# CONCEPÇÕES DOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE A NOÇÃO DE *INDUÇÃO MATEMÁTICA*

**Regis, VIEIRA (1); Hermínio, BORGES (2); Rosélia, CASTRO (3)**
(1) Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará, Monsenhor Otávio de Castro, nº 21, Fátima, tel. 32267189, e-mail: fregis@etfce.br
(2) Universidade Federal do Ceará, e-mail: hermínio@ufc.br
(3) Universidade Federal do Ceará, e-mail: rosélia@ufc.br

## RESUMO

Neste trabalho busca-se apresentar um relato de uma experiência de ensino, obtido a partir de uma *pesquisa participante*, sistematizado por meio de reflexões produzidas ao decorrer da disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática do 6º semestre, no curso de Licenciatura em Matemática, do Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE, no ano de 2008. Escolheu-se a noção de '*indução matemática'*, como o objeto matemático de investigação e examinaram-se as *concepções* e *crenças* dos alunos em formação, sobre o referido objeto, quando aplicado numa perspectiva particular ao conceito de *progressões*. Para possibilitar as análises dos documentos escritos, das *situações de observação* e dos depoimentos fornecidos pelos alunos ao decorrer das *entrevistas semi-estruturadas*, recorreu-se à noção de *crenças (beliefs)*, que para Russell (1910; 1914; 1921; 1943) constitui nosso conhecimento. A partir desta noção e de uma rápida incursão filosófica sobre o processo de *indução matemática*, puderam-se identificar concepções limitadas dos sujeitos participantes, com respeito a este modelo, além de um conhecimento conceitual restrito e sem conexão com a noção de *progressão*. Além disso, registraram-se ao decorrer das entrevistas, queixas no que se refere a pouca importância concedida ao citado conteúdo numa perspectiva curricular, e a influencia do *formalismo*, dispensada pelos formadores, no tratamento didático, num sentido exatamente contrário ao observado nos livros didáticos usualmente adotados nas escolas.

**Palavras-chave:** Matemática, Ensino, Aprendizagem

## 1. QUESTÕES DE ORDEM EPISTEMOLÓGICA, FILOSÓFICA E PSICOLÓGICA RELACIONADAS À NOÇÃO DE INDUÇÃO

A *indução matemática* tem sido um objeto de discussão entre matemáticos (POINCARÉ, 1905; POLYA, 1945; RUSSELL, 1943) e filósofos (COUTURAT, 1905; LACHELIER, 1896; LAKATOS, 1978; MILL, 1889). A partir das reflexões destes pensadores, evidenciamos que o método de indução tem sido um instrumento profícuo de investigação em outras ciências, além da Matemática. Neste sentido, Lachelier (1896, pg. 17) lembra de duas espécies possíveis de indução:

> *Uma é a indução científica, que consiste em evidenciar um único fato bem constatado que supõe evidentemente, que todo fato é a expressão de uma lei. Outra é a indução vulgar, que procede por simples enumeração de exemplos, que não supõe nada a priori, e por conseqüência, pode servir de fundamento ao princípio que serve para justificar o primeiro.*

Mais adiante, ele acrescenta que, *depois de Bacon, este princípio foi abandonado, uma vez que a enumeração nunca é completa e que cem exemplos consistentes não excluem a possibilidade de cem outros exemplos contrários* (LACHELIER, 1896, pg. 19). Suas considerações são formuladas num âmbito geral, entretanto, aplicam-se perfeitamente no caso do saber matemático. De fato, o grau de utilidade deste instrumento conceitual na matemática é enorme e variado, como explica Couturat (1905, pg. 118), as possibilidades de sua aplicação:

> *Como uma definição desempenha o papel de uma proposição, em um raciocínio, compreendemos que o princípio de indução se aplica tanto às definições como as proposições.*

Observamos que a primeira aplicação indicada por Couturat se relaciona a verificação da *existência* dos objetos descritos por suas *definições matemáticas*, enquanto que no segundo caso, demonstramos formalmente certas propriedades enunciadas à respeito destes objetos. Mais adiante, ele alimenta a polêmica em torno desta noção, quando lembra que:

> *Este modo de raciocínio era considerado como indução por que, aparentemente, ele permitia de concluir de alguns casos a todos; mas, se de fato fosse assim, ele não seria logicamente comprobatório. Então tentamos corrigir esta conseqüência qualificando-o de indução completa, para indicar que a mesma esgota todos os casos possíveis. Mas existe ainda um equívoco: em todos os casos possíveis figuram nas premissas ou nas conseqüências? Se eles comparecem apenas nas conseqüências, existirá alguma inferência ilegítima de algum caso para todos, e assim, a indução é ordinária e incompleta (COUTURAT, 1905, pg. 119).*

Inúmeras propriedades encontradas nos conteúdos matemáticos do ensino fundamental e médio reclamam, por vezes, o processo de indução matemática, descrito acima por Couturat. Aparentemente para os incipientes, o processo de indução pode ser facilmente identificado no campo da Aritmética, entretanto, a Geometria e, com um grau maior de exigência, a Álgebra, são saberes que requerem da mesma forma seu uso.

Com efeito, Morgan (1831, pg. 56) sublinhava a importância para os aprendizes em fazer observações sobre fenômenos matemáticos. A generalização é o final do propósito do trabalho com exemplos particulares. Em Geometria, demonstramos qualquer proposição por meio do raciocínio de algum exemplo particular. O que não ocorre em Álgebra que representa uma mistura de casos particulares e gerais.

Com o uso do método indutivo, podemos verificar também a questão da *existência matemática*. O que não foi considerado minuciosamente por Peano[1], conforme adverte Lages (2006, pg. 32). Contudo, deveria ser uma preocupação para o professor de matemática, uma vez que, para o professor, esta noção encontra-se razoavelmente amadurecida. O mesmo amadurecimento não podemos esperar por parte do aluno. Sobre essa temática, vale à pena refletir sobre as colocações de Russell (1943, pg. 60), quando lembra que:

> *Deve ser conhecido por nós que a existência de algum tipo de coisa, A, é um sinal da existência de outro tipo de coisa, B, de mesmo modo e tempo que A ou no mesmo momento antecedente ou conseqüente, como, por exemplo, o trovão é um sinal da existência anterior do relâmpago. Se isto não for conhecido por nós, não poderíamos nunca estender nosso conhecimento além da esfera do nosso conhecimento privado; e nesta esfera, como temos visto, é extremamente limitado.*

[1] Giuseppe Peano (1858-1932) foi o matemático italiano responsável pela formulação dos Axiomas que levam seu nome, proporcionando uma axiomatização padrão dos números naturais.

Russell destaca a importância da compreensão da noção de *existência*, que, referendando-se em nossa experiência docente, deve ser profundamente conhecida pelo professor de matemática no que se refere aos conteúdos que o mesmo leciona, embora não seja uma temática explicitamente discutida numa aula do ensino fundamental ou médio, Na prática, num ambiente de Licenciatura, temos a impressão de que parece ser mais importante a compreensão da *existência* de um limite, por *épsilon* e *delta*, do que a *existência* e *unicidade* de uma matriz inversa. O que para nós é paradoxal, uma vez que, o último conteúdo mencionado será de fato um objeto do seu ensino na escola. Enquanto que o primeiro permanece, frequentemente, na esfera do ensino algoritmizado, peculiar ao ambiente acadêmico, como descreve Artigue (2003).

Quando recorremos a Bergson (1911, pg. 189) encontramos considerações em relação à mesma noção, indicando algumas características que se incorporam às habilidades cognitivas de um professor de matemática, no que se refere à compreensão da noção de *existência* dos objetos da matemática.

> *Tal noção implica duas condições juntas: (I) presença à consciência e (II) conexões lógicas ou casuais que a torna presente o que antecede ou o que segue. A realidade para nós de um estado físico, ou a realidade de um objeto material, consiste num fato duplo em relação a nossa consciência que os percebe e elas formam partes de séries, espacial e temporal, em que os elementos se determinam um ao outro.*

Observamos que tanto Russell como Bergson fazem referência a um conhecimento privado, dependente das situações vivenciadas pelo sujeito. Certamente, que o conhecimento privado do professor apresenta um repertório bem mais extenso de vivências e manifesta-se por meio de seus hábitos, como, por exemplo, a possibilidade de análise mental de um objeto matemático, sem a necessidade de sua presença atual, de forma idealizada e fundada na memória.

A compreensão da noção de *existência matemática*, quando fundada num sistema de crenças como a do professor, torna-se natural, uma vez que, se apoia no processo de abstração mental, o qual refina-se cada vez mais, dispensando etapas intermediárias de apelo à experiência. O que não ocorre de forma tão natural para o aluno, uma vez que o processo de abstração é longo e, muitas vezes, conflituoso.

Para o professor diferenciar, por exemplo, a verdade da falsidade, ele pode valer-se da faculdade psíquica que chamamos de intuição. Tal faculdade intervém do mesmo modo nas etapas intermediarias de uma *prova* ou de uma *demonstração*, principalmente, nas etapas que a antecedem-nas. Lakatos (1978, pg. 79) reforça nossa argumentação quando em relação a esta possibilidade, se referia da seguinte forma:

> *Em relação aos métodos de indução e dedução, dizia que ambos os métodos são de inferências baseadas na intuição, que transmite verdade (das premissas à conclusão) e retransmite falsidade (das conclusões para as premissas).*

Desta forma, podemos observar a presença de certos elementos, tais como: a noção de *existência*, a noção de *prova* e a *intuição*, participantes do processo indutivo, e que podem atuar como entraves[2] a compreensão dos alunos. Alguns destes fatores são estimados de característica privada ao sujeito, como no caso da *intuição, instinto ou insight* (RUSSELL, 1910, p. 13). Outros de natureza intrínseca ao próprio objeto matemático, como no caso da própria linguagem matemática utilizada para significar o objeto.

Os elementos apontados no parágrafo anterior condicionam diretamente o sistema de crenças, *que constituem as formas de raciocínio do sujeito a respeito do saber matemático* (RUSSELL, 1921, p. 110), tanto do professor como dos os alunos. Esta possibilidade é destacada ainda por Russell, quando sustenta que:

> *Crenças constituem um problema central na análise da mente. A vida intelectual como um todo se constitui de crenças e a passagem de uma crença para outra é o que chamamos de raciocínio. Crenças fornecem conhecimento e erro, elas são veículos de verdade ou falsidade (RUSSELL, 1921, pg. 232).*

Outros elementos podem ser identificados no processo de transmissão didática do conhecimento matemático, como o movimento de transformação do *savoir savante au savoir enseigné* descrito por Chevallard (1991, pg. 20), o qual requer a utilização e a elaboração de simbologias convenientes. Tais simbologias devem adquirir seu sentido nos campos da Aritmética, Álgebra e na Geometria.

[2] Fischbein (1987) descreve uma série de aspectos relacionados às implicações didáticas do uso da intuição. Seu uso consciente ao longo de uma mediação didática está longe de ser considerada simples.

Entretanto, observamos os excessos do emprego da linguagem algébrica no ensino acadêmico (ARTIGUE, 2003), que possibilita, para um matemático experiente, a compressão dos sentidos em símbolos, aplicados em determinadas operações matemáticas, algoritmizando-as. Tais operações são tão profundamente conhecidas por este, que transmitem a sensação em dispensar a atenção às etapas intermediarias de um processo, *usado de forma flexível, ora como conceito, ora como processo matemático* (TALL, 1992, p. 4).

Ao passo que, para o aluno, a *algoritmização* cega ou o *pensamento algorítmico* (OTTE, 1993, p. 285), sem compreensão, acaba sendo, em inúmeras instâncias, a única forma de sua ação, que já é limitada, diante da complexidade aparente das simbologias empregadas pelo mestre, sem o apelo intuitivo ou psicológico, e com o recurso de poucas imagens. Este processo de algoritmização influencia, nem sempre de forma explícita,  o processo que temos discutido até aqui, chamado de *indução*. Não precisa demandar muito esforço para encontrar-mos nos livros didáticos, situações do tipo: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ (LAGES, 2004, pr. 35). Diante de sentenças como esta, onde a *verdade* sobre a propriedade acima é desvelada precipitadamente, os alunos desenvolvem de forma pouco refletida, os passos previstos na caracterização axiomática de Peano.

Simbologias como esta descrita ha pouco, carregam de forma latente, o sentido dos conceitos matemáticos e processos que, para cada ocasião, exigem prioritariamente, uma importância maior desta ou daquela propriedade pertencente a um mesmo conceito. Em termos psicológicos, é o que chamamos de *abstração*, operação mental frequentemente lembrada como indispensável, por matemáticos e filósofos. De fato, concordamos com Stuart Mill quando desta as relaçoes entre indução e o processo de abstração, quando explica que:

> *As operações de observação e abstração são condições indispensáveis no processo de indução. Sem elas não existe indução possível. Concordamos também que a linguagem é uma condição igualmente necessária. Os filósofos dizem que a linguagem não é apenas um instrumento para o pensamento, mas, também, um instrumento do pensamento. Que para raciocinar, é necessário o auxílio de nomes ou algo equivalente, signos artificiais quaisquer e que, sem estes, não haveria inferências e, por conseqüência, nenhuma indução possível (MILL, 1889, pg. 210).*

Por fim, observamos que a *algoritmização* vem a ser apenas uma das conseqüências do *formalismo* ou do *método axiomático*. Este tipo de abordagem carrega de forma latente por quem a utiliza de forma prioritária, a crença de que o *rigor matemático pode garantir de forma satisfatória o ensino e a aprendizagem*.

Todavia, vale lembrar que a demonstração ou prova, objetivo tão profundamente valorizado neste método, conduz a um modelo que serve de padrão. *Este modelo de prova se assemelha em realizar certas coisas de modo correto e preciso, embora neste ponto, impõe algumas limitações em permissíveis descrições da experiência* (DETLEFSEN, 1992, p. 68).

Após este rápido interregno filosófico acerca do modelo de indução, onde buscamos apontar elementos de natureza histórica, filosófica e psicológica que concorrem para sua compreensão, passamos agora a descrever os pressupostos teóricos assumidos que nos influenciaram ao longo do estudo, seguido dos procedimentos metodológicos adotados, concluindo-se com algumas considerações finais.

## 1.1. Quadro Teórico e Procedimentos Metodológicos

Assumimos em nosso estudo que as *percepções são constituídas de sensações, imagens e crenças* (RUSSELL, 1921, p. 112). Estas últimas, as *crenças* ou o sistema de crenças de um indivíduo, influenciarão as ações e tomadas de decisões tanto do professor como dos alunos. Em relação ao primeiro, Russell (1940, pg. 120) defende que *a escolha do professor será baseada em sua crença e na forma de encarar a situação*.

Além disso, encontramos vários tipos de *crenças*, como as *crenças secundárias*, no sentido de Russell (1914, p. 76), que *podem surgir constantemente sem um processo aparente de inferência lógica, apenas meramente pela associação de idéias ou por algum processo extra-lógico*.

Desta forma, o conjunto das *crenças* constituiu para nós, as *concepções* dos alunos. Portanto, diante da variedade dar terminologias atribuídas a este último termo (DUPIN, J. & JOSHUA, S, 1993, p. 125), analisamos as *crenças* dos alunos e, conseqüentemente, suas *concepções*, que apresentam sua origem na experiência passada destes sujeitos (DUPIN, J. & JOSHUA, S. 1993, p. 122). O objetivo desta escolha buscou caracterizar empíricamente o conhecimento dos alunos a respeito do modelo de *indução matemática*, particularmente empregado ao conceito estudado no ensino médio, chamado de *progressões*.

No tocante ao desenvolvimento metodológico, a *pesquisa participante* teve início na disciplina Metodologia do Ensino da Matemática, do Curso de Licenciatura em Matemática, no Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE, com a *amostra* de 20 alunos, do 6º semestre. Adotamos o *estudo de caso* para a observação detalhada de um acontecimento específico (BOGDAN e BIKLEN, 1994, pg. 89), que envolve a relação aluno-professor-saber matemático. Os instrumentos de coleta de informações adotados foram: *entrevistas semi-estruturadas*, a *observação* e dois *questionários de investigação* (DE KETELE, J. M. & ROEGIERS, X, 1996, p. 31) aplicados juntamente com as avaliações e as observações em sala de aula.

## 1.2. Análise das Entrevistas

Ao longo das entrevistas *semi-estruturadas*, buscamos identificar os elementos presentes na disciplina Metodologia do Ensino de Matemática que, na opinião dos alunos, conforme suas *crenças* sobre o ensino de Matemática, podem funcionar como obstáculos à compreensão da noção de *indução*. O primeiro aluno manifestou uma compreensão satisfatória, como podemos observar.

> **Aluno 1:** *O princípio de indução matemática se aplica quando se pretende demonstrar uma determinada afirmação matemática e têm-se infinitas possibilidades de avaliar tal afirmação. Um exemplo poderia ser tratado numa afirmação que envolve os inteiros, como o conjunto é infinito, ficaria muito dispendioso analisar caso a caso, as possíveis afirmações e identificar quais são as falhas desta sentença. Aplica-se a indução, onde parte-se de uma situação particular e busca-se uma resolução mais genérica.*

O aluno seguinte destaca de forma consciente, o processo mental de abstração requerido nas etapas de indução. Todavia, uma noção necessária apontada pelo mesmo diz respeito à 'como se generalizar' o referido processo.

> **Aluno 2:** *Ao estudarmos determinado conteúdo, através de exemplos pontuais, e em seguida percebemos "similaridades" em exemplos mais complexos, extensos, abstraímos e chegamos à generalizações. Como, por exemplo, estudar-mos séries geométricas infinitas de razão q,* $0 < q < 1$.

Observamos ao longo das entrevistas que, predominantemente, os exemplos envolvendo indução se relacionavam as noções de PA e PG. Propositadamente, estes conceitos foram trabalhados na disciplina de Metodologia e, aparentemente, eles não se recordavam ou conseguiam fornecer outros exemplos deste modelo de aplicação em outras áreas da matemática, o que para nós significa uma preocupante limitação. O próximo aluno apresenta um discurso recorrente na fala dos demais.

> **Aluno 3:** *O professor passava por um determinado tipo de indução, uma determinada seqüência, das três primeiras e assim por diante... Achávamos determinada fórmula para PA ou PG. É um termo geral para um problema, para determinados eventos.*

Em alguns casos encontramos *concepções* preocupantes, como foi o caso do aluno a seguir:

> **Aluno 4:** *Por exemplo, pega um retângulo, com as relações seno e coseno, neste caso particular, na relação fundamental da trigonometria. Aqui é indução.*

Finalmente, destacamos o trecho do aluno 5 que lembra a forma prioritária em que foi apresentado este modelo matemático ao longo de sua formação, com ênfase nos conteúdos do ensino superior, e pouco aprofundamento nos conteúdos do ensino fundamental e médio.

> **Aluno 5:** *A base que eu tive foi boa, no superior, mas no ensino médio não. A formação especifica estamos muito presos às disciplinas de fundamentos. Talvez fosse necessária essa revisão de indução mais próximo do término do curso.*

O referido aluno adverte também que conteúdos reconhecidos como imprescindíveis na formação de um professor de matemática, poderiam receber maior ênfase nas proximidades da conclusão do curso de Licenciatura.

## 1.3. Análise das *Crenças* e *Concepções* registradas nas avaliações.

No decorrer da disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática, apresentamos situações pouco exploradas pelos livros didáticos de Matemática, como a demonstração por *indução* de algumas propriedades das *progressões*. O **aluno 6**, destaca esta possibilidade, explorada de forma inusitada ao decorrer da disciplina de Metodologia.

2) Indução - É o saber que exige o conhecimento de fatos já estudados anteriormente ou observados. Exemplo: o estudo das progressões aritméticas e geométricas.

No próximo excerto, a partir das palavras do **aluno 8,** evidenciamos a *crença* que se relaciona com o alcance da *verdade matemática*, por intermédio de uma *prova* ou *demonstração* e, nesta situação, com o uso do processo de *indução*.

2 A indução matemática é algo que parte do particular para o geral, é induzir algo para que seja verdade.
Ensino médio = Na demonstração da fórmula do termo geral de uma P.A.

Vale observar que nos estágios iniciais de compreensão do significado de 'verdade', para o aluno à noção de prova por indução, significa, conforme explica Devlin (2005, p. 54) *experimentalmente verificável*. O **aluno 10,** novamente atribui ao processo indutivo, uma forma de se obter a verdade de um fato matemático, apesar de admitir a impossibilidade de se realizar a verificação e, portanto, a observação de todos os casos possíveis.

É UM MÉTODO DE PROVA MATEMÁTICA USADO PARA DEMONSTRAR A VERDADE EM UM NÚMERO INFINITO DE PROPOSIÇÕES; O CASO MAIS SIMPLES DE INDUÇÃO MOSTRA QUE A PROPOSIÇÃO VALE PARA TODOS OS "n" NATURAIS QUANDO SATISFAZ

Notamos a imagem metafórica fornecida pelo **aluno 10** ao processo indutivo, comparando-o a uma espécie de 'dominó' que se prolonga indefinidamente, intimamente relacionado à noção de infinito. Embora, devamos lembrar que a intuição pode fornecer impressões equivocadas de um processo matemático.

JÁ QUE UM DOS CASOS MAIS TÍPICOS DE INDUÇÃO NO DIA-A-DIA É O EFEITO DOMINÓ, PODERÍAMOS

O **aluno 9** aparentemente, não diferencia o <u>raciocínio indutivo</u> do <u>raciocínio dedutivo</u>, ao destacar uma possível relação entre indução e dedução. Observamos ainda o sentido atribuído pelo mesmo à verdade, como a possibilidade de realizar manipulações algébricas, portanto, uma concepção instrumental restrita sobre a *verdade matemática*, que possui um dimenssão bem mais ampla do que esta do que a descrita abaixo.

Logo Acredito na indução, pois tem relação com a criatividade e a dedução. Portanto cai muito bem na matemática.
Com relação à ferramenta matemática - indução matemática.
Acho ele bem colocada quando a matemática tem o conhecimento da verdade e com isso faz minipulações muitas das vezes algebricas - induzir a verificação - para obter a verdade.

O **aluno 10** descreve uma relação de forma pouco compreensível com o modelo de indução. Vemos ainda sua afirmação de que se trata de uma análise sem conceitos científicos envolvidos.

1- Sabendo que a indução é uma pre análise, sem muitos conceitos científicos. Mas quando mais o individuo estiver relacionado com o em assunto mais forte sera sua indução isto é, a indução estarar mais próxima de uma verdade

## 2. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Evidenciamos que o tratamento dispensado à noção de *infinito matemático* por parte dos livros didáticos, merece maior atenção, uma vez que, o emprego desta idéia, em virtude de sua natureza histórico-epistemológica (DANTZIG, 2005, 239), pode confundir as concepções tanto do professor como do aluno. Vejamos um aspecto específico apontado por Lages (2001, pg. 56) quando ressalta que:

> *Mesmo os livros didáticos tratam algumas questões relacionadas à noção de infinito de forma precária. De fato, a definição de progressão aritmética (P.A.) é precedida do exemplo concreto* $(2, 5, 8, 11, \ldots)$ *, em que uma seqüência é infinita, mas, após a definição, é dito que uma P.A. é representada na forma* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *, onde n é o número de termos. Afinal, admite-se ou não uma P.A. infinita? Deveria admitir*

As palavras de Lages aventam a possibilidade de se produzir crenças equivocadas estabelecidas, neste caso, a partir de formas simbólicas e linguagem imprecisa como no trecho acima. Felizmente, estas crenças, que neste caso são apontadas nos livros didáticos, podem ser modificadas (TOULMIN, 1976, p. 90), na condição com que o professor forneça boas razões para a obtenção de um pensamento progressivamente validado por inferências bem fundamentadas.

Observa-se ainda a forma inadequada de promover o *raciocínio indutivo* nos livros adotados em nossas escolas, que como vimos, esta forma de raciocínio é necessário no processo de *indução matemática*. De fato:

> *Com as progressões geométricas, exatamente o mesmo que ocorreu na pág. 210, com as progressões aritméticas, isto é, o termo geral da progressão geométrica é apenas conjecturado a partir de exemplos, e indevidamente generalizado (LAGES, 2001, pg. 177).*
>
> *O autor possivelmente tentou fugir à introdução da função sucessor dos axiomas de Peano, talvez por achá-la abstrata e dispensável neste estágio da escolaridade. Então, o correto, já que anteriormente foi afirmado que o conjunto dos naturais é fechado em relação à soma e que os naturais são dados (logo 1 é dado), seria simplesmente dizer que dado um número natural qualquer n, então o natural n+1 é chamado seu sucessor, que n é o antecessor de n+1, e que o 0 não é o sucessor de nenhum natural (LAGES, 2001, pg. 317).*

Sublinhamos que exemplos como estes merecem atenção dos professores formadores que atuam em curso de Licenciatura em Matemática uma vez que podem atuar como *obstáculos epistemológicos* à aprendizagem. Para ilustrar alguns destes obstáculos, sublinhamos que *algumas características e inferências peculiares ao princípio de indução não eram conhecidos nem mesmo na lógica aristotélica* (WEYL, 1945, p. 34).

Além disso, alguns conteúdos matemáticos não são tratados com a devida importância, em virtude de crenças filosóficas que podem influenciar a visão dos professores formadores. Basta lembrar, por exemplo, que *Schopenhauer descrevia a aritmética como uma das menos elevadas atividades do espírito, pelo fato que aquelas operações poderiam ser efetuadas por uma máquina* (KLINE, 1953, P. 4). Como conseqüência, nos deparamos com a atitude de valorização da Álgebra em detrimento da Aritmética, por parte dos professores de Licenciatura. Além da desconsideração dos argumentos geométricos legítimos em uma *demonstração*.

Outra questão pertinente à formação de professores de matemática se refere ao processo de *conceituação*, descrito por Lages (2001). Neste processo intervém de forma irremediável a adoção de simbologias adequadas à teoria em questão e, por que não dizer, psicologicamente convenientes para: o tratamento, formalização e a ligação entre os conceitos. Contudo, sentimos na prática, ao longo dos depoimentos, a falta de conexão e conceituação pouco satisfatória de vários conteúdos que serão objetos do ensino destes futuros professores.

Acreditamos que o professor recém saído de um curso de Licenciatura, deveria apresentar a habilidade de relacionar os conceitos que são apresentados aparentemente de forma desconexa no ensino básico, como o caso abordado aqui de: *função exponencial*, *progressões aritméticas*, *geométricas* e *indução matemática*.

Em disciplinas de natureza histórica, os licenciados deveriam, por exemplo, ser apresentados ao pensamento jônico que, conforme explica Kline (1972, p. 137), relacionavam os *números triangulares, quadrangulares, pentagonais* às *progressões aritméticas*. A equação conhecida dos *pitagóricos* $\frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n}{2}(3n-1)$, possui interpretações geométricas e pode ser verificada por *indução*, possibilitando novas formas de enxergar os conceitos vistos na escola. Nesta situação problema, temos um exemplo de *intermédio e auxílio de nossas habilidades visuais na solução de problemas numéricos* (GIAQUINTO, 2007, p. 137).

A abordagem histórica dos conteúdos e, particularmente no caso da *indução matemática*, poderia adquirir uma ênfase maior nos curso de Licenciatura, como temos por tradição no caso do Cálculo. De fato, num âmbito internacional, existe inúmeras orientações no sentido explorar o viés histórico dos conceitos. Embora este método também não seja auto-suficiente, quando encontramos alguns documentos que explicam que não é verdade que a abordagem histórica é o único caminho para comunicar o sentido do porque que determinado teorema se estabeleceu de certa forma, as motivações matemáticas de sua prova. A abordagem histórica não é igualmente o melhor caminho para comunicar estes *insights*. Porém, esta pode auxiliar de forma tremenda (NATIONAL COUNCIL OF THEACHERS OF MATHEMATICS, 1969, pg. 3).

Podemos observar também, ao longo da disciplina de Metodologia de Ensino, o limitado conhecimento do aluno com respeito às propriedades matemáticas do ensino básico, que podem ser demonstradas por indução. Embora a *escolha da linguagem, simbólica, verbal ou mesmo pictórica, possa afetar o comprimento da prova* (DEVLIN, 1998, p. 51), o professor formador não pode se furtar em fornecer o caráter de rigor, ao efetivar a prova, aos conteúdos de aparência evidente estudados neste nível inicial de escolaridade, uma vez que nos referimos à formação do professor de matemática. Assim, tal vigilância em relação às concepções do *rigor matemático*, pode evitar determinadas crenças ou idéias equivocadas em relação a esta ciencia, como as que registramos ao longo das entrevistas.

Por outro lado, referendando-se em nossa experiência, temos a convicção de que o papel do *rigor* em tal formação deveria apresentar seus limites. Tentaremos exemplificar nossa afirmação. HOLLAND, J. et all. (1989, pg. 292), descreve quatro passos na resolução de problemas que apresentam analogia, usados nos processos de *indução*, a saber: (1) construção mental das representações da fonte e do alvo a ser atingidos, (2) seleção e mapeamento na fonte do que potencialmente pode ser usado para se atingir o alvo, (3) identificação dos componentes que podem desempenhar algum papel nas situações análogas, (4) extensão do mapeamento para a extensão das regras que poderão ser aplicadas para a obtenção da solução. Na prática, as fases ou os momentos descritos por HOLLAND, J. et all, que poderiam ser usadas numa perspectiva didática, realmente adquirem importância numa aula de matemática que envolve *indução matemática*? Sentimos que não!

Kneale, W. & Kneale, M. (1962, pg. 520) advertem que determinadas afirmações podem ser admitidas como afirmações universais sobre números ou admitidas apenas como esquemas válidos em um caráter menos geral. Ele fornece o exemplo conhecido $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (*), que pode ser admitido pelos incipientes como uma verdade universal e absoluta, ou apenas como um procedimento que permite substituir $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ por $\frac{100(1+100)}{2}$. Kneale, W. & Kneale, M. acrescentam que o pouco risco de se utilizar em matemática, ambos os sentidos, de forma que o próprio contexto deixaria clara a interpretação necessária. Este exemplo fornecido por Kneale, W. & Kneale, M. ilustra de forma precisa a realidade da resolução de problemas que envolvem a indução, numa aula do ensino superior.

Freqüentemente observamos que os estudantes simplesmente aceitam aqueles resultados estabelecidos por indução e desenvolvem um *raciocínio algorítimico* do processo envolvido. Possivelmente, um dos motivos seja devido à forma de apresentação *standart* como vemos na equação (*) Concluímos que a possibilidade do próprio estudante descobrir o problema é desperdiçada, uma vez que o seu objetivo, que neste caso é verificar a igualdade, é explicitado de forma precipitada, comprometendo a evolução do raciocínio heurístico.

Esta atitude é criticada por Ávila (2007, pg. 15) quando lembra que muitos matemáticos ilustres, quando tratam de Pedagogia, são concordes em insistir na importância de se estimular a imaginação dos estudantes, de se valer o professor do raciocínio heurístico, dos argumentos de plausibilidade e das analogias que possam eventualmente ser exploradas nos processos de aprendizado e descoberta de propriedades obtidas por meio da indução matemática.

## REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. **Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário?**, Boletín de La Asociatíon Venezolana, Vol. X, Nº 2, 2003, p. 117-134.

ÁVILA, G. **Várias faces da Matemática: tópicos para a licenciatura e leitura em geral**, São Paulo: Editora Blucher, 2007.

BERGSON, H. **Matter and Memory**, London: The Macmillan Company, 1911.

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**, Porto: Editora Porto, 1994.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique: Du Savoir Savant Au Savoir Enseigne**, France: Presses Universitaire, 1991.

COUTURAT, L. **Définitions et Démonstrations Mathématiques, L´enseignement Mathématique**, Vol. 7, 1905, p. 105-121.

DANTIZIG, T. **Number: the Language of Science**, New York: Master Piece, 2005.

DE KETELE, J. M. & ROEGIERS, X. **Méthodologie du recueil d´informations: fondements des méthodes d´observations, des questionnaires, d´interviews**, Paris: De Boeck, 1996.

DEVLIN, K. **The Language of Mathematics: making the invisible visible**, New York: Freeeman and Company, 1998.

DEVLIN, K. **Sets, Functions and Logic: an introduction to abstracts mathematics**, third edition, New York: Chapmann & Hall, 2005.

DETLEFSEN, M. **Proof and Knowledge in Mathematics**, London: Routlledge, 1992.

DUPIN, J. J. & JOSHUA, S. **Introduction à la didactiques des sciences et des mathématiques**, Paris: Presses Universitaires de France, 1993.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

GIAQUINTO, M. **The Visual Thinking in Mathematics: an epistemological study**, Oxford: University Press, 2007.

HOLLAND, J. et all. **Induction: process of inference, Learning and Discovery**, Massachutts: MIT Press, 1989.

LACHELIER, J. **Le fondement de L´induction**, Paris: Félix Alcan Editeurs, 1896.

LAGES, E. L. **Exame de Texto: análise dos livros do ensino médio**, Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

LAGES, E. L. **A matemática do ensino médio**, Coleção do Professor de Matemática, Vol. 1, Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LAGES, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1, Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

LAKATOS, I. **Mathematics, Science and Epistemology,** Philosophical Papers, Vol. 2, Cambridge: University Press, 1978.

KLINE, M. **Mathematics in Western Culture**, London: Oxford University Press, 1953.

KLINE, M. **Mathematical Thought From Ancient and Modern Times**, vol. 1 New York: Oxford University Press, 1972.

KNEALE, W. & KNEALE, M. **The development of Logic**, Oxford: Oxford University Press, 1962.

MILL, S. **Système de Logique deductive et inductive**, Paris: Félix Alcan, 1889.

MORGAN, A. **On the studies and difficulties in Mathematics**, 4ª edition, La Salle: Open Court, 1831.

NATIONAL COUNCIL OF THEACHERS OF MATHEMATICS, **Historical Topics for Mathematical Classroom**, Washington, 1969.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**, Editora UNESP, São Paulo, 1993.

POINCARÉ, H. **La logique et l´intuition dans la science mathématique**, L´enseignement Mathématique, Vol. 1, 1899, p. 158-162.

POINCARÉ, H. **Les définitions générales em mathématiques**, L´enseignement Mathématique, Vol. 6, 1904, p. 258-283.

POINCARÉ, H. **La valeur de la Science**, Paris: Ernest Flammarion, 1905.

POLYA, G. **How to solve it: a new aspect of mathematical method**, Second edition, Princeton: University Press, 1945.

RUSSELL, B. **Mysticism and Logic**, London: George Allen & Unwin, 1910.

RUSSELL, B. **Our Knowledged of External Word**, London: George Allen & Unwin Ltd, 1914.

RUSSELL, B. **The Analysis of the Mind**, London: The Macmillan Company, 1921

RUSSELL, B. **An inquiry into Meaning and Truth**, London: George Allen, 1940.

RUSSELL, B. **The Problems of Philosophy**, London: Oxford University Press, 1943.

TALL, D. **Mathematical Processes and Symbols in the Mind**, in Z. A. Karian (ed.) **Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education**, MAA Notes 24, Mathematical Association of America, 1992, p. 57-68.

TOULMIN, S. **Knowing and Acting: an invitation to Philosophy**, London: Collier Macmillan Publishers, 1976.

WEYL, H. **Philosophy of Mathematics and Natural Science**, Princeton: Princeton University Press, 1949.