

## **ESTIMATIVA DA CARGA CRÍTICA NA FLAMBAGEM DE EIXOS ESCALONADOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Rafael NUNES DE ALMEIDA PRADO (1); Alessandro V. P. ROLIM DE ARAÚJO (2); Júlio ALVES HERMÍNIO (3)**

(1) CEFET – RN, Oficina de Matemática Industrial – DATIN – CEFET – RN

Av. Senador Salgado Filho, 1559, Tirol, fone/fax: (84)9138-9029 Natal-RN, CEP 59015-000 e-mail:  
[rnaprado@yahoo.com.br](mailto:rnaprado@yahoo.com.br)

(2) CEFET – RN, e-mail: [alessandrorolim@bol.com.br](mailto:alessandrorolim@bol.com.br)

(3) CEFET-RN, e-mail: [julioherminio@globo.com](mailto:julioherminio@globo.com)

### **RESUMO**

O presente trabalho trata da determinação da carga crítica de flambagem de um eixo escalonado engastado-apoiado submetido a uma carga axial. O estudo consistiu no desenvolvimento de um programa computacional em linguagem pascal (e ambientado em delphi) que, a partir das matrizes inerentes ao estudo da flambagem e baseando-se no método dos elementos finitos, conduz a um problema de valor próprio que resolvido, fornece os valores das cargas críticas, em ordem crescente. Apesar da discretização do eixo ter sido feita em dois elementos apenas, o resultado mostrou-se compatível quando comparado com outro estudo feito pelo método das diferenças finitas, tendo este o inconveniente da manipulação da mudança de seção com relação ao momento de inércia, o que não acontece com o método dos elementos finitos. Evidentemente, o programa pode ser aperfeiçoado, permitindo a análise de eixos com outros tipos de apoio e uma discretização em mais elementos. O programa implementado pode ser usado tanto industrial como educacionalmente.

**Palavras-Chave:** carga crítica, flambagem, elementos finitos, estruturas

## 1. INTRODUÇÃO

Um dos problemas mais frequentes enfrentados por analistas de projetos de engenharia é o da flambagem, tendo como consequência, a necessidade de calcular a carga crítica de elementos estruturais esbeltos ou da estrutura como um todo.

Uma alternativa bastante econômica usada na indústria moderna é, substituir o estudo de um fenômeno através de protótipos, pelo desenvolvimento ou utilização de programas computacionais capazes de, a partir de uma modelagem matemática, simularem o fenômeno com precisão.

No dimensionamento de estruturas deve-se analisar o comportamento de fenômenos a que as mesmas estão expostas, e entre eles é o estudo da flambagem, que consiste em, uma vez uma peça ou estrutura estando exposta a um carregamento  $P$ , determinar-se um coeficiente  $\lambda$  tal que, multiplicado por  $P$ , resulte na carga crítica a ser considerada no projeto (HERMÍNIO, 1996).

Este trabalho visa a construir um programa que, a partir das matrizes inerentes ao estudo de flambagem e baseando-se no método dos elementos finitos, (HERMÍNIO E MELO, 1997), seja capaz de determinar a carga crítica de flambagem de um eixo escalonado submetido a uma carga axial.

## 2. METODOLOGIA

Existem inúmeros métodos capazes de determinar a carga crítica à qual são submetidos elementos estruturais. Os métodos analíticos são capazes de calcular valores exatos (TIMOSHENKO E GERE, 1963), porém são limitados a casos simples. O presente trabalho baseia-se no método dos elementos finitos tendo em vista sua comodidade em tratar problemas complexos que em geral não teriam uma solução exata (HERMÍNIO, 1996).

### 2.1. O Método dos Elementos Finitos

É bastante conhecido que na determinação da carga crítica no regime elástico pelo Método dos Elementos Finitos é preciso que se estabeleçam duas matrizes, chamadas habitualmente de matriz de rigidez e matriz geométrica do sistema.

#### 2.1.1. Matriz de Rigidez Elementar

Sua determinação pode ser feita baseando-se no princípio da variação primeira da energia nula (HERMÍNIO E MELO, 1997). Isto é:

$$\delta U = \delta T$$

$\delta U$  : Variação do trabalho das cargas externas.

$\delta T$  : Variação da energia de deformação.

Sendo:

$$\delta U = \int_V P \cdot \delta u \cdot dV \quad \text{e}$$

$$\delta T = \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon \cdot dV$$

Para cargas concentradas apenas nos nós da estrutura, tem-se:

$$\delta U = \{\delta u\}^T \cdot \{P\} = \{P\}^T \cdot \{\delta u\}$$

Uma vez:

$$\delta T = \int_V \{\sigma\}^T \cdot \{\delta \varepsilon\} \cdot dV$$

$$\text{Onde: } \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{e} \quad [D] = \text{matriz de elasticidade}$$

Portanto:  $\{\sigma\}^T = \{\varepsilon\}^T [D]^T$  mas,  $[D]^T = [D]$

Tem-se portanto  $\{\sigma\}^T = \{\varepsilon\}^T [D]$ , substituindo,

$$\delta T = \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot [D] \cdot \{\delta \varepsilon\} \cdot dV$$

mas,  $\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$ ,  $\{\varepsilon^T\} = \{u\}^T \cdot [B]^T$  e  $\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u\}$

$$\delta T = \int_V \{u\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\delta u\} \cdot dV$$

$$\delta T = \{u\}^T \cdot \left( \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\delta u\} \cdot dV \right) \cdot \{\delta u\}$$

$$\delta T = \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{\delta u\} \quad \text{onde: } [K] = \left( \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \right) \quad [\text{Eq. 01}]$$

$$\delta T = \delta U \quad \therefore \quad \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{\delta u\} = \{P\}^T \cdot \{\delta u\}$$

$$\{u\}^T \cdot [K] = \{P\}^T \quad \therefore \quad [K]^T \cdot \{u\} = \{P\}$$

por simetria  $[K] = [K]^T \quad \therefore \quad [K] \cdot \{u\} = \{P\}$

$[K]$  = matriz de rigidez;  $\{u\}$  = vetor dos deslocamentos nodais;  $\{P\}$  = vetor de cargas nodais

Para o estabelecimento dos termos da matriz  $[K]$  do presente estudo, é preciso se escolher um campo de deslocamento que satisfaça a equação da linha elástica da viga para cargas concentradas nos nós. Isto é:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

Considerando um campo de deslocamento da forma:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3, \text{ tem-se:}$$

$$v(x) = [N] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{i+1} \\ \alpha_{i+2} \\ \alpha_{i+3} \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Sendo  $l$  o comprimento do eixo, tem-se:

$$v(0) = \alpha_1 = v_1$$

$$v(l) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot l + \alpha_3 \cdot l^2 + \alpha_4 \cdot l^3 = v_2$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot x + 3\alpha_4 \cdot x^2$$

$$\theta(0) = \alpha_2 = \theta_1$$

$$\theta(l) = \frac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot l + 3\alpha_4 \cdot l^2 = \theta_2$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

ou;

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ -3l & -2l & 3l & -l^2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ -3l & -2l & 3l & -l^2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) & \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) & \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) & \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \quad [\text{Eq. 02}]$$

Considerando a deformação da viga dada por

$$\varepsilon = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

A equação [Eq. 01] torna-se

$$\varepsilon = -y \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = [B]\{u\} \text{ onde: } [B] = -y \cdot \begin{bmatrix} \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix}$$

ou:

$$[B] = -y \cdot [B^*]$$

Conforme [Eq. 02]

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$\text{Fazendo-se: } dV = dA dx, \quad \int_A y^2 dA = I, \text{ e } [D] = E$$

Tem-se finalmente:

$$[K] = EI \int_0^l [B^*]^T [B^*] dx$$

$$[K] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix}$$

### 2.1.2. Matriz Geométrica.

Sua determinação é feita baseando-se no princípio da variação segunda da energia nula (COOK, R. D. e outros, 1989).

$$\delta^2 U = \delta^2 T$$

Desenvolvendo-se esta equação, como no caso da matriz de rigidez, chega-se à expressão:

$$[K^g] = P \int_0^l [G]^T [G] dx$$

$$[K^g] = P \int_0^l \left[ \frac{dv}{dx} \right]^T \left[ \frac{dv}{dx} \right] dx \quad [\text{Eq. 03}]$$

Conforme [Eq. 02]

$$\frac{dv}{dx} = \left[ \left( -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} \right) \quad \left( 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \right) \quad \left( \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \right) \quad \left( -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Todos os cálculos feitos, a equação [Eq. 03] torna-se:

$$[K^g] = \frac{P}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Como a carga crítica acontece para  $\{P\} = \{0\}$ , a sua determinação se resume em resolver o sistema:

$$\det[K] - \lambda[K^g] = 0$$

Cujas soluções conduzem aos valores das cargas críticas conforme o número de graus de liberdade da estrutura. O menor valor dessa carga é utilizado no dimensionamento.

## 3. PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa foi construído e implementado em linguagem pascal (ambientado em Delphi) para montagem das duas matrizes elementares, tanto de rigidez quanto geométrica, introdução das condições limites para se

obter o sistema reduzido o qual é resolvido com o auxílio do Matlab cujas saídas serão as cargas críticas. O algoritmo no qual se baseia o programa possui a seguinte estrutura em linguagem natural:

- Dados de entrada:

Momento de inércia, módulo de elasticidade, comprimento de cada elemento;

Condições de contorno;

- Desenvolvimento:

Montagem das matrizes de rigidez e geométrica da estrutura;

Montagem das matrizes com todos os elementos;

Redução do sistema introduzindo as condições de contorno do problema;

Solução da equação.

- Dados de saída:

Valor aproximado das cargas críticas de flambagem da estrutura.

### 3.1. Interface Gráfica do Programa Computacional

The screenshot shows the 'FLAMBAGEM' software interface. It is divided into several sections:

- DADOS DE ENTRADA**: Contains input fields for 'Momento de Inércia', 'Módulo de Elasticidade', and 'Comprimento' for two elements. Element 1 has values 1, 1, and 0.5 respectively. Element 2 has values 2, 1, and 0.5. A 'GERAR' button is present.
- SITUAÇÃO**: Displays a diagram of a beam with various support and end conditions.
  - Apoio 1**: Radio buttons for 'Livre', '1 e 2 Gênero' (selected), and '3 Gênero'.
  - Engaste**: Radio buttons for 'Livre', '1 e 2 Gênero', and '3 Gênero' (selected).
  - Tipos de Apoios: Primeiro e Segundo Gênero**: Diagrams of pin and roller supports.
  - Terceiro Gênero**: Diagram of a fixed support.
- Matriz de Rigidez**: A 4x4 matrix with values: [8, -24, 4, 0; -24, 288, 24, 0; 4, 24, 24, 0; 0, 0, 0, 0].
- Matriz Geométrica**: A 4x4 matrix with values: [-0.066, 0.1, 0.016, 0; 0.1, -4.8, 0, 0; 0.016, 0, -0.133, 0; 0, 0, 0, 0].
- POLINÔMIO RESULTANTE**: Displays the equation  $0 \cdot Pcr^4 + -0.04 \cdot Pcr^3 + 15.12 \cdot Pcr^2 + -1420 \cdot Pcr + 27648 = 0$ .
- Carga Crítica de Flambagem**: Shows the result '26.32'.

Figura 1 – Interface do programa computacional

#### 4. RESULTADOS

O programa foi testado para o caso de um eixo escalonado discretizado em dois elementos cujos dados e condições de apoio são apresentadas na figura 2:

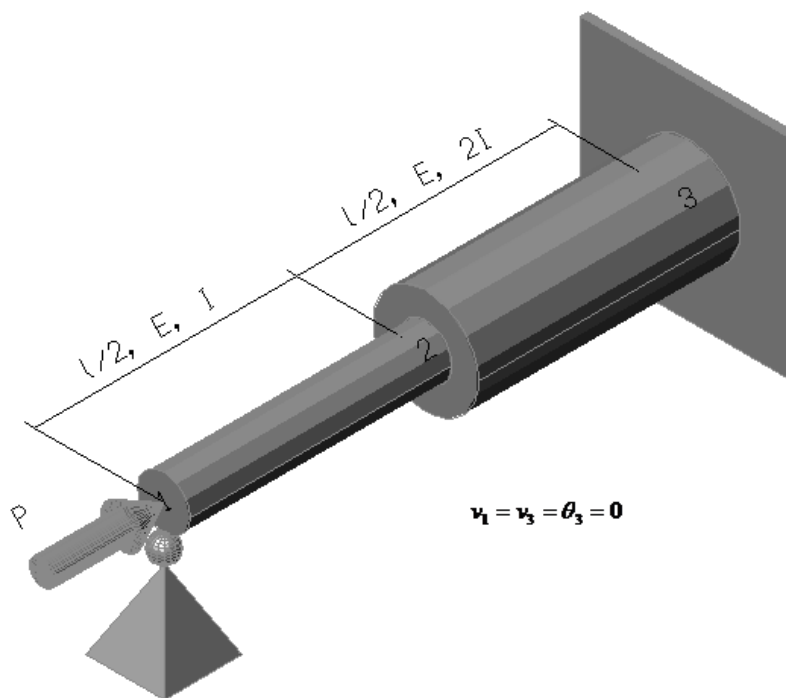


Figura 2 – Eixo escalonado (dados geométricos, físicos e condições limites)

A tabela 1 mostra os resultados do presente estudo comparados com o método das diferenças finitas (SILVA E MANIÇOBA, 2007).

Tabela 1 – Resultados

|   |  |
|---|--|
| Carga Crítica usando M.E.F. (presente estudo) | Carga Crítica usando M.D.F. (SILVA E MANIÇOBA) |
| $P_{cr} = 26,32$                              | $P_{cr} = 26,62$                               |

#### 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi implementado um programa computacional que calcula a carga crítica na flambagem de um eixo escalonado engastado-apoiado carregado na extremidade, baseado no método dos elementos finitos, que pode ser utilizado tanto industrial como educacionalmente.

Apesar da discretização ter sido em dois elementos apenas, o resultado mostra-se eficaz quando comparado com o resultado obtido por diferenças finitas.

Evidentemente, o programa pode ser aperfeiçoado, permitindo a análise de eixos com outros tipos de apoio e uma discretização em mais elementos.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOK, R. D., MALKUS, D. S. PLESHA, M. E. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Wiley, New York, 1989, 530p.

HERMÍNIO, J. A. Sobre a Flambagem de Barras e Placas. Publicação interna, PPGEM-UFRN, 1996, 11p.

HERMÍNIO, J. A. & MELO, J. D. D. Estática Aplicada, Publicação interna, DEM-UFRN, 1996, 69p.

SILVA, P.L.B., MANIÇOBA, G.G.C. & HERMÍNIO, J.A. Calculo da Carga Crítica de um Eixo Escalonado pelo Método das Diferenças Finitas. Trabalho de Iniciação Científica, O.M.I. DATIN CEFET-RN, 2007, 6p.

TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J. M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York, 1963, 540 p.