

OBTENÇÃO DE MODELO NUMÉRICO DO TERRENO DE ALTA RESOLUÇÃO UTILIZANDO O INTERPOLADOR SPLINE COM TENSÃO REGULARIZADA

Eugênio P. Fernandes LEITE (1); Jussara Severo da SILVA (2); Giseliane Silva GOMES (3)

(1) Coordenação de Meio Ambiente – CEFET-PB, Av. 1 de Maio, 720 - Jaguaribe e-mail: eupaf@cefetpb.edu.br

(2) Curso Superior de Tecnologia em Geoprocessamento – CEFET-PB, e-mail: jussarasevero@yahoo.com.br

(3) Curso Superior de Tecnologia em Geoprocessamento – CEFET-PB, e-mail: giseliane_jp@yahoo.com.br

RESUMO

O objetivo do trabalho foi obter um Modelo Numérico do Terreno (MNT) de João Pessoa-PB, utilizando o interpolador *Spline* com Tensão Regularizada, implementado no SIG GRASS. MNTs são dados com aplicações diversas em geoprocessamento. Os 41.177 pontos cotados utilizados são oriundos de restituição fotogramétrica e da coleta em campo, com estação total. Para otimizar as interpolações foram usados valores de 0,1 e 0,25 para *suavização* e de 40 e 50 para *tensão*; cada posição estimada foi obtida, utilizando 100, 200 e 300 pontos. Produziram-se assim 12 MNTs, analisados a partir do Erro Quadrático Médio (EQM), do Critério de Informação de Akaike (AIC) e do Coeficiente de Determinação (R^2). As estatísticas foram estabelecidas entre valores observados e calculados para cada ponto amostral, sendo que o AIC e o R^2 , após ajuste de modelo linear. O MNT mais adequado foi obtido com suavização de 0,1, tensão de 50 e número de pontos igual a 100, que apresentou AIC, EQM e R^2 , respectivamente, de 9.711,13, 0,07413 e 0,9998. Apesar da grande quantidade de dados, verificou-se setores sem observações e valores interpolados fora da faixa observada, de modo a demandar novas fontes de dados para elaboração do MNT final.

Palavras-chave: MNT, GRASS, R, *Spline* com Tensão Regularizada.

1. INTRODUÇÃO

Os Modelos Numéricos do Terreno (MNTs) correspondem a um padrão de dado geográfico utilizado para fins diversos. Constam, geralmente, de uma superfície contínua em formato matricial ou grade vetorial, em que a cada célula – ou posição, no segundo caso – corresponde ao valor estimado de um atributo em estudo.

Os atributos considerados são variados, desde a simples representação do relevo de uma área até a previsão da migração de agentes poluentes no solo, por exemplo, a partir de modelos multi-dimensionais, com maior complexidade.

Tem-se como exemplos de aplicações de MNTs, apresentados por Câmara et al. (2001), o armazenamento de dados de altimetria para geração de mapas topográficos, a obtenção de mapas de declividade e exposição para apoio à análise de geomorfologia e erodibilidade, bem como para a apresentação tridimensional do fenômeno considerado, em combinação com outras variáveis.

Na presente pesquisa, a elaboração do MNT da área do município de João Pessoa – PB, juntamente a outros dados geográficos, possibilitará a realização de estudos no sentido de identificar áreas de risco ambiental, áreas de preservação permanente, avaliação de volumes de corte e aterro para instalação de novas vias, dentre outras aplicações possíveis.

Define-se, a partir do exposto anteriormente, como objetivo do trabalho, a elaboração de um MNT para a cidade de João Pessoa. Para tanto, utilizou-se o algoritmo *Spline* com Tensão Regularizada (Mitasova e Mitas, 1993; Mitasova et al., 1995), implementado no SIG GRASS - Geographic Resources Analysis Support System (GRASS, 2007).

Com o estabelecimento de diferentes valores para variáveis constantes no procedimento de interpolação utilizado (suavização, tensão e número de pontos por posição), foram obtidas várias superfícies em formato raster, de alta resolução, quando se procurou encontrar um MNT mais adequado à representação do relevo da área em estudo, a partir de análises estatísticas, efetuadas com o sistema estatístico R (R Development Core Team, 2006).

Uma característica comum às ferramentas computacionais utilizadas no trabalho, seja para a realização dos procedimentos da pesquisa ou para elaboração do texto final é que todas são softwares livres, sob a Licença Pública Geral, ou General Public License – GPL, do Projeto GNU (www.gnu.org).

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O algoritmo *Spline* com Tensão Regularizada ou *Regularized Spline with Tension (RST)*, utilizado nos procedimentos de interpolação, corresponde a uma Função de Base Radial, com condição de minimização dos desvios entre valores observados e calculados, ao mesmo tempo, em que promove a suavização da superfície obtida.

Uma síntese da evolução do método é apresentada a seguir (Cebecauer et al., 2002; Sárközy, 1999) em que, inicialmente, a condição de mínimos desvios é encontrada por (Wahba, 1990):

$$\sum_{j=1}^N |p^{[j]} - S(x^{[j]})|^2 w_j + w_0 I(S) = \text{mínimo} \quad [\text{Eq. 1}]$$

onde $p^{[j]}$ são valores observados e que estão discretizados em pontos x , de posições $x^{[j]} = (x_1^{[j]}, x_2^{[j]})$ com $j = 1, \dots, N$ em uma região bi-dimensional do espaço; w_j e w_0 são ponderações positivas e $I(S)$ é a medida da suavização (*smoothing*). Para $w_j / w_0 = 0$, a função $S(x)$ passa exatamente pelo valor observado. Nesse caso o método de interpolação seria exato.

A solução geral do problema de minimização, a partir da equação (1), pode ser expressa como a soma de dois componentes (Talmi e Gilat, 1977):

$$S(x) = T(x) + \sum_{j=1}^N \lambda_j R(x, x^{[j]}) \quad [\text{Eq. 2}]$$

onde $T(x)$ é uma componente de tendência e $R(x, x^{[j]})$ é uma função de base radial que depende de $I(S)$. Em formulação 2-D, o caso do presente estudo, a função RST definida na equação (2), tem a forma conforme abaixo (Mitasova et al., 1995):

$$S(x) = a_1 + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left[-E_1(\rho) + \ln \rho + C_E \right] \quad [\text{Eq. 3}]$$

onde $a_1 = T(x) = \text{constante}$; $\rho = (\varphi r/2)^2$; $r_j^2 = \sum_{j=1}^d (x - x^{[j]})^2$ é a distância ao quadrado, C_E corresponde a constante de Euler (0,577215); $E_1(.)$ é uma função exponencial integral (Abramowitz e Stegun, 1964) e φ é um parâmetro generalizado de tensão.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1. Dados geográficos

Os dados utilizados no estudo constaram de pontos cotados, envolvendo a área do município de João Pessoa – PB (Figura 1), adquiridos de forma irregularmente espaçada, oriundos de restituição fotogramétrica e de coleta em campo com estação total. Os dados, em sua maioria, foram obtidos no levantamento aerofotogramétrico, realizado pela CAGEPA, Companhia de Água e Esgotos do Estado da Paraíba, em 1998. Desde então o conjunto de pontos tem sido paulatinamente atualizado por meio de coleta de novos valores, em áreas com ausência de informação, usando o método topográfico supracitado, pela Prefeitura Municipal de João Pessoa – PB. Até a data de realização do trabalho, em junho de 2007, contou-se com 41.177 pontos cotados para proceder à interpolação do MNT.

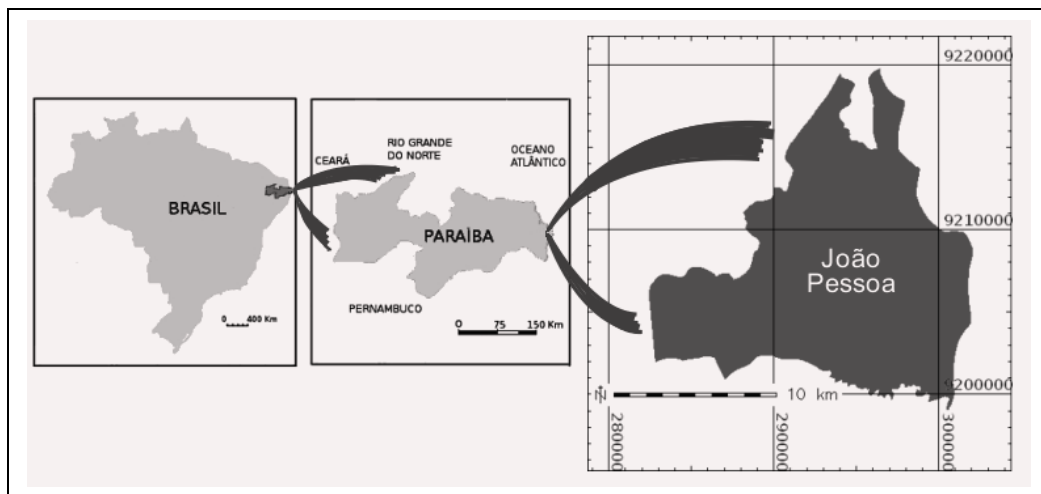


Figura 1 - Área do município de João Pessoa-PB.

Além dos dados pontuais citados anteriormente, foi utilizado o contorno do município de João Pessoa, obtido do Servidor de Mapas do IBGE, que originalmente em formato vetorial, foi transformado em raster, a ser usado como máscara. Dessa forma, os procedimentos de interpolação corresponderam estritamente à área de João Pessoa.

Os dados geográficos são entidades vetoriais, com coordenadas x, y e z ; x e y correspondem às coordenadas geográficas Longitudes e Latitudes UTM, Zona 25, Hemisfério Sul (datum geográfico SAD 69) e z são altitudes, em m, da área do município, atributo que foi modelado.

3.2. Interpolação espacial

O algoritmo usado para obtenção dos MNTs foi *Spline* com Tensão Regularizada (Mitasova e Mitás, 1993; Mitasova et al., 1995), implementado no sig grass, no módulo *v.surf.rst*.

Os valores adotados para tensão e suavização foram, respectivamente, 40, 50 e 0,1, 0,25. Além dos parâmetros citados, na forma como está implementado o método de interpolação RST permite uma

segmentação do processo de modo a considerar somente uma dada vizinhança, para o cálculo de uma posição. O fato representa a possibilidade de se trabalhar com numerosos conjuntos de dados, como no presente caso, em que o esforço computacional é limitante, para métodos globais de interpolação. Assim, foram estabelecidos para a estimativa de cada célula de MNT, números de pontos igual a 100, 200 e 300.

O módulo *v.surf.rst*, além da superfície de elevação, tem ainda como produtos mapas de declive, aspecto, curvaturas do perfil, tangencial e média.

3.3. Análises dos MNTs obtidos

A combinação dos valores de tensão, de suavização e do número de pontos a serem interpolados por vez, produziram 12 superfícies (MNTs), na forma de dados matriciais, com resolução de 5 m e um total de 18.480.000 células cada uma, considerando a região de estudo. Dentre os MNTs obtidos foi escolhido, a partir de análises estatísticas, conforme se especifica a seguir, o que mais se aproximou da real condição do relevo da área de estudo.

A apreciação das superfícies interpoladas procederam-se com bases nas estatísticas Critério de Informação de Akaike (*Akaike Information Criterion* - AIC), Erro Quadrático Médio (EQM) e o Coeficiente de Determinação (R^2). O AIC e o R^2 foram estabelecidos a partir de um modelo linear, ajustado entre os dados observados e valores preditos, em cada MNT.

O AIC (Akaike, 1994), estatística estabelecida a partir da distância de Kulback e Leibler (1951), corresponde a uma medida da discrepância entre as curvas de um modelo verdadeiro e de um modelo aproximado. É calculado pela expressão:

$$AIC = -2 \ell(\theta) + 2k \quad [\text{Eq. 4}]$$

onde $\ell(\theta)$ corresponde ao logaritmo da função de verossimilhança maximizada e k é o número de parâmetros do modelo avaliado. O menor valor estimado para o AIC indica o modelo mais apropriado para representar o conjunto de dados em análise.

Por sua vez, o EQM é calculado (Philips et al., 1992):

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Z_{x_i} - \hat{Z}_{x_i}]^2 \quad [\text{Eq. 5}]$$

onde Z_{x_i} é o valor observado de Z para a posição x_i e \hat{Z}_{x_i} é o valor calculado para a mesma posição. O menor valor estimado do EQM corresponde ao modelo com melhor aproximação dos valores estimados com os valores observados.

O coeficiente de determinação (R^2) representa a qualidade do ajuste de um modelo linear estabelecido, no caso, entre valores preditos e observados, em cada uma das condições de obtenção das superfícies interpoladas. Segundo Barbetta et al. (2004), o R^2 é calculado:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Z}_{x_i} - \bar{Z})}{\sum (Z_{x_i} - \bar{Z})} \quad [\text{Eq. 6}]$$

Quanto mais próximo da unidade encontrar-se o R^2 , melhor ajuste apresenta um tal modelo em análise.

3.4. Recursos computacionais

Os sistemas computacionais utilizados na execução do trabalho são todos *softwares livres*, com base na Licença GNU/GPL (GNU, 2007). O GRASS - Geographic Resources Analysis Support System - (GRASS, 2007) é um sistema de informação geográfica com muitos recursos para análises vetoriais e raster. No módulo *v.surf.rst* do GRASS encontra-se implementado o algoritmo *Spline* com Tensão Regularizada, utilizado como interpolador. Foram ainda usados outros módulos do GRASS, no caso, para importação dos pontos cotados em formato *dxg* (*v.in.dxf*), importação do polígono correspondente ao município em formato *shapefile* (*v.in.ogr*) e para a conversão do polígono importado para dados matricial (*v.to.rast*). A visualização tridimensional dos MNTs procedeu-se usando o NVIZ, a ferramenta de visualização multi-dimensional do SIG GRASS.

A determinação das estatísticas foi executada utilizando-se o sistema estatístico R (R Development Core Team, 2006), executado em interface com o GRASS, o que possibilita o fluxo de dados do SIG para o ambiente estatístico e vice-versa, através de uma biblioteca do R, a *spgrass6* (Bivand, 2007).

Finalmente, outros sistemas computacionais usados na edição de imagens e de texto, também são livres, sob licença GNU/GPL. É o caso do BrOffice v2.0 (www.broffice.org), Gimp v2.2 (www.gimp.org) e do sistema operacional Debian GNU/Linux v4.0 (www.debian.org).

3. ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

3.1. Análises exploratórias dos dados

As análises exploratórias, no presente estudo, não se atêm à verificação da existência de alguma condição especial para a execução do procedimento de interpolação, uma vez que o método utilizado é determinístico. Assim, a normalidade dos dados ou a simetria no histograma de frequências, inerentes ao estudo de variáveis aleatórias, não são requeridas. Contudo, a apresentação do mapa, na Figura 2, pretende ilustrar a complexa disposição dos valores, em função da geomorfologia da área, nos Baixos Tabuleiros Costeiros, em que se tem mudanças abruptas de relevo com a existência das falésias e de rios de vertentes bastante íngremes.

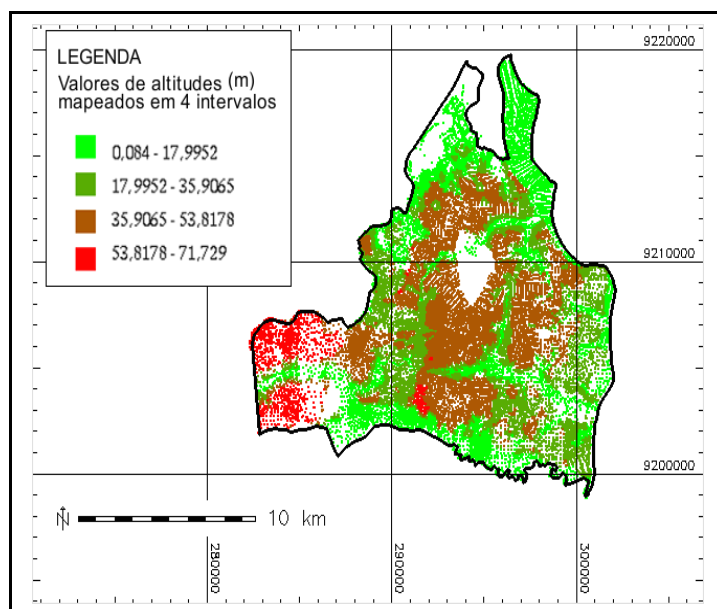


Figura 2 - Distribuição espacial dos valores de altitudes dos pontos cotados.

De acordo com a Figura 2, a distribuição dos valores de altitudes variam de forma crescente, na direção sudoeste, denotando a existência de tendência nos dados. Os valores mais baixos na gradação de verde, correspondem a pontos na Planície Litorânea, nas vertentes e nos leitos dos rios.

Apesar do número de pontos ser grande, contudo, não há uniformidade na distribuição dos dados na área do município e há faixas de valores sem observações, em especial onde a cobertura vegetal é densa. Algumas estatísticas descritivas dos 39.711 pontos de dados são as seguintes mínimo 0,08, máximo 71,73, media 30,24, mediana 32,97 e desvio padrão de 16,55.

3.2. Procedimentos de interpolação

Em consonância com o descrito no item 3.2, as combinações dos valores de entrada de suavização, tensão e número pontos usados para interpolar uma posição, produziram 12 superfícies, com resolução de 5 m, denominadas em conformidade com a Tabela 1. Na referida tabela, encontram-se as estatísticas (AIC, EQM e R^2) calculadas conforme metodologia apresentada (item 3.3) e valores máximos e mínimos preditos para os pontos de dados.

Tabela 1 - Parâmetros de entrada utilizados para interpolação, denominação dos MNTs resultantes, valores limites preditos, AIC, EQM e R² dos desvios.

Suavização	Tensão	Nº de pontos usados/posição	Modelo resultante	Valores limites preditos para os pontos de dados		AIC	EQM	R ²
				mínimo	máximo			
0,10	40	100	MNT1	-3,77	71,83	30.258,57	0,12	0,9996
0,10	40	200	MNT2	-6,17	71,82	62.687,93	0,27	0,9990
0,10	40	300	MNT3	-7,36	71,82	82.001,08	0,43	0,9984
0,10	50	100	MNT4	-2,57	71,87	9.711,13	0,07	0,9998
0,10	50	200	MNT5	-4,34	71,83	41.779,82	0,16	0,9994
0,10	50	300	MNT6	-6,02	71,83	60.766,29	0,26	0,9991
0,25	40	100	MNT7	-5,58	71,84	53.142,88	0,21	0,9993
0,25	40	200	MNT8	-8,01	71,84	82.068,11	0,43	0,9985
0,25	40	300	MNT9	-8,95	71,86	99.620,73	0,66	0,9976
0,25	50	100	MNT10	-4,68	71,84	35.109,92	0,14	0,9995
0,25	50	200	MNT81	-6,36	71,84	63.301,38	0,27	0,9990
0,25	50	300	MNT12	-7,88	71,84	80.319,89	0,41	0,9985

Em todos os procedimentos de interpolação executados, foram verificados dados fora da faixa dos valores observados, de acordo com o que se verifica na tabela anterior, na coluna correspondente aos valores mínimo e máximo preditos para os pontos de dados. Os valores limites de altitudes nos referidos pontos variaram de 0,084 m a 71,73 m. Um aumento de tensão para 50, junto ao valor de suavização de 0,1 e com 100 pontos para interpolar cada posição, produziu o MNT4 com resultados de predição mais próximos da faixa observada. Nesse caso, os valores observados variaram de -2,57 m até 71,87 m. A ocorrência de valores preditos fora da faixa de observação é verificada quando da utilização de interpoladores do tipo funções de base radiais (Jacob e Young, 2006), como no caso do presente estudo.

Percebe-se, ainda com relação à Tabela 1, que as estatísticas utilizadas para apreciação dos MNTs resultantes convergem para o MNT4 como o modelo que melhor representa o relevo da área. Ou seja, o MNT4 apresentou menor valor de AIC e do EQM. Os valores do R², por sua vez, apresentaram-se bastante aproximados em todos os casos, porém, coerentes com os resultados das outras estatísticas utilizadas, quando modelos com valores de R² mais próximos a 1 estão correspondendo aos menores valores de AIC e EQM.

A superfície correspondente ao MNT4 apresentou valores variando de -18,08 a 71,73 m (Figura 3a). Os valores fora da faixa observada (Figura 3b), corresponderam a áreas restritas, limítrofes dos pontos de dados, ou com ausência de informações, que são setores com baixas altitudes, próximo a 0. Esse problema pôde ser facilmente corrigido, através da remoção dos valores atípicos da superfície, quando se procede novamente a interpolação, utilizando o mesmo interpolador, *Spline* com Tensão Regularizada. No caso, a superfície apresentou faixa de valores de 0,07 m a 71,72 m. O resultado desse procedimento adicional está apresentado na Figura 4 com ilustrações de relevos sombreados do MNT4 (Figura 4a) e usando uma composição 543 de imagens Landsat 7 (Figura 4b).

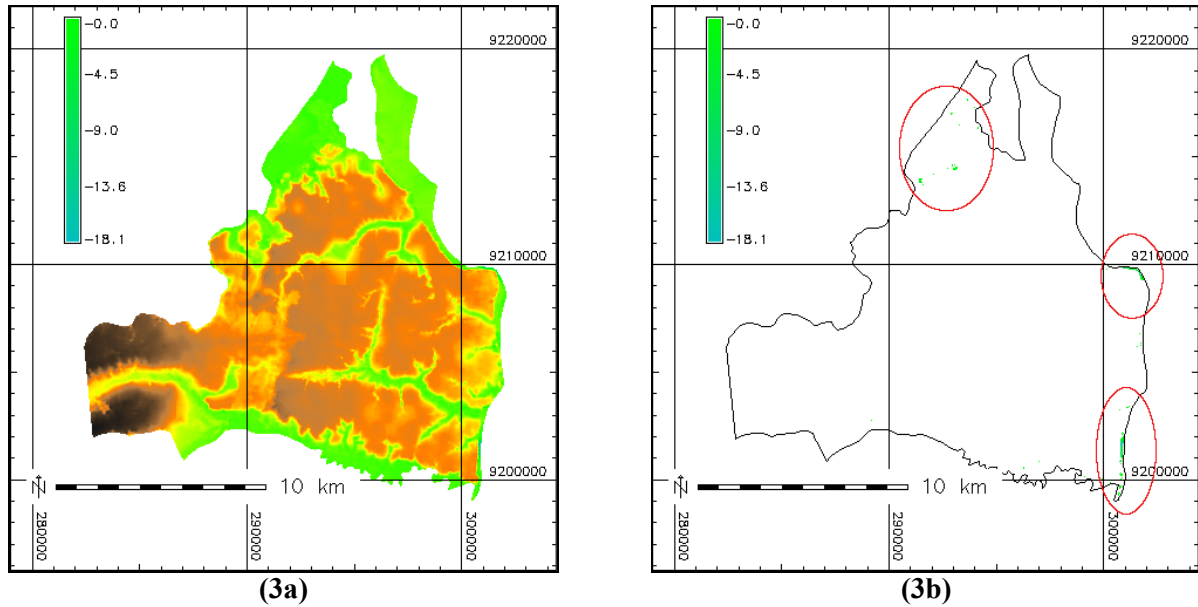


Figura 3- MNT4 (a) e em destaque, áreas cujos valores de altitudes apresentaram-se fora da faixa observada (b).

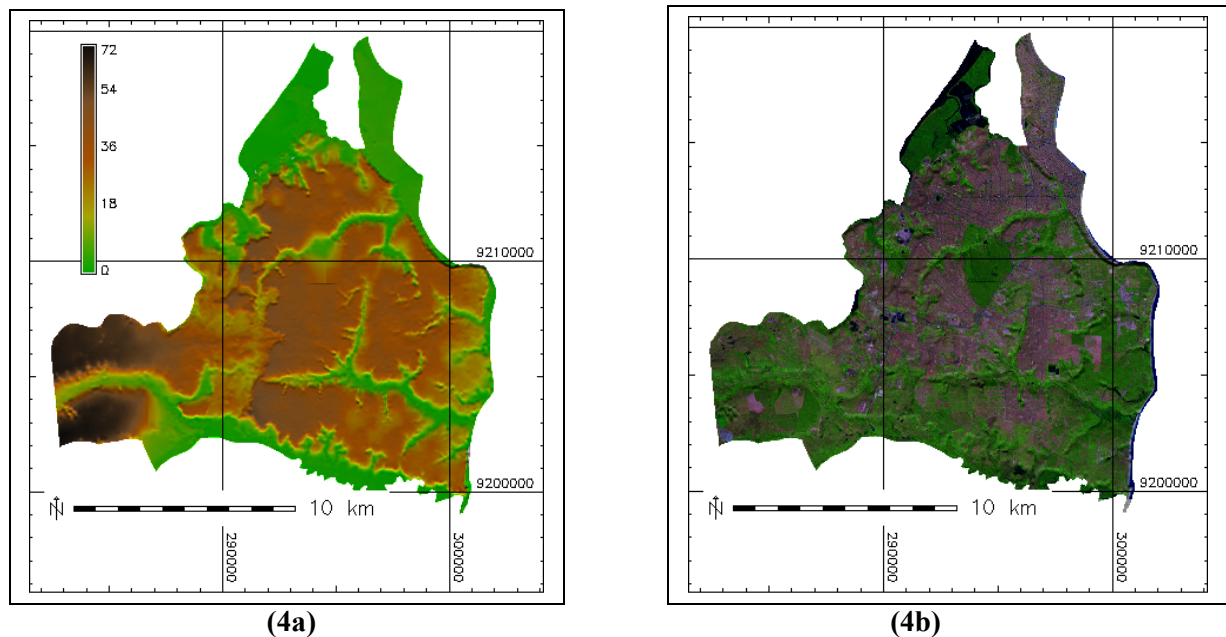
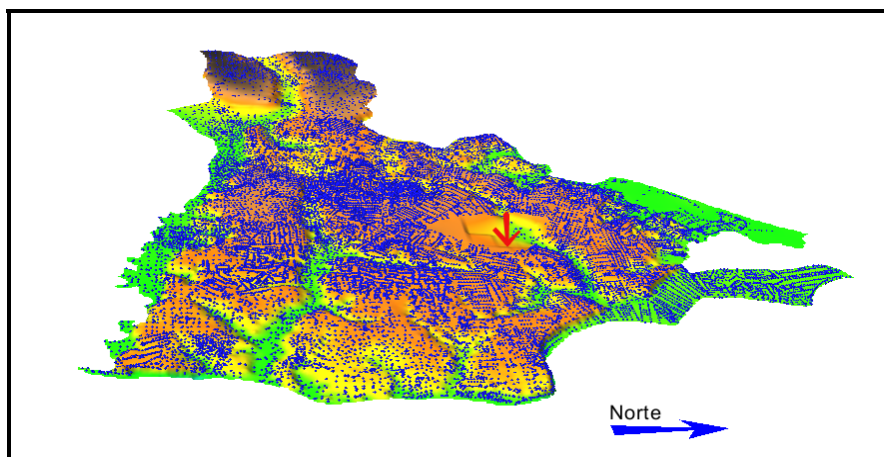


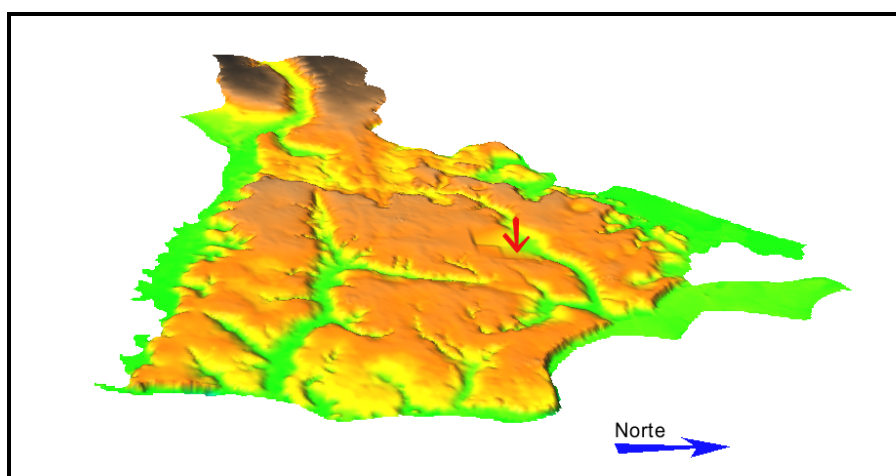
Figura 4 - Imagens de relevos sombreados com o MNT4 (a) e com composição colorida de imagens Landsat 7 (b).

Outro problema verificado, com todas as superfícies obtidas, foi a existência de faixas com ausência de informações, apesar do elevado número de pontos utilizados nas interpolações. O fato foi observado, especialmente em setor de densa cobertura de Mata Atlântica (Figura 5c), localizada no setor central do município de João Pessoa. Nesse caso, além dos pontos cotados, torna-se necessários novas fontes de dados geográficos para a implementação do MNT da área. Isso denota como não definitivo o procedimento apresentado no presente estudo para a obtenção de um modelo numérico do terreno da área, no que tange aos dados utilizados.

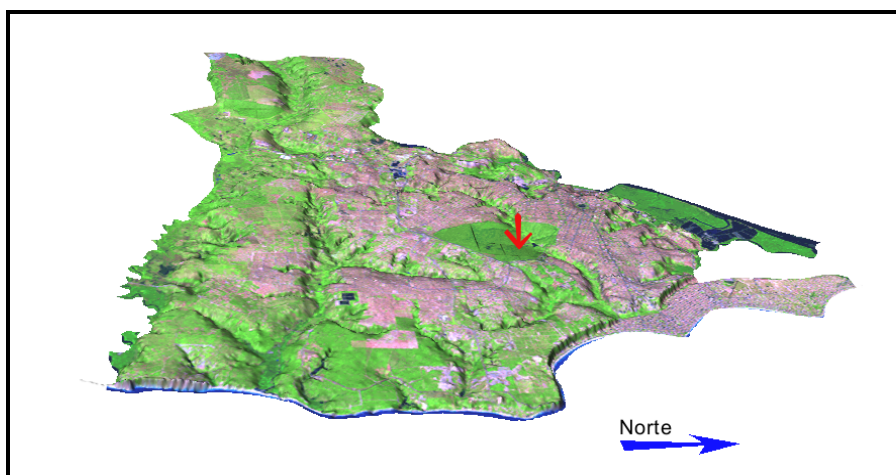
A despeito das observações anteriores, todavia, a representação do relevo do município, através dos modelos numéricos obtidos, em todos os casos, foi coerente com as condições geomorfológicas da área em apreço conforme se verifica, principalmente na Figura 5b, pelo delineamento das feições de relevo características, no caso, as falésias e as vertentes dos rios, bastante íngremes.



(a)



(b)



(c)

Figura 5 – Visualização tridimensional do MNT4, com exagero de 4,5x do relevo e destaque para setor em que a ausência de informações (pontos na cor azul em a) motivou imperfeição na obtenção do MNT (b), na resolução pretendida; em (c), o MNT com renderização de composição colorida de imagens Landsat 7 (543).

As funções de base radial, como no caso do interpolador *Spline* com Tensão Regularizada, utilizado no presente estudo, segundo Jacob e Young (2006) são inapropriadas quando existem muitas mudanças nos

valores em pouca distância ou quando existe a suspeita de que os dados amostrados estão propensos ao erro ou incerteza. No que tange à primeira afirmação, que envolve situação característica da área em estudo, pode-se afirmar que, na forma como está implementado o referido método no GRASS, os resultados obtidos foram satisfatórios, quando do delineamento das feições geomorfológicas do município de João Pessoa – PB. Nesse caso, condições adicionais ao método foram utilizadas, conforme a metodologia observada.

O módulo *v.surf.rst*, que contém o interpolador *Spline* com Tensão Regularizada (Mitasova e Mitas, 1993; Mitasova et al., 1995), implementado no SIG GRASS, permite, ainda, além do estabelecimento de diferentes valores de suavização, tensão e número de pontos, a alteração de outros parâmetros de entrada, com vistas à otimização dos procedimentos de interpolação. É o caso, por exemplo, de ângulo de anisotropia e utilização de diferentes valores de suavização para uma mesma interpolação, em função das características dos dados que se pretende interpolar.

5. CONCLUSÕES

Os procedimentos adotados e os dados geográficos utilizados permitiram a obtenção de um MNT satisfatório para a representação do relevo do município de João Pessoa – PB, tendo em vista que as características geomorfológicas da área, representadas especialmente pelas falésias e as vertentes dos rios, bastante íngremes, tiveram o seu traçado identificado nas superfícies resultantes das interpolações.

Todavia, valores fora da faixa de observação foram preditos em todos os procedimentos, correspondendo a setores limites da área ou com baixos valores de altitude. Apesar da grande quantidade de pontos, foram detectadas faixas com ausência de informações, que demandam novas fontes de dados geográficos para a melhoria do plano de informação resultante.

As estatísticas utilizadas, na forma do Erro Quadrático Médio, Critério de Informação de Akaike e Coeficiente de Determinação para apreciação e escolha do melhor MNT mostraram-se convergentes no sentido de indicarem uma mesma superfície como o melhor modelo numérico do terreno.

O estabelecimento de diferentes valores de tensão, suavização e números de pontos utilizados para cada interpolação permitiram obter diferentes superfícies, como forma de otimizar os procedimentos de interpolação.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. Dover: New York: 297-300, 228-231. 1964.
- AKAIKE, H. **Implications of the informational point of view on the development of statistical science**. Engineering and Scientific Applications, vol. 3. p. 27–38. 1994.
- BARBETTA, P.A. et al. **Estatística para Cursos de Engenharia e Informática**. São Paulo: Atlas, 2004.
- BIVAND, R. **spgrass6: Interface between GRASS 6.0**. In: geographical information system and R. R package version 0.3-7. 2007.
- CAMARA, G.; DAVIS, C.; MONTEIRO, A. M. & D'ALGE, J. C. **Introdução à Ciência da Geoinformação**. São José dos Campos, INPE, 2001.
- GRASS DEVELOPMENT TEAM. **Geographic Resources Analysis Support System (GRASS) Software**. ITC-irst, Trento, Italy. Disponível em: <<http://grass.itc.it>>. Acesso em: 21. mai. 2007.
- HOFIERKA, J.; CEBICAUER, T.; ŠÚRI, M. **Optimisation of Interpolation Parameters Using a Cross-validation**. In: Peckham R.J., Jordan G. (eds.) Digital Terrain Modelling, Development and Applications in a Policy Support Environment, Series: Lecture Notes in Geoinformation and Cartography, Springer, ISBN: 978-3-540-36730-7. 2007.
- JACOB, A. A. E.; YOUNG, A. F. **O uso de métodos de interpolação espacial de dados nas análises sociodemográficas**. In: no XV Encontro Nacional de Estudos Populacionais, ABEP, Caxambu – MG, setembro de 2006.

KULBACK, S.; LEIBLER, R. A. **On information and sufficiency**. Annals of Mathematical Statistics, v.22, p.79-86, 1951.

MITASOVA, H.; MITAS, L. **Interpolation by regularized spline with tension : I. Theory and implementation**. In: Mathematical Geology. v25. p. 641–655. 1993.

MITASOVA, H.; MITAS, L.; BROWN, W. M.; GERDES, D. P.; KOSINOVSKY, I.; BAKER, T.: **Modeling spatially and temporally distributed phenomena: New methods and tools for GRASS GIS**. In: International Journal of Geographical Information Systems. 9(4), 433–446. Leicester. UK.1995.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>. Acesso em: 12. jun. 2007.

SÁRKÖZY, F. **GIS functions – interpolation**. In: Periodica polytechnica, Civil Engineering. v. 43. n. 1, PP. 63–87. 1999.

WAHBA, G. **Spline models for observation data**. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1990.