FÉLIX KLEIN: ABORDAGEM HISTÓRICA

Jeanne Maria Pereira COSTA (1); Danielle Sousa de JESUS (2); Ana Paula Oliveira JOAQUIM (3); Alexandre Pereira SOUSA (4)
(1) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, jeanne.costa@yahoo.com. br
(2) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, danielle.jesus@yahoo.com.br
(3) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, ana.paulajoaquim@hotmail.com
(4) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, alexis-psousa@hotmail.com

RESUMO

Félix Klein fora assistente de Plucker na Universidade de Bonn durante a volta deste último à geometria e num certo sentido foi o sucessor de Plucker no entusiasmo pela geometria analítica. No entanto, a obra do jovem no campo tomou direção diferente, uma direção que serviu para trazer um elemento de unidade à diversidade dos novos resultados da pesquisa. Esse novo ponto de vista pode ter sido em parte resultado de visitas a Paris, onde as noções de Lagrange de Teoria dos Grupos tinham sido desenvolvidas, especialmente através de grupos de substituição, num completo ramo da Álgebra. Klein ficou profundamente impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de Grupo, e passou boa parte do resto de sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando a noção. Dessa forma, esse artigo apresenta a historicidade e a contribuição de Felix Klein para a geometria.

Palavras-chave: Felix Klein, teoria dos grupos, geometria

1 INTRODUÇÃO

Indicado em 1872, com apenas 23 anos de idade, professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do Conselho da Universidade de Erlanger, Félix Klein preparou, de acordo com o costume, uma palestra de apresentação a seus novos colegas de faculdade e um trabalho escrito mostrando interesses de pesquisa em seu campo matemático. A palestra, dirigida a um extenso auditório universitário, expressou a visão pedagógica de Klein da unidade de todo o conhecimento, ideal que uma educação completa não poderia negligenciar em função de estudos particulares. O trabalho escrito, que foi distribuído durante a palestra, destinava-se a seus pares de departamento. Assim, as duas partes da apresentação inicial de Klein revelava de um lado seu interesse profundo por questões pedagógicas e do outro seu envolvimento sério com a pesquisa matemática, desenvolvendo o Erlanger Programm que descrevia a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações.

2 FÉLIX KLEIN

Félix Klein nasceu em Dusseldorf em 1849. Estudou em Bonn, Gottingen e Berlin e foi assistente de Julius Plucker em Bonn. Como professor, sua primeira experiência foi na Universidade de Erlanger (1872-1875). Depois ensinou em Munique, Universidade de Leipzig (1880-1886) e Universidade de Gottingen (1886-1913), exercendo a função de chefe de departamento nesta última instituição, durante esse período a instituição tornou-se a meca dos estudantes de matemática de todo o mundo. Um número notável de matemáticos de primeira linha passou pela universidade, ou para estudar ou para emprestar seu talento como digno sucessores de Gauss, Dirichlet e Riemann, fazendo da escola de matemática de Gottinger uma das mais famosas dos tempos modernos, permaneceu uma potência no mundo da matemática até praticamente ser destruída com a ascensão de Adolph Hitler (1889-1945) e do nazismo.

Félix Klein colaborou com o matemático norueguês, Sophus Lie (1842-1899), estudando contemporâneo em Gottingen que descobriu as transformações de contato e escreveu um trado em três volumes sobre a Teoria de Grupos de Transformações. As transformações de Lie, sistematizadas por Klein, estabelecia uma correspondência biunívoca entre as retas e esferas do espaço Euclidiano de tal modo que retas concorrentes correspondem a esferas tangentes. Em geral, transformações de contato são transformações analíticas que levam superfícies tangentes em superfícies tangentes.

Figura 1: Félix Klein

A obra de Klein num certo sentido é um clímax adequado para a "Idade Heróica da Geometria", pois ele ensinou durante meio século. Tão contagiante era seu entusiasmo que algumas figuras do fim do século XIX profetizaram que não só a geometria, mas finalmente toda a matemática viria a ser contida na teoria dos grupos. No entanto, nem toda obra de Klein se referia a grupos. Ocupava-se muito de geometria não euclidiana, á qual contribuiu com os nomes "geometria elíptica" e "geometria hiperbólica" para as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo respectivamente.

Desde Monge não existiria professor tão influente, pois além de dar aulas entusiasmantes Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos (em seus últimos anos Klein desempenhou muito eficazmente o papel de "velho estadista" no reino da matemática). Foi editor de Mathematische Annalen e fundador da grande Encyklopadie Matemática. Foi um expositor lúcido, um professor inspirado e um conferencista de talento. Morreu em Gottingen em 1925.

3 TEORIA DOS GRUPOS

O trabalho escrito por Klein baseado em suas pesquisas juntamente com Sophus Lie sobre teoria dos grupos apresentava a notável definição de "geometria" que serviu para codificar essencialmente todas as geometrias existentes á época e apontou o caminho para novas e frutíferas avenidas da pesquisa geométrica.

Diz-se que uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se:

1) A colação é fechada sob a operação;

2) A colação contém um elemento identidade com relação á operação;

3) Para cada elemento na coleção há um elemento inverso com relação á operação;

4) A operação é associativa.

Os elementos podem ser números (como na aritmética), pontos (na geometria), transformações (em álgebra ou geometria) ou qualquer coisa. A operação pode ser aritmética (como adição ou multiplicação) ou geométrica (como uma rotação em torno de um ponto ou eixo) ou qualquer outra regra para combinar dois elementos de um conjunto (tais como duas transformações) de modo a formar um terceiro elemento do conjunto.

Esse programa de Klein que veio a chamar-se o *Erlanger Programm descrevia* a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações. Portanto toda classificação de grupos de transformações torna-se uma codificação das geometrias.

A aplicação dos grupos á geometria, segundo Klein, depende do conceito de *transformação de um conjunto S sobre ele mesmo*, ou seja, uma correspondência pela qual a cada elemento de *S* está associado um único elemento de *S* e na qual, ainda, cada elemento de *S* é correspondente de um único elemento de *S*. Por *produto* $T_2 T_1$ de duas transformações T_1 e T_2 do conjunto de elementos *S* sobre ele próprio, entende-se a transformação resultante de se efetuar primeiro a transformação T_1 e depois a transformação T_2. Se *T* é uma transformação de *S* nele próprio que leva o elemento *a* de *S* no elemento correspondente *b* de *S*, então a transformação que inverte a transformação *T*, levando cada elemento *b* de *S* de volta ao elemento original *a,* chama-se *transformação inversa* da transformação *T* e se denota por T^{-1}. A transformação que leva cada elemento de *S* nesse mesmo elemento chama-se se *transforma idêntica* do conjunto *S* e se indica por *I.*

Estamos agora em condições de dar a famosa definição de Klein de geometria: *Uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S ás transformações de algum grupo de transformações Γ*. Pode-se denotar convenientemente uma geometria por *G (S, Γ).*

Para ilustrar a definição de Klein de geometria, seja *S* o conjunto de todos os pontos de um plano usual e consideremos o conjunto *Γ* de todas as transformações de *S* abrangendo as rotações, as translações e as reflexões em torno de retas. Como estão o produto de duas dessas transformações e a inversa de uma delas qualquer sempre estão em *Γ,* segue-se que se trata de um grupo de transformações. A geometria resultante é a *geometria métrica euclidiana plana.* Uma vez que propriedades como comprimento, área, congruência, paralelismo, perpendicularidade, semelhança de figuras, colinearidade de pontos e concorrência de retas são invariantes sob o grupo *Γ*, essas propriedades fazem parte do estudo da geometria métrica euclidiana plana. Ampliando-se agora *Γ* de modo a incluir, além das translações, rotações e reflexões em torno de retas, as transformações homotéticas (em que cada ponto *P* é levado num ponto *P*' tal que $AP = k \, . \, AP'$, onde A é um certo ponto fixo, k é uma constante positiva e *A, P e P'* são colineares*)*, obtemos a *geometria de semelhança plana*. Para este grupo ampliado, propriedades como comprimento, área e congruência não mais permanecem invariantes e, então, não mais são objeto de estudo; mas paralelismo, perpendicularidade, semelhança de figuras, colinearidade e pontos e concorrência de retas são propriedades que ainda são invariantes e, portanto constituem objetos de estudo dessa geometria. Do ponto de vista de Klein a geometria projetiva é o estudo das propriedades dos pontos de um plano *projetivo* que permanecem invariantes quando se submetem os pontos ao grupo das transformações chamadas projetivas. Das propriedades previamente mencionadas, somente a colineariedade de pontos e a concorrência de retas ainda permanecem invariantes. Um invariante importante para esse grupo de transformações é a razão dupla de quatro pontos colineares; esse invariante desempenha um papel importante no estudo da geometria projetiva.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Klein apresenta a Geometria como o estudo das propriedades de um espaço invariante sob um determinado grupo de transformações, o que logicamente influenciou o desenvolvimento da matemática. Com isso, Klein criou modelos euclidianos para as geometrias não-euclidianas, facilitando o difícil acesso as Geometrias Hiperbólicas e Elípticas. Pode-se dizer ainda que, com o estudo desenvolvido por Klein a geometria euclidiana é o estudo do grupo das transformações euclidiana e a geometria hiperbólica é o estudo do grupo das transformações hiperbólicas.

Em relação ao seu programa, Erlanger Programm, este era tão claramente um produto do século XIX que não poderia ter sentido em nenhuma época anterior. A principio teve apenas circulação limitada, mas antes do fim do século veio a ter grande influência em todo o mundo matemático. A influência persistente do Erlanger Programm pode ainda hoje ser percebida e quase qualquer tratado geral de geometria moderno.

REFERENCIAS

BOYER, Carl. **História da Matemática**. Tradução Elza S. Gomide - 2° edição- São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

EVES, Howard. **Introdução á História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004

COXETER, H. S. M. **Introduction to Geometry.** 2a ed. New York: Jonh Wiley & Sons. 1967.