

APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN A UM SISTEMA DE POSICIONAMENTO DE VEÍCULO AQUÁTICO

André TEIXEIRA DE AQUINO; André LUIZ CARNEIRO DE ARAÚJO

(1) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, e-mail:

andret.aquino@gmail.com.br

(2) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, e-mail:

andreluiz@cefetce.br

RESUMO

Por ser um algoritmo capaz de estimar as variáveis de estado de sistemas lineares a partir de medidas ruidosas, o filtro de Kalman mostra-se como uma possível solução para amenizar o problema de ruído presente em sistemas de posicionamento. O problema de ruído ocorre principalmente quando os sensores que compõem o sistema possuem uma baixa precisão. Esse ruído pode causar uma instabilidade e uma redução da confiabilidade do sistema o que pode vir a prejudicar ou até mesmo torná-lo inviável para aplicação. Dentre as diversas soluções para reduzir esse problema, o filtro de Kalman mostra-se como uma ferramenta eficiente e de fácil aplicação e, por isso, cada vez mais utilizada para esse tipo de aplicação. O presente artigo propõe a aplicação do filtro de Kalman à dados de posição de um veículo aquático, obtidos através de um sistema de posicionamento, constatando assim a viabilidade e facilidade de sua utilização para esse tipo de aplicação.

Palavras-chave: sistema de posicionamento, filtro de Kalman

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a utilização do filtro de Kalman para a estimação de estados tem recebido inúmeras contribuições nas mais diversas áreas de aplicações. As aplicações destas contribuições variam de filtragem de trajetórias de veículos espaciais [1], estimação de estados em problema de rastreamento [2], localização em robótica móvel [3], dentre outras. Na filtragem de trajetória é realizada a filtragem de dados da trajetória de veículos espaciais via estimações de estado H_2 e H_∞ através das equações do filtro de Kalman. Em problemas de rastreamento o filtro de Kalman é utilizado na estimação de estados de um veículo de dinâmica desconhecida a partir de medidas de outro veículo. Já na localização em robótica móvel o filtro é utilizado para estimar a posição real do robô em ambientes discretizados permitindo assim a autonomia do robô.

Em sistemas de posicionamento é comum existir uma diferença entre a posição calculada e a posição real que se deseja encontrar. Essa diferença muitas vezes é pequena e, dependendo da aplicação, torna-se irrelevante. Entretanto, diversos fatores, como ruído e uma baixa precisão dos sensores que compõe o sistema, podem contribuir para que essa diferença cresça e passe a prejudicar a aplicação. Nesses casos, para se obter medidas de posição confiáveis, é necessário utilizar técnicas para reduzir essa diferença e tornar o sistema novamente viável. Uma maneira simples e eficiente de resolver esse problema seria a aplicação do filtro de Kalman aos valores de posição, obtendo assim estimativas mais próximas da posição real.

Como forma de provar a eficiência e praticidade da utilização do filtro de Kalman para solucionar problemas de ruído em sistemas de posicionamento, foi aplicado o filtro de Kalman à dados de posição de um veículo aquático.

O filtro foi aplicado com a utilização de um software de modelagem matemática e o resultado foi analisado e discutido no artigo juntamente com a demonstração da forma de aplicação do filtro.

Com o objetivo de simplificar os cálculos, o filtro foi aplicado somente a duas dimensões (x e y).

O FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo simples e eficiente, capaz de estimar as variáveis de estado de sistemas lineares a partir de medidas ruidosas dos sensores que compõem o sistema. Por esta razão o filtro de Kalman é bastante utilizado em sistemas de navegação e rastreamento de veículos.

É considerado por muitos o grande avanço da teoria da estimação do século XX. Muitas realizações desde sua introdução talvez não fossem possíveis sem ele. [1]

O objetivo do filtro de Kalman em um sistema dinâmico é estimar, a cada instante e de forma ótima, a saída do sistema. Para isso é necessário conhecer a variável de estado (x_i) e saber que a variável de saída (y_i) está sendo contaminada por um ruído (u_i) e por uma perturbação (w_i)

Para a aplicação do filtro de Kalman é necessário, primeiramente, modelar o sistema através de uma equação linear. Por isso, a equação que definirá o sistema terá a estrutura semelhante à equação 1. Onde x é a variável do sistema, a é uma constante e w é a perturbação do sistema, que é uma variável aleatória com média zero e variância W .

$$x(k + 1) = a \times x(k) + w(k) \quad [\text{Eq. 01}]$$

Após a definição da equação linear, a aplicação do filtro de Kalman resume-se basicamente na utilização de cinco fórmulas que se referem às cinco etapas em que se divide a aplicação do filtro. Cada uma das etapas, bem como a sequência de aplicação, estão demonstradas na Figura 1 e serão detalhadas em seguida.

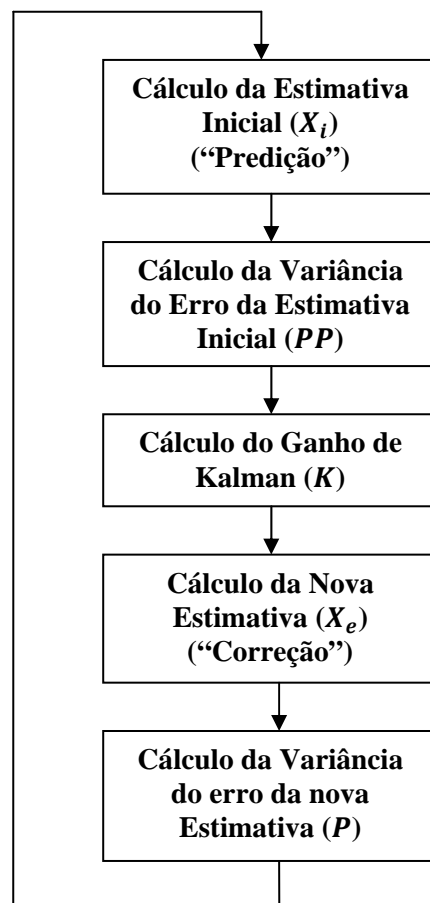


Figura 1 – Etapas e sequência de Aplicação do Filtro de Kalman

O cálculo da estimativa inicial, que é a primeira etapa para a aplicação do filtro, é realizado através da multiplicação da estimativa anterior (X_e) pela constante do sistema linear (a). A primeira estimativa inicial, onde não se sabe qual a estimativa anterior, é definida de forma aleatória e por isso não é possível definir a variância de seu erro. A estimativa inicial é calculada através da equação 2.

$$X_i = a \times X_e(0) \quad [\text{Eq. 02}]$$

Na segunda etapa, é calculada a variância do erro da estimativa inicial que é encontrada através da multiplicação dos valores da variância do erro da estimativa anterior (P), da variância da perturbação do

sistema (W) e novamente da constante do sistema linear (a). Como foi dito anteriormente, não é possível definir a variância do erro para a primeira estimativa inicial e por isso o valor dessa variância é definido de forma aleatória e com valor geralmente elevado. A variância da estimativa inicial é calculada através da equação 3.

$$PP = P \times a^2 \times W \quad [\text{Eq. 03}]$$

Para as três últimas etapas, será inserido o ruído na medição de $x(k)$, que é exatamente o ruído na medida dos sensores que compõe o sistema, obtendo assim um novo sistema linear com uma nova equação. A medida é $y(k)$, a constante do sistema é M e o ruído é $u(k)$ de variância U . A equação do novo sistema será semelhante à apresentada pela equação 4.

$$y(1) = M \times x(1) + u(1) \quad [\text{Eq. 04}]$$

Na terceira etapa utilizamos a constante do novo sistema (M), a variância calculada na segunda etapa (PP) e a variância do erro da medida do sensor (U) para calcular o ganho de Kalman. O ganho de Kalman será utilizado para encontrar a nova estimativa ($X_e(1)$) e a variância do erro da nova estimativa (P) que são as duas últimas etapas. A equação 5 é utilizada para calcular o ganho de Kalman.

$$K = \frac{M \times PP}{PP \times M^2 + U} \quad [\text{Eq. 05}]$$

Na quarta etapa faremos uma nova estimativa ($X_e(1)$) que será a saída do filtro, ou seja, a estimativa que desejamos encontrar. O cálculo dessa nova estimativa é feito através dos valores da estimativa inicial (X_i), do ganho de Kalman (K), da medida ruidosa ($y(1)$), que é o valor de entrada do filtro e para a aplicação do artigo serão as medidas de posição do veículo, e da constante do novo sistema (M). A equação 6 é utilizada para calcular a nova estimativa.

$$X_e(1) = X_p + K\{y(1) - M \times x_p\} \quad [\text{Eq. 06}]$$

Na quinta e última etapa, será calculada uma nova variância, agora para o erro da nova estimativa. Para esse cálculo será necessário o valor da variância do erro da estimativa inicial (PP), da variância do erro da medida do sensor (U), do ganho de Kalman (K) e do valor da constante do novo sistema (M). A nova variância pode ser obtida através da equação 7.

$$P(1) = PP \times (1 - K \times M)^2 + (U \times K^2) \quad [\text{Eq. 07}]$$

O valor da variância do erro da nova estimativa será utilizado para o cálculo da próxima estimativa inicial, reiniciando assim a sequência do filtro de Kalman.

APLICAÇÃO E RESULTADOS

Para a aplicação do filtro aos valores de posição do veículo aquático, inicialmente definimos as equações lineares referentes ao sistema com e sem ruído.

Como na aplicação temos um movimento retilíneo e uniforme que sofre uma perturbação, utilizamos a função horária do espaço ($s = S_0 + v \times t$) e adicionamos a perturbação (w) para modelar o sistema obtendo assim a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S0_x \\ S0_y \\ V0_x \\ V0_y \end{bmatrix} + w \quad [\text{Eq. 08}]$$

Para modelar o sistema com ruído, que são as posições (x e y) com a adição do ruído (u), teremos o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} Y_x \\ Y_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad [\text{Eq. 09}]$$

Definidas as equações lineares, foram então definidos os valores de inicialização do filtro referentes à aplicação:

- Variância do erro da medida do sensor: $U = 5$;
- Variância da perturbação do sistema sem o ruído: $W = 5$;
- Primeiro valor de variância do erro da estimativa inicial: $PP = 40.000$;
- Primeira estimativa inicial (X_i): $x = 0$ e $y = 10$;

Para estabelecer uma referência e facilitar a análise dos resultados, foram geradas, a partir do modelo do sistema, as posições do veículo caso não houvesse o ruído, ou seja, para medidas com erro zero.

A Tabela 1 mostra os valores de posição antes da aplicação do filtro, após a aplicação do filtro e os valores para o erro igual a zero.

Tabela 1 – Resultados

| Id | X (Antes) | X (Fitrado) | X (Erro Zero) | Y (Antes) | Y (Fitrado) | Y (Erro Zero) |
|-----------|------------------|--------------------|----------------------|------------------|--------------------|----------------------|
| 1 | 0,2256 | 0,2256 | -2,194 | 9,84 | 9,84 | 10,0 |
| 2 | 23,7659 | 23,765 | 18,4605 | 10,6243 | 10,6241 | 10,0 |
| 3 | 43,5079 | 44,1408 | 42,9952 | 13,0707 | 12,8858 | 10,0 |
| 4 | 57,3707 | 59,8943 | 57,9669 | 10,4021 | 11,0757 | 10,0 |
| 5 | 80,6458 | 79,9924 | 79,0768 | 8,788 | 9,1597 | 10,0 |
| 6 | 97,7779 | 98,568 | 98,8682 | 13,6542 | 12,6656 | 10,0 |
| 7 | 127,7865 | 122,4234 | 123,6219 | 11,8452 | 12,2196 | 10,0 |
| 8 | 142,6559 | 142,6837 | 140,1809 | 10,516 | 10,8898 | 10,0 |
| 9 | 154,8378 | 159,8916 | 157,5827 | 11,5018 | 11,3053 | 10,0 |
| 10 | 175,9876 | 178,3693 | 177,4855 | 8,8639 | 9,2943 | 10,0 |
| 11 | 206,8795 | 200,7609 | 203,8811 | 11,9149 | 11,2618 | 10,0 |
| 12 | 225,2001 | 222,0305 | 224,3323 | 10,6004 | 10,8077 | 10,0 |
| 13 | 244,535 | 242,8034 | 243,6561 | 11,3975 | 11,2944 | 10,0 |
| 14 | 253,3739 | 260,5241 | 257,1916 | 7,6581 | 8,3514 | 10,0 |
| 15 | 280,032 | 280,3451 | 279,5225 | 13,4339 | 12,2813 | 10,0 |
| 16 | 301,0883 | 300,4454 | 299,5552 | 10,9714 | 11,4441 | 10,0 |
| 17 | 319,2637 | 320,1346 | 320,6876 | 5,7132 | 6,774 | 10,0 |
| 18 | 336,4783 | 339,3123 | 338,7202 | 11,0508 | 9,881 | 10,0 |
| 19 | 357,3989 | 358,8145 | 357,8139 | 12,8495 | 12,4065 | 10,0 |
| 20 | 376,644 | 378,2622 | 379,0009 | 11,4278 | 11,875 | 10,0 |

Para facilitar a visualização dos resultados, os dados foram apresentados também de forma gráfica através da Figura 2:

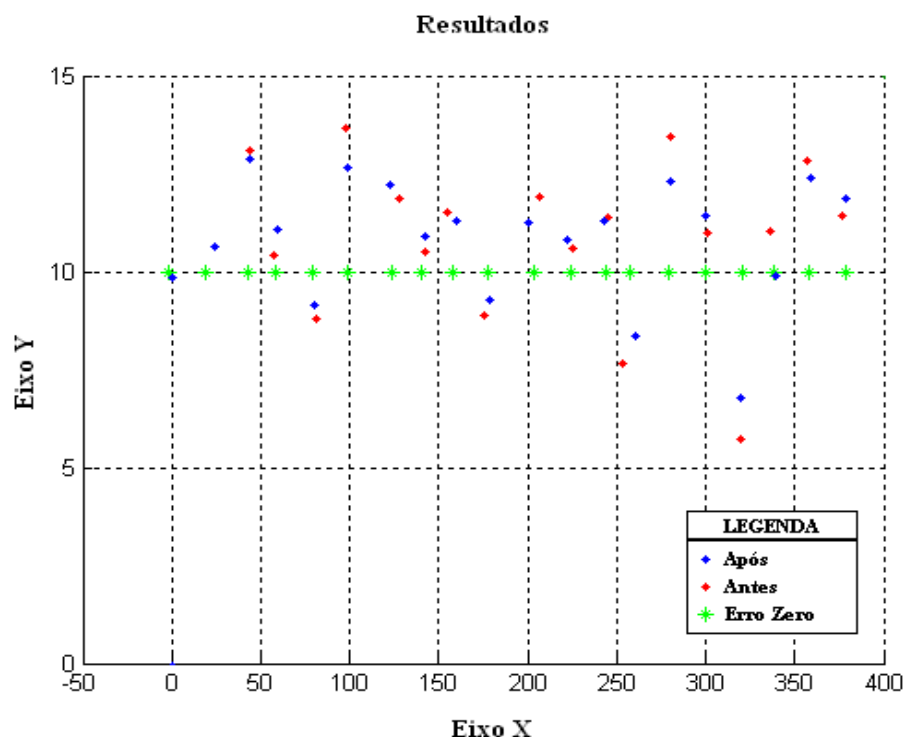


Figura 2 – Resultados

Por fim, como forma de comprovar a redução do erro após a aplicação do filtro, foi calculado o erro médio quadrático antes e após a aplicação. Os resultados estão apresentados na Tabela 2:

Tabela 2 – Erro Médio Quadrático

| Eixo | Antes | Depois |
|----------|--------|--------|
| X | 5,6 | 4,215 |
| Y | 4,2943 | 2,9644 |

CONCLUSÃO

Através da análise dos resultados é possível concluir que houve uma redução do erro após a utilização do filtro. Essa redução se confirma através da análise do erro médio quadrático antes e depois da aplicação do filtro. Tanto para o eixo x, quanto para o eixo y, esse erro sofreu uma redução significativa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o apoio do CNPq através da bolsa de incentivo a pesquisa PIBIC/CNPq.

REFERÊNCIAS

- [1] ABREU, P.A.J. Filtragem Robusta de Trajetórias de Veículos Espaciais. 2002. Tese (Mestrado em Engenharia de Eletricidade) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2002.
- [2] FARIA, M.C.P; Souza, M.L.O. Aplicação do Filtro de Kalman para a Estimação de Estados em um Problema de Rastreamento. *In*: CONGRESSO TEMATICO DE DINAMICA E CONTROLE (SBMAC), 3, 2004, Ilha Solteira. São Paulo.

[3] SILVA, C.C.; Pereira, J.A. Implementação e Análise de localização em Robótica Móvel por Filtro de Kalman. *In*: IX ENCONTRO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO DO ITA, 2003, SÃO José dos Campos.