UM ALGORITMO DE CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA SEÇÃO ELÍPTICA POR INTEGRACÃO NUMÉRICA.

L. M. Câmara[1], R. B. Biondi[1], S. H. Medeiros[1], S. N. Duarte[1], T. S. Paulo[1], T. O. Rocha[1], J.A.Hermínio[1] .
1 – Oficina de Matemática Industrial – DATIN – CEFET – RN
Av. Senador Salgado Filho, 1559, Tirol, Natal-RN, CEP 59015-000.
E-mail: rafabiondi@ig.com.br

RESUMO

O presente trabalho trata da implementação de um algoritmo computacional capaz de calcular o momento de inércia de seções elípticas, usando como ferramenta numérica o método de integração de Gauss. As diversas simulações feitas com a execução do algoritmo, mostraram resultados compatíveis quando comparados com a solução exata do problema.

PALAVRAS-CHAVE: Momento de inércia; simulação numérica; algoritmo.

1. INTRODUÇÃO

Na prática dos profissionais ligados à área de análise estrutural, é comum o cálculo do momento de inércia de seções transversais das peças que compõem uma estrutura, seja ela ligada a industria automobilística, de máquinas ferramentas entre outras.

Dependendo da geometria dessas seções, o cálculo dos momentos não pode ser feito de forma exata por simples integrações. Daí ter-se que usar métodos de aproximação numérica em tais situações, tendo em visita a facilidade de manipulação desses métodos.

Neste trabalho, o método escolhido foi o da quadratura de Gauss por ser um dos mais populares métodos de integração numérica.

O objetivo principal do trabalho é, usando uma metodologia inerente ao método escolhido, implementar um algoritmo capaz de calcular o momento de inércia de uma seção elíptica, o qual poderá ser usado tanto industrial quanto educacionalmente.

2. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

O estudo analisará o momento de inércia de uma secção elíptica, centrada na origem, com eixo maior igual a 2 a e eixo menor igual a 2 b, como mostra a figura 1. Hermínio (2000).

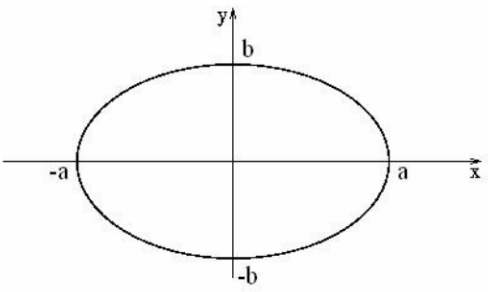

Figura 1: Seção elíptica.

A partir da equação da elipse,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

isolando y obtém-se a seguinte expressão:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{2}$$

É conhecido que o momento de inércia de uma secção qualquer é dado por:

$$Ix=\int_{(A)} y^2 dA \tag{3}$$

Sendo *dA=dxdy*
Levando (2) a (3), resolvendo antes a integral para y tem-se:

$$Ix=\frac{4}{3}\frac{b^3}{a^3}\int_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3 dx \tag{4}$$

A resolução da integral será feita através do método da quadratura de GAUSS o qual conduz à seguinte expressão:

$$Ix = \frac{4a^3}{3b^3} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\xi_i) \qquad (5)$$

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

3.1 Método de Integração de Gauss

Com o método da quadratura de GAUSS, pode-se obter resultados bem precisos, utilizando-se de pontos predeterminados em intervalo de integração normalizado, [-1 , 1]. Dieguez (1994). Como a integral a ser calculada varia de <u>a</u> a <u>b</u> tem-se que calcular os α_i e os ξ_i para tais limites, como será visto a seguir.

Generalizando para qualquer número de pontos, a expressão fica:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\xi_i) \qquad (6)$$

Onde:

n é o número de pontos de integração;
α_i são os pesos (tabelados);
ξ_i são as abscissas (tabelados).

Esses valores são função apenas dos limites de integração <u>a</u> e <u>b</u> isto é:

$$\alpha_i \Big|_a^b = \frac{b-a}{2} . \alpha_i \Big|_{-1}^{1} \quad \text{e} \quad \xi_i \Big|_a^b = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} . \xi_i \Big|_{-1}^{1}$$

4. ALGORITMO / PROGRAMA

Em linguagem natural, o algoritmo tem a seguinte estrutura:

Entrada:
Número de pontos de integração;
Eixos maior e menor da elipse;
Processo:
Cálculo aproximado do momento de inércia;
Saída:
Valor aproximado do momento de inércia.

A partir deste algoritmo foi implementado um programa em linguagem delphi baseado na expressão (5) cuja saída é o valor aproximado do momento de inércia referente a cada simulação feita.

5. RESULTADOS

O programa foi executado considerando três simulações conforme o número de pontos de integração escolhidos, cujos valores de cada momento de inércia são apresentados nas tabelas I, II e III, considerando <u>a</u> = 2 e <u>b</u>=1.

(a) $Ix = \alpha_0 f(\xi_0) + \alpha_1 f(\xi_1)$ (2 pontos de integração)

(b) $Ix = \alpha_0 f(\xi_0) + \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2)$ (3 pontos de integração)

(c) $Ix = \alpha_0 f(\xi_0) + \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2) + \alpha_3 f(\xi_3)$ (4 pontos de integração)

Tabela I: Momento de inércia para n=2.

Momento de inércia	
Ix_{exato}	1,5707
$Ix_{\text{presente estudo}}$	1,5548
Erro	0,0159

Tabela II: Momento de inércia para n=3.

Momento de inércia	
Ix_{exato}	1,5707
$Ix_{\text{presente estudo}}$	1,5691
Erro	0,0016

Tabela III: Momento de inércia para n=4.

Momento de inércia	
Ix_{exato}	1,5707
$Ix_{\text{presente estudo}}$	1,5703
Erro	0,0003

Conforme Beer e Johnston (1995), o valor de Ix_{exato} é dado pela seguinte equação: $Ix = \dfrac{\pi a b^3}{4}$.

Na primeira simulação, Ix_{exato} apresenta uma sensível diferença em relação a $Ix_{\text{presente estudo}}$ porque a mesma utiliza apenas dois pontos de integração. Para a segunda simulação nota-se uma redução do erro, proveniente do aumento do número de pontos de integração de dois para três pontos. Já para a terceira simulação, que utiliza quatro pontos de integração o erro praticamente inexiste.

A figura 2 mostra o teste de convergência que garante a validade do estudo realizado.

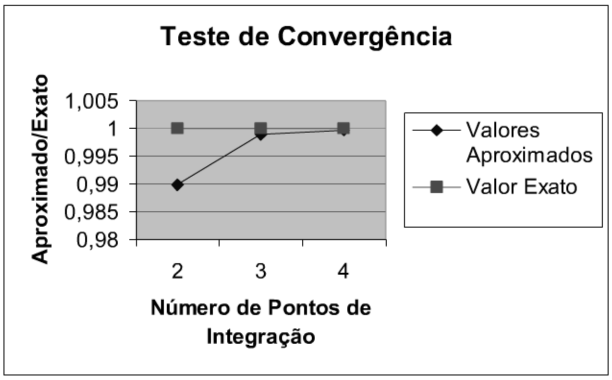

Figura 2: Teste de convergência.

A figura 3 mostra uma tela de execução do programa implementado.

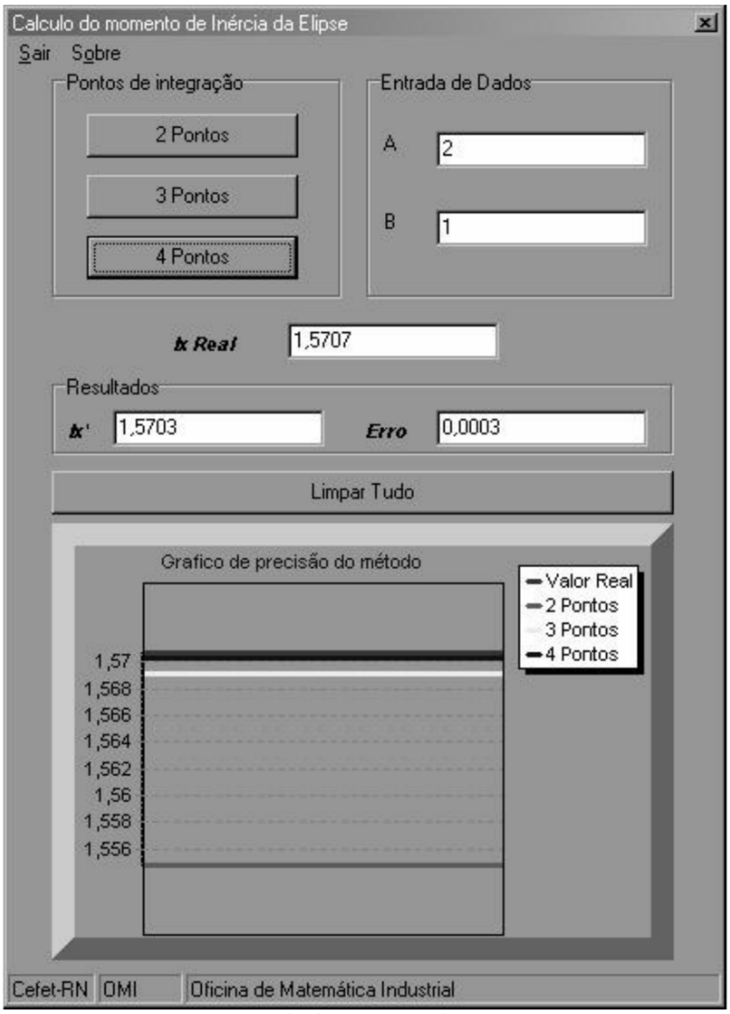

Figura 3: Tela da execução do programa.

6. CONCLUSÃO

No presente trabalho foi implementado um programa seguindo um algoritmo de cálculo do momento de inércia de seções elípticas no caso geral e circular no caso particular, baseando-se no método da quadratura de Gauss.

O algoritmo mostrou-se bastante eficaz quando executado, como mostram os resultados apresentados.

Apesar do algoritmo ser específico para seções elípticas ou circulares, o mesmo poderá ser ampliado para contemplar outros tipos de seção.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beer, F. P. e Johnston, E. R. **Resistência dos materiais,** Ed. Makron Books, 3ª edição, São Paulo, p.644, 1995.

Dieguez, J.P.P. **Métodos numéricos computacionais para a engenharia**, Vol. 2, Editora Âmbito Cultural, Rio de janeiro, v.2,p.123, 1994.

Hermínio,J.A. **O fundamental do cálculo para tecnólogos**, Publicação interna, CEFET/RN, p.8, 2000.