

PROJETO E ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS FILTROS IIR POR MEIO DA TÉCNICA DE INVARIÂNCIA AO IMPULSO E TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

Elder Eldervitch C. de OLIVEIRA (1); Adaildo Gomes D' ASSUNÇÃO (2); Ronaldo A. MARTINS (3); João Bosco L. de OLIVEIRA (4)

(1) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: elder2@ymail.com

(2) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: adaildo@ct.ufrn.br

(3) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: ronaldo@ufrnet.br

(4) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: bosco@sedis.ufrn.br

RESUMO

Neste artigo descrevem-se os conceitos básicos para a elaboração de filtros digitais recursivos (do inglês *infinite impulse response* - IIR) usados nos mais diversos sistemas de comunicação. Uma análise comparativa do desempenho das técnicas de projeto de filtros digitais do tipo passa-baixas é realizado, fazendo-se uso das funções de aproximação de Butterworth, Chebyshev e filtros elípticos. Para esta análise em termos de eficiência, viabilidade de projeto e estabilidade computacional fez-se uso das técnicas de invariância ao impulso e transformação bilinear, uma vez que o custo computacional para ambas as técnicas empregadas mostrou-se similar. O enfoque dessa pesquisa é voltado para uma análise do desempenho desses filtros. Para isto, foram desenvolvidos programas computacionais para simulações dos filtros IIR empregando a plataforma matlabTM para os resultados numéricos de frequência e fase. A pesquisa mostra também um estudo de caso através da simulação computacional em que o efeito de *aliasing* em projeto de filtros digitais dessa natureza utilizando as técnicas citadas para as mesmas especificações de projeto é investigado.

Palavras-chave: filtro digital, filtro IIR, invariância ao impulso, transformação bilinear

1 INTRODUÇÃO

Em todo sistema de comunicação o ponto crucial é o transporte do sinal de informação de um ponto onde se localiza o transmissor a outro ponto remoto, onde se localiza o receptor de destino. Até meados da década de 60, devido à natureza analógica dos sinais de informação, esses sinais eram convertidos em formas de onda de corrente ou tensão, e tratados por elementos de circuito (HAYKIN, 2001). Atualmente com o avanço das tecnologias digitais, os sinais são convertidos para uma representação discreta (digital) que pode ser facilmente compreendida e manipulada por um processador digital, conforme ilustra a Figura 1.

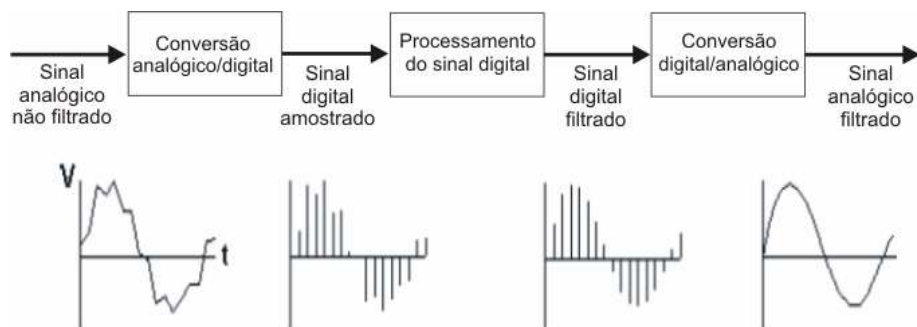


Figura 1 – Processamento digital de um sinal analógico

O processamento normalmente executado feito em sinais discretos é a operação conhecida como filtragem. Filtrar um sinal significa selecionar desse sinal quais frequências são desejadas e quais são indesejadas (DINIZ, 2004). O objetivo principal desse trabalho é realizar uma análise comparativa entre a técnica de invariância ao impulso e a técnica de transformação bilinear em projeto de filtros digitais IIR em termos de viabilidade de projeto, eficiência e estabilidade computacional. Para isso fez-se uso das funções de aproximação de Butterworth e Chebyshev respectivamente e dos filtros elípticos. Em particular, este artigo reúne os procedimentos utilizados para o projeto de filtro digital recursivo por ambas as técnicas, invariância ao impulso e transformação bilinear respectivamente. Na seção 2 é apresentada a metodologia utilizada para o projeto de um filtro digital a partir de um filtro analógico. A seção 3 é dedicada à formulação das técnicas empregadas no processo de projeto de um filtro digital IIR. A seção 4 ilustra os resultados obtidos para os filtros com características de Butterworth, Chebyshev e para os filtros elípticos. Na seção 5, são apresentadas as conclusões finais sobre o uso dessas metodologias em projeto de filtros digitais.

2 PROJETO DE FILTROS IIR A PARTIR DE FILTROS ANALÓGICOS PASSA-BAIXAS

Com relação à resposta ao impulso, um filtro que apresente como característica principal realimentação, ou seja, se a saída do filtro depende em maior ou menor grau dos valores de suas amostras passadas, esse tipo de filtro é denominado recursivo, ver o esquemático da Figura 2.

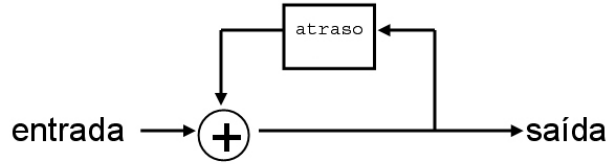


Figura 2 – Esquemático de um filtro IIR

Duas são as abordagens mais usadas no projeto de filtros IIR digitais. A mais comumente utilizada consiste em projetar um filtro IIR analógico, e então transformá-lo em um filtro digital equivalente, esta será a abordagem utilizada ao longo deste trabalho, uma vez que existem estudos bem avançados com relação a projeto de filtros analógicos (MONSON, 2006). No entanto, é prudente examinar as formas ótimas de se mapear esses filtros para o domínio de tempo discreto. Além disso, como existem projetos eficientes que facilitam o projeto dos filtros analógicos, essa abordagem de se projetar filtros IIR se torna simples. A segunda abordagem, que não será abordado nesse artigo, diz respeito a projeto de filtros IIR digital que consistem em utilizar um procedimento algorítmico de projeto, o qual geralmente exige o uso de um computador para resolver uma série de equações lineares e não lineares (HAMMING, 1998). Nas seções posteriores, serão examinadas duas abordagens que transformam filtros analógicos em digitais. O foco principal a ser abordado nesse artigo é uma análise comparativa entre a técnica de invariância ao impulso e a técnica de transformação bilinear em projeto de filtros digitais IIR em que o projeto e análise dos filtros do tipo passa-baixas digital se deram a partir de adaptações de filtros passa-baixas analógico, tais como: Butterworth, Chebyshev e filtros elípticos por meio das técnicas citadas. Primeiramente deve-se projetar um filtro passa-baixas analógico, para em seguida projetar a partir deste um filtro IIR passa-baixas digital. A grande maioria dos métodos de aproximação para filtros analógicos foi desenvolvida para projeto de sistemas passivos, cujo ganho não ultrapassa a unidade (OPPENHEIM, 1999). Portanto um conjunto típico de especificações para esses filtros é mostrado na Figura 3. O projeto de um filtro digital a partir de um protótipo analógico requer que transformemos $h(t)$ em $h[n]$ ou $H(s)$ em $H(z)$. Um mapeamento do plano s (domínio da transformada de Laplace) para o plano z (domínio da transformada Z) pode ser escrito como

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=m(z)} \quad [\text{Eq. 01}]$$

Em que, $H(z)$ é a função sistema no domínio discreto, $H_a(s)$ é a função sistema no domínio analógico e $s=m(z)$ é uma função de mapeamento.

3 TRANSFORMAÇÕES DE FILTROS ANALÓGICOS EM DIGITAIS

Essas transformações são mapeamentos de valores complexos presentes na literatura. Além disso, elas são capazes de preservar diferentes características de filtros analógicos em projetos de filtros digitais (MITRA, 1998). Por exemplo, a técnica de invariância impulso como será relatada na seção posterior, é capaz de preservar a resposta ao impulso de filtros analógicos em filtros digitais. Outra técnica bastante difundida é a transformação bilinear, que por sua vez é capaz de preservar a representação da função sistema de um domínio analógico em um domínio digital (HAYKIN, 2001).

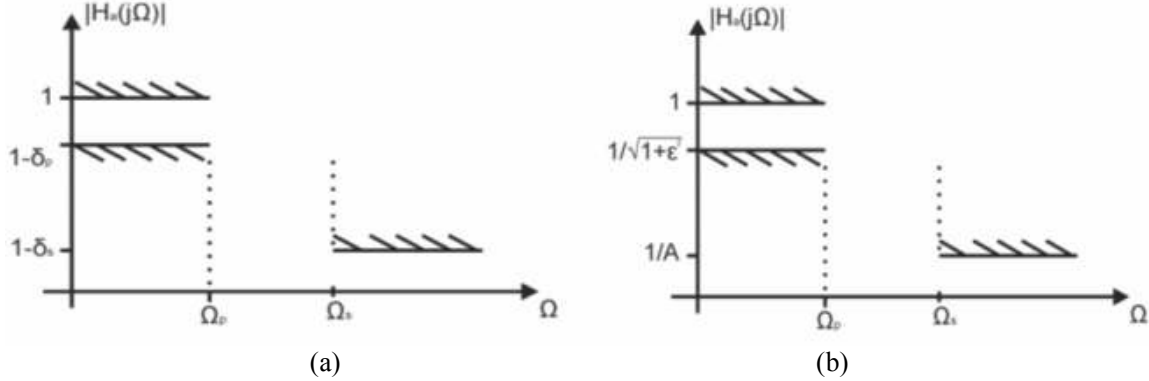


Figura 3 – Protótipo de um filtro passa-baixas analógico

Em que, δ_s e δ_p são as tolerância na faixa de rejeição e na faixa de passagem respectivamente; Ω_p e Ω_s são as frequências de corte da faixa de passagem e da faixa de rejeição respectivamente; A é à atenuação do sinal na faixa de rejeição.

3.1 Técnica de Invariância ao Impulso

O objetivo da técnica de invariância ao impulso é conseguir uma representação da resposta ao impulso o mais próximo possível de um filtro analógico seletivo em frequência. Portanto a amostra *sample* (amostragem) de um filtro analógico para obtenção de $h[n]$ é dada por:

$$H(n) = H_a(nT) \quad [\text{Eq. 02}]$$

Em que, $h[n]$ é a resposta ao impulso (delta de Dirac) e T é o período de amostragem.

As frequências de tempo contínuas e discretas são relacionadas pelas [Eq. 3] ou [Eq. 4] respectivamente.

$$\omega = \Omega T \quad [\text{Eq. 03}]$$

Ou

$$e^{j\omega} = e^{j\Omega T} \quad [\text{Eq. 04}]$$

Em que, ω é a frequência de tempo discreto e Ω é a frequência de tempo contínuo. Desde que $z = e^{sT}$ se encontra no círculo de raio unitário e $s = j\Omega$ no eixo imaginário, tem-se a seguinte transformação do plano s (analógico) no plano z (digital).

$$z = e^{sT} \quad [\text{Eq. 05}]$$

As funções sistemas $H(z)$ e $H_a(s)$ são relacionadas no domínio da frequência por:

$$H(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad [\text{Eq. 06}]$$

A consequência do mapeamento da [Eq. 5] no plano complexo é mostrado na Figura 4, o qual apresenta as seguintes considerações:

i) Fazendo $\sigma = \text{Re}(s)$, nota-se que

$\sigma < 0$ mapeamento $|z| < 1$ (interior do círculo de raio unitário)

$\sigma = 0$ mapeamento $|z| = 1$ (no círculo de raio unitário)

$\sigma > 0$ mapeamento $|z| > 1$ (fora do círculo de raio unitário)

ii) Todo semi-plano s de comprimento $2\pi/T$ é mapeado em $|z| < 1$. Este mapeamento não é único, mais de vários para um.

iii) Uma vez que todo o semiplano s esquerdo é mapeado dentro do círculo de raio unitário, um filtro analógico causal e estável é mapeado em um filtro digital também causal e estável.

iV) Se $H_a(j\Omega) = H_a(j\omega/T) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, então $H(e^{j\omega}) = (1/T)H_a(j\omega/T)$, $|\omega| \leq \pi$.

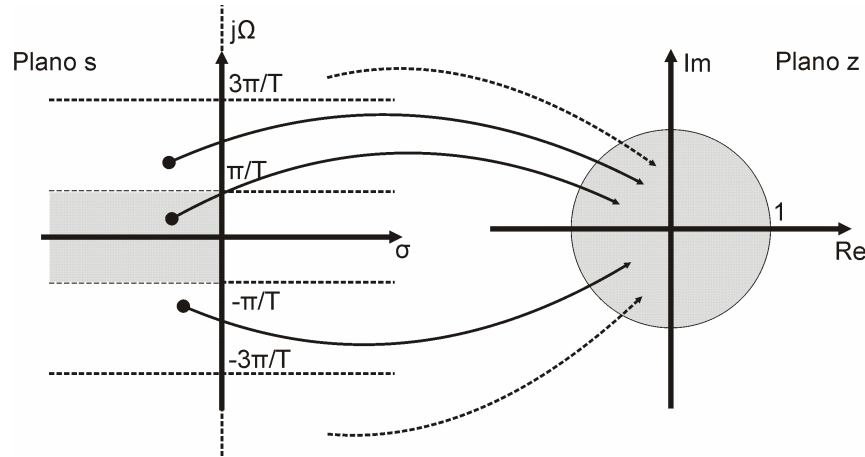


Figura 4 – Mapeamento do plano analógico (plano s) no plano digital (plano z) pela técnica de invariância ao impulso

3.2 Etapas do projeto de um filtro digital passa-baixas utilizando a técnica de invariância ao impulso

Passo 1. Escolher T e determinar as frequências de corte Ω_p da faixa de passagem e Ω_s da faixa de rejeição, ambas dada pela [Eq. 3].

Passo 2. Projetar um filtro analógico $H_a(s)$ usando as especificações Ω_p , Ω_s , δ_p , A_s . Em que δ_p é o *ripple* da faixa de passagem e A_s é a atenuação na faixa de rejeição.

Passo 3. Usando expansão em frações parciais, expandir $H_a(s)$ em $H_a(s) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{R_k}{s - P_k} \right)$.

Passo 4. Projetar um filtro analógico passa-baixas com as frequências de corte encontradas no passo 1 e com o *ripple* da faixa de passagem e a atenuação na faixa de rejeição do passo 2.

Passo 5. Aplicar a técnica de invariância ao impulso ao filtro projetado no passo 3

3.3 Transformação Bilinear

A transformação bilinear é um mapeamento algébrico entre o plano s e o plano z realizado de tal forma que todo o eixo imaginário do plano s seja mapeado no círculo de raio unitário (frequências de tempo discreto) no domínio da transformada z . Esse mapeamento tem como característica ser não linear e a principal

vantagem do método da transformação bilinear é que o *aliasing* é feito tão pequeno a ponto de ser desconsiderado. Essa transformação é dada por:

$$s = \frac{1}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad [\text{Eq. 07}]$$

Sendo a transformação bilinear é uma função racional que mapeia o semiplano s esquerdo no interior do círculo unitário e mapeia o eixo $j\Omega$ (eixo imaginário) de forma biunívoca sobre a circunferência do círculo de raio unitário. Entretanto, a relação entre o eixo $j\Omega$ e o círculo unitário é não linear e é dada pela função de deformação de frequência.

$$\omega = 2 \arctan \frac{\Omega T}{2} \quad [\text{Eq. 08}]$$

A transformação bilinear preservará apenas a resposta de magnitude dos filtros analógicos que tenham resposta ideal constante. Estas propriedades da transformação bilinear com um mapeamento do plano s para o plano z são mostradas na Figura 5.

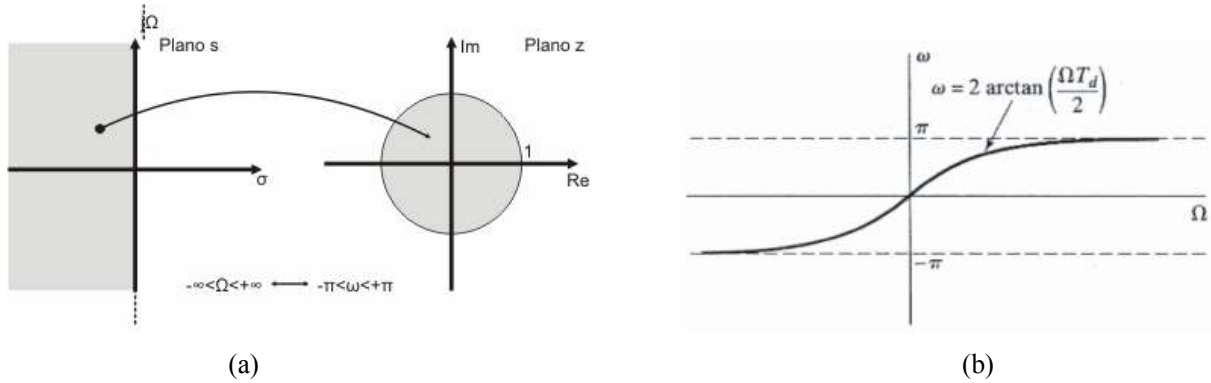


Figura 5 – (a) Mapeamento do plano s no plano z ; (b) Mapeamento do eixo da frequência de tempo contínuo no eixo da frequência de tempo discreto

3.4 Etapas do projeto de um filtro digital passa-baixas utilizando a transformação bilinear

Para uma frequência de corte ω_p na faixa de passagem, uma frequência de corte ω_s na faixa de rejeição, um *ripple* δ_p na faixa de passagem e um *ripple* δ_s na faixa de rejeição, apresenta-se os seguintes passos para o projeto:

Passo 1. Usando a função inversa da [Eq. 8], obtém-se a pré-deformação das frequências de corte das faixas de passagem e de rejeição do filtro digital, ω_p e ω_s , para determinar as frequências de corte das faixas de passagem e de rejeição do filtro analógico passa-baixas. Para $T_d = 2$, a função de pré-deformação é dada por:

$$\Omega = \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad [\text{Eq. 09}]$$

Passo 2. Projetar um filtro analógico passa-baixas com as frequências de corte encontradas no passo 1 e com os *ripples* das faixas de passagem e de rejeição δ_p e δ_s , respectivamente.

Passo 3. Aplicar a transformação bilinear ao filtro projetado no passo 2.

4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DOS FILTROS PELA TÉCNICA DE INVARIÂNCIA AO IMPULSO E TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

Um filtro passa-baixas ideal é um filtro seletivo em frequências, que seleciona perfeitamente as componentes de baixas frequências do sinal de entrada e rejeita perfeitamente as componentes de altas frequências (HAYKIN, 2001). Os gráficos das Figura 6, 7, 8 e 9 mostram respectivamente os resultados das simulações referente a um projeto de filtro passa-baixas digital IIR Butterworth de oitava ordem e Chebyshev de sexta

ordem utilizando a técnica de invariância ao impulso e a técnica da transformação bilinear respectivamente, para as seguintes especificações de projeto: frequência de corte da faixa de passagem, $\omega_p = 0,2\pi$; frequência de corte da faixa de rejeição, $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 2$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=18$.

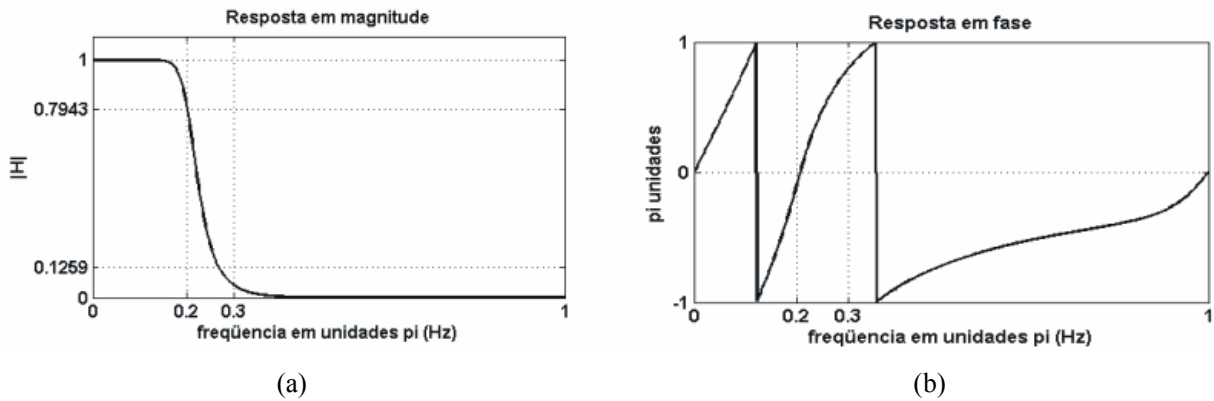


Figura 6 – Filtro IIR passa-baixas Butterworth projetado pela técnica de invariância ao impulso: (a) resposta em frequência; (b) resposta em fase

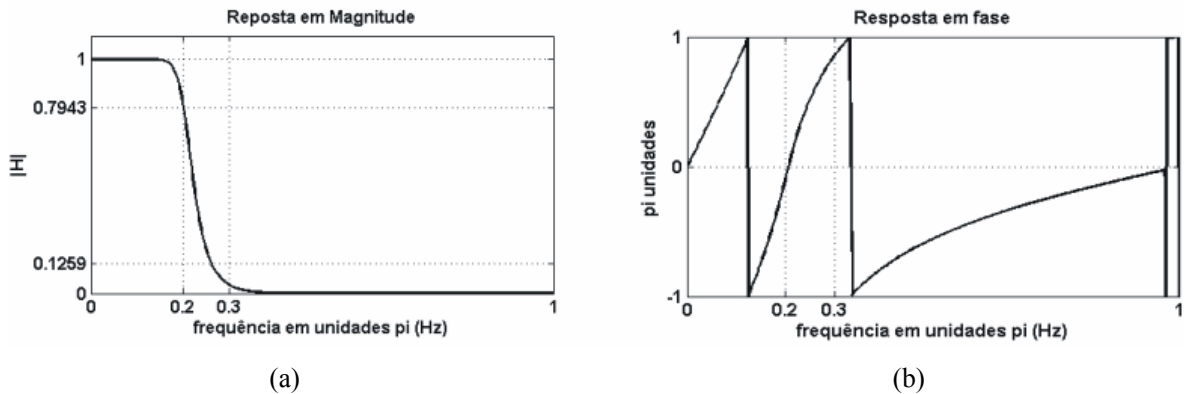


Figura 7 – Filtro IIR passa-baixas Butterworth projetado pela técnica de transformação bilinear: (a) resposta em frequência; (b) resposta em fase

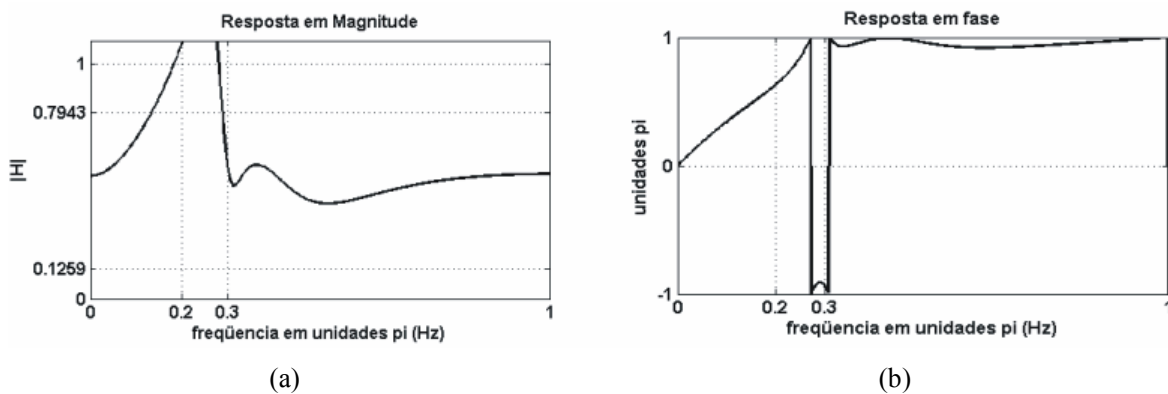


Figura 8 – Filtro IIR Chebyshev projetado pela técnica de invariância ao impulso: (a) resposta em frequência; (b) resposta em fase

Os resultados obtidos conforme ilustrados nas Figuras 6 e 7 mostram a eficiência de ambas as técnicas no projeto de um filtro digital passa-baixas IIR, em que suas características de magnitude e fase se mostraram bastante semelhantes. A técnica de invariância ao impulso mostrou-se bastante eficaz para filtros limitado em banda, como é o caso de um filtro passa-baixas, cujo resultado é mostrado na Figura 6, uma vez que não há oscilações na banda de rejeição. Por sua vez, o resultado obtido para o projeto de um filtro Chebyshev, conforme ilustrado na Figura 8, apresentou uma degradação na faixa de passagem e de rejeição para o filtro

projetado, mostrando fraca eficiência na região da faixa de rejeição. Por sua vez, o mesmo filtro projetado pela técnica da transformação bilinear apresentou um bom resultado, conforme ilustra a Figura 9, apresentando faixa de passagem maximamente plana e uma faixa de rejeição *equiripple*. As Figura 10 e 11 ilustram respectivamente o comportamento de um filtro elíptico de terceira ordem projetado pela técnica de invariância ao impulso e pela técnica de transformação bilinear para as seguintes especificações de projeto: frequência de corte da faixa de passagem, $\omega_p = 0,2\pi$; frequência de corte da faixa de rejeição, $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 1$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=15$ dB.

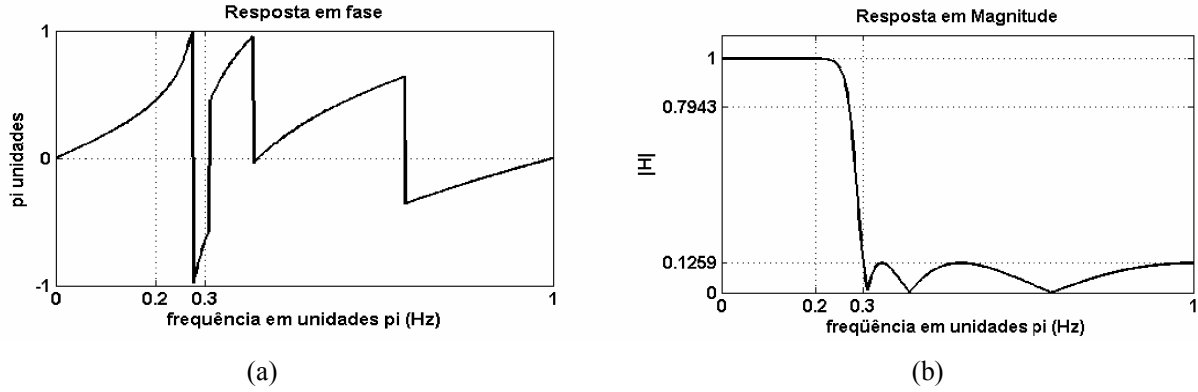


Figura 9 – Filtro IIR Chebyshev projetado pela técnica de transformação bilinear: (a) resposta em fase; (b) resposta em frequência

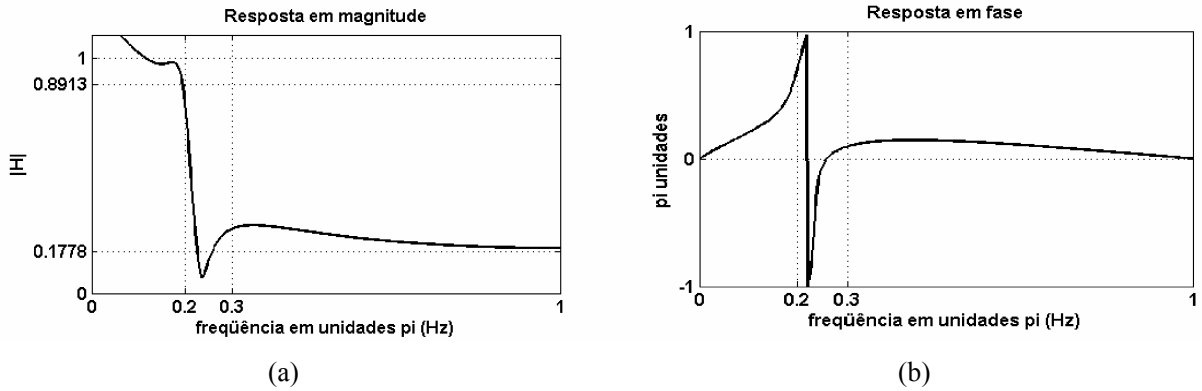


Figura 10 – Filtro digital IIR elíptico projetado pela técnica de invariância ao impulso: (a) resposta em frequência; (b) resposta em fase

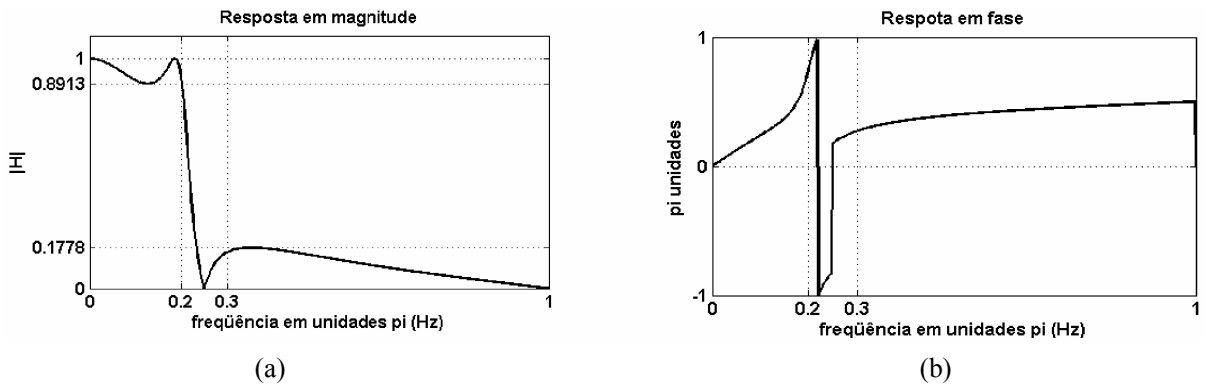


Figura 11 – Filtro digital IIR elíptico de terceira ordem projetado pela técnica de transformação bilinear: (a) resposta em frequência; (b) resposta em fase

Novamente observa-se uma degradação na faixa de passagem e de rejeição para o filtro projetado com a técnica de invariância ao impulso, ver Figura 10, apresentando assim um mau funcionamento e uma fraca

eficiência na região da faixa de rejeição. Por sua vez, o mesmo filtro projetado pela técnica da transformação bilinear apresentou um bom comportamento para os parâmetros de projeto especificado, em que se constatou uma região de passagem *equiripple* e uma região de rejeição também *equiripple*, respondendo bem dessa forma as especificações de projeto estabelecidas para uma atenuação em torno de 15 dB.

5 CONCLUSÃO

Neste artigo, apresentou-se o projeto e implementação no *software* computacional MATLAB™, dos filtros recursivos IIR. Os gráficos obtidos como resultados desse trabalho forneceram uma boa compreensão do seu comportamento em termos de espectro de amplitude, frequência, fase e de quanto os filtros projetados tendem a se aproximar de um filtro ideal. Baseado nas simulações e nos resultados obtidos, constatou-se algumas semelhanças e diferenças entre as técnicas analisadas (invariância ao impulso e transformação bilinear), tais como: No mapeamento por invariância ao impulso e por transformação bilinear, a estabilidade do filtro projetado é garantida e as frequências Ω e ω são linearmente relacionadas. Uma desvantagem constatada nos resultados das simulações pelo método da invariância ao impulso é a presença de *aliasing* na resposta em frequência do filtro projetado, e em alguns casos o efeito de *aliasing* é intolerável. Por sua vez, a técnica por transformação bilinear é imune ao efeito de *aliasing*, tornando o filtro projetado com esta técnica mais eficiente e estável em relação à técnica por invariância ao impulso. Para filtros limitados em banda, como é o caso de um filtro passa-baixas, ambas as técnicas mostraram eficientes. Já para projeto de filtros com características de Chebyshev e elípticos em que se faz presente oscilação tanto na banda passante quanto na banda de rejeição a técnica de invariância ao impulso mostrou-se inadequada para projetos dessa natureza, enquanto que a técnica de transformação bilinear manteve a estabilidade e a eficiência desejada.

REFERÊNCIAS

DINIZ, P.S.R. Eduardo, A.B.S. SERGIO, L.N. **Processamento Digital de Sinais: Projeto e Análise de Sistemas**. 2. ed. São Paulo; Bookman, 2004.

HAYKIN, S. BARRY, V.V. **Sinais e Sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HAMMING, R.W. **Digital Filters**. 3. ed. New York, Dover publications inc, 1998.

MONSON, H.H. **Processamento Digital de Sinais**. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2006.

OLIVEIRA, E.E.C. **Estudo e implementação de Filtros Digitais FIR e IIR**. 2007. TCC (Trabalho de conclusão de curso) – GTEMA, Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba, João Pessoa, 2007.

OPPENHEIM, A. SCHAFER, V. BUCK, J.R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2. ed. New Jersey; Prentice Hall, 1999.

OLIVEIRA, E. E. C.; CORREIA, S. E. N.; MENDONÇA, L. M. Implementação do filtro de resposta impulso infinita (IIR) empregando a técnica de transformação bilinear. *In: II CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA*, 1., 2007, João Pessoa. **Anais ...** João Pessoa: CEFET-PB. 1 CD-ROM.

MITRA, S.K. **Digital Signal Processing A computer-Based Approach**. McGraw-Hill, 1998.