

## **IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO RECURSIVO DE RESPOSTA IMPULSO INFINTA (IIR) EMPREGANDO A TÉCNICA DE TRANSFORMAÇÃO BILINEAR**

**Elder E. C. de OLIVEIRA (1); Suzete É. N. CORREIA (2); Laércio M. de MENDONÇA (3)**

(1) CEFET-PB/GTEMA, Av Primeiro de Maio, 720 Jaguaribe  
CEP: 58015-430, João Pessoa - PB, telefone: 3208 3055, e-mail: planckk@yahoo.com.br

(2) CEFET-PB, e-mail: suzete@cefetpb.edu.br

(3) UFRN, e-mail: laercio@ct.ufrn.br

### **RESUMO**

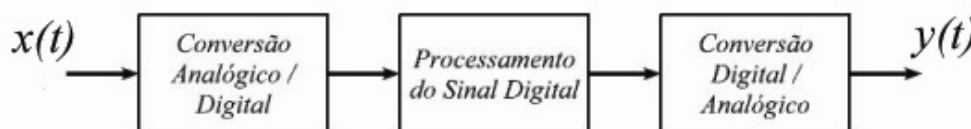
Neste trabalho analisamos o projeto de filtros recursivos através da implementação do método da transformação bilinear. O foco principal a ser abordado é o projeto de filtros passa-baixos digitais a partir de filtros passa-baixos analógicos. Nos desenvolvimentos teóricos é feita a aplicação do método da transformação bilinear para o projeto e implementação desses filtros digitais recursivos IIR – *Infinite Impulse Response* (Resposta Infinita ao Impulso). O objetivo foi desenvolver uma ferramenta didática para simulação de filtros digital passa-baixas a partir de um protótipo de filtro passa-baixas analógico. Com o uso da técnica de transformação bilinear é possível projetar um filtro no domínio das frequências de tempo discreto a partir de um filtro no domínio das frequências de tempo contínuo. Para tanto foram desenvolvidos programas computacionais na plataforma Scilab® que implementam o método da transformação bilinear e permite uma visualização gráfica do comportamento do filtro IIR em termos de resposta em frequência e resposta em fase. Através da prática computacional é apresentado um estudo de caso para o projeto de filtro digital através do método da transformação bilinear. A aplicação das técnicas aqui mostradas certamente irá contribuir para o estudo de simulações de filtros digitais nas disciplinas de processamento digital de imagens e processamento digital de sinais nos cursos de graduação e pós-graduação de engenharia de telecomunicações.

**Palavras-chave:** filtros digitais, filtros IIR, transformação bilinear

## 1. INTRODUÇÃO

Os sinais são analógicos por natureza, isso significa que, a cada instante do tempo, é possível obter uma informação do sinal, uma vez que ele está definido para todos os instantes de tempo possíveis. Um sinal dessa natureza é representado por uma função contínua e não pode ser representado e tratado adequadamente por um processador digital.

Um sinal precisa ser discretizado para que isso seja possível. Em outras palavras, obtém-se do sinal analógico uma seqüência de amostras, que representarão o sinal. Um sinal discreto existe apenas para instantes específicos do tempo, diferentemente dos sinais analógicos, e por isso pode ser armazenado e processado digitalmente. Esse processo é chamado amostragem, e um sistema de processamento digital de sinais consistem em amostrar o sinal, realizar o processamento digital e reconstruir o sinal processado para obter analogicamente o resultado, como mostra a Figura 1.



**Figura 1 – Processamento digital de sinais analógicos**

Tecnicamente, as amostras de um sinal não podem ser representadas com precisão ilimitada, pois um processador pode lidar apenas com números inteiros. Assim, cada amostra precisa ser quantizada, ou discretizada em amplitude, para poder ser armazenada. Sinais que são discretos tanto no tempo como na amplitude são chamados sinais digitais. O erro causado pela quantização das amostras pode ser tratado como uma espécie de ruído (Oliveira, 2007).

O processamento comumente feito em sinais discretos é a operação conhecida como filtragem. Filtrar um sinal significa selecionar desse sinal quais frequências são desejadas, e descartar as demais. O processo de filtragem é simples, facilmente implementável, e flexível. É possível obter um conjunto bastante significativo de resultados utilizando técnicas simples. A exemplo tem-se a convolução que é uma operação muito utilizada em filtragem.

Neste artigo uma ferramenta didática para simulação de filtros digital passa-baixas a partir de um protótipo de filtro passa-baixas analógico é proposta através da utilização da técnica de transformação bilinear. A seção 2 apresenta um estudo revisional de um filtro digital IIR e um filtro suposto ideal. As etapas do projeto de um filtro digital IIR são mostradas na seção 3, bem como o emprego da técnica da transformação bilinear para o projeto do mesmo. As seções 4 e 5 mostram respectivamente os resultados das simulações dos filtros digitais IIR, e as conclusões referentes a este trabalho.

## 2. FILTROS DIGITAIS

### 2.1. Filtro ideal

Um filtro usa computação para implementar a ação de filtragem que deve ser executada num sinal de tempo contínuo. A designação de filtro habitualmente usada em referência aos sistemas lineares e invariante no tempo (LIT) deriva da possibilidade dos sistemas eliminar ou atenuar fortemente certas harmônicas ou bandas. O sistema funciona, nesse caso, como um seletor de frequências, deixando passar umas frequências e retraindo outras. Um filtro ideal é um dispositivo seletor de frequências que seleciona perfeitamente as frequências desejadas e rejeita perfeitamente as frequências indesejadas.

Um filtro passa-baixas deixa passar as componentes de baixas frequências e rejeita as componentes de altas frequências. Um filtro passa altas, ao contrário, deixa passar as componentes de altas frequências e rejeita as componentes de baixas frequências. Um filtro passa-faixa rejeita as altas e baixas frequências e sua banda de passagem contém apenas componentes intermediárias. Um filtro rejeita faixa por sua vez, é o complementar de um filtro passa faixa, onde esse filtro deixa passar as componentes de altas e baixas frequências e rejeita as componentes de frequências intermediárias (Haykin, 2001).

## 2.2. Filtro IIR

Com relação à resposta ao impulso, um filtro que tenha como característica principal realimentação, ou seja, se a saída do filtro depende em maior ou menor grau dos valores de suas amostras passadas, esse tipo de filtro é denominado IIR (do inglês *Infinite Impulse Response* ou Resposta Infinita ao Impulso). Conforme Figura 2.

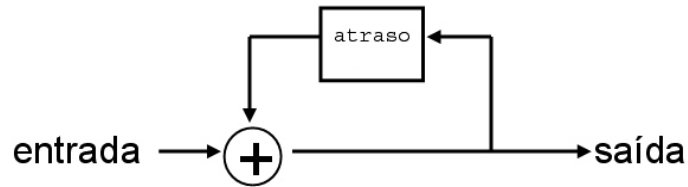


Figura 2 – Filtro IIR

## 3. PROJETO DE FILTROS IIR

Duas são as abordagens mais usadas no projeto de filtros IIR digitais. A mais comum consiste em projetar um filtro IIR analógico, e então transformá-lo em um filtro digital equivalente, já que existem estudos bem desenvolvidos com relação a projeto de filtros analógicos (Oppenheim, 1999). No entanto, é prudente examinar as formas ótimas de se mapear esses filtros para o domínio de tempo discreto. Além disso, como existem projetos eficientes que facilitam o projeto dos filtros analógicos, essa abordagem de se projetar filtros IIR se torna simples. A segunda abordagem, que não será abordado nesse artigo, diz respeito a projeto de filtros IIR digitais que consistem em utilizar um procedimento algorítmico de projeto, o qual geralmente exige o uso de um computador para resolver uma série de equações lineares e não lineares. Nessa seção, vamos examinar a abordagem que transforma filtros analógicos em digitais. O foco principal a ser abordado nesse artigo é o projeto de filtros passa-baixas digitais a partir de adaptações de filtros passa-baixas analógicos, tais como: *Butterworth* e *Chebyshev* (Oppenheim, 1999).

Existem diversas técnicas diferentes para realizar esse mapeamento. Estaremos analisando apenas uma delas, a transformação bilinear, que elimina de forma considerável o *aliasing* (ondulações) na banda passante.

### 3.1. Protótipo analógico de filtros passa-baixas

Primeiramente devemos conhecer um filtro passa-baixas analógico, para em seguida projetar a partir deste um filtro IIR passa-baixas digital. A grande maioria dos métodos de aproximação para filtros analógicos foi desenvolvida para projeto de sistemas passivos, cujo ganho não ultrapassa a unidade. Portanto um conjunto típico de especificações para esses filtros é mostrado na Figura 3.

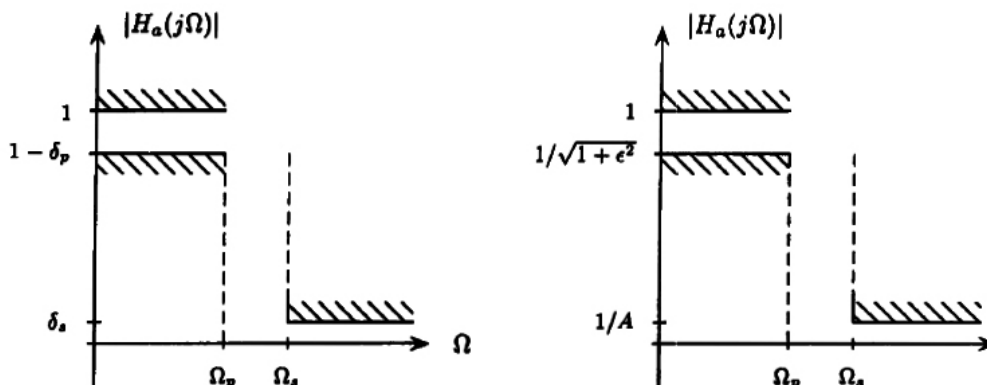


Figura 3 – Protótipo de um filtro passa-baixas analógico

### 3.2. Projeto de filtros IIR a partir de filtros analógicos

O projeto de um filtro digital a partir de um protótipo analógico requer que transformemos  $h(t)$  em  $h(n)$  ou  $H(s)$  em  $H(z)$ . Um mapeamento do plano  $s$  para o plano  $z$  pode ser escrito como

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=m(z)} \quad [\text{Eq. 01}]$$

Em que  $s=m(z)$  é a função de mapeamento.

### 3.3. A transformação bilinear

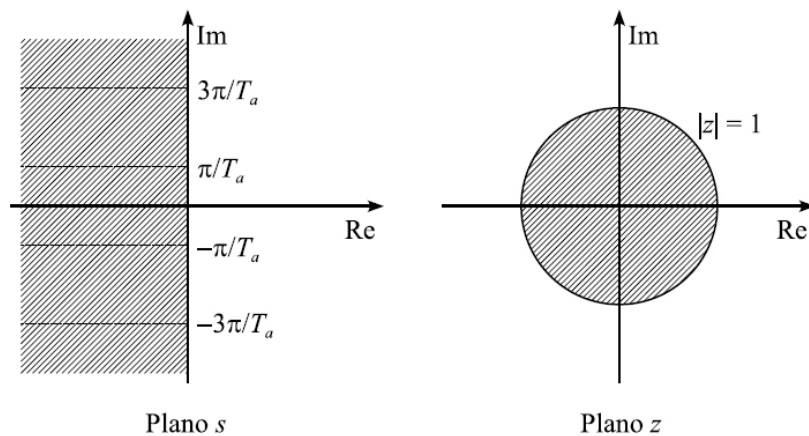
O método da transformação bilinear é um mapeamento algébrico entre o plano  $s$  e o plano  $z$  feito de forma que todo o eixo imaginário do plano  $s$  (representando as frequências de tempo contínuo) seja mapeado no círculo de raio unitário (que representa as frequências de tempo discreto). Esse mapeamento não pode ser linear, pois o eixo imaginário tem comprimento infinito, enquanto o círculo de raio unitário tem comprimento finito. A principal vantagem do método da transformação bilinear é que o *aliasing* é evitado, mantendo, assim, as características da resposta de módulo da função de transferência no tempo contínuo ao gerar a função de transferência no tempo discreto. Essa transformação é dada por

$$s = \frac{1}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad [\text{Eq. 02}]$$

A transformação bilinear é uma função racional que mapeia o semiplano  $s$  esquerdo no interior do círculo unitário e mapeia o eixo  $j\Omega$  (eixo imaginário) de forma biunívoca sobre a circunferência do círculo de raio unitário. Entretanto, a relação entre o eixo  $j\Omega$  e o círculo unitário é não linear e é dada pela função de deformação de frequência

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad [\text{Eq. 03}]$$

O resultado dessa deformação é que a transformação bilinear preservará apenas a resposta de magnitude dos filtros analógicos que tenham resposta ideal constante. Portanto, é aconselhável usar a transformação bilinear apenas em projetos de filtros seletivos em frequências. Estas propriedades da transformação bilinear com um mapeamento do plano  $s$  para o plano  $z$  são mais bem visualizadas nas Figuras 4 e 5 respectivamente.



**Figura 4 – Mapeamento do plano  $s$  no plano  $z$**

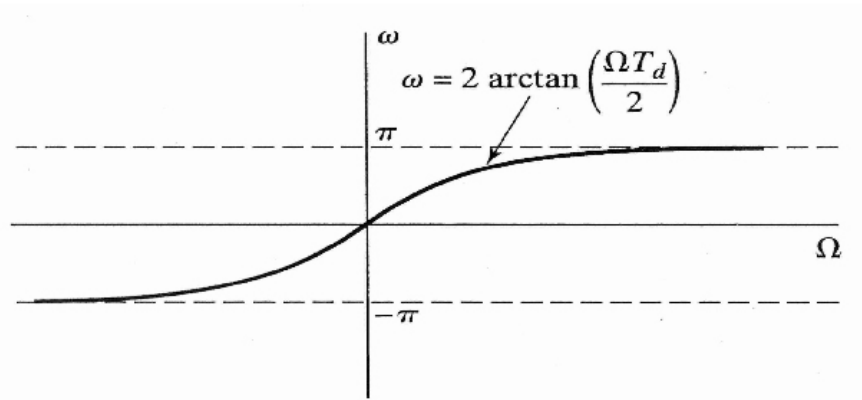


Figura 5 – Mapeamento do eixo da frequência de tempo contínuo no eixo da frequência de tempo discreto

### 3.4. Etapas do projeto de um filtro digital passa-baixas

A seguir apresentam-se os passos necessários para um projeto de filtro digital passa-baixas com uma frequência de corte  $\omega_p$  na faixa de passagem, uma frequência de corte  $\omega_s$  na faixa de rejeição, um *ripple*  $\delta_p$  na faixa de passagem e um *ripple*  $\delta_s$  na faixa de rejeição.

1. Usando a inversa da equação [Eq. 3.37], é feita a pré-deformação das frequências de corte das faixas de passagem e de rejeição do filtro digital,  $\omega_p$  e  $\omega_s$ , para determinar as frequências de corte das faixas de passagem e de rejeição do filtro analógico passa-baixas. Fazendo  $T_d = 2$ , a função de pré-deformação é;

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad [\text{Eq. 04}]$$

2. Projetar um filtro analógico passa-baixas com as frequências de corte encontradas no passo 1 e com os *ripples* das faixas de passagem e de rejeição  $\delta_p$  e  $\delta_s$ , respectivamente.

3. Aplicar a transformação bilinear ao filtro projetado no passo anterior.

## 4. RESULTADO DAS SIMULAÇÕES DOS FILTROS DIGITAIS IIR

O gráfico da Figura 6 mostra os resultados obtidos no projeto de um filtro digital *Butterworth* de sexta ordem, utilizando as seguintes especificações:  $\omega_p = 0,2\pi$ ;  $\omega_s = 0,3\pi$ ;  $\delta_p = 1\text{dB}$  e atenuação na faixa de rejeição  $A = 15\text{dB}$ .

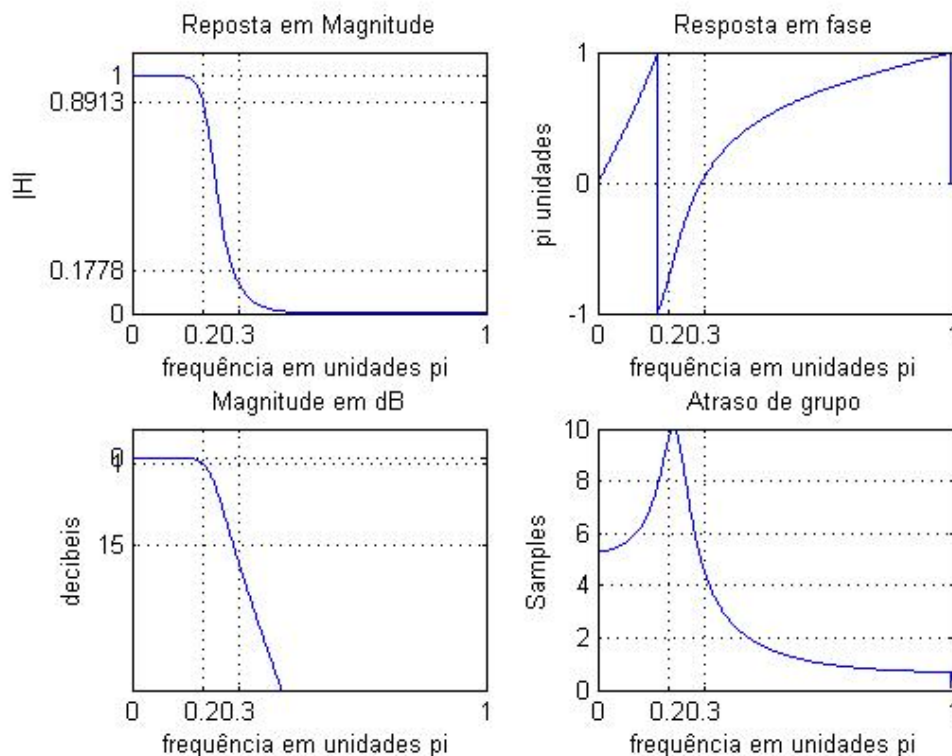


Figura 6 – Filtro digital IIR *Butterworth* de ordem 6 usando a transformação bilinear

Os gráficos das Figura 7 e 8 mostram respectivamente os resultados obtidos no projeto de um filtro digital *Chebyshev* tipo I e *Chebyshev* tipo II de quarta ordem, utilizando as seguintes especificações:  $\omega_p = 0,2\pi$ ;  $\omega_s = 0,3\pi$ ;  $\delta_p = 1\text{dB}$ ,  $\delta_s = 1\text{dB}$  e atenuação na faixa de rejeição  $A = 15\text{dB}$ .

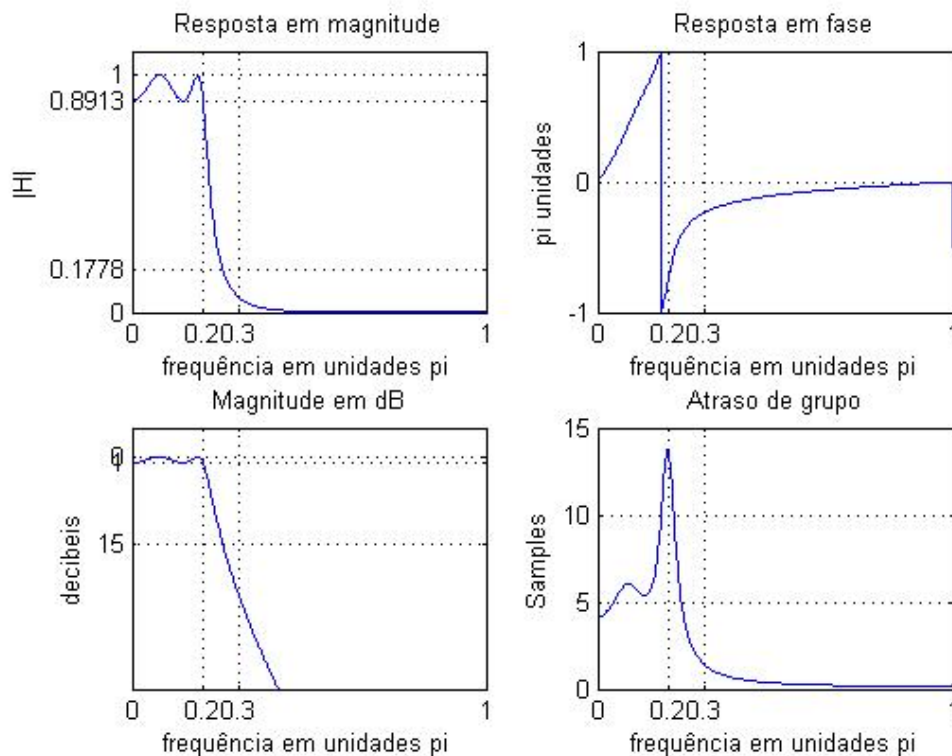


Figura 7 – Filtro digital IIR *Chebyshev* tipo I de ordem 4 usando a transformação bilinear

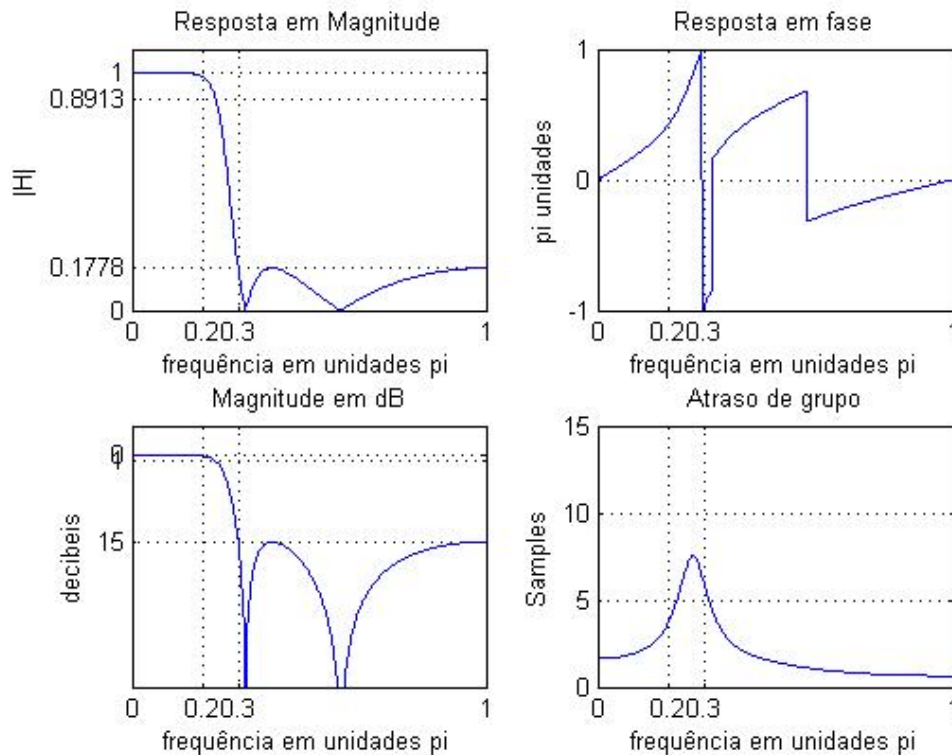


Figura 8 – Filtro digital IIR *Chebyshev* tipo II de ordem 4 usando a transformação bilinear

## 5. CONCLUSÃO

Nos projetos de filtros para processamento de sinais, os filtros seletivos em frequência permitem selecionar apenas as frequências desejáveis e rejeitar as indesejáveis. Quando o sinal a ser processado é discreto empregam-se filtros digitais. Os filtros digitais são flexíveis e facilmente implementáveis. Neste artigo, foi apresentado o projeto e a implementação do filtro digital passa-baixas IIR, fazendo uso do método da transformação bilinear, empregando a linguagem Scilab® nas simulações computacionais. Para este projeto fez-se necessário o uso das funções de aproximação analógica *Butterworth* e *Chebyshev*.

O método da transformação bilinear é uma forma bastante usada na implementação de filtros digitais recursivos, uma vez que para uma dada especificação de projeto, pode-se tornar oscilações na banda passante (*aliasing*) tão pequeno em relação a outros métodos, sem ter que aumentar a ordem do filtro e diminuir a tolerância na banda de rejeição.

Tomemos como exemplo, os filtros projetados usando a função de aproximação *Chebyshev* tipo I. Conforme foi mostrado em seção anterior desse trabalho, tais filtros ao serem projetados utilizando uma banda de transição entre  $0,2\pi$  e  $0,3\pi$  e uma magnitude não ultrapassando a unidade, mostraram a necessidade de uma ordem menor em relação a de um filtro projetado com características de *Butterworth* (máxima faixa plana na banda passante) para as mesmas especificações de projeto. Quanto maior a ordem do filtro projetado, menor a banda de transição e mais esse filtro tende a um filtro ideal. A consequência de um aumento na ordem do filtro é que mais oscilações na banda passante para o filtro projetado ocorrerão, sendo essas oscilações comportamentos indesejáveis em qualquer projeto de filtro digital. Um comportamento análogo ocorre com um filtro com características *Chebyshev* tipo II.

As simulações computacionais realizadas usando o software Scilab® para a implementação de projeto de filtro digital IIR forneceram métricas que mostraram o comportamento desses em termos de resposta em frequência e fase.

A aplicação do método da transformação bilinear para o projeto de filtro digital IIR certamente contribuirá para o aprimoramento didático das disciplinas processamento digital de imagens e processamento digital de sinais nos cursos de engenharia elétrica.

## REFERÊNCIAS

DINIZ, P.S.R. Eduardo, A.B.S. SERGIO, L.N. **Processamento Digital de Sinais: Projeto e Análise de Sistemas**. 2. ed. São Paulo; Bookman, 2004.

HAYKIN, S. BARRY, V.V. **Sinais e Sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HAMMING, R.W. **Digital Filters**. 3. ed. New York, Dover publications inc, 1998.

MONSON, H.H. **Processamento Digital de Sinais**. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2006.

OLIVEIRA, E.E.C. **Estudo e implementação de Filtros Digitais FIR e IIR**. 2007. TCC (Trabalho de conclusão de curso) – GTEMA, Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba, João Pessoa, 2007.

OPPENHEIM, A. SCHAFFER, V. BUCK, J.R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2. ed. New Jersey; Prentice Hall, 1999.

PROAKIS, J.G. VINAY, K.I. **Digital Signal Processing: Using Matlab**. Boston; PWS publishing company, 1996.