

ESTUDO DO POTENCIAL ELÉTRICO ATRÁVES DE EQUAÇÕES DE LAPLACE PARA SUPERFÍCIE.

Gilclean Barbosa NUNES; Thiago Trajano de ALMEIDA.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Cajazeiras,
Rua José da Silva, 300, Jardim Oásis, Cajazeiras/PB – 58900-000 (83) 3531- 4560 R-212. e-mail:
gilleanbn@gmail.com, thiago_trajn@hotmail.com.

RESUMO

Este estudo tem como objetivo encontrar a solução analítica quanto numérica da equação de Laplace em uma, duas e três dimensões para o potencial elétrico, como também analisar as interações necessárias para que a solução numérica venha convergir para o mais próximo da solução analítica, bem como ver a distribuição de potencial elétrico e o valor de potencial de dois pontos, A e B no interior de um quadrado (calha). Foi desenvolvido um algoritmo (processo iterativo) onde estabelecemos uma tolerância (critério de parada) e este foi utilizado para observar a convergência e a qualidade da solução obtida. Em seguida visualizamos a distribuição de potencial devido um cubo, linha, placa e ponto dentro do nosso domínio computacional.

O estudo foi desenvolvido utilizando o MATLAB (Matrix LABoratory) software de alta performance voltado para o cálculo numérico, bastante usado na engenharia.

O potencial elétrico entre as placas de um Capacitor é regido pela solução da equação de Laplace unidimensional, como também na separação eletrostática de sólido (feixes de elétrons) em uma máquina xerográfica, podendo assim ser descrita como uma importante aplicação da eletrostática.

Palavras-chave: Eletro magnetismo, distribuição de potencial elétrico, campo elétrico.

1.INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver algumas noções básicas de análise numérica utilizando um software (MATLAB 7.0) para simulação, tendo como principal ferramenta o computador. Para isso é desenvolvido um programa que resolve a equação de Laplace em uma dimensão. Essa equação rege o potencial elétrico entre as placas de um capacitor.

Na segunda parte do trabalho será feita a análise em duas dimensões de forma numérica, bem como ver a distribuição de potencial elétrico e o valor de potencial de dois pontos, A e B no interior de um quadrado. Um método iterativo é desenvolvido, e um critério de parada é utilizado para observar a convergência e a qualidade da solução obtida.

E para finalizar será feito a análise em três dimensões, para isso foi utilizado o critério de parada do segundo experimento, ao final utilizando o programa desenvolvido foi verificado como é a distribuição de potencial elétrico para um cubo, uma placa, uma linha e um ponto.

A desvantagem encontrada é que a solução numérica é uma aproximação da solução analítica e como todo método numérico apresenta erros: erros introduzidos pela máquina e pelo próprio método utilizado. Mesmo assim os resultados obtidos condizem com os conceitos físicos e matemáticos. A grande vantagem de tal pesquisa é compreender as linhas equipotenciais e de campo elétrico, pois estas linhas são detectadas por um instrumento preciso de medida de campo eletromagnético, para um posterior estudo da poluição eletromagnética e das inúmeras doenças provocadas por ela.

2. EQUAÇÃO DE LAPLACE UNIDIMENSIONAL-SOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste estudo foi desenvolvido um programa que resolve a equação de Laplace em uma dimensão. Essa equação rege o potencial elétrico entre as placas de um capacitor, por exemplo.

O problema é resolver a equação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

Através de integração direta e determinar a forma genérica de $V(x)$, sujeito as seguintes condições de contorno:

$$V(0) = V_0, \quad V(1) = V_1,$$

Resolvendo tal problema encontramos a seguinte solução analítica:

$$V(x) = (V_1 - V_0)x + V_0$$

(potencial elétrico nas placas de um capacitor)

Utilizando a ferramenta de computação e o programa desenvolvido, realizamos varias interações até que a solução numérica convergisse para a solução analítica encontrada.

Procedimento Experimental

Inserido as seguintes linhas de código:

```
x=0:0.05:1;  
V=3*x+x.*x;  
plot(x,V)
```

Foi obtido o gráfico 1:

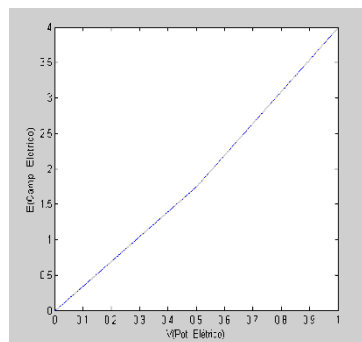


Figura 1 - potencial elétrico num capacitor (tensão versus distância).

Substituído a expressão de $V(x)$ pela expressão obtida teoricamente, dado que:

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 1$$

$$V(x) = x$$

Executado o script têm – se o seguinte gráfico:

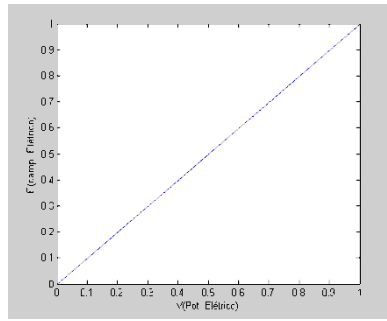


Figura 2 – tensão nas placas de um capacitor (aproximação numérica).

Pode obter a solução analítica usando o método numérico fizemos a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V^{+h} - 2V^x + V^{-h}}{\Delta x^2} = 0$$

Desde que Δx seja pequeno, assim pode determinar V^x , simplesmente como

$$V^x = \frac{V^{+h} + V^{-h}}{2}$$

Para programar a equação acima, introduziu o código abaixo ao script, onde $N_x = 10$, é o numero de pontos, $V(1,1) = 0$ e $V(N_x,1) = 1$, são as condições de contorno.

```
Nx=10;
V=zeros (Nx,1);
V(1,1)=0;
V(Nx, 1)=1;
```

Em seguida acrescentou-se o laço for abaixo ao programa, para iterar os valores de V, e visualizarmos o gráfico de V(gráfico 3 abaixo).

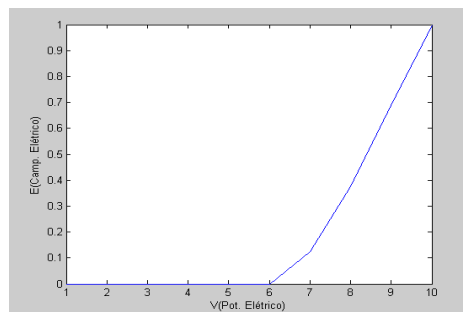


Figura 3- Aproximação do valor do Potencial elétrico.

```
for (k=2:Nx-1)
V(k,1)=(V(k-1,1)+V(k+1,1))/2;
end
```

Por ultimo acrescentou outro laço for externo ao primeiro indo de 1 à NI, onde NI são números de repetições. E plotou o gráfico de V(gráfico 4 abaixo)

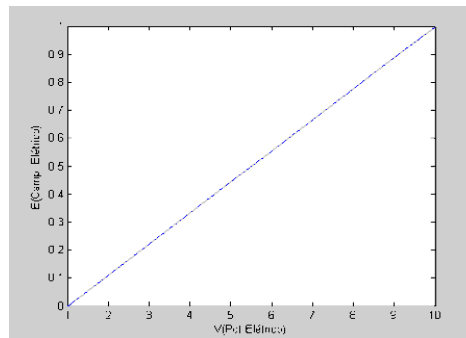


Figura 4 - Simulação final em uma dimensão (tensão no capacitor).

```

NI=15;for (m=1:NI)
    for (k=2:Nx-1)
        V(k,1)=(V(k-1,1)+V(k+1,1))/2;
    end
end
end

```

No final do processo tem-se o programa completo, conforme abaixo que da numericamente a solução de Laplace em uma dimensão, quando manipulado de maneira correta, onde NI (interações) e Nx (número de pontos).

3. EQUAÇÃO DE LAPLACE EM DUAS DIMENSÕES-SOLUÇÃO NUMÉRICA

O objetivo (encontrar o potencial dos pontos e verificar quantas interações é necessário), com isso em mente, simulamos o algoritmo desenvolvido para os seguintes casos e obtivemos os seguintes resultados:

Caso 1:

$N_x = N_y$ e o critério de parada 0.1 .

Observamos a distribuição de potencial e obtivemos os seguintes resultados:

Numero de interações, $n = 25$ interações

Potencial em A, $V_a = 2.88$ v

Potencial em B, $V_b = 6.13$ v

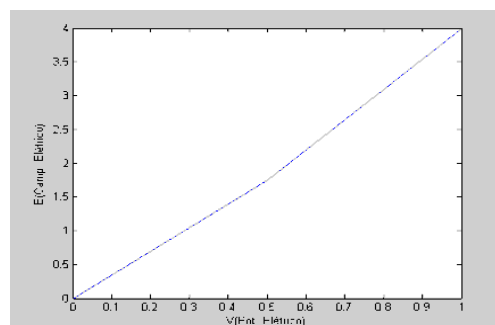


Figura 5: Caso 1–Distribuição de potencial na calha, Simulação com 25 interações.

Caso 2:

$N_x = N_y$ e o critério de parada, 0.001 .

Observamos a distribuição de potencial e obtivemos os seguintes resultados:

Numero de interações, $n = 81$ interações

Potencial em A, $V_a = 3.90$ v

Potencial em B, $V_b = 6.70$ v

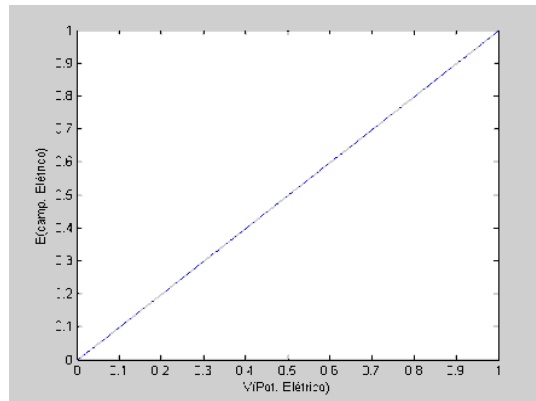


Figura 6: Caso 2– Distribuição de potencial na calha, Simulação com 81 interações.

Caso 3:

$N_x = N_y$ e o critério de parada, 0.00001 .

Observamos a distribuição de potencial e obtivemos os seguintes resultados:

Numero de interações, $n = 137$ interações.

Potencial em A, $V_a = 3.91$ v.

Potencial em B, $V_b = 6,70$ v.

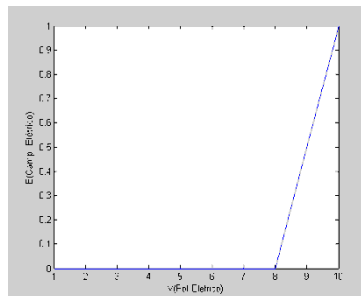


Figura 7: Caso 3–Distribuição de potencial na calha, Simulação com 137 interações.

Analisando os resultados obtidos para os três casos, verificou-se que, quanto menor for o critério de parada mais preciso será a nossa solução (potencial de A e B), mas será necessário um maior numero de interações, conseqüentemente maior tempo no processamento de dados.

Para o caso estudado a precisão pode ser obtida com o critério de parada 0.001, pois foram necessárias 81 interações para se obter a solução. Praticamente a mesma solução encontrada com 137 interações cujo critério de parada é 0.00001, isto ocorreu por que o problema não é tão complexo, caso fosse quanto menor a tolerância (critério de parada), mas precisa é nossa solução.

Percebe-se isso quando aumenta $N_x = N_y = 30$ conforme abaixo, encontremos uma boa precisão com a tolerância de 0.00001.

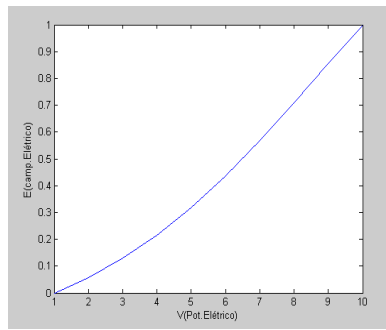


Figura 8: Simulação com tolerância de 0.00001.

4.EQUAÇÃO DE LAPLACE EM TRÊS DIMENSÕES-SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para isso foi desenvolvido um programa que resolve a equação de Laplace em três dimensões. Foi utilizado o critério de parada do segundo estudo, ao final visualizamos a distribuição de potencial elétrico devido a um cubo, uma placa, uma linha e um ponto.

4.1 Procedimentos Experimentais

Inseriram-se as seguintes linhas de código:

```

Nx=20;                                for(k=2:Nx-1)
Ny=;                                  for(m=2:Ny-1)
V3D=zeros(Nx,Ny,Nz);                 for(n=2:Nz-1)
V3D(:,1,:)=0;                        antigo=V3D(k,m,n);
V3D(:,Ny,:)=0;                       V3D(k,m,n)=(V3D(k-1,m,n)
V3D(1,,: Nx;                         +V3D(k+1,m,n)+V3D(k,m-1,n)
Nz=Nx:)=110;                         +V3D(k,m+1,n)+V3D(k,m,n-
                                   1)+V3D(k,m,n+1))/6.0;
V3D(Nx,,:)=0;                        If(abs((V3D(k,m,n)-antigo))>1)
V3D(:,1)=110;                        Converge=0;
V3D(:,Nz)=0;                          end
Contador=0;                           end
Antigo=0;                             end
Converge=0;                           end
While (converge==0)                   contador=contador+1;
Converge=1;

```

No programa acima, duas paredes estão com potencial 110 V ($x = 0$ e $z = 0$) enquanto as outras estão com potencial 0V. A próxima etapa é visualização desses resultados, utilizando a função `contour` usada no estudo passado. No entanto, essa função só serve para visualização 2D, então será feito cortes no domínio. Para o problema descrito acima, dois cortes mostraram o que acontece quando é cortado ambas as placas com potencial 110 V e quando cortado apenas uma delas. Também foi usada a função `subplot` para visualizar os gráficos na mesma figura.

Acrescentou ao final do código os seguintes comandos:

```

for(k=1:Nx)
    for(m=1:Ny)
        V(k,m)=V3D(k,m,Nz/2);
    end
end
figure(1);
subplot(1,2,1)

```

```

contour(1:Nx,1:Ny,V,0:10:110)
for(k=1:Nx)
    for(m=1:Nz)
        V(k,m)=V3D(k,Ny/2,m);
    end
end

```

Foi executado o arquivo e visualizado a distribuição de potencial elétrico.

Interessado não apenas em problemas onde a fronteira tem potencial definido, mas problemas onde uma geometria qualquer dentro do domínio, possui um potencial pré-determinado. Por exemplo, suponha que desejamos saber a distribuição de potencial no espaço devido a um cubo de lado 4 com potencial 110 V localizado no centro do domínio. Como resolver esse problema utilizando o programa desenvolvido? Como o cubo possui potencial fixo, os pontos localizados no seu interior não devem ser alterados. Em vez de atualizar os pontos como feitos anteriormente, deve checar se tais pontos estão no cubo ou não. Se estiverem, o potencial é fixo e não deve ser mudado. Para atingir tal objetivo, troca-se a linha.

```

V3D(k,m,n)=(V3D(k1,m,n)+V3D(k+1,m,n)+V3D(k,m1,n)+V3D(k,m+1,n)
+V3D(k,m,n1)+V3D(k,m,n+1))/6.0;

```

Por

```

if(k>Nx/2-2&k<=Nx/2+2&m>Ny/2-2&m<=Ny/2+2&n>Nz/2-2&n<=Nz/2+2)

```

```

V3D(k,m,n)=110;

```

else

```

V3D(k,m,n)=(V3D(k-1,m,n)+V3D(k+1,m,n)+V3D(k,m-1,n)+
V3D(k,m+1,n)+V3D(k,m,n-1)+V3D(k,m,n+1))/6.0;

```

End

Agora só é atualizado os pontos que não pertencem ao cubo.

Executado o programa com está pequena alteração e visualizou a distribuição de potencial elétrico no cubo (conforme abaixo), depois diminuiu uma dimensão, alterou algumas linhas de código e visualizou a distribuição de potencial devido a uma placa, diminuído mais uma dimensão observou a distribuição devido a uma linha e por ultimo devido a um ponto, conforme gráficos em abaixo.

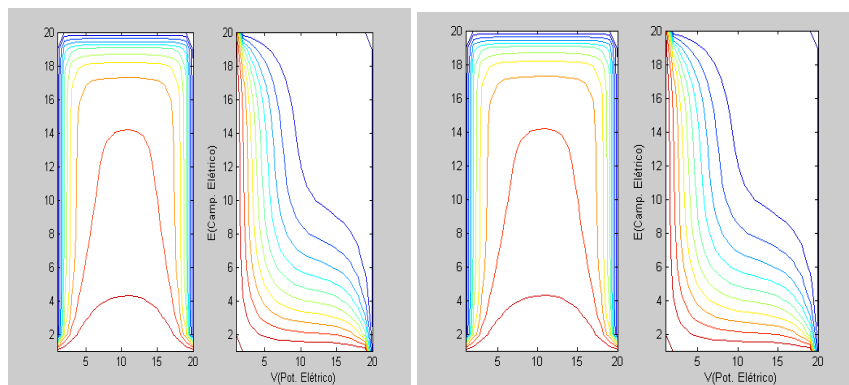


Figura 9-(a) Cubo.

Figura 9-(b) Placa.

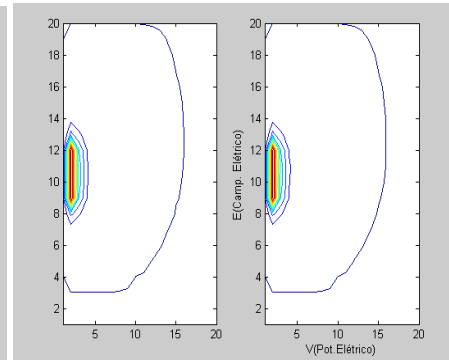
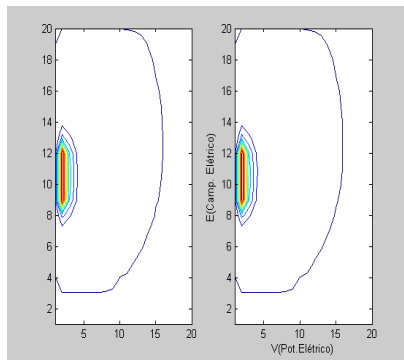


Figura 9-(c) Linha

Figura 9- (d) Ponto.

5. CONCLUSÃO.

A pesquisa realizada proporcionou modelar um fenômeno físico real usando ferramentas numéricas. Seu objetivo não é dar solução para o problema, mas dar base computacional e teórica no estudo de campos eletromagnéticos numericamente.

Nesta pesquisa a parte mais importante é a solução da equação de Laplace 3D, pois a partir dela podemos dar a distribuição de potencial e de campo elétrico de qualquer superfície simétrica ou não (usando o programa desenvolvido). Na prática nos problemas reais é dado a distribuição de potencial e partir dela podemos tirar as outras variáveis de interesse envolvidas no processo de desenvolvimento, bem como prever possível distúrbios futuros.

O estudo das linhas equipotenciais e de campo elétrico é de suma importância no projeto e desenvolvimento de novos instrumentos óptico eletrônicos. A partir delas pode-se medir o tanto de irradiação que chega a cada um de nós todos os dias, transmitidas pelas ondas eletromagnéticas e tentar encontrar uma solução para minimizar as doenças provocadas por esta irradiação.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TECNICAS. NBR 6023: Informação e documentação: Referências: Elaboração. Rio de Janeiro, 2000.

WILLIAM H. HAYT, JR. JOHN A. BAWCK. Eletromagnetismo. 6ª ed. Editora S.A.: Livros técnicos e Científicos (LTC), 2003.

SHADIKU N. O. MATTHEW. Elementos de Eletromagnetismo. 3ª edição. Editora Bookman, 2002.

BALANIS, C.A.: Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley and Sons, New York, 1989.

JACKSON, J. D.: Classic Electrodynamics, 3rd edition, John Wiley and Sons, New York, 1999.

CHENG, D. K.: Field and Wave Electromagnetics, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Mass, 1989.