Продвинутая статистика

Корреляционный анализ данных (продолжение). Линейная регрессия. Функция потерь. Матрицы ковариаций и корреляций. Правило трех сигм. Центральная предельная теорема. Виды распределений: дискретные и непрерывные распределения. Дискретное равномерное распределение. Логнормальное распределение. Экспоненциальное распределение. Распределение Бернулли. Биноминальное распределение.
t-критерий Стьюдента.

Даниил Корбут
Специалист по Анализу Данных

НЕТОЛОГИЯ

Даниил Корбут
DL Researcher
Insilico Medicine, Inc

Окончил бакалавриат ФИВТ МФТИ (Анализ данных) в 2018г
Учусь на 2-м курсе магистратуры ФИВТ МФТИ
Работал в Statsbot и Яндекс. Алиса.
Сейчас в Insilico Medicine, Inc, занимаюсь генерацией активных молекул и исследованиями старения с помощью DL.

Нахождение зависимости случайных величин

Дисперсия — квадрат среднеквадратичного отклонения от среднего значения (насколько данные разбросаны)

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Ковариация — наличие зависимости между величинами

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

Ковариация не равна нулю — можно предположить зависимость.

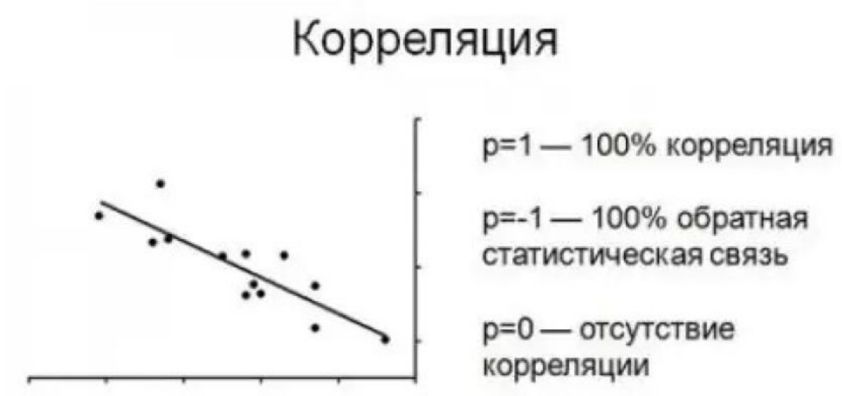
Ковариация показывает разброс величин относительно друг друга.
Проблема ковариации: данные могут иметь разный масштаб.
Корреляция – нормированная ковариация.

Корреляция Пирсона - нормированная ковариация

Корреляция Пирсона — нормированная ковариация, определяет силу зависимости

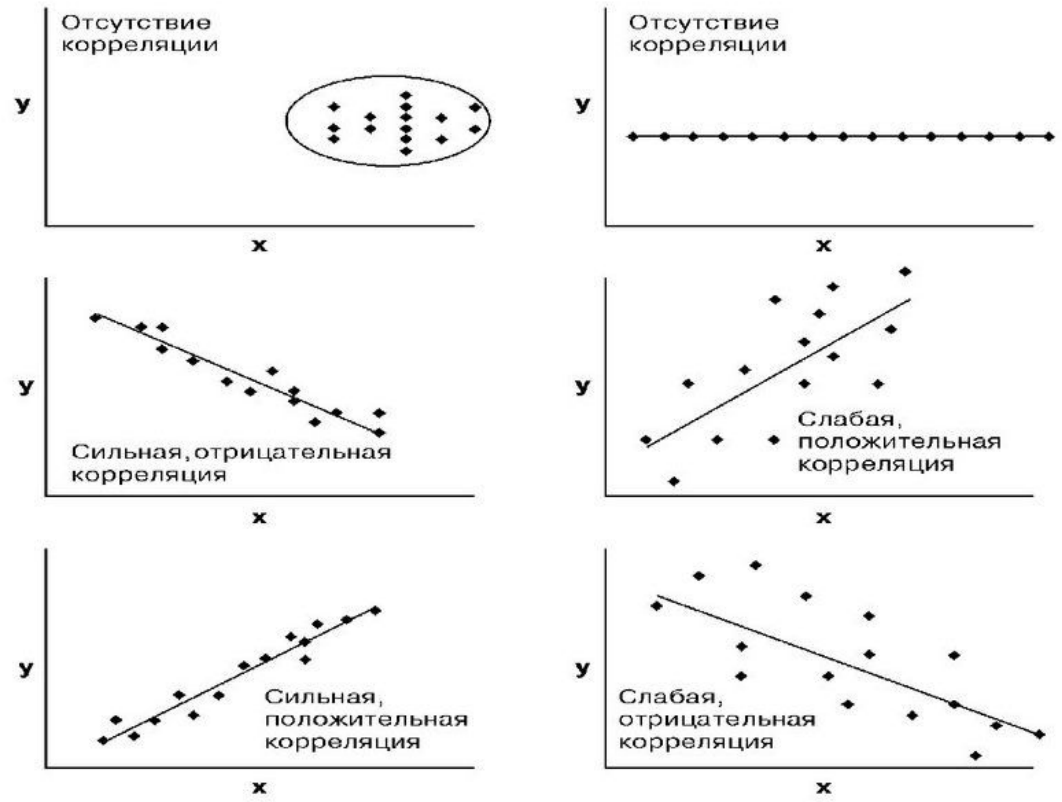
$$\sigma(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \mu_x)(y - \mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}}$$

Корреляция Пирсона



http://economic-definition.com/Exchange_Terminology/Koefficient_korrelyacii_Correlation_coefficient__eto.html

Примеры корреляции

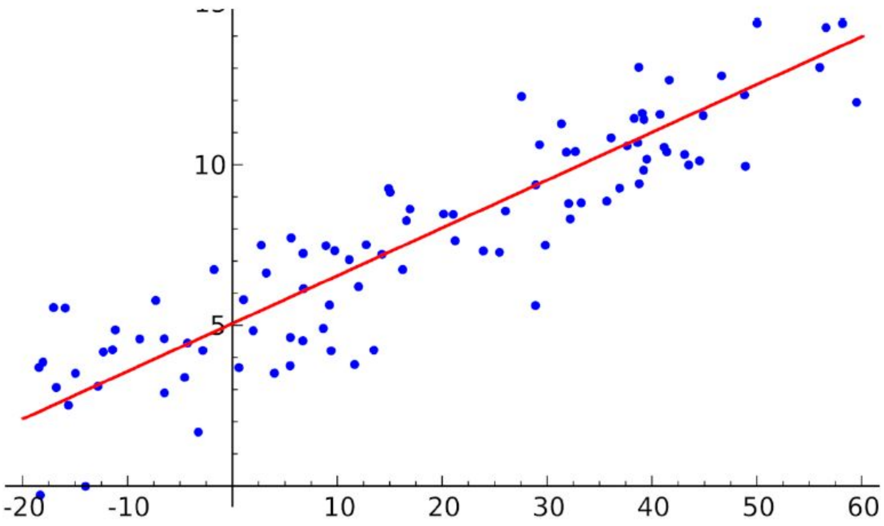


https://tocodata.com/marketing/korrelyaciya.html

НЕТОЛОГИЯ

Линейная регрессия

Линейная регрессия — модель зависимости переменной x от одной или нескольких других переменных (факторов, регрессоров, независимых переменных) с линейной функцией зависимости



Модель:

$$y = f(x, b) + \varepsilon,$$

где ε - случайная ошибка модели

Функция регрессии имеет вид

$$f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

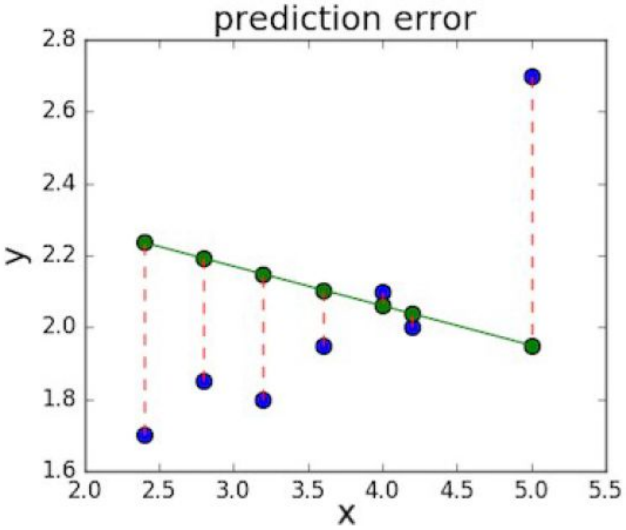
b_j - параметры (коэффициенты) регрессии

x_j - атрибуты

https://neurohive.io/ru/osnovy-data-science/linejnaja-regressija/

Функция потерь

Функция потерь — мера количества ошибок, которые линейная регрессия делает на наборе данных



Метод наименьших квадратов:

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i (y_i - f_i(x))^2 \to \min_x.$$

https://neurohive.io/ru/osnovy-data-science/linejnaja-regressija/
https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_наименьших_квадратов

Алгоритм построения модели линейной регрессии

Для того, чтобы построить модель линейной регрессии в python, необходимо:

1) выбрать предсказываемую величину (y) и независимую величину (x)
   (x величина может быть многомерной, y – только одномерная)
2) разделить данные на тренировочные (80%) и тестовые (20%)
3) создать модель линейной регрессии (с помощью библиотеки sklearn)
4) обучаем модель на тренировочных данных
5) посчитать ошибку на тестовых данных (с помощьи функции потерь)
6) оценить качество модели
7) сделать график

Матрица корреляций

Матрица корреляций подсчитывается с помощью формул, которые показывают как данные зависят друг от друга в пространстве n значений (каждый элемент матрицы равен коэффициенту Пирсона).

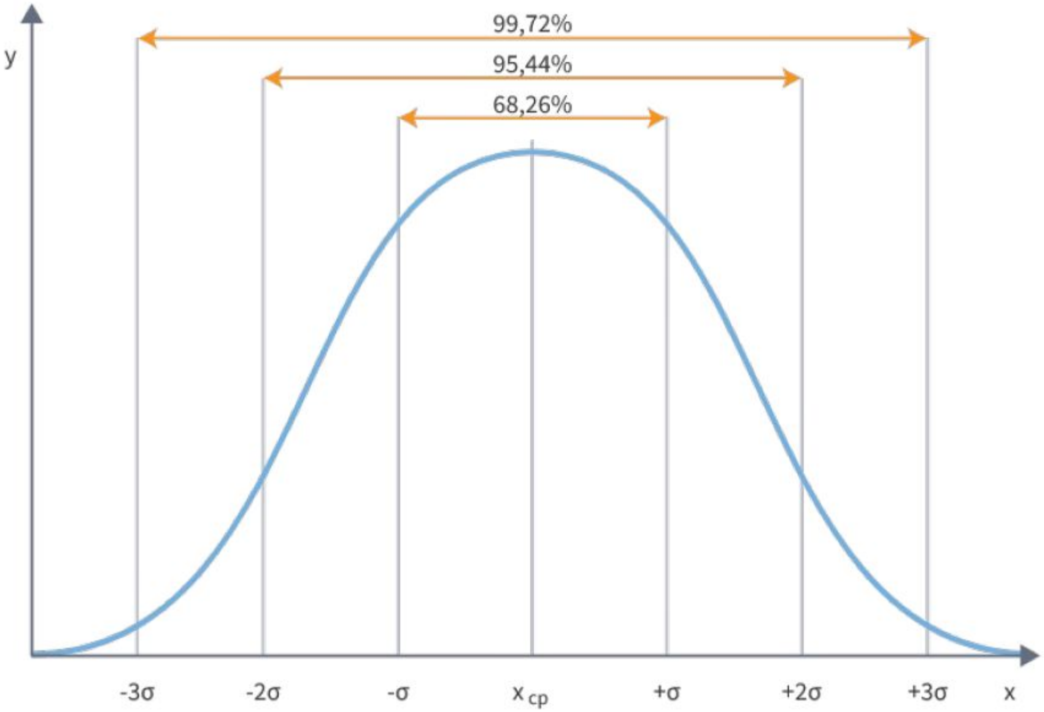
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(X_1, X_1) & \sigma(X_1, X_2) & \dots & \sigma(X_1, X_n) \\ \sigma(X_2, X_1) & \sigma(X_2, X_2) & \dots & \sigma(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(X_n, X_1) & \sigma(X_n, X_2) & \dots & \sigma(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Свойства матрицы корреляций

Матрица корреляций симметрична.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(X_1, X_1) & \sigma(X_1, X_2) & \cdots & \sigma(X_1, X_n) \\ \sigma(X_2, X_1) & \sigma(X_2, X_2) & \cdots & \sigma(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(X_n, X_1) & \sigma(X_n, X_2) & \cdots & \sigma(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Правило трёх сигм



https://wiki.loginom.ru/articles/3-sigma-rule.html

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Давайте рассматривать выборки из случайных величин.

Выборка из $X \sim F(x)$:

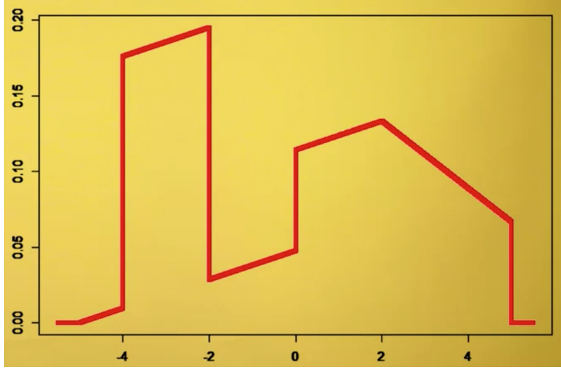
$X^n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Выборочное среднее: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

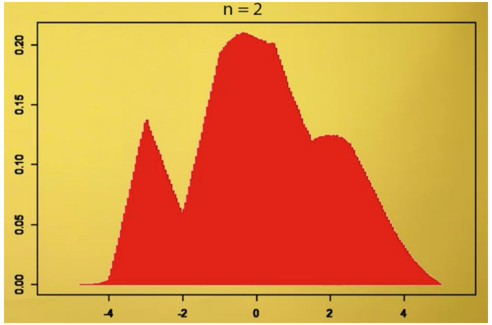
У выборочного среднего пишем нижний индекс n, просто чтобы понимать с выборкой какого размера мы работаем. Давайте подумаем, как связано выборочное среднее с исходным распределением?

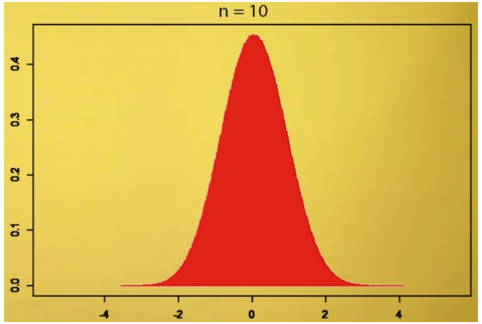
$\bar{X}_n \sim ?$

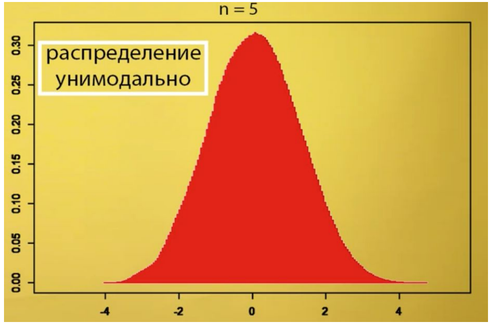
Центральная предельная теорема (ЦПТ)

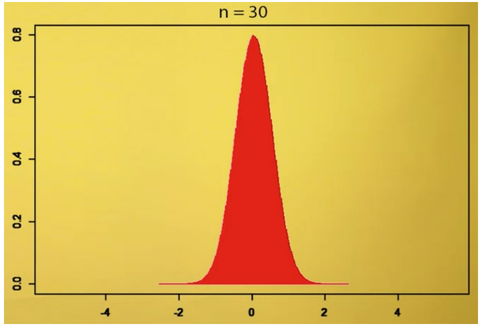


Будем работать с таким “странным” распределением.
Давайте будем семплировать выборки объёма n, считать по ним выборочные средние и повторять так много-много раз. И давайте построим гистограмму этих выборочных средних.









На плотность какого распределения похожи полученные графики?

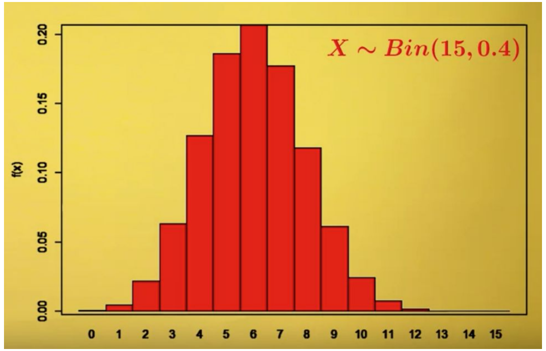
https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

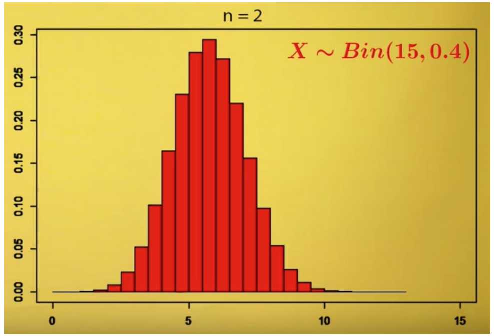
Центральная предельная теорема

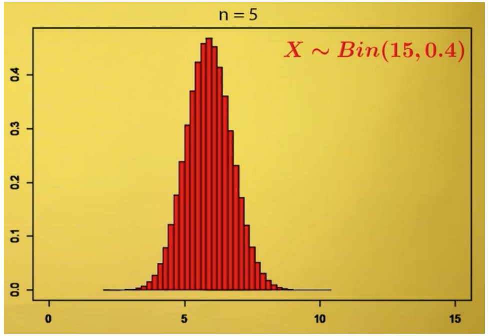
$$X \sim F(x),$$
$$X^n = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \Rightarrow$$
$$\bar{X}_n \approx\sim N\left(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n}\right)$$

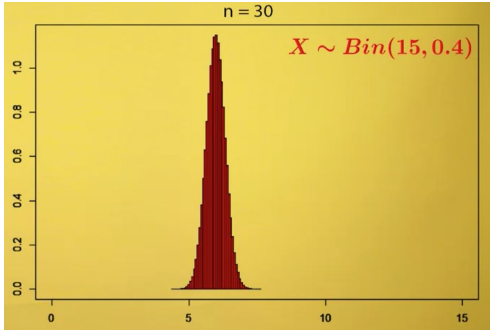
С ростом n точность аппроксимации увеличивается

Интересно, что это справедливо не только для абсолютно непрерывных распределений, но и для дискретных.



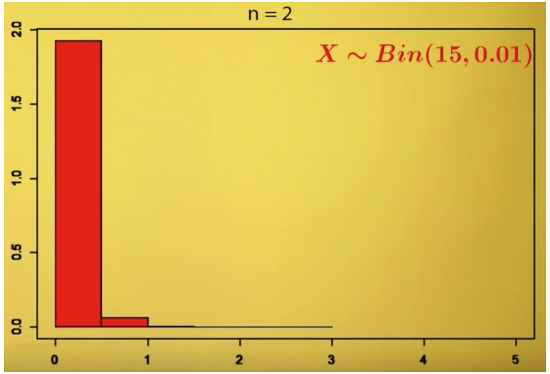


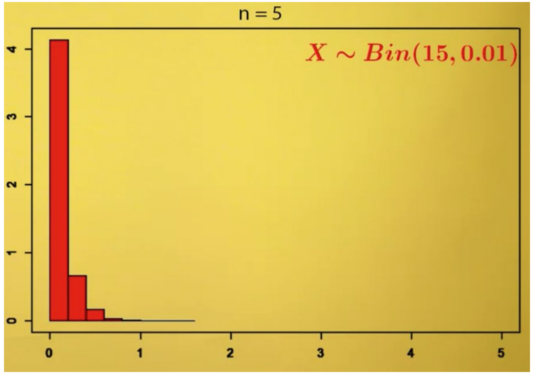


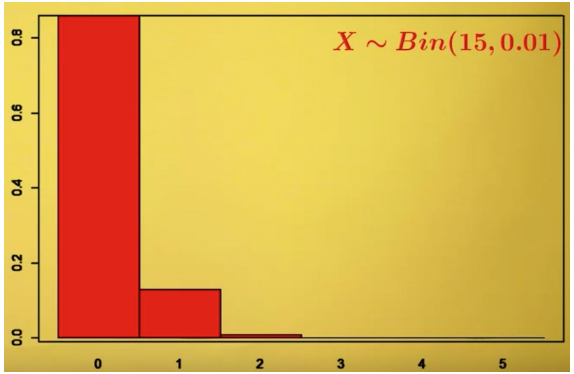


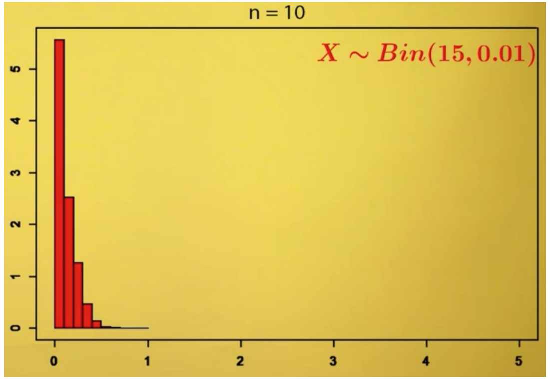
https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

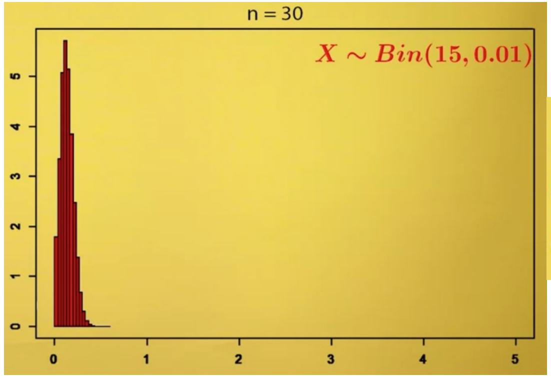
Центральная предельная теорема







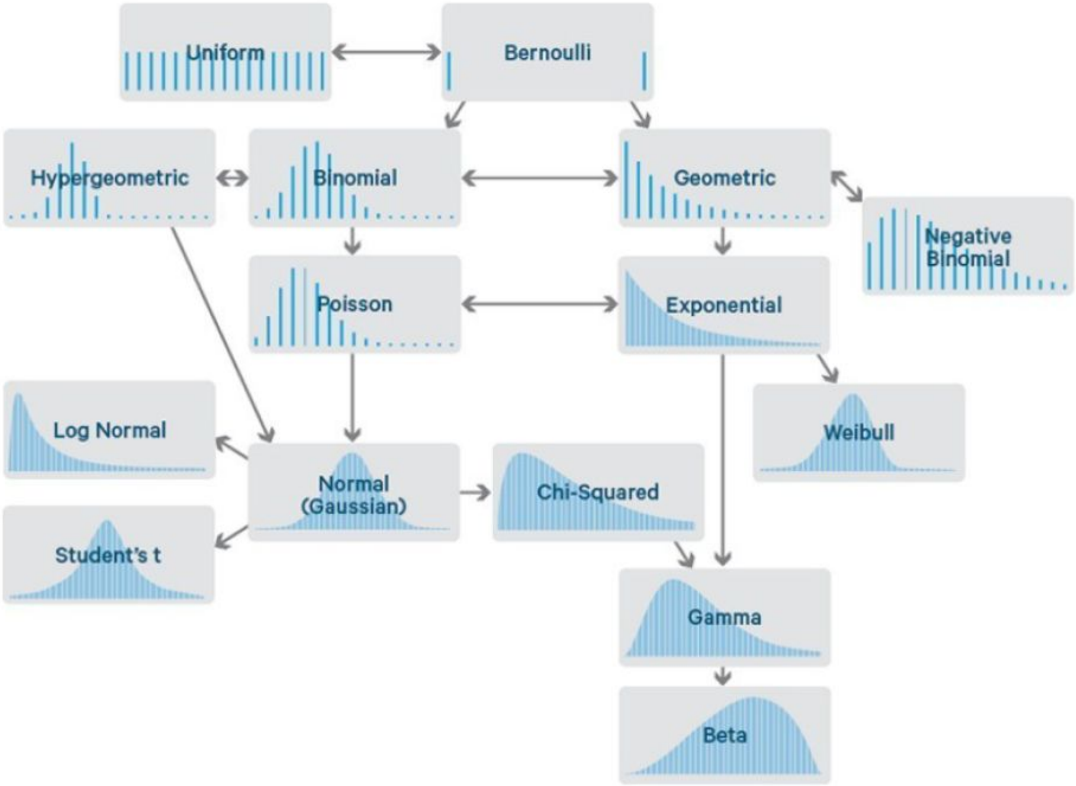




Когда распределение X не слишком скошено, распределение $\bar{X}_n$ хорошо описывается нормальным при $n \geq 30$.

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Виды распределений



https://habr.com/ru/post/331060/

Дискретные и непрерывные распределения

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным. Примеры дискретной случайной величины: запись показаний спидометра или измеренной температуры в конкретные моменты времени.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания принимает все значения из некоторого числового промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Пример непрерывной случайной величины: измерение скорости перемещения любого вида транспорта или температуры в течение конкретного интервала времени.

http://edu.tltsu.ru/er/book_view.php?book_id=1cec&page_id=19444

Распределение Бернулли

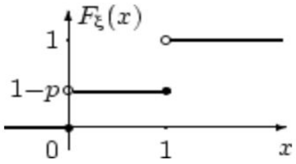
Случайная величина — переменная, значения которой представляют собой исходы какого-нибудь случайного феномена или эксперимента.
Простыми словами: это численное выражение результата случайного события.

$$y = X(\omega)$$

Случайная величина **X** имеет **распределение Бернулли**, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и q=1−p соответственно.

$$\mathbb{P}(X = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = q.$$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Принято говорить, что событие $\{X = 1\}$ соответствует «успеху», а $\{X = 0\}$ «неудаче». Эти названия условные, и в зависимости от конкретной задачи могут быть заменены на противоположные.

Биномиальное распределение

Случайная величина ξ имеет **биномиальное распределение** (англ. *binomial distribution*) с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$ и пишут: $\xi \in \mathbb{B}_{n,p}$ если ξ принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями $P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Случайная величина с таким распределением имеет смысл числа успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p.

Таблица распределения ξ имеет вид

ξ	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	$(1-p)^n$	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	$\ldots$	p^n

https://math.wikia.org/ru/wiki/

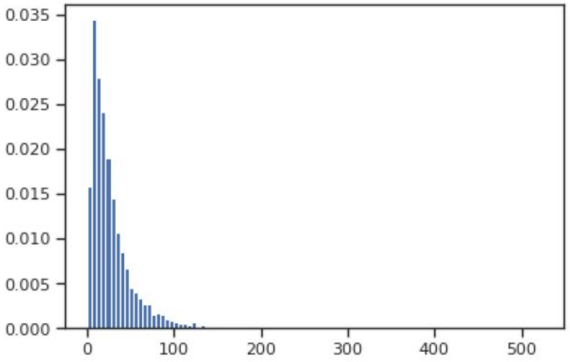
Логнормальное распределение

Логнормальное распределение задается плотностью вероятности:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Где μ - это среднее значение, σ - стандартное отклонение

Пример:



$\mu = 3$

$\sigma = 0.9$

Экспоненциальное распределение

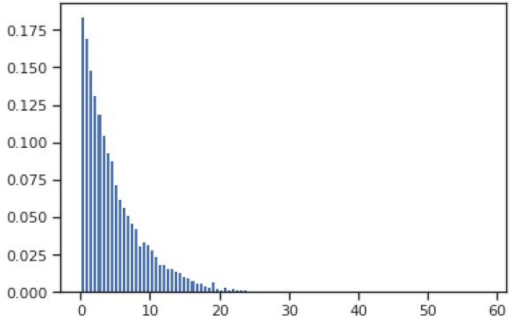
Экспоненциальное распределение задается плотностью вероятности:

$$f(x; \frac{1}{\beta}) = \frac{1}{\beta}\exp(-\frac{x}{\beta})$$

если x>=0, иначе $f(x; \frac{1}{\beta}) = 0$

где β - это параметр

Пример:



$\beta = 5$

https://github.com/yustinaivanova/netology_statistics_february_20/blob/master/presentation2.pdf

НЕТОЛОГИЯ

t-критерий Стьюдента

Случайная величина t имеет распределение Стьюдента с n^{-1} степенями свободы, где n— размер выборки.

$$t = \frac{\overline{X} - m}{s_X / \sqrt{n}}$$

Данный критерий был разработан Уильямом Госсетом для оценки качества пива в компании Гиннесс. В связи с обязательствами перед компанией по неразглашению коммерческой тайны (руководство Гиннесса считало таковой использование статистического аппарата в своей работе), статья Госсета вышла в 1908 году в журнале «Биометрика» под псевдонимом «Student» (Студент).

Спасибо за внимание!

НЕТОЛОГИЯ