Введение в статистику

Основные понятия о статистике: медиана, мода, стандартное отклонение, дисперсия. Виды распределений: нормальное, равномерное. Корреляционный анализ данных. Коэффициенты корреляции Пирсона, Кендалла, Спирмена. Пример матрицы корреляций.

Даниил Корбут
Специалист по Анализу Данных

НЕТОЛОГИЯ

Даниил Корбут
DL Researcher
Insilico Medicine, Inc

Окончил бакалавриат ФИВТ МФТИ (Анализ данных) в 2018г
Учусь на 2-м курсе магистратуры ФИВТ МФТИ
Работал в Statsbot и Яндекс. Алиса.
Сейчас в Insilico Medicine, Inc, занимаюсь генерацией активных молекул и исследованиями старения с помощью DL.

Где применяется статистический анализ?

Компьютерное зрение;
Перевод языков;
Генетический анализ данных (молекулярная биология);
Финансовый анализ данных;
Рекомендательные системы;
Моделирование физиологических сигналов;
в любых табличных данных.

https://github.com/yustinaivanova/netology_statistics_february_20/blob/master/presentation1.pdf

Статистика

Рассматривается выборка из случайной величины X:

$$X^n = (X_1, \dots, X_n),$$

где n — объем выборки. Величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины $(i.i.d.)$.

Статистикой $T(X^n)$ называется любая функция от данной выборки.

Основные понятия статистики

Среднее значение;
Медиана;
Мода;
Минимум;
Максимум;
Стандартное отклонение;
Корелляция;
Выбросы.

Среднее

Часто возникает необходимость оценить не всю функцию распределения, а некоторые ее параметры. Самым важным классом параметров распределения являются **средние**. Нестрогое определение можно сформулировать следующим образом: среднее — это значение, вокруг которого группируются все остальные.

Одним из вариантов уточнения данного определения является **матожидание**:

$$EX = \begin{cases} \sum\limits_i a_i p_i, & X \text{ — дискретна,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx, & X \text{ — непрерывна.} \end{cases}$$

Квантиль и медиана

Другой характеристикой среднего является медиана. Она определяется с помощью квантиля. **Квантилем** порядка $\alpha \in (0, 1)$ называется величина X_α такая, что:

$$P(X \leqslant X_\alpha) \geqslant \alpha, \quad P(X \geqslant X_\alpha) \geqslant 1 - \alpha.$$

Медиана — это квантиль порядка 0,5:

$$P(X \leqslant \operatorname{med} X) \geqslant 0{,}5, \quad P(X \geqslant \operatorname{med} X) \geqslant 0{,}5.$$

Медиана

Возьмите ваши наблюдения:	80, 87, 95, 83, 92
Расположите их в возрастающем порядке:	80, 83, 87, 92, 95
Среднее значение и есть медиана	80, 83, **87**, 92, 95
Если значений чётное кол-во, то медианой будет среднее арифметическое двух средних значений	**89.5** 80, 83, **87**, **92**, 95, 98

Мода

Еще одной характеристикой среднего является **мода** — самое вероятное значение случайной величины (в нестрогом смысле):

$$\operatorname{mode} X = \begin{cases} a_{\underset{i}{\operatorname{argmax}}\, p_i}, & X \text{ — дискретна,} \\ \underset{x}{\operatorname{argmax}}\, f(x), & X \text{ — непрерывна.} \end{cases}$$

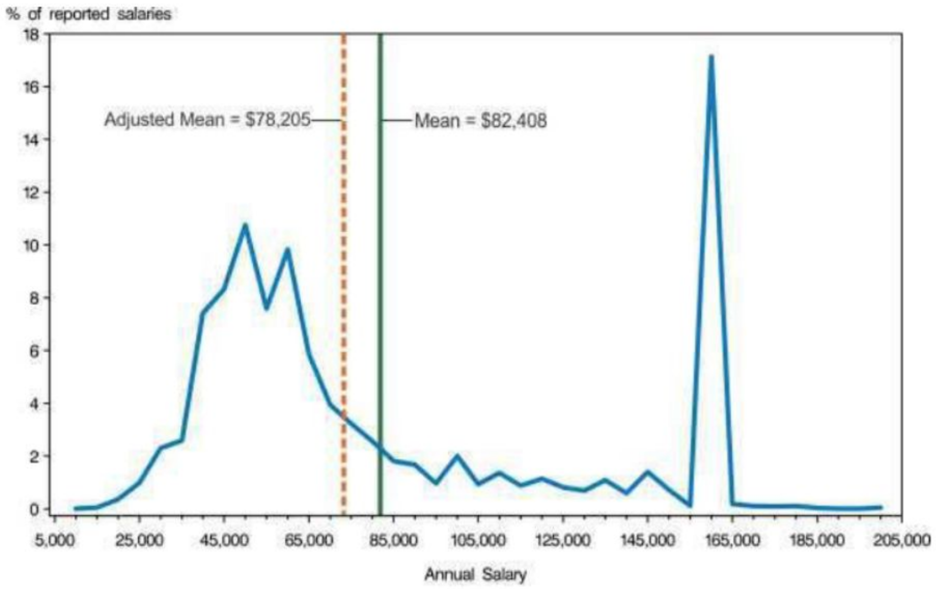
Пример подсчёта

Выборочная мода оценивается по максимуму оценки плотности распределения.

Показателен следующий пример. Рассматривается выборка из 25 человек, для каждого из которых известен годовой доход. В выборке есть десять человек, годовой доход которых равен двум тысячам долларов, один человек с годовым доходом в три тысячи долларов, и так далее. Один человек получает сорока пять тысяч долларов в год. Среднее арифметическое годовых доходов на этой выборке — 5700 долларов. Здесь медиана составляет 3000 долларов, а мода — 2000.

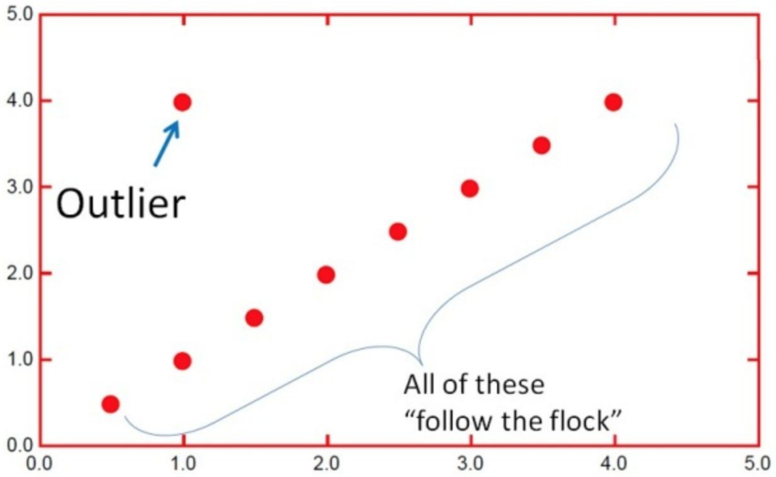
Пример подсчёта

Необходимо заметить, что все рассматриваемые величины называются «средними». Значит, для оптимистичного отчета по данной выборке можно воспользоваться средним арифметическим, а для пессимистичного — модой.



Выбросы

Если в данных есть выбросы — значения, которые имеют слишком большое отклонение от среднего значения, — это может негативно повлиять на анализ.



https://github.com/yustinaivanova/netology_statistics_february_20/blob/master/presentation1.pdf

Стандартное отклонение

Мера отклонения значений выборки от среднего

1. Вычтите каждое наблюдение из среднего значения

3. Сложите все разности

2. Возведите каждую разность в квадрат

Греческая буква «сигма» используется для обозначения стандартного отклонения

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

5. Из результата извлеките квадратный корень

4. Разделите сумму на количество наблюдений минус 1

Дисперсия

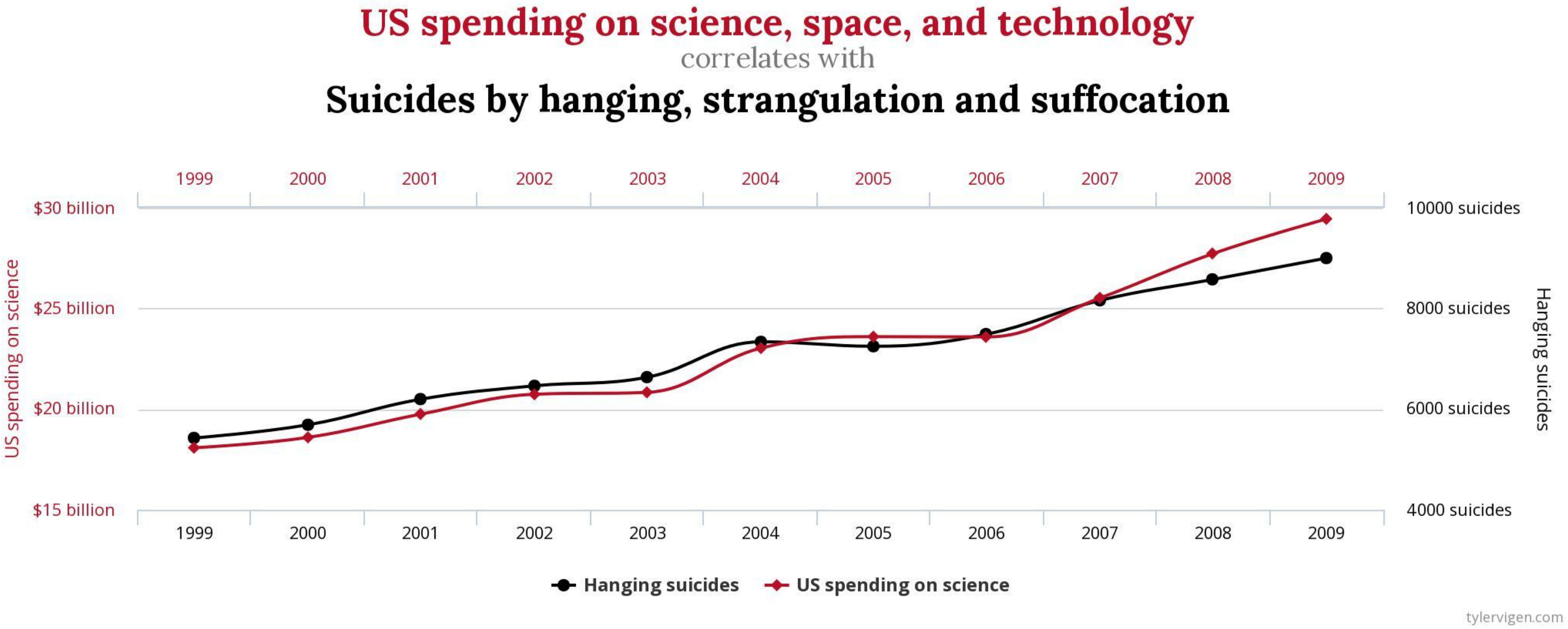
Квадрат стандартного отклонения. Дисперсия показывает, насколько в среднем значения сосредоточены, сгруппированы около среднего: если дисперсия маленькая - значения сравнительно близки друг к другу, если большая - далеки друг от друга.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Корреляция

Корреля́ция (от лат. correlatio .соотношение, взаимосвязь.), или корреляционная зависимость, — статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин.

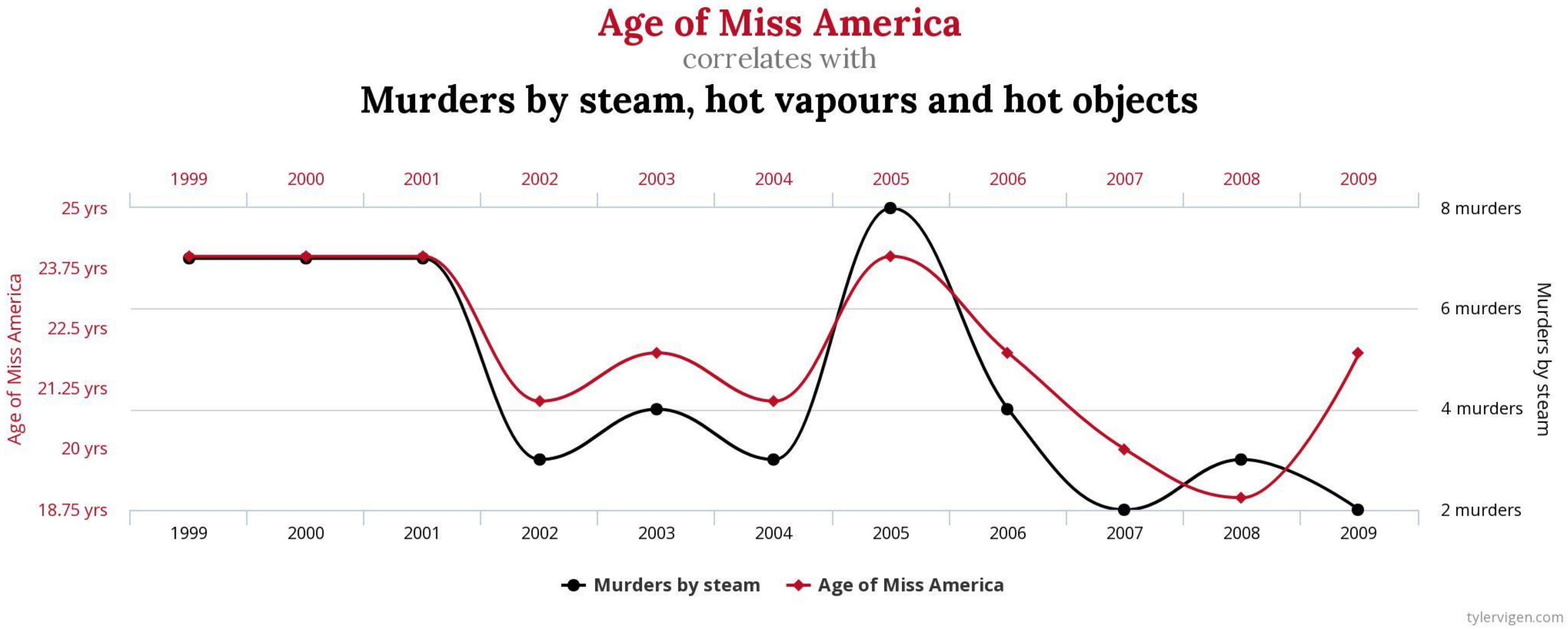
Примеры неожиданной корреляции



http://www.tylervigen.com/spurious-correlations

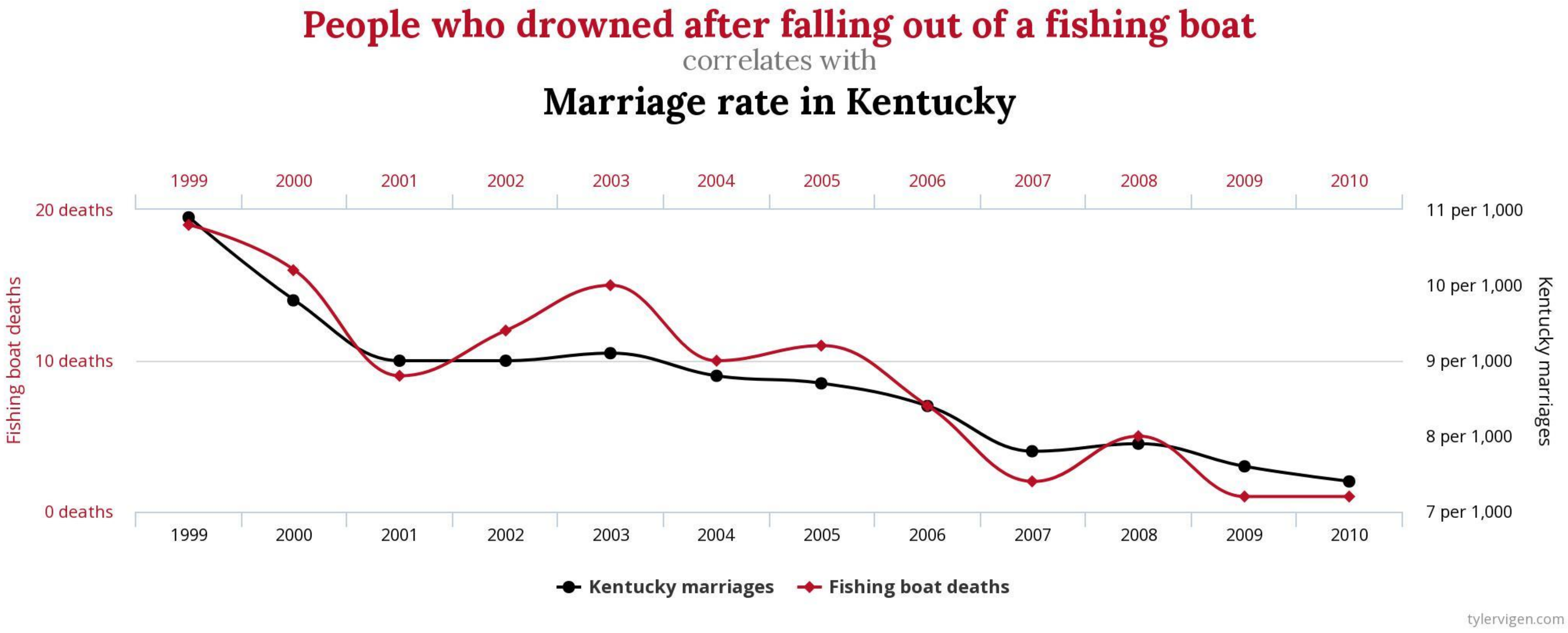
НЕТОЛОГИЯ

Примеры неожиданной корреляции



http://www.tylervigen.com/spurious-correlations

Примеры неожиданной корреляции

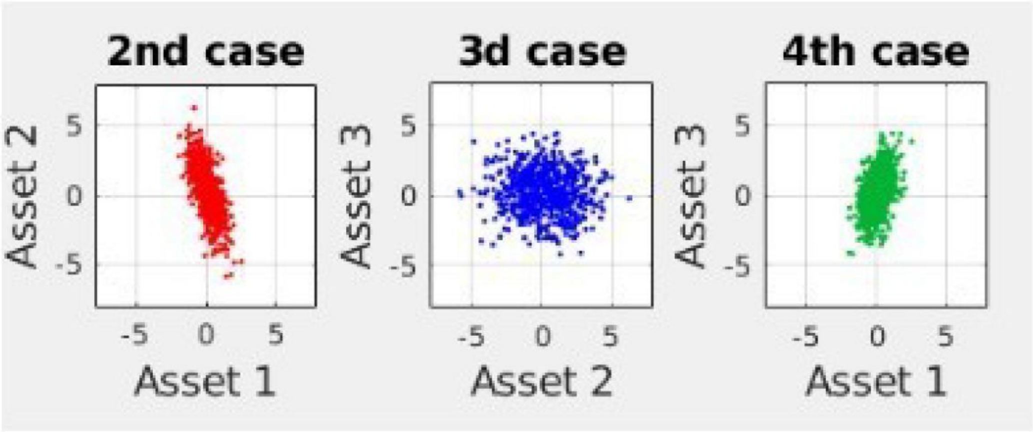


http://www.tylervigen.com/spurious-correlations

НЕТОЛОГИЯ

Финансовый анализ данных

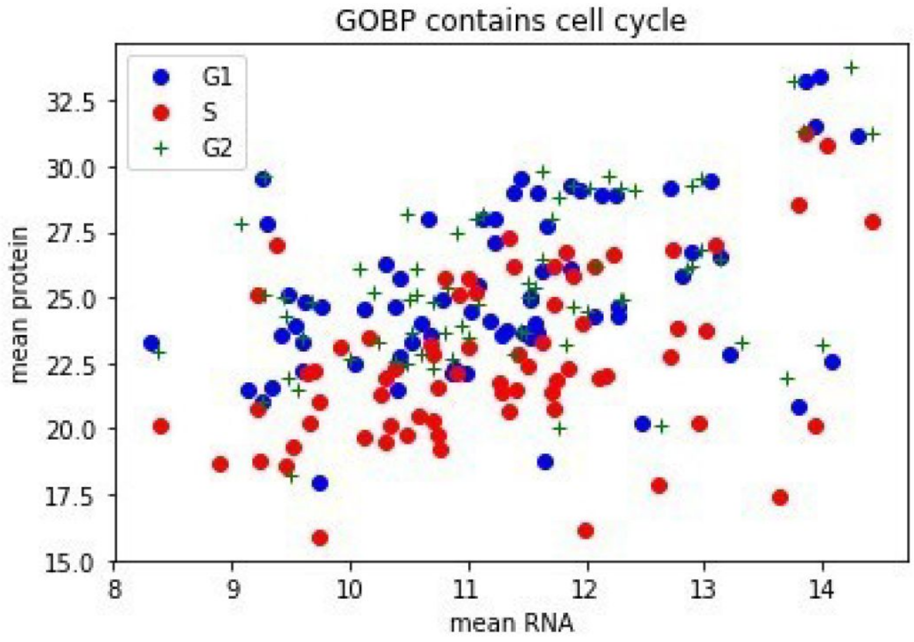
Предсказание колебания цены на акции фирмы.
Анализ корелляции необходим для анализа соотношения двух компаний.



https://github.com/yustinaivanova/netology_statistics_february_20/blob/master/presentation1.pdf

Финансовый анализ данных

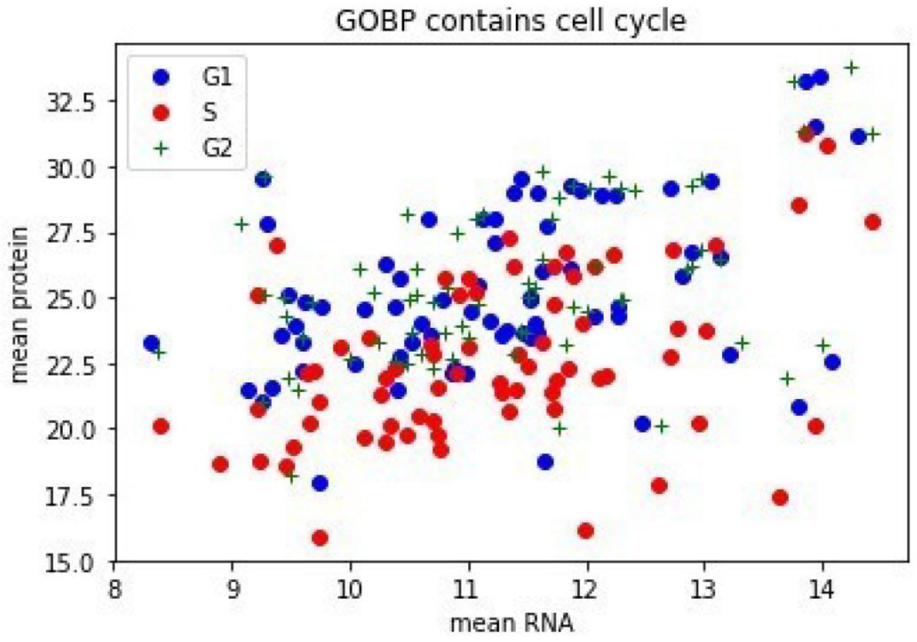
Насколько соотносится протеины и РНК



https://github.com/yustinaivanova/netology_statistics_february_20/blob/master/presentation1.pdf

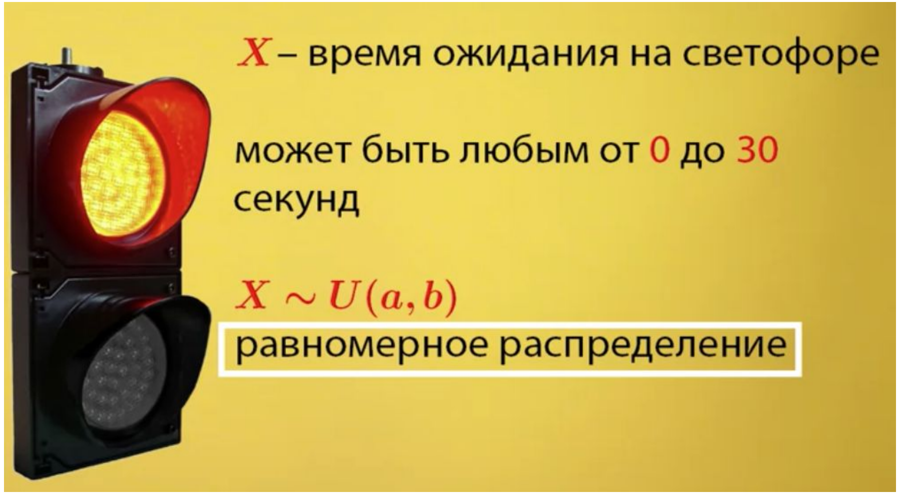
Финансовый анализ данных

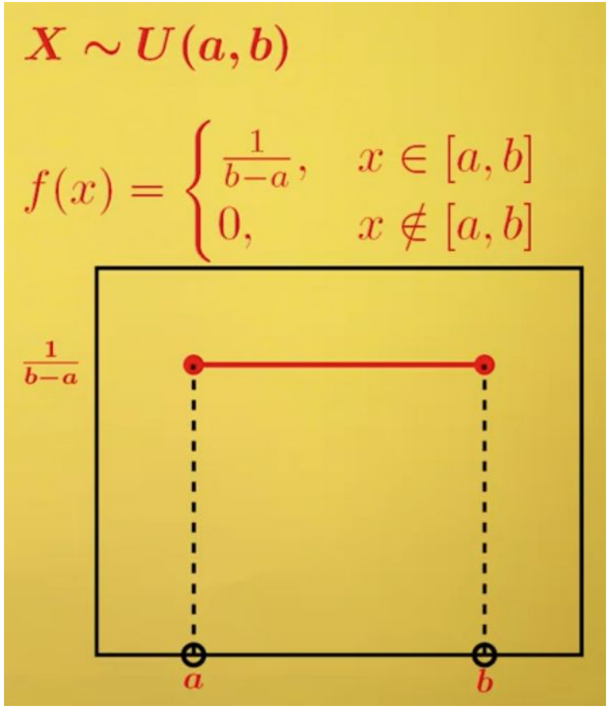
Насколько соотносится протеины и РНК



Примеры случайных величин (равномерное распределение)

Ярким примером непрерывной случайной величины, распределённой **равномерно**, является время ожидания перехода дороги со светофором без секунд.





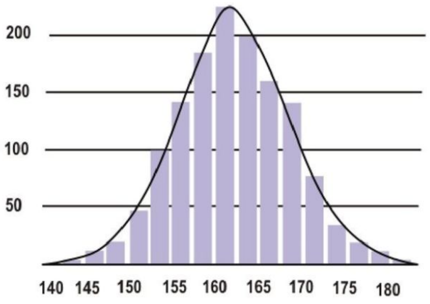
https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Примеры случайных величин (нормальное распределение)

Ярким примером непрерывной случайной величины, распределённой **нормально**, является время прихода на работу, если вы всегда старайтесь приходить в офис, например, около 12:00.

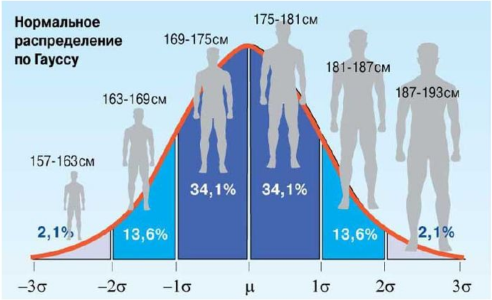
- X – время прихода на работу
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

нормальное (Гауссово) распределение



Распределение роста

Сумма слабо зависимых случайных факторов



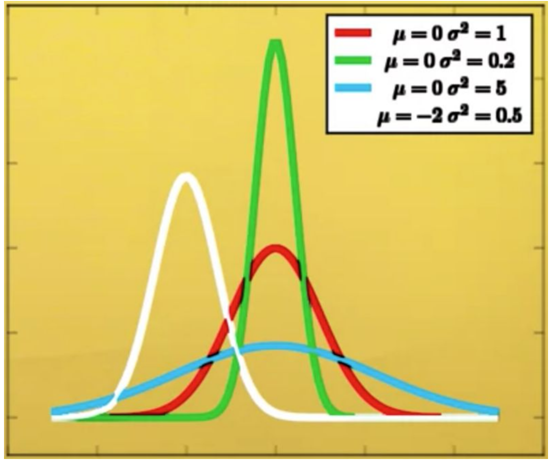
Примеры непрерывных случайных величин (нормальное распределение)

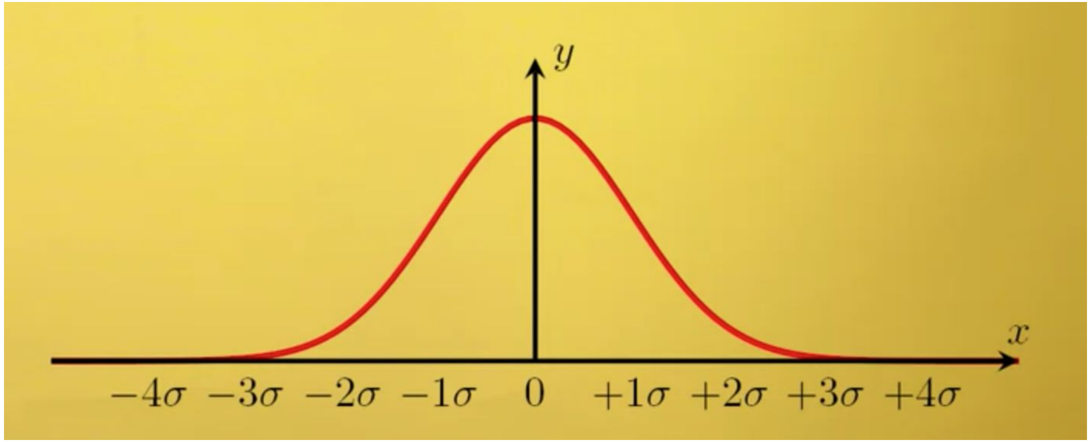
X – время прихода на работу
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

среднее время прихода

разброс вокруг среднего

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

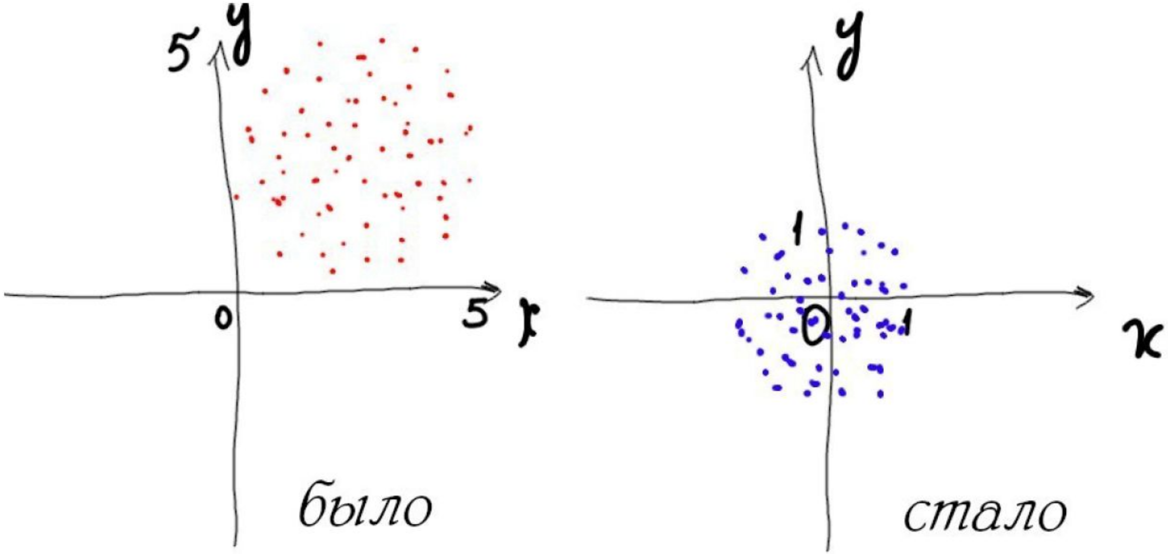




https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Нормализация данных

Часто данные перед анализом необходимо нормализовать.



Нахождение матожидания и дисперсии

Чему равно математическое ожидание и дисперсия случайной величины?

X	2	3	5	6	5	1

Математическое ожидание = среднее значение = (2+3+5+6+5+1)/6 = 3.6

Дисперсия = 1/5 ((2-3.6)^2 + (3-3.6)^2 + (5-3.6)^2 + (6-3.6)^2 + (5-3.6)^2 + (1-3.6)^2) = 4,632

Случайные величины в Python

Random модуль — пример для генерации случайных чисел.

random.random — число от 0 до 1
random.seed — настройка генератора

Модуль numpy также имеет random метод.

numpy.random.normal -
https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.random.normal.html

Случайные величины в Python

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.norm.html#scipy.stats.norm

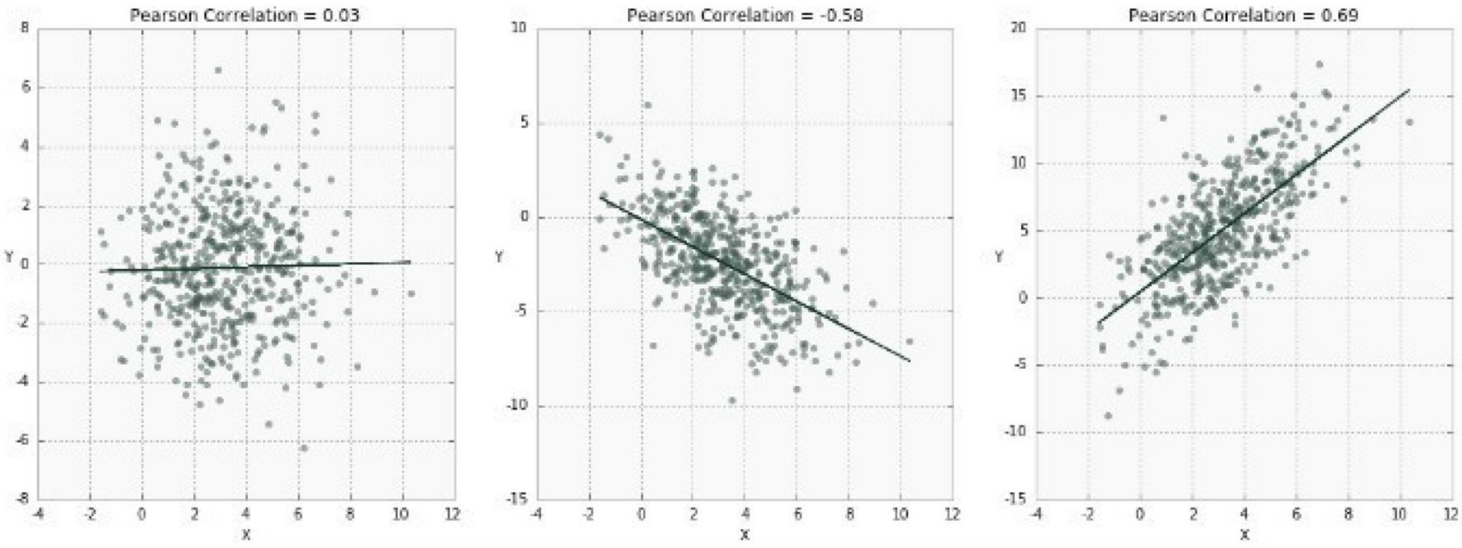
Основные функции для генерации случайных чисел:

stats.norm — создание нормального распределения

stats.norm.rvs(size=1000) — генерация случайного числа, можно задать дисперсию и математическое ожидание

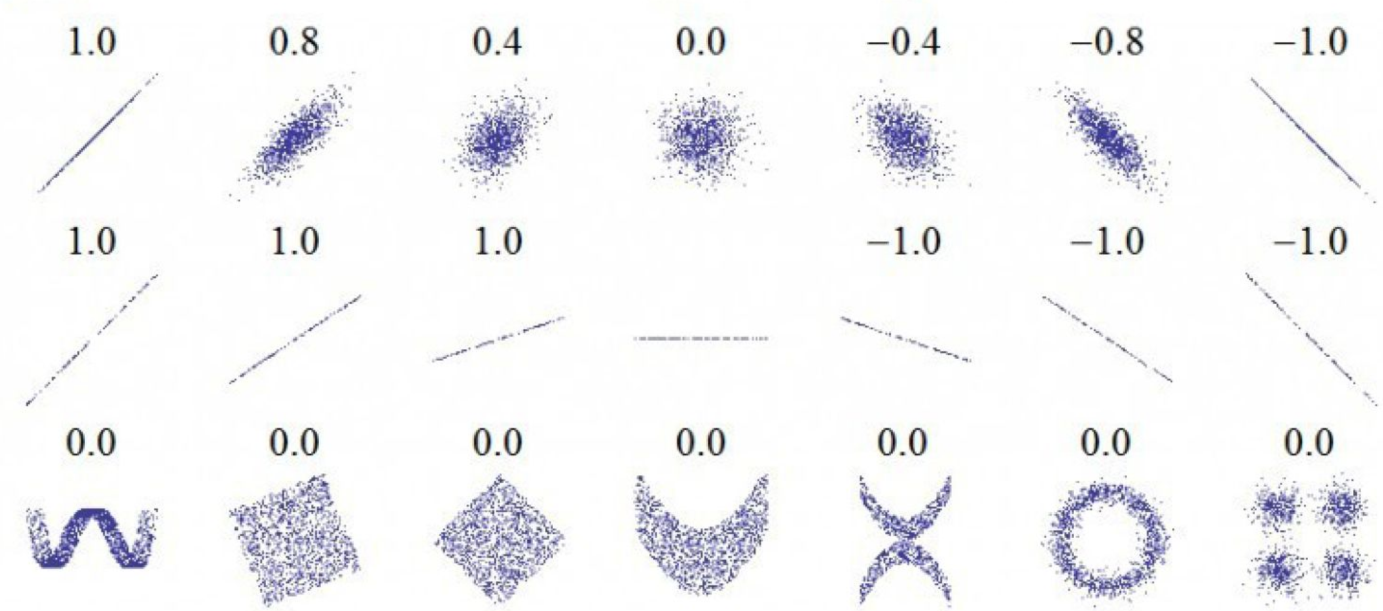
Корреляция Пирсона

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}},$$



http://guessthecorrelation.com/

Корреляция Пирсона



https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson_correlation_coefficient

Корреляция Спирмена

Предназначены для определения взаимосвязи между ранговыми Переменными (проверка на нормальность не требуется).

1. Сопоставить каждому из признаков их порядковый номер (ранг) по возрастанию или по убыванию.
2. Определить разности рангов каждой пары сопоставляемых значенмй (d)
3. Возвести в квадрат каждую разность и суммировать полученные результаты.
4. Вычислить коэффициент коррялции рангов по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

Или использовать библиотеку statistics:
scipy.stats.spearmanr(x, y)

http://medstatistic.ru/theory/spirmen.html

Корреляция Кендалла

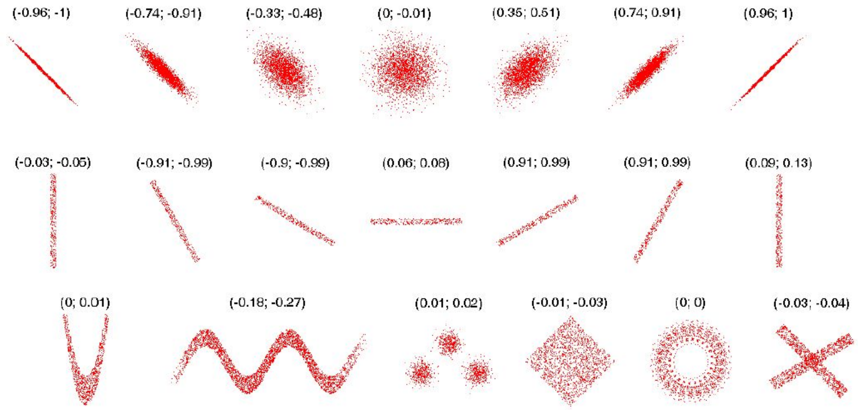
Аналог корреляции Спирмена.

$$\tau = \frac{n_c - n_d}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Nc – число совпадений
Nd – число инверсий.

```
scipy.stats.kendalltau(x, y)
```

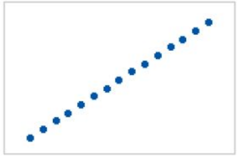
Сравнение коэффициентов Спирмена и Кендалла



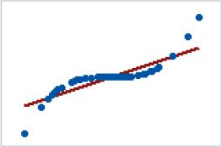
Слева - корреляция Кендалла, справа – корреляция Спирмена

http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Коэффициент_корреляции_Кенделла

Сравнение коэффициентов Пирсона и Спирмена

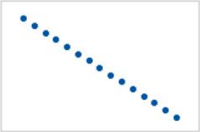


Pearson = +1, Spearman = +1

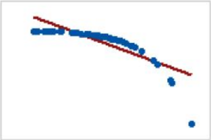


Pearson = +0.851, Spearman = +1

Pearson = −0.093, Spearman = −0.093



Pearson = −1, Spearman = −1



Pearson = −0.799, Spearman = −1

https://support.minitab.com/en-us/minitab-express/1/help-and-how-to/modeling-statistics/regression/supporting-topics/basics/a-comparison-of-the-pearson-and-spearman-correlation-methods/

Матрица корреляций

Для статистического анализа играет наиважнейшую роль.
Строим матрицу корреляций для того, чтобы определить, насколько 2 случайные величины зависят друг от друга.

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

Sx — дисперсия переменной x (среднеквадратичное значение)
Sy — дисперсия переменной y

Матрица корреляций

Для статистического анализа играет наиважнейшую роль.
Строим матрицу корреляций для того, чтобы определить, насколько 2 случайные величины зависят друг от друга.

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

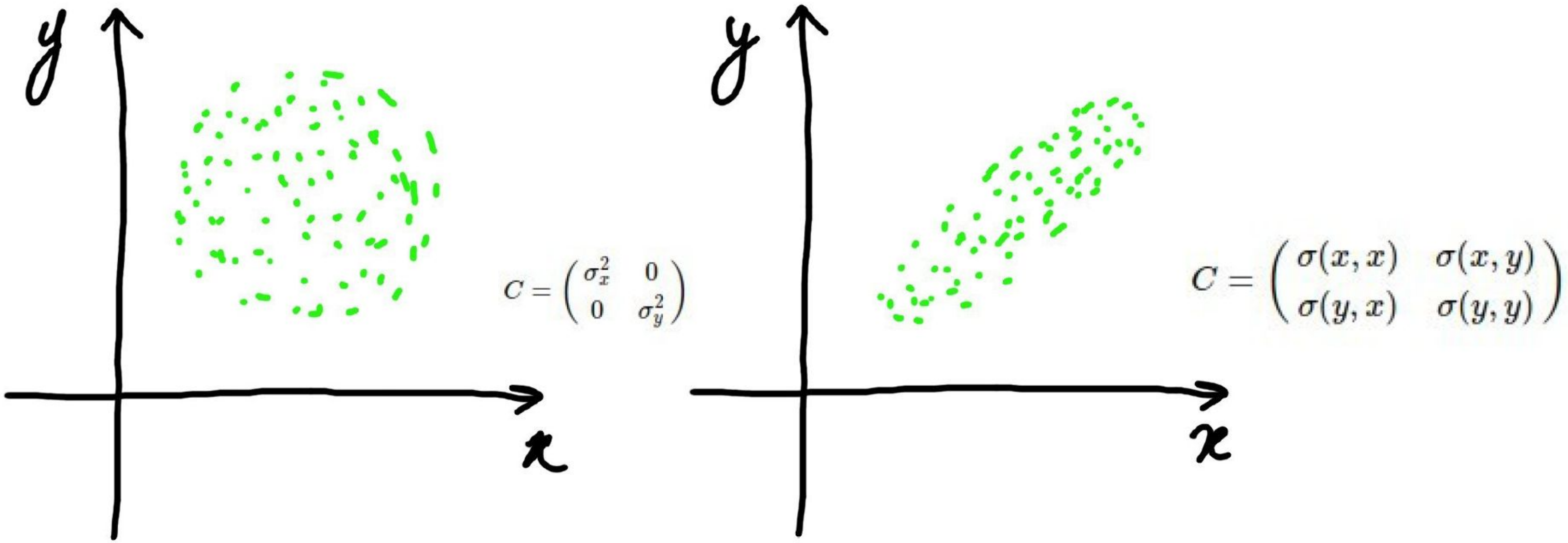
Sx — дисперсия переменной x (среднеквадратичное значение)
Sy — дисперсия переменной y

Если 2 случайные величины **зависимы** друг от друга, то матрица корреляций принимает вид:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma(x,x) & \sigma(x,y) \\ \sigma(y,x) & \sigma(y,y) \end{pmatrix}$$

$$\rho_{X,\,Y} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Матрица корреляций



Независимые переменные

Зависимые переменные

https://github.com/yustinaivanova/netology_statistics_february_20/blob/master/presentation1.pdf

Матрица корреляций

Необходимо уметь перемножать матрицы для статистики. Почему? Матрица корелляций нужна для анализа, для определения, насколько переменные зависимы друг от друга. Это можно сделать с помощью линейной алгебры. Сложно, но можно разобраться.

Numpy.sum() - суммирует все элементы
Numpy.ndarray.dot() - умножает одну матрицу на другую
Numpy.ndarray.T — транспонирование матрицы
numpy.vstack((x, y)) — составляем матрицу из двух матриц, вставленных по вертикали

Спасибо за внимание!

НЕТОЛОГИЯ