].

### 4.3.1. Comportamiento de un conjunto de dos monopolos

Para las pruebas sobre acoplamiento mutuo que se realizaron, se consideró un monopolio de  $\lambda/4$ , que para la frecuencia de interés es de aproximadamente 3,125 cm. Se ubicaron dos monopolos a una distancia arbitraria de 6,25 cm sobre un plano conductor finito cubierto por un sustrato de FR-4, a fin de conocer el acoplamiento entre ambas antenas cuando no existe una estructura de *bandgap* electromagnético entre ellas. La geometría creada se puede observar en la Figura 4.4. Se debe considerar que, como se explicó en la Sección 1.7.5, el acoplamiento entre antenas se debe a múltiples factores, y el uso de estructuras EBG en el sustrato será responsable de únicamente uno de ellos: las ondas de superficie.

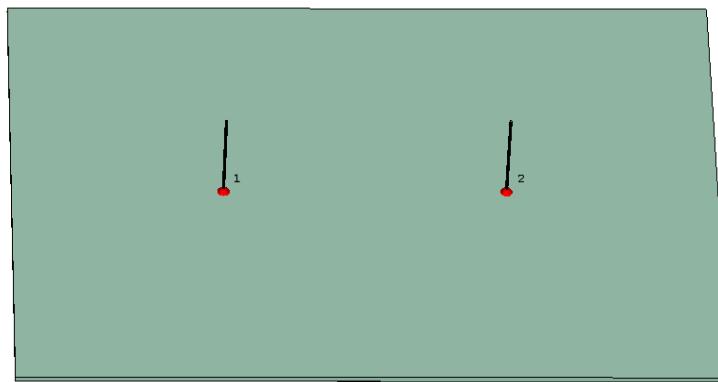


FIGURA 4.4: Estructura de dos monopolos sobre un plano de tierra simulada.

Por el motivo antes comentado, si las antenas se ubicaran demasiado cerca, la intensidad relativa de los efectos debidos al acoplamiento por campo cercano serían mucho mayores a los del acoplamiento por ondas de superficie, de forma que en muchos casos, en lugar de mejorar el comportamiento, el uso de EBGs lo empeorará, sumando más efectos negativos que positivos. Estas estructuras resultarán útiles sólo en aquellos casos en que la distancia entre los radiadores sea lo suficientemente grande como para poder considerar efectos de acoplamiento relacionados a la propagación de ondas de superficie.

Se varió la distancia para conocer la variación del coeficiente de acoplamiento con la misma. Los resultados se muestran en la Figura 4.5 donde, como resultaba esperable, el acoplamiento disminuye con la distancia. Además, la frecuencia de resonancia aumenta ligeramente a medida que los dipolos se alejan, modificando de forma casi insignificante el nivel de adaptación.

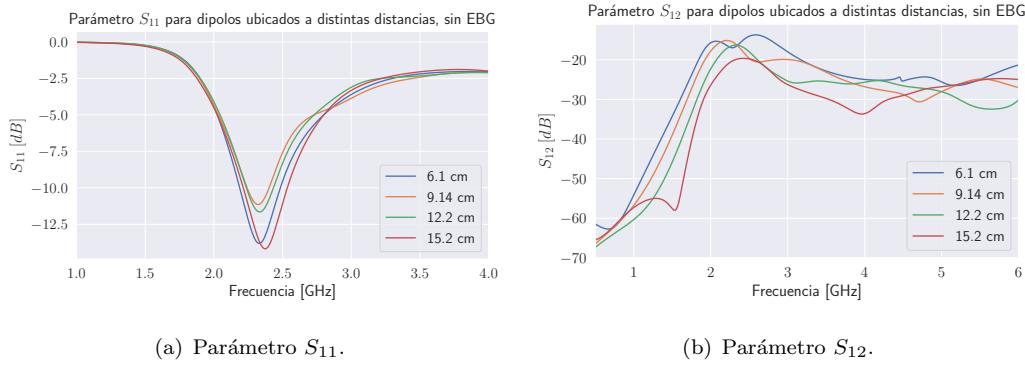


FIGURA 4.5: Comportamiento de los parámetros S para dos dipolos ubicados a distintas distancias.

En vistas de comprender la incidencia del acoplamiento por ondas de superficie sobre el acoplamiento total entre ambas antenas, se eliminó el plano de tierra que se ubica entre ambos dipolos. Esto tiene consecuencias muy notorias sobre el diagrama de radiación, pues deja de existir el plano conductor y, por tanto, la fuente de campo virtual que se consideraba en la Figura 4.2 b) ya no existe. El comportamiento del parámetro  $S_{21}$  para el caso en que no hay un plano de tierra completo que vincule a ambas antenas se pueden observar en la Figura 4.7, que surge de la simulación de la geometría mostrada en la Figura 4.6.

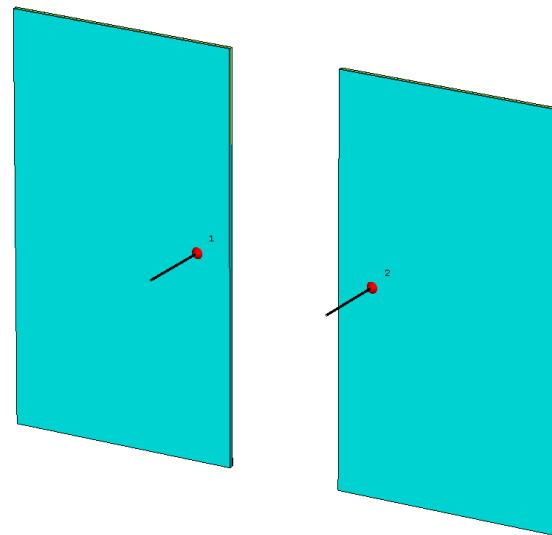


FIGURA 4.6: Estructura de dos monopolos ubicados sobre dos planos conductores separados para evitar acoplamiento por ondas de superficie.

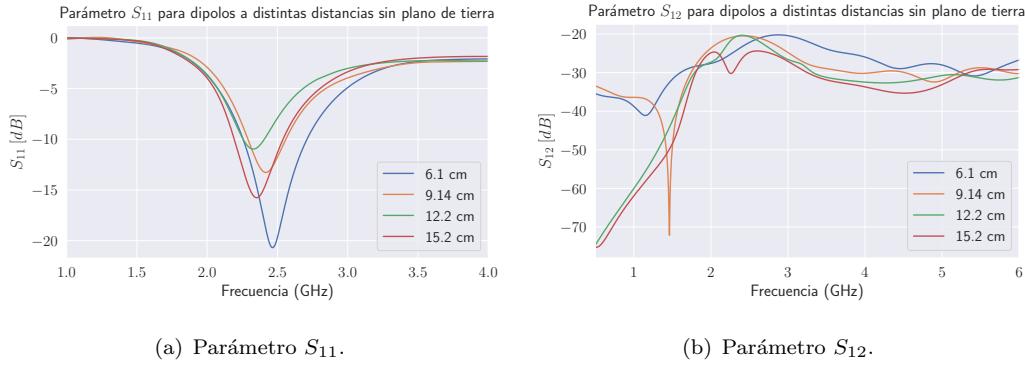


FIGURA 4.7: Comportamiento de los parámetros S para dos dipolos ubicados a distintas distancias, con un plano de tierra dividido en dos para evitar acoplamiento por ondas de superficie.

Se puede observar que los valores de distancia para los que los monopolos quedan cerca del borde de su respectivo plano conductor y del radiador opuesto, la adaptación del sistema mejora considerablemente. A medida que las antenas se alejan, el parámetro  $S_{11}$  recupera los valores que poseía cuando la estructura tenía un único de plano de tierra. El parámetro  $S_{21}$  se ubica siempre por debajo de los  $-20 \text{ dB}$ , y cuando las antenas están lo suficientemente alejadas entre sí, se puede observar el efecto de eliminación del acoplamiento por ondas de superficie para la frecuencia en que la energía que éstas poseen es mayor.

Una comparación para dos distancias elegidas arbitrariamente se puede observar en las figuras 4.8 a) y b), donde se puede observar una disminución en el parámetro  $S_{12}$  de unos  $8 \text{ dB}$  para las frecuencias de interés, incluso cuando las antenas están lejos del borde que las enfrenta (curva naranja). Esto permite deducir, entonces, que el efecto de acoplamiento por ondas de superficie no es despreciable, aunque no representa, como se esperaba, la causa única del mismo.

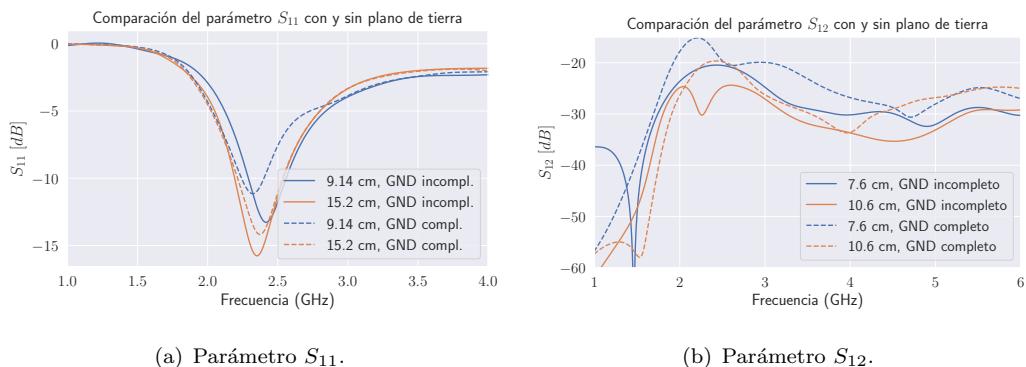


FIGURA 4.8: Comparación del comportamiento entre un par de monopolos que comparten plano conductor y un par de dipolos que no, para dos distancias entre antenas elegidas arbitrariamente.

La aplicación de estructuras EBG modifica sustancialmente las características de las antenas. En la Figura 4.9 se puede observar el comportamiento de los parámetros  $S$  para el caso en que entre las dos antenas se ubican dos filas de EBG, como se muestra en la Figura 4.10 a). Se observa que a una menor distancia entre los dipolos y, por lo tanto, entre cada dipolo y la estructura EBG, el comportamiento es más errático, aunque la adaptación es más profunda. En el mismo sentido, el acoplamiento entre las antenas disminuye con la distancia, y una menor distancia al EBG de cada dipolo genera un acoplamiento incluso mayor al original. Sólo cuando las antenas están lo suficientemente alejadas de la estructura como para que la distancia permita la formación de ondas de superficie, es posible observar una disminución del acoplamiento sin efectos adversos.

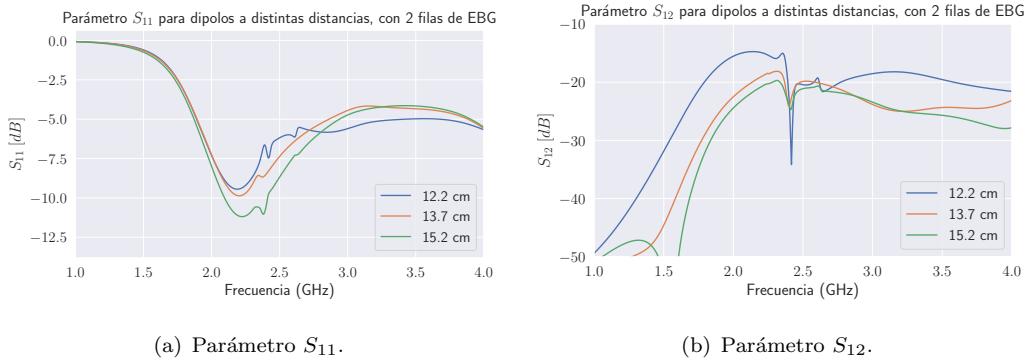


FIGURA 4.9: Comportamiento de los parámetros  $S$  para monopolos separados por dos filas del EBG propuesto.

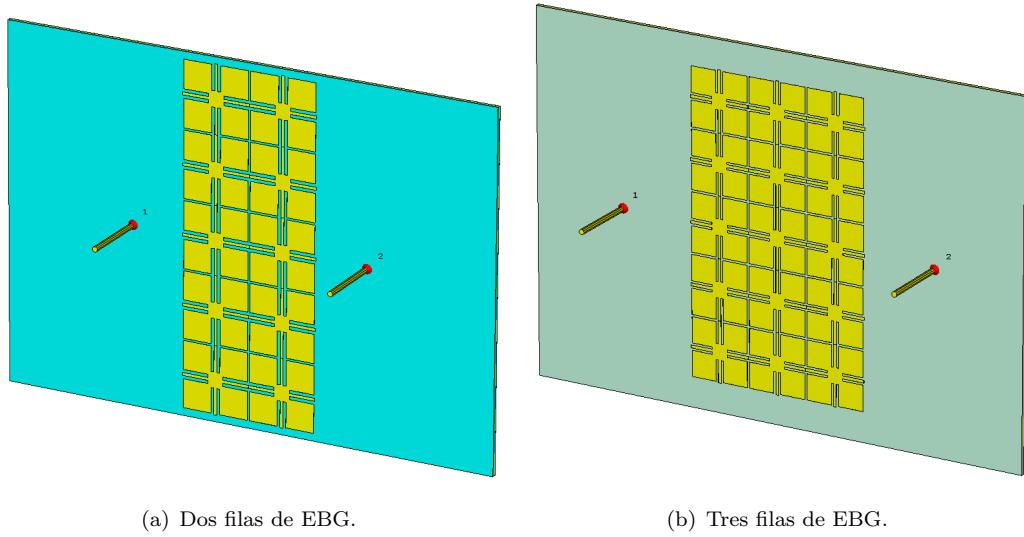


FIGURA 4.10: Estructuras simuladas de dos monopositos separados por 2 y 3 filas de celdas de EBG.

Una comparación entre los parámetros  $S$  para el caso con y sin 2 filas de celdas de EBG se puede observar en la Figura 4.11. La misma revela que, cuando se ubican los EBG,

incluso para el caso en que están separados una distancia considerable de los monopolos, la frecuencia de resonancia disminuye considerablemente. Esto obliga a considerar a la estructura EBG al momento del diseño de las antenas.

Como se explicitó antes, en ocasiones el uso de EBG con la intención de disminuir el acoplamiento mutuo entre antenas monopolo genera un acoplamiento aún mayor entre las mismas, efectivamente generando el efecto contrario al buscado. Esto se observa en la Figura 4.11 b). Para la mayor parte de la banda del espectro de interés, el parámetro  $S_{12}$  de las antenas es mayor cuando se utilizan dos filas de EBG dispuestas entre las antenas que cuando no. Sin embargo, en una banda angosta cercana a la frecuencia de resonancia de los EBG, el parámetro  $S_{12}$  disminuye fuertemente, a valores unos 15 dB por debajo del caso en que no se interpone la estructura. Vale aclarar que, en base al análisis y modelado previo, se esperaba un ancho de banda de rechazo mucho mayor. Cuando la estructura está lo suficientemente lejos, el aumento del acoplamiento en la banda de interés es menos notorio, aunque no despreciable, y la disminución del valor de  $S_{21}$  en la frecuencia de resonancia del EBG resulta de alrededor de 10 dB.

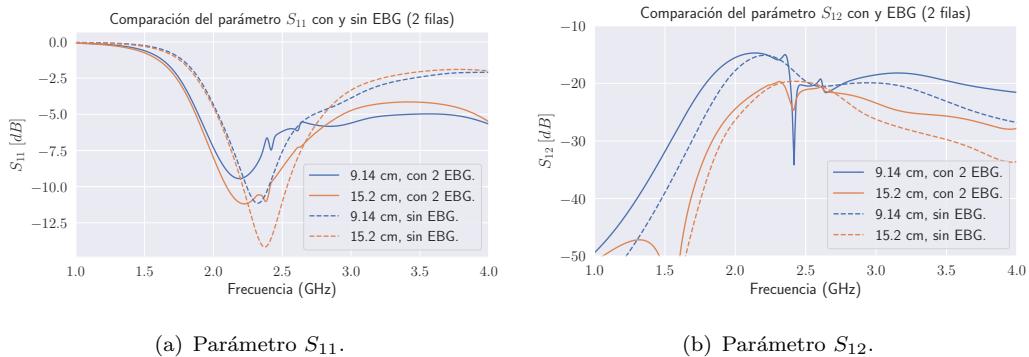


FIGURA 4.11: Comparación del comportamiento de los parámetros  $S$  para el caso en que no hay EBG y el caso en que se ubican dos filas de celdas.

El caso en que se ubican 3 EBG, los resultados, que se muestran en la Figura 4.12, son más complejos. La frecuencia de resonancia disminuye fuertemente, y aparecen resonancias cercanas que dificultan la adaptación. Este comportamiento patológico es mucho menos notorio a medida que la distancia entre los monopolos y la estructura disminuye. En el caso del parámetro  $S_{12}$ , aparecen también frecuencias de resonancia cercanas a la que corresponde al comportamiento de las celdas EBG.

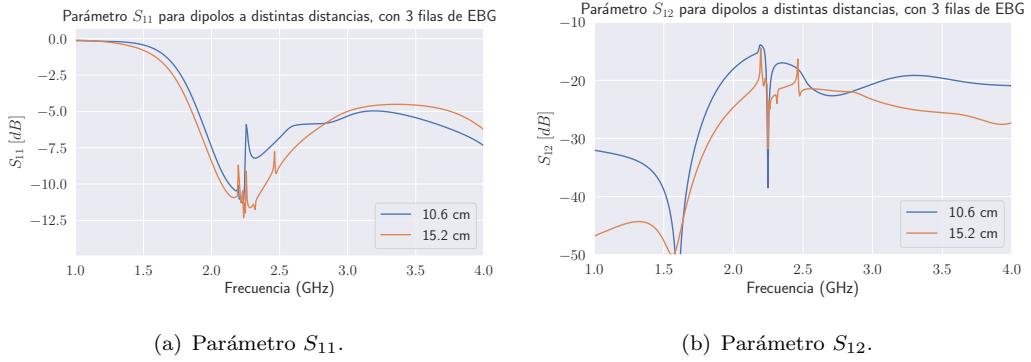


FIGURA 4.12: Comportamiento de los parámetros  $S$  para monopolos separados por tres filas del EBG propuesto.

La comparación entre el comportamiento para 2 y 3 filas de celdas EBG se puede observar en la Figura 4.13, para dos distancias. Para el caso  $S_{11}$ , se puede observar fácilmente que la frecuencia de resonancia es menor y el comportamiento en frecuencia es mucho más errático, con múltiples resonancias que afectan a la adaptación. Cuando la distancia es mayor, esas resonancias disminuyen y la diferencia entre el uso de 2 y 3 filas de celdas EBG disminuye. Los valores de adaptación mejoran ligeramente para el caso de 3 filas, pero a costa de una disminución en la frecuencia. El parámetro  $S_{12}$  para el caso de monopolos a 9,14 cm de distancia entre sí presenta picos que generan que el valor alcance los  $-10 \text{ dB}$ , aunque cuando los mismos se alejan a 15,2 cm, a pesar de que resuena a menores frecuencias, se observa una disminución del parámetro en  $20 \text{ dB}$  en una banda angosta centrada por debajo de la frecuencia en que se deseaba disminuir el acoplamiento.

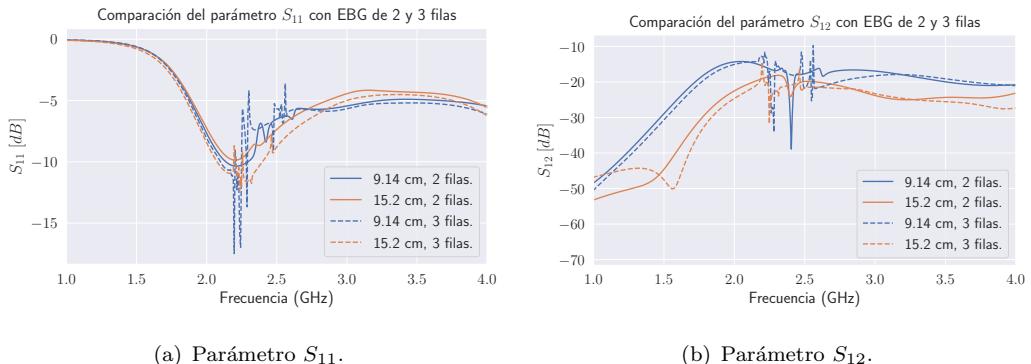


FIGURA 4.13: Comparación del comportamiento de los parámetros  $S$  para el caso en que no hay EBG y el caso en que se ubican dos filas de celdas.

En resumen, si bien el efecto de la aplicación de dos filas de EBG podría considerarse, para algunos casos, beneficioso, el uso de tres filas de EBG modifica de manera tal el comportamiento de los parámetros  $S$  que, a excepción de aquellos casos en que la

distancia entre las antenas permita ubicar la estructura EBG a una distancia prudente de los radiadores, no podrá ser utilizado.

#### 4.4. Introducción a antenas *microstrip*

Como se describió en la Sección 1.7.6, las antenas *microstrip* son utilizadas en un amplio rango de aplicaciones comerciales y militares, especialmente debido a que son livianas, de bajo perfil, suponen reducidos costos y resultan de fácil fabricación. Además, permiten diseños integrados con componentes activos, circuitos de microondas y elementos radiantes [34].

El tamaño de las antenas está íntimamente ligado a la longitud de onda de trabajo, que se relaciona a la frecuencia y permitividad eléctrica del sustrato utilizado, como queda explícito en la ecuación 1-77. Al mismo tiempo, dado que en general son antenas resonantes, presentan un alto Q, lo que afecta a su ancho de banda.

En muchos casos es necesario disminuir el tamaño de los elementos *microstrip*, lo que se puede lograr mediante cortocircuitos y líneas *microstrip* de formas complejas. Otro método, más sencillo, consiste en aumentar el valor de la permitividad eléctrica del sustrato. Sin embargo, como ya se explicó antes, y como se puede observar en la Figura 1.8(b), el aumento de este parámetro aumenta el valor de la impedancia inductiva de la superficie, permitiendo el desarrollo de ondas de superficie.

Por otro lado, el uso de dieléctricos de constante alta genera un ancho de banda aún menor (un mayor Q) y aún más baja eficiencia de radiación. Estos efectos suelen mitigarse con el aumento del ancho del sustrato, que, en contrapartida, genera condiciones propicias para la propagación de ondas de superficie en modo TM, debido a que, como se indica en la ecuación 1-40 y se esquematiza en la Figura 1.7(c), se permiten una mayor cantidad de modos de propagación en el eje *x* (vertical). Por otro lado, un análisis de la impedancia de superficie indica que el comportamiento inductivo aumenta con el ancho del sustrato (ecuación 1-48 y Figura 1.8), lo que también es signo de una configuración que soporta ondas de superficie con facilidad.

Las ondas de superficie, además, extraen potencia que no se convierte en radiación y, facilitan el acoplamiento entre elementos. Además, cuando inciden sobre discontinuidades, generan lóbulos secundarios que degradan el patrón de radiación y las características de polarización [11].

Entre las distintas técnicas que han surgido para la disminución de la presencia de ondas de superficie en el sustrato que soporta a las antenas *microstrip*, entre las que

destacan las relativas a disminuir la altura del sustrato en los bordes de la antena (Figura 4.14(b)), en los últimos años ha cobrado especial interés el uso de sustratos con banda prohibida electromagnética, debido a que no requieren un cambio en la tecnología de fabricación. Los mismos pueden aplicarse justo debajo de la antena (generando estructuras planares que reemplazan al plano de tierra, conocidas como DGS, que ofrecen como contrapartida un diagrama de radiación con mayores lóbulos laterales), o alrededor de la misma ([26], Figura 4.14(a)). Ambas soluciones, debido a la naturaleza resonante de la antena, que genera que las frecuencias en juego estén distribuidas en un ancho de banda acotado, tienen como consecuencia una disminución del acoplamiento mutuo con elementos circuitales cercanos a la antena (en particular, otras antenas que podrían estar formando parte de un conjunto de radiadores). Esto es así porque, si las estructuras que rodean al elemento radiante tienen una banda prohibida para las frecuencias de trabajo, las mismas no podrán propagarse por el sustrato.

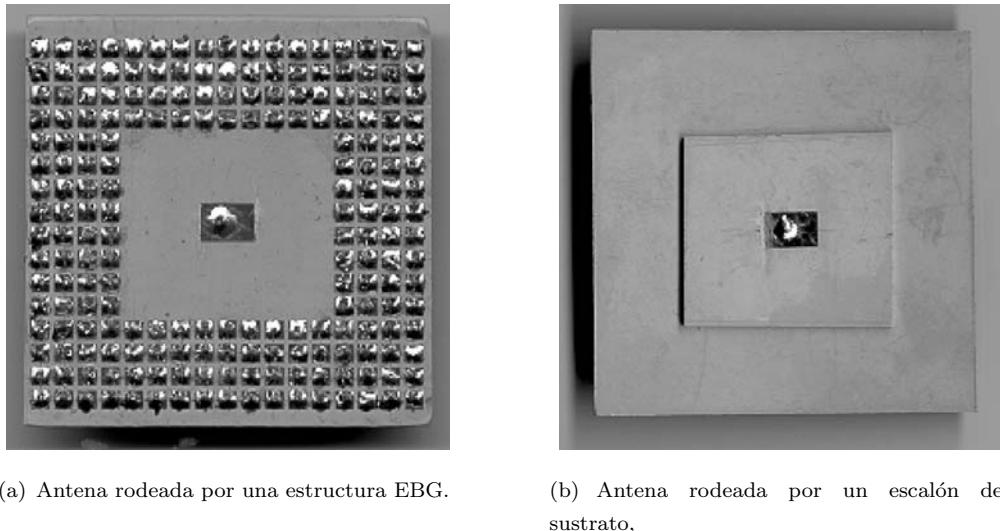


FIGURA 4.14: Fotos de diseños de antenas parches con limitadores a la propagación de onda de superficie [34].

Las primeras estructuras EBG utilizadas con estos fines consistían en arreglos de agujeros cilíndricos en el sustrato que, debido a la periodicidad que presentaban para las ondas de superficie, daban lugar a un comportamiento de filtro, presentando una banda prohibida. La dificultad para la fabricación de este tipo de sustratos dio lugar a la búsqueda de estructuras de banda prohibida de mayor facilidad de uso. En 1999, Sievenpiper presentó, en sus tesis doctoral [25], una estructura que denominó HIS (*High Impedance Surface*, superficie de alta impedancia), que además de cumplir con las características de un conductor magnético para un rango de frecuencias [27] y de ser de fácil fabricación con tecnología *microstrip*, poseía también una banda prohibida electromagnética para las ondas de superficie [26]. Esta estructura, consistente en parches metálicos dispuestos

sobre un sustrato, y unidos al plano de tierra, ubicado en la cara opuesta del mismo, a través de vías metálicas, redujo ampliamente los costos y la dificultad de fabricación. Pocos años más tarde, debido a que en algunos casos el uso de vías retrasa la fabricación de circuitos *microstrip*, surgieron estructuras de banda prohibida uniplanares, con características similares, aunque con anchos de banda prohibida más reducidos.

Para el presente trabajo, estas estructuras se ubicarán entre dos antenas *microstrip*, alineadas según distintos criterios, a fin de comparar el diagrama de radiación y el acoplamiento mutuo con el que se logra con el mismo conjunto radiante, pero sin el uso de EBG entre ellas.

#### 4.5. Diseño de una antena *microstrip*

Para el diseño de una antena *microstrip*, se deben utilizar los modelos teóricos analizados en la Sección 3.1. Se debe calcular, en primer lugar, un valor tentativo del ancho W de la antena (con W según la Figura 1.16 a)), teniendo en cuenta que un mayor ancho W da lugar a una menor resistencia de entrada  $R_{in}$ . Una fórmula empírica está dada por [5], y para una frecuencia de resonancia de unos 2.42 GHz y sustrato FR-4 de 1.6 mm de espesor, resulta:

$$W = \frac{c_0}{2f_r} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_r + 1}} = 37,35 \text{ mm.} \quad (4-1)$$

Obtenido el ancho aproximado, se puede calcular la permitividad eléctrica eficaz,  $\epsilon_{eff}$ , de la ecuación 1-68, que resulta 4.17. Esto permite, conociendo la frecuencia de resonancia buscada, calcular la longitud efectiva de la línea de transmisión, como:

$$L_{eff} = \frac{c_0}{2f_r \sqrt{\epsilon_{eff}}} = 30,32 \text{ mm.} \quad (4-2)$$

Dado que  $L_{eff} = L + 2\Delta L$ , a partir del cálculo de  $\Delta L$ , que cuantiza el efecto del *fringing* sobre la frecuencia de resonancia, usando la expresión 1-75, que resulta en 0.74 mm, se puede saber el valor de L a utilizar ( $L = L_{eff} - 2\Delta L$ ), que es de 28.85 mm.

Además de la antena, debe diseñarse también la alimentación de la misma. De entre las múltiples formas de alimentación de una antena *microstrip* [5], la seleccionada, en este trabajo, por su facilidad de fabricación, es la que consiste en una línea de la misma

tecnología, que vincula a un conector en el borde de la placa con el parche, esquematizado antes en la Figura 1.16. En particular, es importante que la impedancia característica de la línea *microstrip* utilizada sea de  $50 \Omega$ , para lo que debe seleccionarse con cuidado su ancho, en función de la altura del sustrato y la permitividad del dieléctrico. Según las expresiones que se pueden hallar en el Apéndice B de [5], el ancho necesario para obtener una impedancia de  $50 \Omega$  es de aproximadamente 3.1 mm.

Conocidos estos valores, resta determinar el *Inset* que debe aplicarse para obtener una impedancia de entrada de  $50 \Omega$ , a fin de lograr adaptación entre la línea *microstrip* de alimentación y el parche radiante. Para esto, se debe utilizar la curva de la Figura 1.16 b), conociendo previamente el valor de la impedancia sobre el borde del parche rectangular. A partir de las expresiones de la parte real de la admitancia, o conductancia, obtenidas de [11] y mostradas en las ecuaciones 4-3 (donde  $J_0$  es una función de Bessel del primer tipo de orden cero), la resistencia de entrada resulta  $R_{in} = 1/[2(G_1 \pm G_{12})]$ . A partir de este valor, la consulta a la gráfica permite deducir que el valor de *Inset* requerido es de aproximadamente 10.73 mm.

$$G_1 = \frac{1}{\pi\eta_0} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin\left(\frac{k_0W}{2}\cos\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 \sin^3\theta d\theta, \quad (4-3)$$

$$G_{12} = \frac{1}{120\pi^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin\left(\frac{k_0W}{2}\cos\theta\right)}{\cos\theta} \right]^2 J_o(k_0L\sin\theta) \sin^3\theta d\theta. \quad (4-4)$$

El siguiente paso consiste en describir geométricamente la estructura calculada para el uso de un software de simulación que permita optimizar los parámetros, en vistas de que la frecuencia de resonancia sea 2.41 GHz, y que el parámetro  $S_{11}$ , correspondiente al puerto de alimentación, sea tan pequeño como sea posible. Es importante aclarar que el agregado de los parches de carga (como se analiza en el Apéndice B) y de la estructura EBG modificará la frecuencia de resonancia, y que este análisis se realiza en miras de comprender los cambios que se producen sobre la antena original, y confirmar el aumento de ancho de banda mediante la técnica mencionada antes.

Los resultados de la variación de los tres parámetros de interés en el diseño de la antena, ya elegido el sustrato, se observan en la Figura 4.15. Como se puede observar, en efecto de la variación del largo L es muy notorio, debido a que, como se explicó antes, modifica la frecuencia de resonancia: A mayor largo L, menor resulta la frecuencia de resonancia, debido a que la longitud de onda en resonancia es más corta. Se observa que para alrededor de 45 mm de largo, la frecuencia de resonancia ronda la buscada.

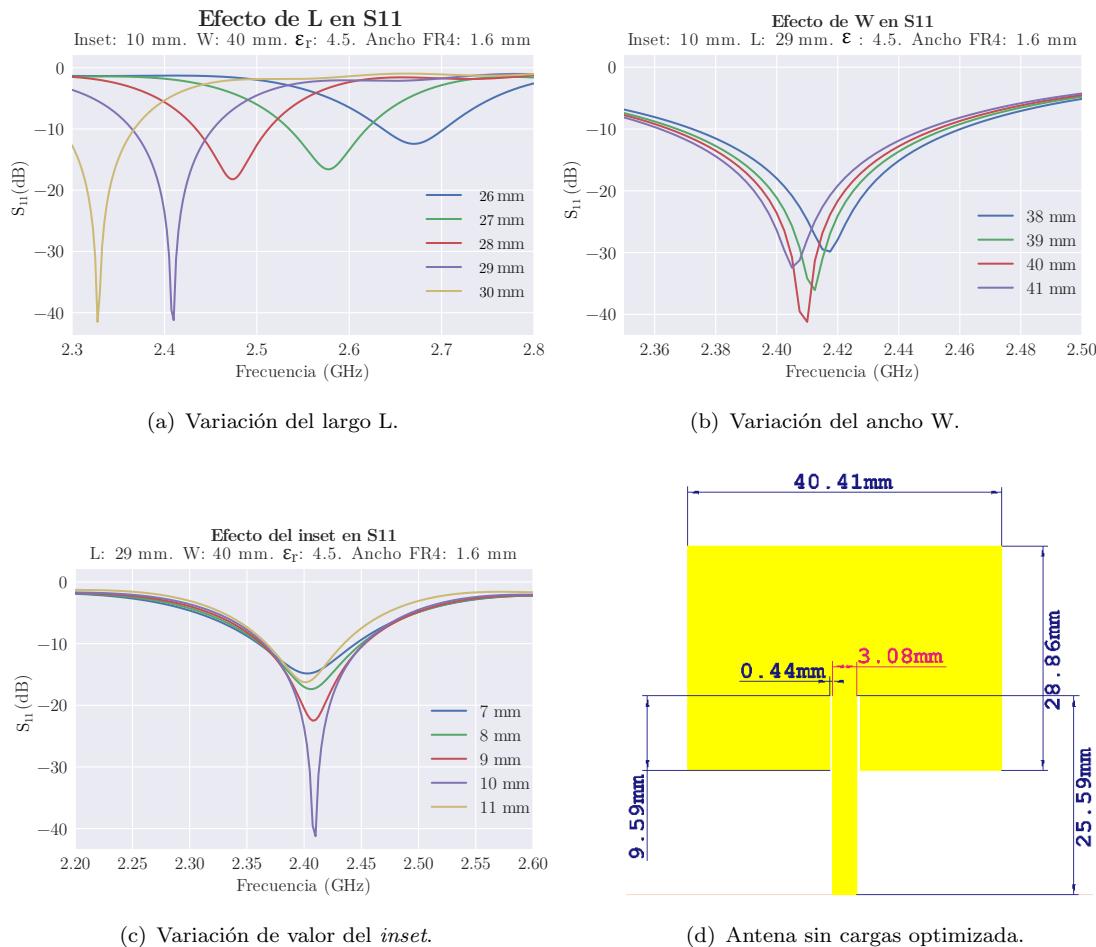


FIGURA 4.15: Variación del parámetro  $S_{11}$  del puerto en función de distintos parámetros del parche único, y antena optimizada final.

La variación del valor del ancho  $W$  produce efectos menos notorios, modificando ligeramente la frecuencia de resonancia debido a que tiene impacto sobre la longitud efectiva del parche. Además, como se explicó previamente, el ancho del parche modifica la resistencia de entrada, lo que modifica los valores de  $S_{11}$ , haciendo que para valores cercanos a 40 mm se obtenga el valor óptimo.

Finalmente, el parámetro de más fácil modificación manual en un parche, el valor del *inset*, da lugar a variaciones muy grandes en el valor del parámetro  $S_{11}$ . Esto permite una fácil adaptación manual de la antena. Se observa que el valor de *inset* de aproximadamente 10 mm genera los resultados deseados.

La optimización de los parámetros geométricos, realizada con CST Microwave Studio, con objetivo en establecer los valores más adecuados automáticamente para lograr el mínimo valor de  $S_{11}$  en 2.41 GHz, arrojó como resultado un valor de  $L$  de 28.86 mm, un valor de  $W$  de 40.41 mm y un valor de *inset* de 9.59 mm, como se indica en la Figura 4.15(d).

En miras de comparar el efecto sobre el campo lejano de las modificaciones a realizarse sobre el parche para aumentar el ancho de banda, se muestra, en la Figura 4.16, el comportamiento en campo lejano, donde se asume un sustrato de 190 mm × 135 mm.

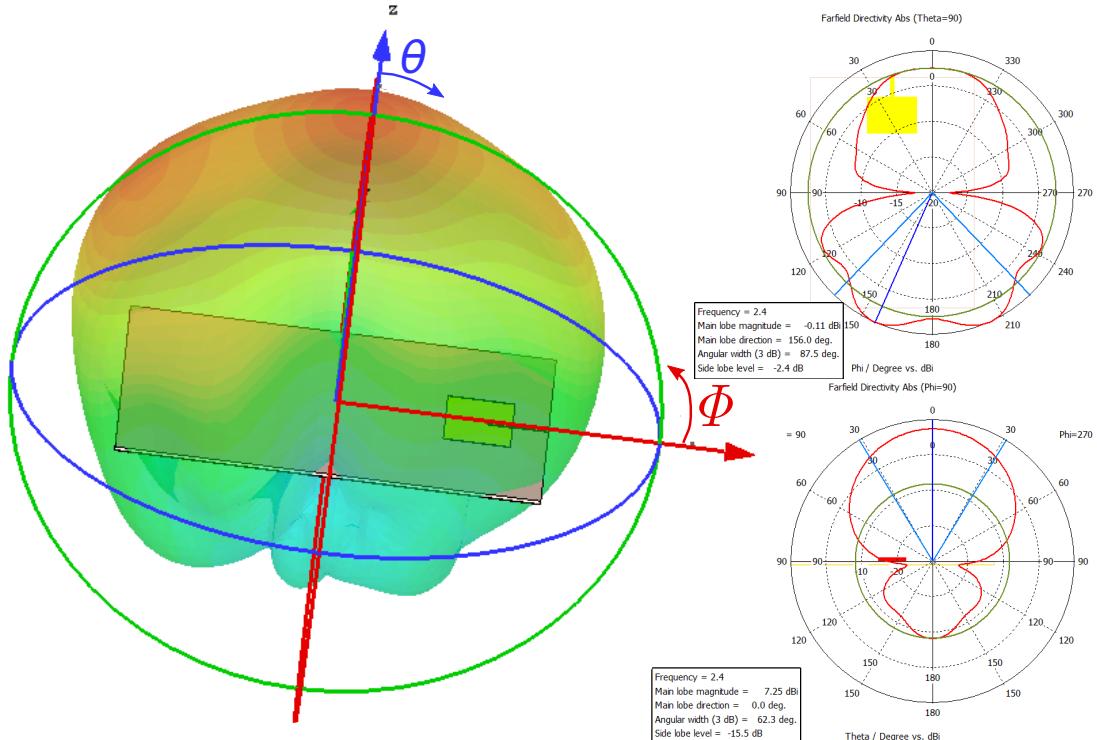


FIGURA 4.16: Comportamiento del campo lejano para un parche *microstrip* sin modificaciones, en la frecuencia de resonancia. La imagen tridimensional izquierda muestra la estructura y, en colores, el valor de la directividad para cada dirección. Además, muestra la dirección de variación de  $\theta$  y  $\phi$ . La gráfica superior derecha representa, en rojo, la variación de la directividad en función de  $\phi$ , para un  $\theta$  de 90°, es decir, rasante al plano de la antena. La gráfica inferior derecha representa la variación de la directividad en función de  $\theta$ , para un  $\phi$  de 90°.

Para poder estudiar este problema, será necesario comprender cómo se comporta un conjunto de dos antenas *microstrip* sin estructuras entre ellas, separadas una distancia adecuada para que los efectos de acoplamiento mutuo resulten visibles. Para evitar, tanto como sea posible, el acoplamiento debido a fenómenos no relacionados a la propagación de ondas de superficie, se debe ubicar a los elementos radiantes a una distancia tal que el diagrama de radiación tenga un comportamiento *broadside*, es decir, que el lóbulo principal del diagrama de radiación tenga dirección perpendicular al plano de tierra. Para esto, la distancia entre las antenas debe ser múltiplo impar de  $\lambda_g/2$ , donde  $\lambda_g$  es la longitud de onda en el sustrato (FR-4, en nuestro caso), donde se considera un valor de  $\epsilon_{eff}$  de 4.17. Este valor de permitividad modifica la velocidad de las ondas electromagnéticas, de modo que la longitud de onda, para la frecuencia de resonancia  $f_r$  de la antena *microstrip*, es menor a la del vacío. En nuestro caso:

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f_r} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{eff} f_r}} \approx 60,9 \text{ mm.} \quad (4-5)$$

Al igual que para el caso de las antenas monopolo descriptas antes, para el caso de las antenas *microstrip* también se procedió a simular su comportamiento sin estructuras EBG de por medio, de forma que se pudieran comparar los efectos que generan las celdas unitarias sobre el comportamiento de los parámetros S. Las geometrías simuladas se pueden observar en la Figura 4.17, donde en a) se muestran las antenas ubicadas alienadas en el plano E, y en b) se las puede ver alineadas en el plano H.

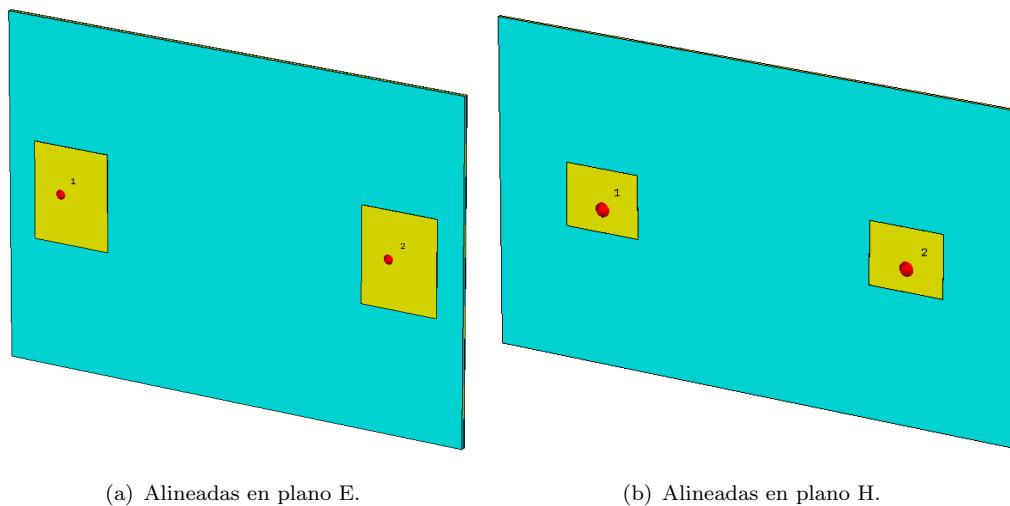


FIGURA 4.17: Antenas *microstrip* sin estructura EBG utilizadas como referencia.

Para ambos casos, en la Figura 4.18 se observa el comportamiento del parámetro  $S_{11}$ , y en la Figura 4.19 el de  $S_{12}$ .

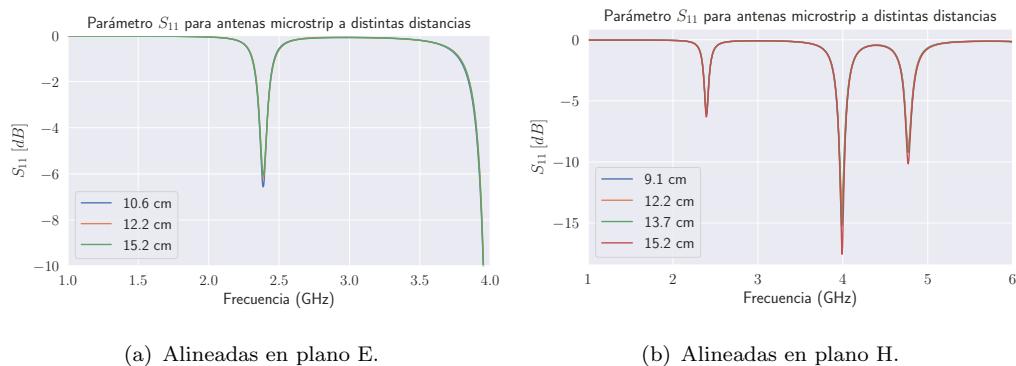


FIGURA 4.18: Parámetro  $S_{11}$  de las antenas *microstrip* usadas como referencia.

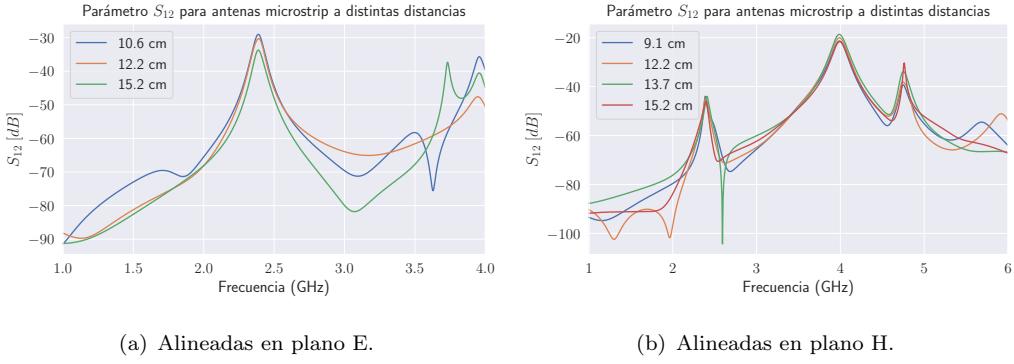


FIGURA 4.19: Parámetro  $S_{12}$  de las antenas *microstrip* usadas como referencia.

Para ambos casos, al contrario que al usar monopolos, la estabilidad del acoplamiento con las variaciones de distancia es notoria, así como la baja variación del valor del parámetro  $S_{11}$ , incluso en la frecuencia de resonancia. Para el caso de las antenas alineadas en el plano H, además, se amplió el ancho de banda de simulación a fin de observar que el acoplamiento se da, en su mayor parte, para el modo secundario del parche, que requiere de una longitud de onda menor. Por lo tanto, es de esperar que la estructura EBG, diseñada para frecuencias menores, no tendrá efectos notorios sobre esta alineación.

A modo de ilustración, para el caso de las antenas ubicadas en plano E, se realizaron simulaciones utilizando dos filas de celdas de EBG. La comparación con los resultados mostrados antes para dos antenas *microstrip* sin EBG se muestra en la Figura 4.20. Se observa que el parámetro  $S_{11}$  no varía notablemente, mientras que ubicar dos filas de EBG parece empeorar la situación de acoplamiento entre las antenas en 2 dB.

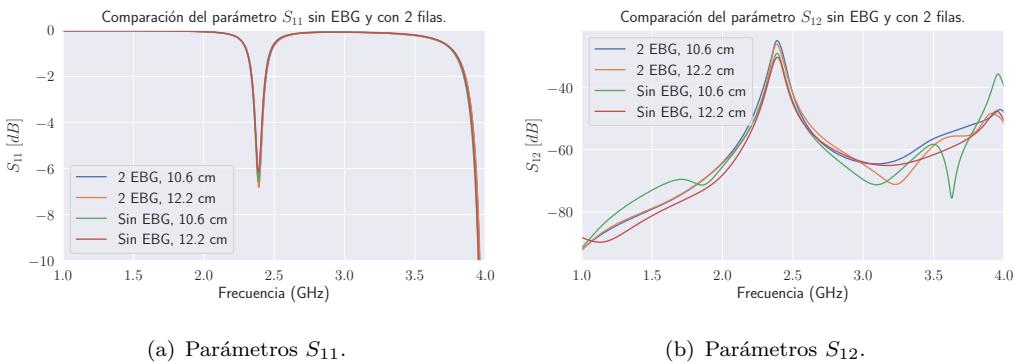


FIGURA 4.20: Comparación de los parámetros  $S$  obtenidos con dos filas de EBG, y sin ellas, para dos antenas *microstrip* dispuestas en el plano E.

El uso de tres filas de celdas unitarias con antenas en el plano E ofrece similares resultados. El comportamiento y la comparación con el caso en que no se usa EBG se muestran en la Figura 4.21. Sólo cuando las antenas están muy alejadas de la estructura

EBG, es posible observar una mejora real, en parte de la banda de interés, para el parámetro  $S_{12}$ . En  $2,4\text{ GHz}$  la disminución del acoplamiento mutuo llega a los  $25\text{ dB}$ .

Comparación del parámetro  $S_{12}$  con y EBG (3 filas) para plano E

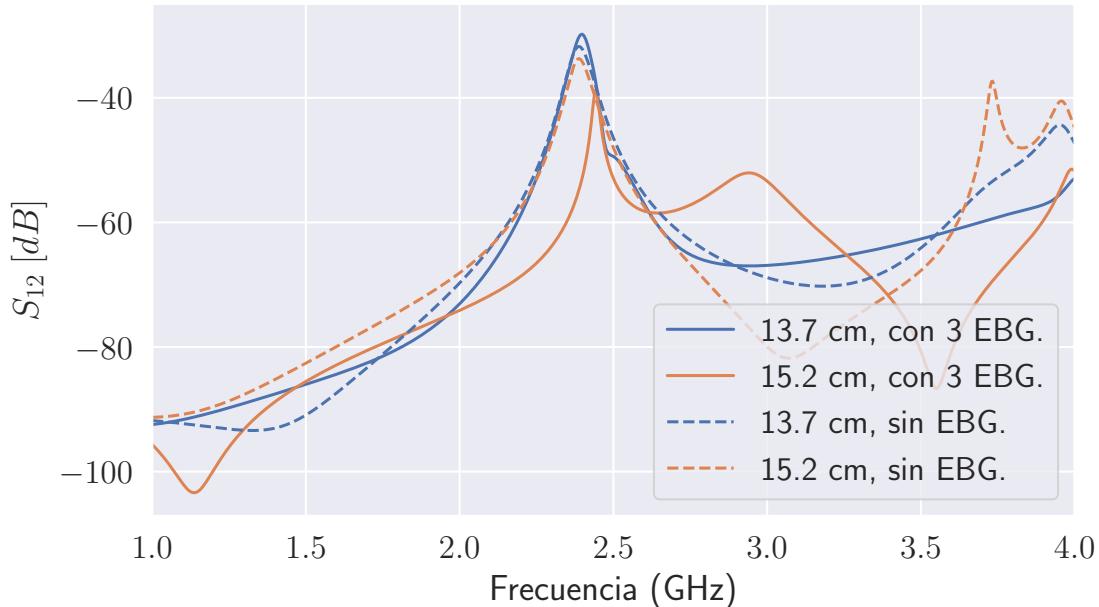


FIGURA 4.21: Comportamiento del parámetro  $S_{12}$  con tres filas de celdas unitarias para antenas *microstrip* dispuestas sobre el plano E.

Para el caso del uso de tres filas de celdas unitarias con antenas en el plano H, la modificación del tamaño de las celdas unitarias de  $22,6\text{ mm}$  a  $22,33\text{ mm}$  ofreció los resultados que se observan en la Figura 4.22. Resulta clara la aparición de una resonancia de tipo *notch* en la frecuencia de resonancia de la antena, incluso a corta distancia, aunque el aumento general del acoplamiento en todo el espectro genera que este *notch* resulte insuficiente. La comparación se puede observar en la Figura 4.22(b), donde resulta notorio que para distancias de  $12,2\text{ cm}$ , el acoplamiento mutuo disminuye en valores cercanos a  $5\text{ dB}$  en algunas zonas de la banda de interés.

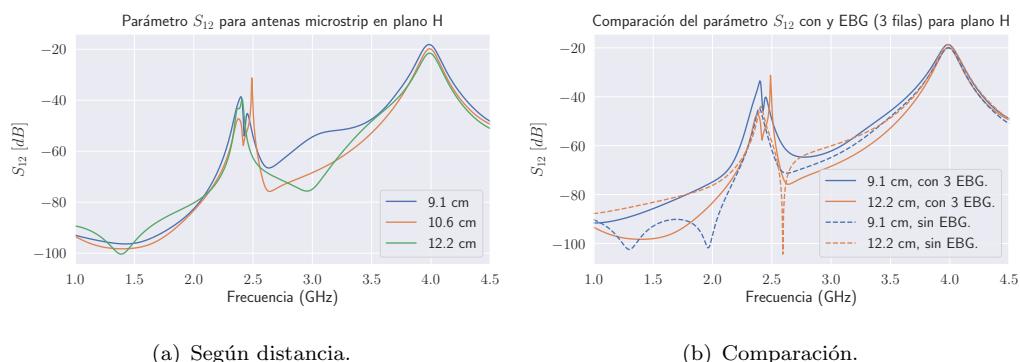


FIGURA 4.22: Comportamiento del parámetro  $S_{12}$  con tres filas de celdas unitarias para antenas *microstrip* dispuestas sobre el plano H.

Sin embargo, es importante remarcar que el tamaño de las celdas unitarias cumple un papel preponderante en el comportamiento del parámetro  $S_{21}$  a distancias tan cortas, como se muestra en la Figura 4.23. En la misma se observa que el efecto *notch* sólo afecta a la frecuencia de resonancia más baja, que corresponde a aproximadamente 2.4 GHz, que es la frecuencia para la que está diseñado el EBG. Si la distancia entre parches se mantiene igual, el acoplamiento mutuo entre antenas para la frecuencia de resonancia correspondiente al segundo modo no se ve afectado. Lo mismo sucede para antenas *microstrip* dispuestas sobre el plano E, como se puede observar en la Figura 4.24.

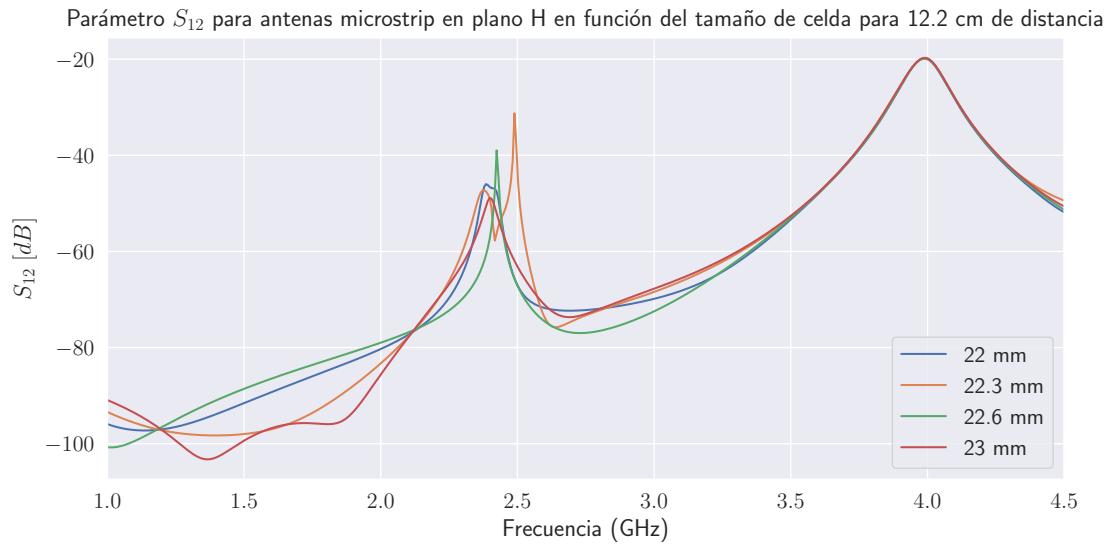


FIGURA 4.23: Comportamiento del parámetro  $S_{12}$  para varios tamaños de celda unitaria, con antenas *microstrip* en plano H dispuestas a 12,2 cm de distancia.

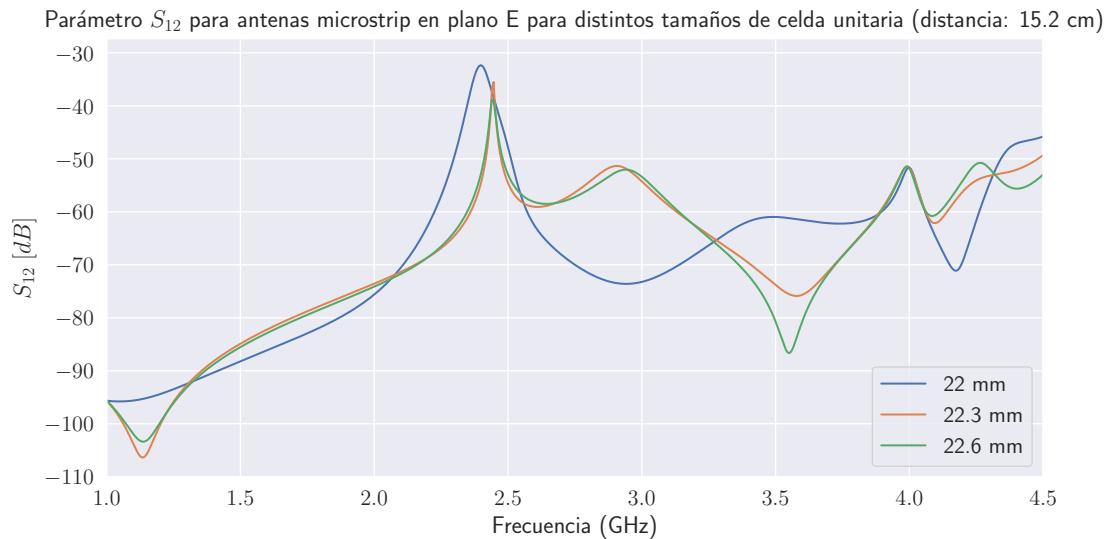


FIGURA 4.24: Comportamiento del parámetro  $S_{12}$  para varios tamaños de celda unitaria, con antenas *microstrip* en plano E dispuestas a 12,2 cm de distancia.



# Capítulo 5

## Conclusiones

El difundido uso de la tecnología *microstrip* suele ser explicado en base a los bajos costos de fabricación que presenta y a la facilidad para la implantación de componentes circuitales discretos. Sin embargo, para las altas frecuencias representa tanto una herramienta como un desafío: la falta de homogeneidad del medio por el que se propagan los campos electromagnéticos, y la consecuente susceptibilidad a la aparición de modos indeseados obligan a que todo análisis cabal que se realice sobre ellas resulte incompleto y en general, complejo. En muchos casos, la disminución del ancho del sustrato dieléctrico interviniente disminuye sustancialmente los efectos de segundo orden, aunque a costa de un resentimiento en la rigidez estructural.

Los sustratos *microstrip* soportan la aparición de ondas de superficie por sus meras características constructivas, dado que presentan una impedancia de superficie reactiva. Estas ondas de superficie pueden ser controladas mediante diversas técnicas, como la efectiva división del sustrato y plano de tierra, las estructuras de plano de tierra degenerado (DGS) y el uso de «escalones» de permitividad eléctrica en las inmediaciones de los elementos que son fuente de ondas de superficie. En este trabajo se analizó el uso de estructuras EBG para lograr resultados similares. Como estas estructuras surgieron en el campo de la óptica, si bien se parte de conceptos básicos de electromagnetismo, la nomenclatura resulta, por el momento, ambigua, la información se encuentra dispersa y, debido a la relativa novedad de la aplicación de estructuras EBG en microondas, en muchos casos es también contradictoria.

En la mayoría de los casos la obtención de resultados analíticos resulta imposible, por lo que las técnicas de simulación numérica pueden resultar útiles para la predicción del comportamiento de las estructuras *microstrip*. Sin embargo, la relativa complejidad de las mismas genera que las simulaciones de onda completa requieran de mucho tiempo hasta entregar los resultados esperados, por lo que se dificulta su utilización para el diseño.

Debe tenerse en cuenta, además, que el diseño de antenas requiere de la consideración de la estructura EBG a utilizar, y que la misma no puede agregarse a radiadores prediseñados, debido a que la modificación del comportamiento de las ondas de superficie genera importantes efectos sobre las características de radiación de la antena.

En este trabajo se presentaron dos alternativas al uso de estas simulaciones de onda completa: el modelado circuital y la utilización de TLM bidimensional. En ninguno de los dos casos, sin embargo, se predijo satisfactoriamente el comportamiento frente a las ondas de superficie: Sólo se modeló el comportamiento ante excitaciones conducidas, en vistas de lograr, a futuro, un modelo que permita comenzar el cálculo a partir del uso de una fuente distribuida sobre los bordes de la estructura. En el caso de la simulación mediante TLM, dado que parte de conceptos intuitivos sencillos, la misma podría resultar una herramienta para la comprensión de los fenómenos más complejos. Sin embargo, dado que la implementación actual se realizó utilizando técnicas de programación inefficientes y un lenguaje de prototipado, los tiempos de simulación no se redujeron lo suficiente, por lo que aun no podrían ser usados en etapas de diseño.

Resulta importante destacar que las ondas de superficie no son la única fuente de acoplamiento y que, en general, no son la más importante. El uso de estructuras EBG debe supeditarse a la relación entre todas las causas de acoplamiento posibles, especialmente debido a que el diseño de estas estructuras es, por el momento, iterativo. La necesidad de iterar en el proceso de diseño, sumado a que las celdas unitarias que ofrecen mejores resultados son también las más complejas, ofrecen muchos grados de libertad y por lo tanto, una mayor cantidad de variables a considerar, dificulta y ralentiza la tarea.

Por otro lado, si bien no se realizaron mediciones para este trabajo, las mismas resultan un paso fundamental para la validación de los resultados analíticos y numéricos obtenidos. La bibliografía y los trabajos de investigadores en los últimos años han demostrado, mediante mediciones, que es posible utilizar estas estructuras para disminuir el acoplamiento mutuo entre antenas que comparten sustrato.

## 5.1. Propuestas de trabajos futuros

Dado que el presente trabajo representa un primer paso en la comprensión de los fenómenos asociados al funcionamiento de las estructuras EBG, las propuestas de trabajos futuros son muy variadas. En primer lugar, resulta menester intentar aplicar los conceptos de modelado por circuitos de parámetros concentrados para predecir el comportamiento ante la incidencia de ondas de superficie que lo excitan en forma distribuida. Además, para que las simulaciones por TLM resulten efectivamente útiles al momento

de diseñar, es necesario volcar los conceptos a un lenguaje de programación tipado y más eficiente que Python. Finalmente, el diseño completo de un conjunto de antenas, y no el meramente ilustrativo aplicado en este trabajo, para probar, mediante simulaciones y, principalmente, mediciones, el funcionamiento de estas estructuras, permitiría avanzar sobre terreno más firme en el uso de EBGs con estos fines.

Por otro lado, además de las geometrías analizadas, en los últimos años han surgido diversas estructuras que permiten efectos multibanda, a partir de lograr una controlada variación geometría de las celdas unitarias, como se analiza en [46]. Por otro lado, resulta importante lograr efectos similares utilizando celdas unitarias más pequeñas, de modo que se pueda ubicar una mayor cantidad de celdas entre las antenas involucradas. Entre las distintas propuestas analizadas, resultan destacables las que utilizan curvas de Peano y de Hilbert para lograr una mayor inductancia el menor área posible, como se analiza en [47]. Estos EBGs, que presentan un ancho de banda mayor, disminuyen la presión sobre el diseñador, quien puede utilizar la misma estructura aunque la frecuencia de trabajo varíe.

Podría resultar interesante, además, analizar posibles aplicaciones de las celdas complementarias a las propuestas, donde las porciones que no poseen cobre y las que sí, son intercambiadas, dado que poseen la misma periodicidad que las celdas originales. El uso de celdas complementarias resulta común en el estudio de *Frequency Selective Surfaces* (FSS).

Otras técnicas para controlar la propagación de ondas de superficie han sido propuestas, entre las que destaca el uso de planos de tierra degenerados (DGS, *degenerated ground planes*), que son muy similares a los EBGs. El principio de funcionamiento es el mismo, pero el hecho de que se estructuren geometrías sobre el plano de tierra modifica genera efectos sobre la radiación posterior.

Además de las ondas de superficie, que pueden ser atenuadas por los EBGs, existe también acoplamiento debido a modos quasi-TEM que viajan por encima del sustrato, como una onda libre, y que no pueden ser bloqueados por las estructuras propuestas. Si se busca un desacoplamiento más notorio, es importante reducir el aporte de las mismas. Estudios en este sentido pueden consultarse en [43].



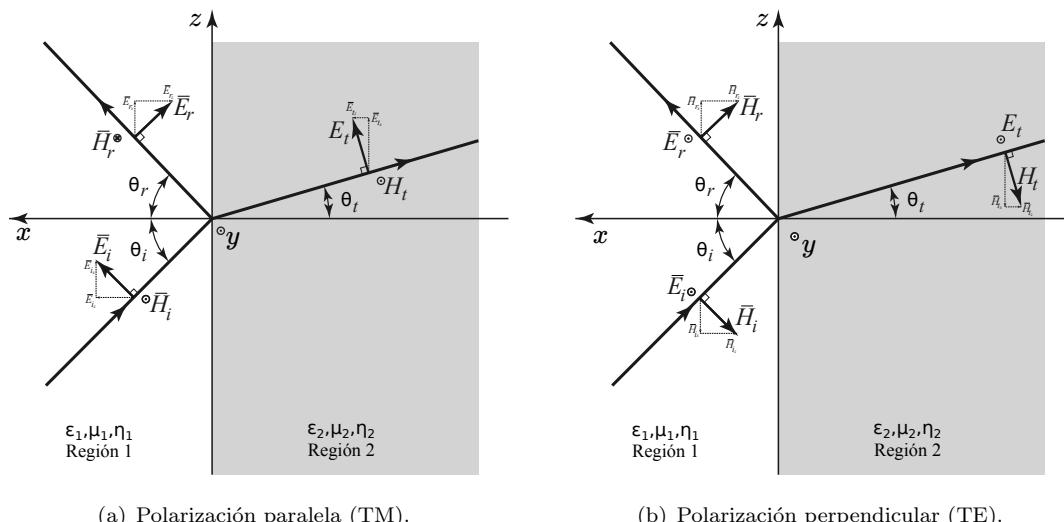
# Apéndices



## Apéndice A

# Incidencia de una onda plana sobre una interfaz

Una onda electromagnética incidente sobre una superficie en un ángulo arbitrario puede analizarse descomponiendo el problema en dos casos canónicos de polarización<sup>1</sup>: perpendicular (TE, transversal eléctrico) o paralela (TM, transversal magnético) al plano de incidencia, que es el formado por el rayo incidente y la normal a la interfaz. El problema de la incidencia perpendicular a la interfaz combina ambos casos.



(a) Polarización paralela (TM).

(b) Polarización perpendicular (TE).

FIGURA A.1: Incidencia oblicua para los dos casos de polarización analizados.

---

<sup>1</sup>La polarización es la dirección del campo eléctrico. En nuestro análisis, se considera polarización lineal, de modo que el campo eléctrico en distintos puntos del espacio siempre puede ser representado por vectores colineales.

	<b>TM</b>	<b>TE</b>
$\mathbf{E}_i$	$E_0 (\hat{z} \cos \theta_i + \hat{x} \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$	$E_0 \hat{y} e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$
$\mathbf{H}_i$	$\frac{E_0}{\eta_1} \hat{y} e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$	$\frac{E_0}{\eta_1} (-\hat{z} \cos \theta_i - \hat{x} \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(z \sin \theta_i - x \cos \theta_i)}$
$\mathbf{E}_r$	$E_0 \Gamma (\hat{z} \cos \theta_r - \hat{x} \cos \theta_r) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \sin \theta_r)}$	$E_0 \Gamma \hat{y} e^{-j\beta_1(z \sin \theta_r + x \cos \theta_r)}$
$\mathbf{H}_r$	$-\frac{E_0 \Gamma}{\eta_1} \hat{y} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r + z \sin \theta_r)}$	$\frac{E_0 \Gamma}{\eta_1} (\hat{z} \cos \theta_r - \hat{x} \sin \theta_r) e^{-j\beta_1(z \sin \theta_r + x \cos \theta_r)}$
$\mathbf{E}_t$	$E_0 T (\hat{z} \cos \theta_t + \hat{x} \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$	$E_0 T \hat{y} e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$
$\mathbf{H}_t$	$\frac{E_0 T}{\eta_1} \hat{y} e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$	$\frac{E_0 T}{\eta_2} (-\hat{z} \cos \theta_t - \hat{x} \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(z \sin \theta_t - x \cos \theta_t)}$
$\Gamma$	$\frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$	$\frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$
$T$	$\frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$	$\frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$

TABLA A.1: Campos incidentes, transmitidos y reflejados, y coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia oblicua de una onda plana sobre una interfaz dieléctrica.

Los campos eléctrico y magnético incidentes, según el sistema de coordenadas definido en la Figura A.1, pueden ser expresados, en forma general, usando las expresiones 1-17 y 1-20, y considerando que no hay pérdidas, como indican las ecuaciones A-1:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{-j\beta_1 \cdot \mathbf{r}} \quad \mathbf{H}_i = \frac{\hat{\beta}_1 \times \mathbf{E}_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1 \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A-1})$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\beta_1 = \hat{\beta}_1 \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ .  $\hat{\beta}_1$  es la dirección de propagación de la onda plana, y  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1} = j\omega\mu/\gamma$  es la impedancia de onda de región de incidencia.

Se define al coeficiente de reflexión  $\Gamma$  como la relación entre la magnitud del campo reflejado y del campo incidente,  $E_r/E_i$ . De la misma manera, el coeficiente de transmisión  $T$  es la relación entre el módulo del campo transmitido al segundo medio y el campo incidente desde el primer medio,  $E_t/E_i$ , de manera que  $1+\Gamma = T$  y que  $(1-\Gamma)/\eta_1 = T/\eta_2$ .

Usando estos coeficientes, a partir de las ecuaciones A-1, y teniendo en cuenta las condiciones de borde descriptas en la Sección 1.2.3, se pueden calcular los campos reflejados y transmitidos. Para los dos casos canónicos analizados, los campos incidentes, reflejados y transmitidos se resumen en la tabla A.1, así como los coeficientes de reflexión y transmisión.

Si se fuerza la continuidad de las componentes tangenciales de los campos sobre la interfaz para ambos casos,  $\mathbf{E}_i^{tg} + \mathbf{E}_r^{tg} = \mathbf{E}_t^{tg}$  y  $\mathbf{H}_i^{tg} + \mathbf{H}_r^{tg} = \mathbf{H}_t^{tg}$ , se obtienen las expresiones A-2 para el modo TM, y A-3 para el modo TE.

$$\begin{aligned} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} + \Gamma \cos \theta_r e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= T \cos \theta_t e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \\ \frac{1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= \frac{T}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} + \Gamma e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= T e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \\ -\frac{1}{\eta_1} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 z \sin \theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} \cos \theta_r e^{-j\beta_1 z \sin \theta_r} &= -\frac{T}{\eta_2} \cos \theta_t e^{-j\beta_2 z \sin \theta_t} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

En estas ecuaciones se observa que a ambos lados de las igualdades, las expresiones son funciones de la posición sobre la interfaz. Para que la condición de borde se cumpla en todos sus puntos, la variación en  $z$  debe ser la misma en todos los términos, de forma que el efecto de la variación sea anulado:  $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_1 \sin \theta_r = \beta_2 \sin \theta_t$ . De esta consideración se deriva la Ley de Snell (asumiendo que  $\mu_1 = \mu_2$ ), expresada en la ecuación A-4. En la gráfica de la Figura A.2 se puede observar el comportamiento del ángulo de refracción según en ángulo de incidencia, sobre una interfaz entre aire y FR4, en sentidos opuestos.

$$x\theta_i = \theta_r \quad (\text{A-4a})$$

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t \xrightarrow{\eta = \omega \mu / \beta} \eta_2 \sin \theta_i = \eta_1 \sin \theta_t \quad (\text{A-4b})$$

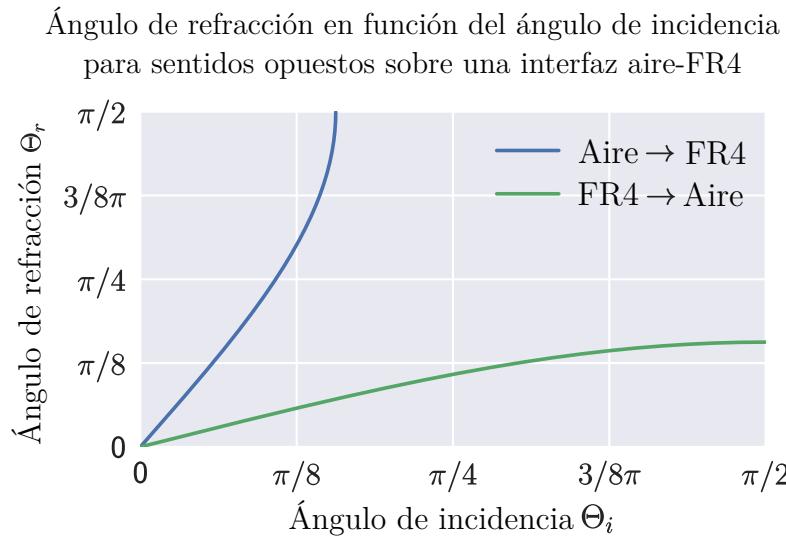
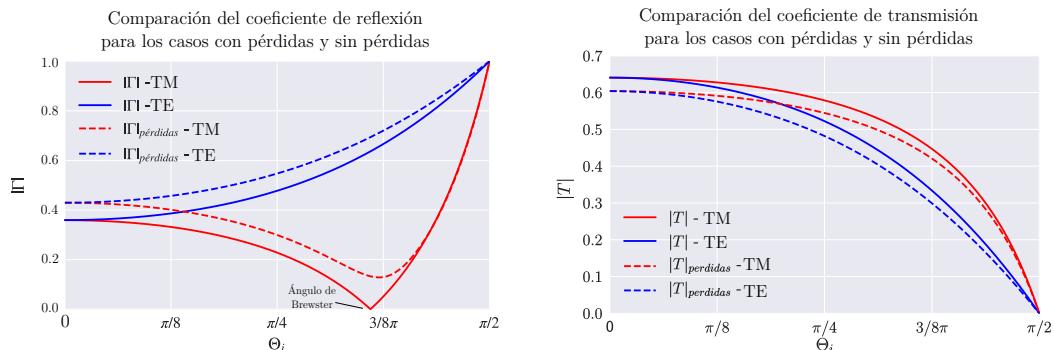


FIGURA A.2: Ángulo de refracción en función del ángulo de incidencia, según la ley de Snell.

Utilizando estas expresiones, y a partir de las ecuaciones A-2 y A-3, se obtienen las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión de la tabla A.1. Resulta importante destacar que, para el caso de incidencia perpendicular ( $\theta_i = 0$ ), los coeficientes quedan simplificados a  $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$  y  $T = (2 \eta_2)/(\eta_2 + \eta_1)$ .

Los coeficientes de transmisión y reflexión para incidencia oblicua, en ambas polarizaciones, se pueden graficar en función del ángulo incidente, teniendo en cuenta las ecuaciones de Snell para expresar el ángulo de transmisión en función del ángulo de incidencia. Estas gráficas se muestran, para la interfaz aire-FR4, en la Figura A.3, donde, además, teniendo en cuenta la constante de propagación compleja de la ecuación 1-14, se graficó también el caso con pérdidas, donde se observa, en general, una mayor reflexión y, por tanto, menor transmisión. Para ángulos de incidencia rasantes, la transmisión es mínima y la reflexión es máxima.

Resulta ilustrativo, además, graficar el comportamiento según el ángulo de incidencia de la misma interfaz, pero en el sentido dieléctrico-aire. Este gráfico se observa en la Figura A.4, donde los coeficientes de transmisión pueden ser mayores a 1 porque el ángulo en el segundo medio es menor al de incidencia, permitiendo conservar el flujo de energía por unidad de área.



(a) Coeficiente de reflexión entre aire y FR4 en función de  $\theta_i$ . (b) Coeficiente de transmisión entre aire y FR4 en función de  $\theta_i$ .

FIGURA A.3: Coeficientes de transmisión y reflexión para el caso en que el medio de incidencia es aire, y el medio de transmisión es FR4.

## A.1. Ángulo de Brewster y ángulo crítico

Se conoce como ángulo de Brewster al ángulo de incidencia  $\theta_i$  necesario para que se produzca reflexión nula ( $\Gamma = 0$ ) en una interfaz, cuando sobre ella incide una onda plana en forma oblicua. Este efecto se da únicamente para la polarización TM, es decir, cuando

Coeficientes de transmisión y reflexión para interfaz  
FR4-Aire en función del ángulo, sin pérdidas

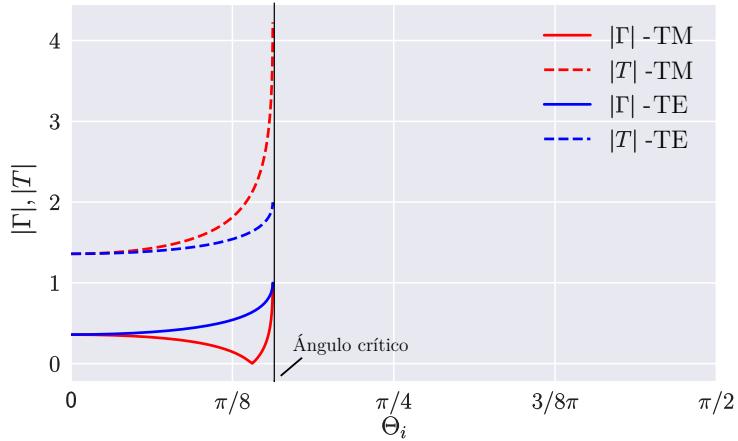


FIGURA A.4: Comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso de incidencia FR4-aire.

existe componente de campo eléctrico en la dirección normal a la interfaz, por lo que suele ser utilizado como mecanismo para lograr polarización de una onda electromagnética.

Si se anulan los coeficientes de reflexión mostrados en la tabla A.1, y se utilizan las ecuaciones A-4, se puede deducir que la polarización TE no presenta ángulo de Brewster<sup>2</sup>, aunque sí lo hace la polarización TM<sup>3</sup>, cuando  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ . Aplicando esta condición en la Ley de Snell (ecuación A-4b) se obtiene la expresión del ángulo de Brewster:

$$\tan \theta_B = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (\text{A-5})$$

Como se observa en la Figura A.5(a), el ángulo de Brewster tiende a  $90^\circ$  cuando la permeabilidad eléctrica del segundo medio es mucho mayor a la del primero, lo que significa que para evitar reflexiones, el ángulo de incidencia debe ser rasante. Cuando se da el caso contrario, en que la permeabilidad eléctrica del medio incidente es mayor a la del medio de transmisión, el ángulo de Brewster se vuelve menor a  $45^\circ$ , de lo que se deduce que una incidencia *casi* perpendicular a la interfaz, y en consecuencia con polarización *cercana* a TEM (aunque no exactamente TEM) lograría evitar la reflexión. El ángulo de  $45^\circ$  cuando las permeabilidades eléctricas de ambos medios son iguales es

---

<sup>2</sup>Para lograr reflexión nula en TE se requiere que  $\sin \theta_i / \sin \theta_t = \cos \theta_i / \cos \theta_t = \eta_1 / \eta_2$ , lo cual es imposible.

<sup>3</sup>Para lograr reflexión nula en TM se requiere que  $\sin \theta_i / \sin \theta_t = \cos \theta_t / \cos \theta_i = \eta_1 / \eta_2$ , lo cual no supone una contradicción. Multiplicando la ecuación A-4b y el valor de  $\Gamma$  para polarización TM, se obtiene que  $\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \theta_t \cos \theta_t$ , ó  $\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_t$ , que se satisface cuando  $2\theta_i = \pi - 2\theta_t$ , de modo que  $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ .

meramente anecdótico, ya que si no existen diferencias entre los dos medios que forman la interfaz, la misma no existe, y por lo tanto no hay onda reflejada para *ningún* ángulo de incidencia.

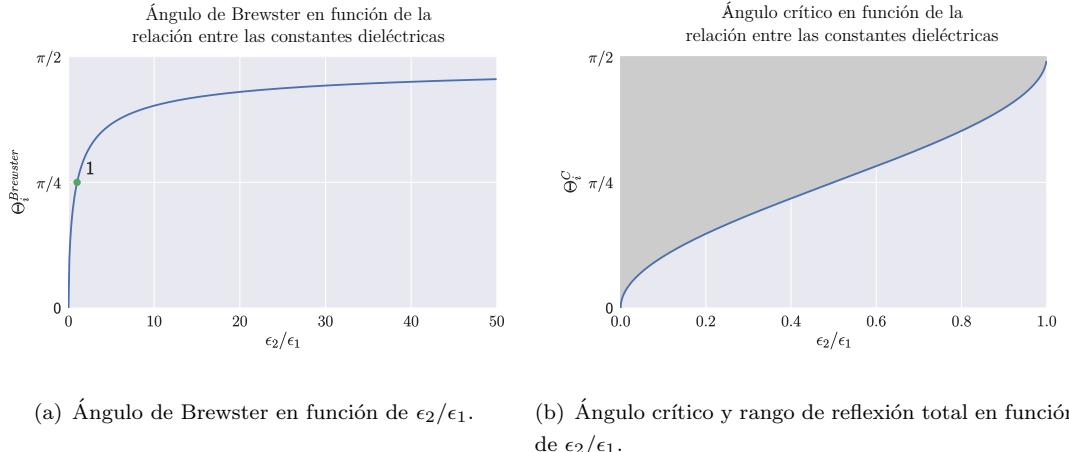


FIGURA A.5

En la figura A.3 se puede observar el comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión alrededor del ángulo de Brewster para polarización TM, cuando no se consideran pérdidas. Para polarización TE, el ángulo de Brewster no existe, y una situación similar se da cuando existen pérdidas en los materiales, incluso para polarización TM. En la Figura A.4 también se puede observar el fenómeno de ángulo de Brewster, aunque debido a la dirección de la onda incidente, el mismo es mucho menor.

En ángulo crítico se define como el ángulo de incidencia para el cual la onda incidente es totalmente reflejada, y la onda transmitida no se propaga a la segunda región.

Si se observan las expresiones del coeficiente de transmisión de la tabla A.1, el único valor de  $\theta_i$  para el cual la transmisión es nula es  $\pi/2$ , es decir, incidencia rasante. Sin embargo, a partir de la ecuación A-4b, se obtiene que  $\sin \theta_t = \eta_2/\eta_1 \sin \theta_i$ . Se puede observar que en los casos en que  $\eta_2 > \eta_1$  es posible que el ángulo de transmisión alcance el valor  $\pi/2$  antes de que lo haga en ángulo de incidencia. El ángulo crítico, entonces, surge de la expresión A-6, graficada en la Figura A.5. En la gráfica se puede observar que si  $\epsilon_2 = \epsilon_1$ , el único ángulo para el que hay reflexión completa es el rasante. A medida que disminuye la relación entre las permeabilidades dieléctricas, el valor del ángulo crítico disminuye, hasta que el valor de la permitividad dieléctrica del segundo medio es mucho mayor a la del primero, lo que vuelve a las impedancias de onda muy disimiles, generando que haya reflexión total para cualquier ángulo de incidencia.

$$\sin \theta_i^c = \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_t|_{\theta_t=\pi/2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \implies \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (\text{A-6})$$

Para ángulos mayores a  $\theta_c$ , las expresiones del coeficiente de reflexión se vuelven complejas y de módulo 1, por lo que toda la energía electromagnética es reflejada, y la onda transmitida tiene un comportamiento evanescente, como se muestra en la Figura A.6. En la ecuación A-6 se observa que si  $\theta_i > \theta_c$ , el ángulo  $\theta_t$  pierde significado físico, debido a que  $\sin \theta_t$  debería ser mayor a 1 para cumplir la ecuación.

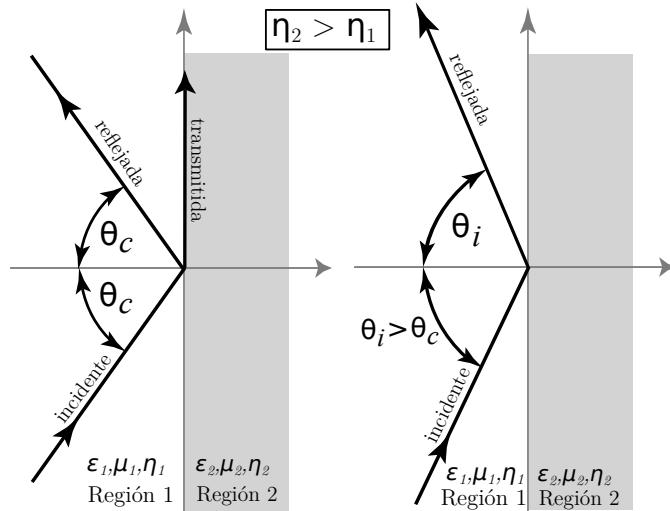


FIGURA A.6: Ilustración del comportamiento de una onda plana durante la incidencia con ángulo crítico y con ángulo mayor al  $\theta_c$ .

Se debe notar que en el argumento anterior no se consideró la polarización de la onda incidente, por lo que la reflexión completa se puede dar tanto en modo TM como en modo TE, siempre y cuando la incidencia se produzca desde el medio ópticamente más denso al menos denso [6], como se muestra en la Figura A.4. Sin embargo, resulta útil expresar el comportamiento de los campos.

Para el caso de una onda incidente con una polarización lineal arbitraria como la expresada en la ecuación A-1, se debe considerar que la componente longitudinal a la interfaz del vector de onda  $\gamma$  se mantendrá constante, de modo que  $\gamma_{2z} = \gamma_{1z} = \gamma_1 \sin \theta_i$ . La componente transversal a la interfaz, en cambio, será  $\gamma_{2x} = \gamma_2 \cos \theta_t = \gamma_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \gamma_2 x$ . Dado que para el caso en que el ángulo incidente es mayor al ángulo crítico se requiere que  $\sin \theta_t > 1$ , el valor de  $\gamma_{2x}$  será imaginario,  $-i\alpha$ <sup>4</sup>. De esta forma, para direcciones de campos arbitrarias, y teniendo en cuenta el hecho de que el vector  $\gamma$  se desarrolla sobre el plano de incidencia:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_2 e^{-j\gamma_2 \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_2 e^{-j(\gamma_{2x}x + \gamma_{2z}z)} = \mathbf{E}_2 e^{-j(\beta z - j\alpha x)} = \mathbf{E}_2 e^{-j\beta z} e^{-\alpha x} \quad (\text{A-7a})$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_2 e^{-j\gamma_2 \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{H}_2 e^{-j(\gamma_{2x}x + \gamma_{2z}z)} = \mathbf{H}_2 e^{-j(\beta z - j\alpha x)} = \mathbf{H}_2 e^{-j\beta z} e^{-\alpha x} \quad (\text{A-7b})$$

---

<sup>4</sup>El signo negativo se desprende de la imposibilidad física de un crecimiento exponencial del valor del campo, lo cual descarta la posibilidad de que el signo sea positivo

Se observa que en la dirección perpendicular a la interfaz hay un comportamiento evanescente o exponencial decreciente de la onda transmitida, mientras que existe propagación en la dirección paralela a la interfaz, dando lugar a lo que se conoce como onda de superficie.

La ecuación del módulo del vector de onda (1-18) resulta redefinida como  $\beta_x^2 - \alpha_z^2 = \gamma_2^2$ , de donde se deduce que  $\alpha_z = \sqrt{\gamma_x^2 \sin^2 \theta_i - \gamma_2^2}$ .

## Apéndice B

# Estudio de la aplicación de parches carga para el aumento del ancho de banda de una antena *microstrip*

Para poder utilizar las técnicas de blindaje contra ondas de superficie utilizando metamateriales, como las descriptas en el informe, es necesario que el ancho de la banda prohibida de la estructura EBG resulte mayor al ancho de banda de la antena. Es debido al alto valor del factor Q (y por tanto, bajo ancho de banda) de las antenas *microstrip* rectangulares el motivo por el que el uso de estructuras EBG es factible. La caracterización del comportamiento de las estructuras de banda prohibida electromagnética ubicadas entre antenas *microstrip* para frecuencias más allá de la de resonancia escapa del objetivo de este trabajo. Sin embargo, el tema se trató repetidas veces durante el desarrollo del trabajo, especialmente debido a que se debió considerar la viabilidad de realizar mediciones de caracterización del EBG para realizar comparaciones con las simulaciones obtenidas. Este apéndice pretende introducir conceptualmente el tema.

Existen numerosas técnicas que permiten aumentar el ancho de banda de las estructuras radiantes de tecnología *microstrip*. Como se explicó antes, una técnica común consiste en aumentar al ancho del sustrato, o cambiarlo por otro de constante dieléctrica menor. Debido a que la modificación de cualquiera de los dos parámetros condicionaría sustancialmente el comportamiento de las ondas de superficie generadas sobre el sustrato, se decidió que resultaba importante independizarlos del análisis.

En otros casos, se ha propuesto la modificación de la geometría del elemento radiante, descartando el tradicional parche rectangular por figuras con formas de U o de E, o por formas geométricas con aperturas radiantes embebidas [34]. Para las mediciones de este trabajo se consideró, y finalmente se descartó, el uso de antenas *microstrip* de tipo moño (*bow-tie*), que presentan una transición geométrica suave, intuitivamente apta para las necesidades presentadas. Entre las dificultades que ofrece, está su principio de funcionamiento, comparable al de un dipolo, y requiriendo, por tanto, una alimentación en modo diferencial, lo que obligaría a realizar un diseño de un balún *microstrip*, lejano a las pretensiones del trabajo.

Otra técnica común consiste en diseñar conjuntos de elementos que resuelvan a distintas y frecuencias, acoplados capacitivamente, denominados estructuras multi-resonantes. Si las distintas frecuencias de resonancia están lo suficientemente cerca unas de otras, se logra un efecto de continuidad, aumentando notoriamente el ancho de banda. En muchos casos, y debido a los costos cada vez más despreciables de la fabricación de circuitos multicapa, los elementos resonantes se ubican apilados, generando un acoplamiento capacitivo máximo entre ellos. Para el caso de las pruebas que se requieren hacer para validar y caracterizar el comportamiento de las estructuras EBG, elementos radiantes coplanares con el parche activo resonante resultan suficientes.

La estructura propuesta consiste en un parche rectangular, ubicado sobre un sustrato de FR4, de comportamiento resonante en una frecuencia aproximada de 2.4 GHz, y ubicado entre dos rectángulos *microstrip* pasivos iguales, de un largo establecido de forma que la frecuencia de resonancia de los mismos resulte ligeramente diferente a la del parche activo. La distancia entre estos elementos de carga y la antena original debe ser tal que el acoplamiento sea notorio, requisito que presenta complejidades [48] debido a que los parches deben estar ubicados frente a los bordes no radiantes de la antena para evitar reducir el espacio utilizado por la estructura EBG con la que compartirán sustrato. En la Figura B.1 se puede observar la disposición final de elementos. Se debe destacar que la elección de que ambos parches posean las mismas propiedades geométricas se debe a la búsqueda de la máxima simetría para simplificar el análisis de la estructura, aún cuando esta elección merme la flexibilidad del diseño de banda ancha.

Los parches rectangulares, al igual que en el desarrollo del análisis de estructuras EBG, están acoplados al elemento activo mediante lo que puede modelarse como una red  $\pi$  de capacitores (acoplamiento capacitivo) [49], similar a mostrada en la Figura 3.52, donde los denominados *pixeles* deben ser reemplazados por los parches propiamente dichos. En términos generales, los parámetros que modificarán la impedancia de entrada y que, por lo tanto, afectarán al ancho de banda, son la distancia entre el resonador activo

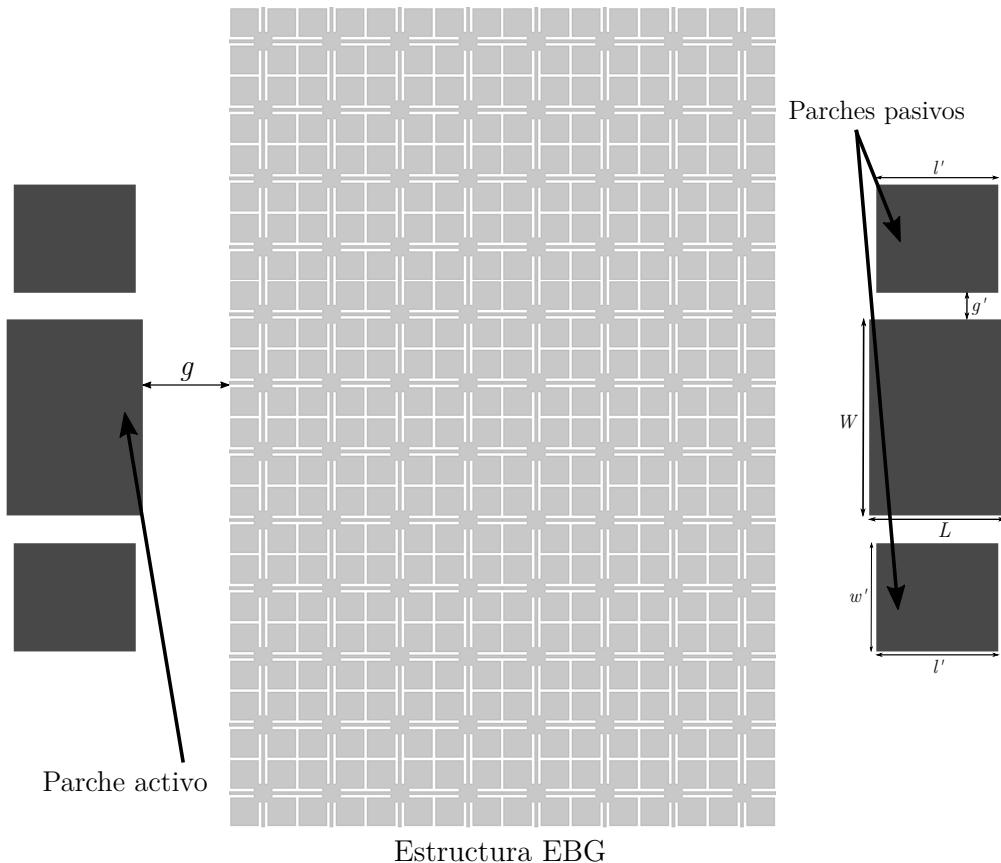


FIGURA B.1: Estructura propuesta para la caracterización del efecto de EBGs sobre antenas *microstrip*.

y los pasivos ( $g'$ ), la longitud de los parches acoplados ( $l'$ ) y la posición del punto de alimentación [49].

La existencia de estos parches, que pueden considerarse como de carga, implican una modificación de la impedancia de entrada para distintas frecuencias.

Si los parches pasivos poseen dimensiones muy disímiles al parche activo central, las frecuencias de resonancia de los elementos estarán tan alejadas entre sí que es posible un análisis simplificado del comportamiento: A bajas frecuencias, los rectángulos pasivos no resuenan ni se acoplan visiblemente al parche activo. A medida que la frecuencia de trabajo aumenta, los mismos comienzan a acoplarse, adoptando un comportamiento capacitivo, al mismo tiempo que debido a que forman un paralelo con la carga impuesta por la resistencia de radiación, disminuyen el valor de la resistencia de entrada. Una vez que los parches resuenan, logrando que se presente la mínima resistencia de entrada, obtienen un comportamiento de carácter inductivo, hasta que nuevamente, a altas frecuencias, dejan de tener injerencia palpable sobre el valor de la impedancia de entrada. La variación de la distancia entre los parches da lugar a que estos efectos se vuelvan más o menos plausibles, en función del acoplamiento capacitivo [49].

Cuando los parches pasivos poseen geometrías similares a la del parche original, el problema resulta más complejo, debido a que no puede analizarse la resonancia de cada elemento por separado sin considerar la carga que los demás ejercen sobre él. Debido a que, a fin de aumentar el ancho de banda, todos los parches deberán tener geometrías similares, resulta necesario realizar simulaciones numéricas que permitan predecir el comportamiento.

Para observar el efecto del uso de parches *microstrip* acoplados capacitivamente al parche activo principal para aumentar el ancho de banda del sistema radiante, se realizaron sucesivas simulaciones en el software de simulación *CST Microwave Studio*, realizando una optimización para obtener el mayor ancho de banda posible dentro del rango de interés. Los parches deben ser de un largo similar a la antena, aunque ligeramente diferente, para aumentar el ancho de banda. Por otro lado, se eligió que fueran simétricos, a fin de no aumentar la anisotropía del problema.

Resulta conveniente, en este caso, realizar simulaciones para comprender el efecto de la variación de distintos parámetros, en particular de la distancia entre el radiador activo y los parches,  $g'$ , el ancho  $w'$  de los parches y su largo  $l'$ . Las primeras simulaciones, utilizando los valores obtenidos en el análisis de un parche único, demostraron que los parches de carga efectivamente cambian las frecuencia de resonancia.

En la Figura B.2(a) se puede observar el comportamiento, para distintos valores de  $l'$ , con  $w'$  y  $g'$  fijos, habiendo elegido los valores del parche óptimos obtenidos antes (donde se consideró un parche sin carga). Se observa que para todos los valores de  $l'$  probados, la frecuencia de resonancia del sistema, o la frecuencia para la que el parámetro  $S_{11}$  es mínima, disminuye notablemente, debido al acoplamiento entre elementos y la aparición de modos de menor frecuencia. En todas las curvas se observan dos mínimos locales. Cuando las cargas tienen un largo  $l'$  menor al de la antena *microstrip*, como es el caso para 25 mm y 28.75 mm, existe un mínimo a una frecuencia superior a la buscada, que para el caso de 25 mm queda fuera de la gráfica. De la misma manera, cuando el largo de las cargas es mayor al del parche, se presenta un mínimo a una frecuencia inferior. Como se explicó antes, el caso óptimo se da cuando ambos mínimos coinciden o están lo suficientemente cerca en frecuencia para aumentar el ancho de banda del sistema radiante. Se observa, también, que el mínimo absoluto del parámetro  $S_{11}$  adopta un valor menor, más deseable, para valores de  $l'$  por debajo de  $L$ , mientras que se ubica en una posición más cercana a la frecuencia buscada para valores por encima de  $L$ . Esta última variación podría controlarse mediante la disminución del tamaño de la geometría completa.

En la Figura B.2(b) se puede observar que una mayor distancia entre el parche *microstrip* y las cargas da lugar a una frecuencia de resonancia menor. Sin embargo, el mínimo

local cercano a 2.17 GHz generado por la presencia de los parches de carga no varía notoriamente con la distancia. Por otro lado, el valor que adopta el mínimo absoluto parece ser menor cuando la distancia es pequeña.

Finalmente, en la Figura B.2(c) se muestra la variación del comportamiento en frecuencia del parámetro  $S_{11}$  en función de la variación del ancho  $w'$  de los parches carga. La frecuencia donde se ubica el mínimo absoluto es mayor cuando el parche carga es angosto, ya que limita la formación de modos indeseados.

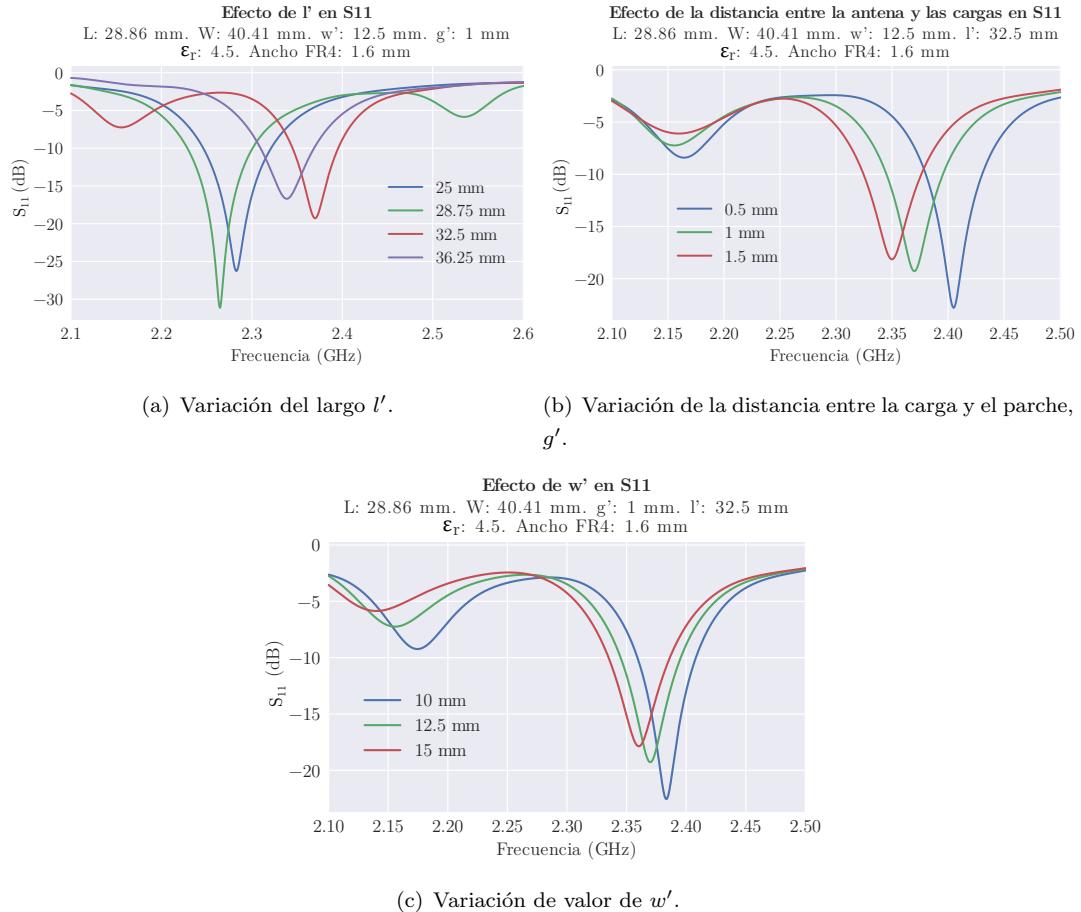


FIGURA B.2: Variación del parámetro  $S_{11}$  del puerto en función de distintos parámetros del parche único, y antena optimizada final.



## Apéndice C

# Solución general mediante el método de matriz exponencial de la ecuación diferencial de segundo orden de una onda

A partir de la expresión matricial del sistema de segundo orden presentado en la Sección 2.3, y reescrito debajo por comodidad, se puede obtener una solución utilizando el método de la exponencial matricial.

$$\begin{bmatrix} \phi'_1(x) \\ \phi'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma(x)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{C-1})$$

Una solución general a cualquier sistema  $\mathbf{X}'(x) = A\mathbf{X}(x)$  se puede expresar como

$$\mathbf{X}(x) = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = [C_1 C_2 \dots C_n]^T, \quad (\text{C-2})$$

donde  $\mathbf{C}$  es un vector arbitrario que surge de la aplicación de las condiciones del problema.

De esta forma, la solución se obtiene si se puede expresar la matriz  $e^{x\mathbf{A}}$ , que es una generalización de la serie de Maclaurin<sup>1</sup> para matrices.

La serie de MacLaurin establece, para el caso de una exponencial,

---

<sup>1</sup>La serie de Maclaurin es un desarrollo en serie de Taylor alrededor del 0:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots, \quad (\text{C-4})$$

y para el caso de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$ , donde  $A^0 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ , etc:

$$e^{x\mathbf{A}} = I + x\mathbf{A} + \frac{x^2 \mathbf{A}^2}{2!} + \frac{x^3 \mathbf{A}^3}{3!} + \dots \quad (\text{C-5})$$

Se puede demostrar que:

- Si  $A$  es una matriz de ceros, entonces  $e^{x\mathbf{A}} = e^0 = \mathbf{I}$ .
- Si  $A = I$ , entonces  $e^{x\mathbf{A}} = e^{x\mathbf{I}} = e^x \mathbf{I}$ .
- $\frac{d}{dx} e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{A} e^{x\mathbf{A}}$ .
- Si  $\mathbf{H}$  es una matriz de transformación lineal no singular, entonces  $\mathbf{A} = \mathbf{HMH}^{-1}$  y  $e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{H} e^{x\mathbf{M}} \mathbf{H}^{-1}$ .

El mecanismo para obtener la solución del sistema utilizando estas propiedades es el siguiente:

1. Encontrar los autovalores  $\lambda_i$  y autovectores de  $\mathbf{A}$ , dado que  $\mathbf{A}$  es un operador lineal.

Dado que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma(x)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C-6})$$

los autovalores son  $\lambda_1 = \gamma(x)$  y  $\lambda_2 = -\gamma(x)$ , dos autovalores distintos.

Los autovalores, en tanto, resultan  $[1, \gamma(x)]$  y  $[1, -\gamma(x)]$ .

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (\text{C-3})$$

2. Construir la matriz  $\mathbf{H}$  utilizando los autovectores obtenidos, dispuestos como columnas, y obtener  $\mathbf{H}^{-1}$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma(x) & -\gamma(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{C-7})$$

por lo que

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\gamma(x)} \\ 1 & -\frac{1}{\gamma(x)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C-8})$$

3. Obtener la forma de Jordan,  $\mathbf{J} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H}$ .

$$\mathbf{J} = \gamma(x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C-9})$$

4. Componer, con la matriz  $J$  obtenida, la expresión, en base a las propiedades descriptas antes,  $e^{x\mathbf{J}} = \mathbf{H}^{-1} e^{x\mathbf{A}} \mathbf{H}$ .

$$e^{x\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^{x\gamma(x)} & 0 \\ 0 & e^{-x\gamma(x)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C-10})$$

5. Obtener  $e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{H} e^{x\mathbf{J}} \mathbf{H}^{-1}$ .

$$e^{x\mathbf{A}} = e^{x\gamma(x)} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2x\gamma(x)} & \frac{1-e^{-2x\gamma(x)}}{\gamma(x)} \\ \gamma(x)(1 - e^{-2x\gamma(x)}) & 1 + e^{-2x\gamma(x)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C-11})$$

De modo que la solución final resulta

$$\mathbf{X}(x) = e^{x\mathbf{A}} \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = [C_1 C_2]^T, \quad (\text{C-12})$$

que depende de las condiciones del problema.



# Bibliografía

- [1] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Wiley, 2011.
- [2] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. Wiley-IEEE Press, 2001.
- [3] W. L. Stutzman y G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*. Wiley, 2012.
- [4] C. A. Balanis, *Modern Antenna Handbook*. Wiley, 2008.
- [5] R. Garg, P. Bhartia, I. Bahl y A. Ittipiboon, *Microstrip Antenna Design Handbook*. Artech House, 2001.
- [6] J. C. Fernández, *Apuntes de Electromagnetismo*. FIUBA, 2004.
- [7] J. D. Joannopoulos y S. G. Johnson, *Photonic Crystals: Molding the flow of light*. Princeton University Press, 2008.
- [8] H. M. Barlow y A. L. Cullen, «Surface Waves», *IEEE - Radio Section*, 1953.
- [9] C. Caloz y T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission line theory and microwave applications. The Engineering Approach*. Wiley, 2006.
- [10] A. Venkateswaran, «Analysis of Planar EBG Structures Using Transmission Line Models (Thesis)», *McGill University, Canada*, 2009.
- [11] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and design*. Wiley-Interscience, 2005.
- [12] J. Amado y G. Fano, «Antenna Coupling Model in Receiving Mode», *GEMCCON 2016*, 2016.
- [13] D. M. Pozar, «Input Impedance and Mutual Coupling of Rectangular Microstrip Antennas», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1982.
- [14] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, 2012.
- [15] N. G. Alexopoulos e I. E. Rana, «Mutual Impedance Computation Between Printed Dipoles», 1981.
- [16] N. I. Dodov y P. Z. Petkov, «The surface waves impact on the coupling effect in microstrip antennas», *Electronic Letters*, 1982.
- [17] E. H. V. Lil y A. R. Van, «Transmission Line Model for Mutual Coupling Between Microstrip Antennas», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984.

- [18] R. Gonzalo, P. de Maagt y M. Sorolla, «Enhanced Patch-Antenna Performance by Suppressing Surface Waves Using Photonic-Bandgap Substrates», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (Vol. 47, Nº 11), 1999.
- [19] E. Penard y J. P. Daniel, «Mutual Coupling between Microstrip Antennas», *Electronic Letters*, 1982.
- [20] Z. Iluz, R. Shavit y R. Bauer, «Microstrip Antenna Phased Array with Electromagnetic Bandgap Substrate», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004.
- [21] N. Engheta y R. W. Ziolkowski, *Metamaterials: Physics and engineering explorations*. IEEE Press y Wiley-Interscience, 2006.
- [22] D. Rittenhouse, «An Optical Problem, Proposed by Mr. Hopkinson, and Solved by Mr. Rittenhouse», *Transactions of the American Philosophical Society*, 1786.
- [23] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters adn Crystal Lattices*. Dover Publications, 1953.
- [24] B. A. Munk, *Frequency Selective Surfaces*. Wiley, 2000.
- [25] D. Sievenpiper, «High-Impedance Electromagnetic Surfaces (PhD Thesis)», *University of California*, 1999.
- [26] M. F. Luberto, «Diseño de una antena de microcintas para WIFI empleando estructuras EBG (Electromagnetic Band Gap)», *Tesis de grado. Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires*, 2016.
- [27] D. Sievenpiper, L. Zhang, R. F. Jimenez, N. G. Alexopoulos y E. Yablonovitch, «High-Impedance Electromagnetic Surfaces with a Forbidden Frequency Band», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1999.
- [28] F. Capolino, *Theory and Phenomena of Metamaterials*. CRC Press, 2009.
- [29] K. H. Kim y J. E. Schutt-Ainé, «Analysis and modeling of Hybrid Planar-Type Electromagnetic-Bandgap structures and Feasibility Study on Power Distribution Network Applications», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2008.
- [30] S. Tretyakov, *Analytical Modeling in Applied Electromagnetics*. Artech House, 2003.
- [31] A. B. Yakovlev, C. R. Simovski, S. A. Tretyakov, O. Luukkonen, G. W. Hanson, S. Paulotto y P. Baccarelli, «Analytical Modeling of Surface Waves on High Impedance Surfaces», *NATO Security through Science Series B: Physics and Biophysics*, 2009.

- [32] G. Goussetis, A. Feresidis y J. C. Vardaxoglou, «Tayloring the AMC and EBG characteristics of periodic metallic arrays printed on grounded dielectric substrate», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006.
- [33] B. Mohajer-Iravani y O. M. Ramahi, «On the suppression band and bandgap of planar electromagnetic bandgap structures», *Hindawi Publishing Corporation: International Journal of Antennas and Propagation*, 2014.
- [34] F. Yang e Y. Rahmat-Samii, *Electromagnetic Band Gap Structures in Antenna Engineering*. Cambridge University Press, 2009.
- [35] S. Maci, M. Caiazzo, A. Cucini y M. Casaletti, «A Pole-Zero Matching Method for EBG Surfaces Composed of a Dipole FSS Printed on a Grounded Dielectric Slab», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005.
- [36] F.-R. Yang, K.-P. Ma, Y. Qian y T. Itoh, «A uniplanar contact photonic band-gap (UC-PBG) structure and its applications for microwave circuits», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1999.
- [37] C. Paul, *Inductance: Loop and Partial*. Wiley, 2010.
- [38] P. B. Johns y R. L. Beurle, «Numerical Solution of a 2-dimensional scattering problems using a transmission line matrix», *Proc. IEEE*, 1971.
- [39] E. Hammerstad, «Computer-Aided Design of Microstrip Couplers with Accurate Discontinuity Models», *Symposium on Microwave Theory and Techniques*, 1981.
- [40] F. M. Tesche, M. V. Ianoz y T. Karlsson, *EMC Analysis Methods and Computational Models*. Wiley-Interscience, 1997.
- [41] P. Saguet, *Numerical Analysis in Electromagnetics*. ISTE - Wiley, 2012.
- [42] Z. Z. Abidin, «Design, modelind and implementation of antennas using electromagnetic bandgap material and defected ground planes (PhD Thesis)», *University of Bradford*, 2011.
- [43] S. D. Assimonis, T. V. Yioultsis y C. S. Antonopoulos, «Design and optimization of uniplanar EBG structures for low profile antenna applications and mutual coupling reduction», *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 2012.
- [44] M. T. Islam y S. Alam, «Compact EBG structures for alleviating mutual coupling between patch antenna array elements», *Progress in Electromagnetics Research*, 2013.
- [45] P. Kovács, «Design and optimization of electromagnetic bandgap structures (PhD Thesis)», *Brno University of Technology*, 2010.

- [46] D. Kern, D. Werner, A. Monorchio, L. Lanuzza y M. Wilhelmc, «The Design Synthesis of Multiband Artificial Magnetic Conductors Using High Impedance Frequency Selective Surfaces Enhanced Patch-Antenna Performance by Suppressing Surface Waves Using Photonic-Bandgap Substrates», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* (Vol. 53, Nº 1), 2005.
- [47] J. McVay, A. Hoorfar y N. Engheta, «Peano High Impedance Surfaces», *Radio Science* (Vol. 40, Nº 6), 2005.
- [48] G. Kumar y K. C. Gupta, «Broad-band microstrip antennas using additional resonators gap-coupled to the radiating edges», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984.
- [49] ——, «Nonradiating edges and four edges gap-coupled multiple resonator broad-band microstrip antennas», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1985.
- [50] P. Markos y C. M. Soukoulis, *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton University Press, 2008.
- [51] X. Jiang, *Metamaterial*. Intech: Open Science, 2012.
- [52] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*. Wiley-IEEE Press, 2001.
- [53] D. Morin, *Waves*. Aún no publicado a Marzo 2018. dirección: <http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/book.html>.
- [54] E. Burstein, C. Weisbuch, P. S. J. Russell, T. Birks y D. Lloyd-Lucas, *Confined Electrons and Photons: Photonic Bloch Waves and Photonic Band Gaps*. Plenum Press, 1995.
- [55] J. L. Allen, «On Surface-Wave coupling between elements of Large Arrays», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1965.
- [56] M. Malkomes, «Mutual coupling between microstrip patch antennas», *IET Electronic Letters*, 1982.
- [57] J. A. Polo y A. Lakhtakia, «Surface Electromagnetic Waves: A review», *Laser and Photonics Reviews*, 2011.
- [58] S. A. Saikh, A. A. Desai y A. A. Deshmukh, «Electromagnetic Band Gap Structures in MSA», *International Journal of Computer Applications*, 2014.
- [59] N. I. Dodov y P. Z. Petkov, «The Surface Waves' impact on the Coupling Effect in Microstrip Antennas», *ICEST 2002*, 2002.
- [60] R. M. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer y J. D. Joannopoulos, «Nature of Photonic Band Gap: Some insights from a field analysis», *Journal of the Optical Society of America*, 1993.

- [61] J. Hendry, «Surface Waves: What are they? Why are they interesting?», *Roke Manor Research*, 2009.
- [62] M. Thumm y W. Wiesbeck, «Characteristic Impedance and Permittivity (diapositivas)», *Karlsruhe Institute of Technology*,