

NOVA METODOLOGIA PARA CONDUÇÃO TÉRMICA DE SISTEMAS BIDIMENSIONAIS EM CONDIÇÕES DE REGIME ESTACIONÁRIO

Alexander P.C. SENA (1); José Felismino NETO (2); Francisco Antônio BELO (3)

- (1) Centro Federal de educação Tecnológica da Paraíba, Av. 1º de Maio, 720 - Jaguaribe CEP: 58.015-430 - João Pessoa/PB, Fone: (0xx83) 3208.3000 Fax: 3208.3088, e-mail: sandro.preto@gmail.com
(2) Centro Federal de educação Tecnológica da Paraíba, e-mail: josefelisminon@yahoo.com.br
(3) Universidade Federal da Paraíba, e-mail: belo@les.ufpb.br

RESUMO

O estudo da condução térmica de sistemas bidimensionais em condições de regime estacionário tem sido abordado através de vários métodos de análise, que incluem o uso de procedimentos analíticos, gráficos e numéricos (diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno). O procedimento analítico abrange a elaboração de uma solução matemática exata envolvendo uma equação diferencial parcial, onde embora existam muitas técnicas disponíveis para sua resolução, estas envolvem, normalmente séries e funções matemáticas complicadas e podem ser obtidas para um conjunto restrito de geometrias e condições de contorno simples. Em contraste com os métodos analíticos, que fornecem resultados exatos em qualquer ponto, os métodos gráficos e numéricos podem fornecer apenas resultados aproximados em pontos discretos, contudo estes métodos podem acomodar geometrias complexas e condições de contorno, oferecendo os únicos meios com os quais problemas de condução multidimensionais podem ser resolvidos. Em função das inconveniências observadas nos demais métodos, está sendo desenvolvida uma metodologia que busca simplificar estes tipos de problemas, onde a mesma se aplica para qualquer figura geométrica na qual possa ser modelada em forma de rede, sendo a mesma dividida em várias linhas horizontais e verticais, assim formando pequenos retângulos na qual foi denominado de célula. Essas células são representadas por circuitos elétricos conduzidos em um determinado objeto de estudo. Este trabalho propõe uma nova metodologia que viabilize a obtenção das grandezas relacionadas à condução bidimensional de calor em regime estacionário, utilizando-se uma analogia a sistemas elétricos e fazendo uso da ferramenta computacional MultiSIM para simulação e apresentação dos resultados.

Palavras-chave: Condução bidimensional; analogia eletrotérmica; regime estacionário; método computacional.

1. INTRODUÇÃO

O estudo da condução térmica de sistemas bidimensionais em condições de regime estacionário tem sido abordado através de vários métodos de análise, que incluem o uso de procedimentos analíticos, gráficos e numéricos (diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno). O procedimento analítico abrange a elaboração de uma solução matemática exata envolvendo uma equação diferencial parcial, onde embora existam muitas técnicas disponíveis para sua resolução, estas envolvem, normalmente séries e funções matemáticas complicadas e podem ser obtidas para um conjunto restrito de geometrias e condições de contorno simples. Em contraste com os métodos analíticos, que fornecem resultados *exatos* em qualquer ponto, os métodos gráficos e numéricos podem fornecer apenas resultados *aproximados* em pontos discretos, contudo estes métodos podem acomodar geometrias complexas e condições de contorno, oferecendo os únicos meios com os quais problemas de condução multidimensionais podem ser resolvidos.

Em função das inconveniências observadas nos demais métodos, está sendo desenvolvida uma metodologia que busca simplificar estes tipos de problemas, onde a mesma se aplica para qualquer figura geométrica na qual possa ser modelada em forma de rede, sendo a mesma dividida em várias linhas horizontais e verticais, assim formando pequenos retângulos na qual foi denominado de célula. Essas células são representadas por circuitos elétricos conduzidos em um determinado objeto de estudo.

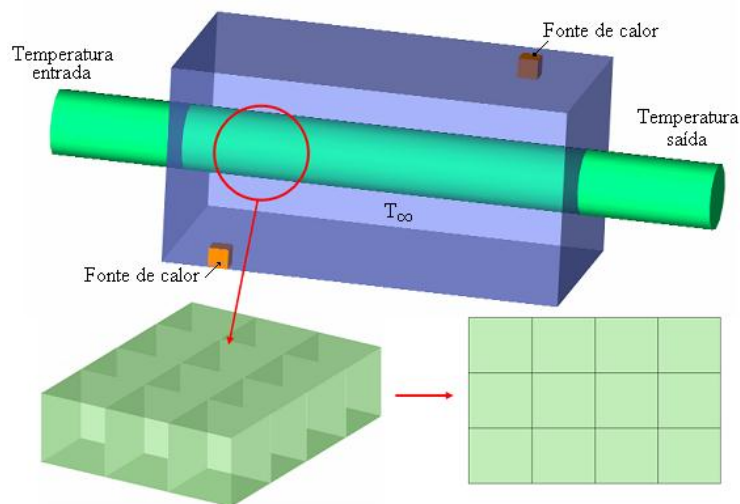


Figura 1 - Problema de condução bidimensional

Para cada célula da malha, admite-se uma pequena variação, e para o problema bidimensional (sem fluxo de calor na direção do eixo z), assume-se uma variação linear, (1) e (2) representam as faces inferior e superior, (3) e (4) representam as faces laterais (direita e esquerda) e (5) e (6) as de frente e de trás. Existindo transferência de calor entre as faces (1)(2), (1)(3), (1)(4), (2)(3), (2)(4) e (3)(4). Não havendo entre as faces (5)(6).

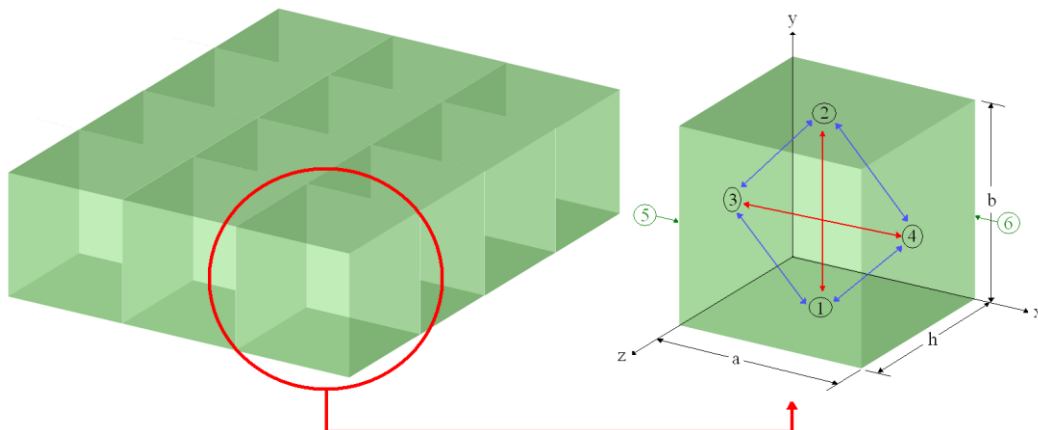


Figura 2 - Célula unitária da malha

As equações das células são as equações da transferência de calor e cada célula é associada a um conjunto de impedâncias que são relacionadas com as impedâncias das demais células adjacentes através da

lei da conservação. As impedâncias de cada célula são calculadas individualmente, considerando as interações das faces, e admitindo o princípio da superposição. Individualmente desenvolve-se o problema para resistências térmicas para em seguida generalizar para impedâncias. É de se observar que este método procura a obtenção das variáveis observando o comportamento destas face a face de cada célula, diferentemente dos métodos nodais.

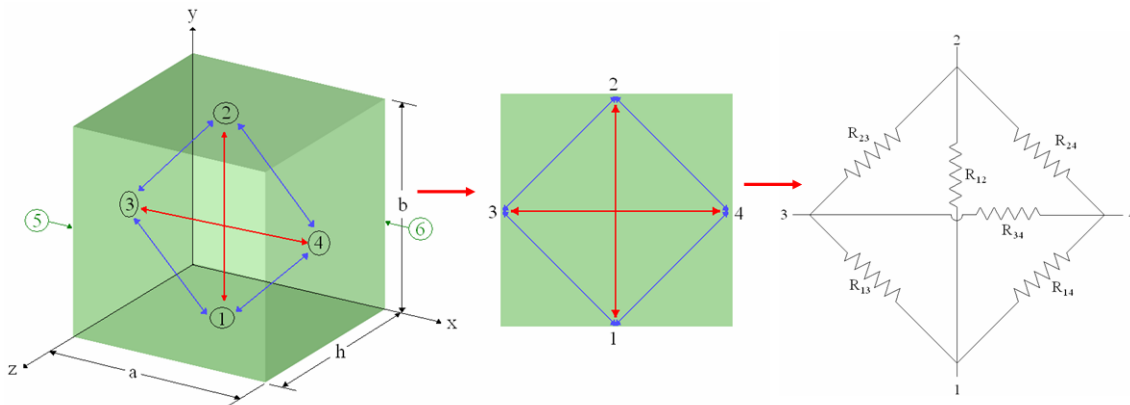


Figura 3 - Analogia entre as interações das faces e impedâncias associadas.

2. FUNDAMENTOS

O fenômeno da condução de calor em um determinado objeto de estudo é semelhante ao fenômeno da condução elétrica, logo a taxa de transferência de calor se dá de maneira análoga à intensidade da corrente elétrica e a variação de temperatura tem sua relação com a diferença de potencial e finalmente a condutividade térmica tem sua analogia com a condutividade elétrica.

Tabela 1 - Analogia entre sistema térmico e elétrico

Variável	Sistema elétrico	Sistema térmico
Variável de fluxo	Corrente elétrica	Fluxo de calor
Variável potencial	Potencial elétrico	Temperatura
Componente dissipativo	Resistência elétrica	Resistência térmica
Componente acumulativo	Capacitância elétrica	Capacidade térmica

De início sabe-se que:

$$\text{Fluxo de calor} = \frac{\text{Diferença de potencial térmico}}{\text{Resistência térmica}} \quad [\text{Eq. 01}]$$

Que é uma relação semelhante à lei de Ohm da teoria de circuitos elétricos, onde:

ou seja: [1]

$$\text{Corrente elétrica} = \frac{\text{Diferença de potencial elétrico}}{\text{Resistência elétrica}}$$

$$i = \frac{V}{R} \Rightarrow R = \frac{V}{i} \quad [\text{Eq. 02}]$$

Mas, A resistência elétrica R de um material é diretamente proporcional ao produto de sua resistividade elétrica ρ pelo seu comprimento L e inversamente proporcional à área da seção transversal A . [2]

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad [\text{Eq. 03}]$$

Então de [1] e [2] temos que (em termos de $\frac{L}{A}$ unidades)

$$[\text{Eq. 04}]$$

$$\frac{V}{A} = \frac{\rho}{m} \Rightarrow \rho = \frac{Vm}{A} = \Omega m$$

A Condutância Elétrica G expressa a facilidade com que a corrente elétrica circula através de um material. A Condutância é, portanto, o inverso da Resistência Elétrica.

$$[\text{Eq. 05}]$$

A unidade de Condutância é o Siemens (S ou Ω^{-1}). $G = \frac{1}{R}$

De forma análoga, a Condutividade Elétrica s expressa a condutância própria ou específica dos materiais. A Condutividade é, portanto, o inverso da Resistividade Elétrica.

$$[\text{Eq. 06}]$$

σ (sigma) é medido em (S/m) ou $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\Omega m} = \frac{A}{Vm}$ (1/ Ωm) ou (A/Vm).

Em contra partida, A condutividade térmica k é definida através da equação:

$$[\text{Eq. 07}]$$

E ao contrário da condutividade térmica, o de resistência térmica, R_t , que é definida $k = \frac{Q}{Tm} = \frac{W}{Km}$ isolamento é usualmente descrito em termos por:

$$[\text{Eq. 08}]$$

Por tanto, a partir da observação da similaridade entre a formulação da condutividade elétrica e térmica, constata-se a coerência da analogia entre os sistemas térmicos e elétricos.

$$R_t = \frac{1}{k}$$

3. IMPEDÂNCIAS INDIVIDUAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO.

3.1. Lados adjacentes

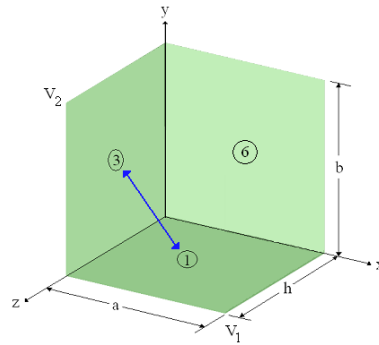


Figura 4 - Lados adjacentes

Admitindo uma célula pequena onde o campo varia linearmente, e os valores de a, b e h são as dimensões dos lados da célula, sendo V_1 e V_2 os potenciais nos finais dos lados, modelou-se à equação de condução de calor, de campo, corrente elétrica, bem como a equação da resistência, a qual é dada por:

$$R_{\text{Adjacentes}} = \rho \frac{a^2 + b^2}{\text{vol}} \quad [\text{Eq. 09}]$$

3.2. Lados opostos

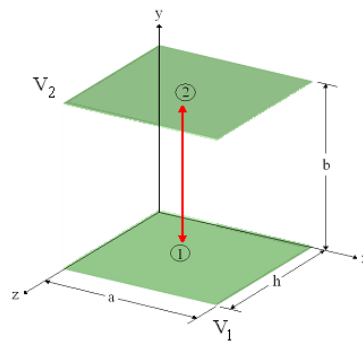


Figura 5 - Lados opostos

De maneira análoga ao caso dos lados adjacentes, tem-se:

$$R_{\text{Opostos}} = \rho \frac{a \cdot h}{b} \quad [\text{Eq. 10}]$$

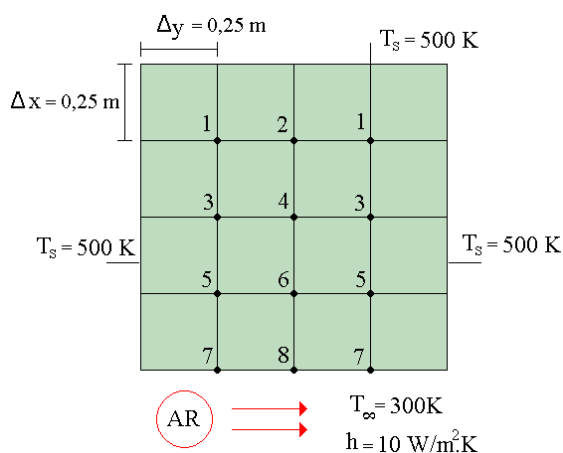
3.3. Impedâncias próximas à condição de contorno

Próximo ao contorno, constitui-se células especiais, considerando que é imposto um potencial constante na face, onde uma pequena espessura irá garantir que praticamente terá fluxo unidimensional.

$$R_{\text{Contorno}} = \rho \frac{a \cdot h}{b} \quad [\text{Eq. 11}]$$

4. RESULTADOS

A título de análise comparativa, buscou-se a princípio a resolução de um problema por meio do método por diferenças finitas, obtendo-se os seguintes resultados para temperaturas nodais.



PONTO	TEMPERATURA
1	489,30
2	485,15
3	472,07
4	462,01
5	436,95
6	418,74

Aplicando-se a metodologia proposta ao mesmo problema, a partir da simulação em MultiSIM e medindo as tensões das superfícies de cada célula, obtivemos os seguintes resultados :

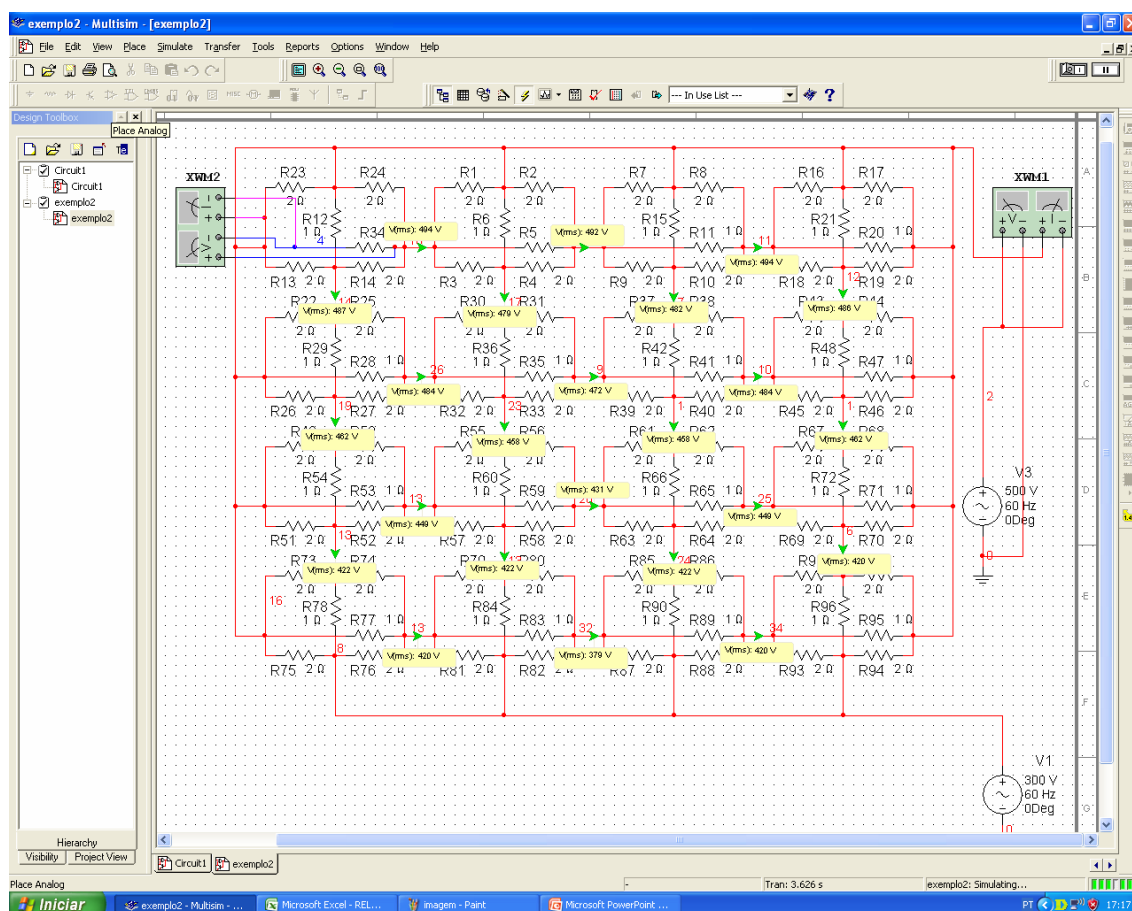


Figura 6 - Implementação do problema em MultiSIM com leitura de tensão em faces.

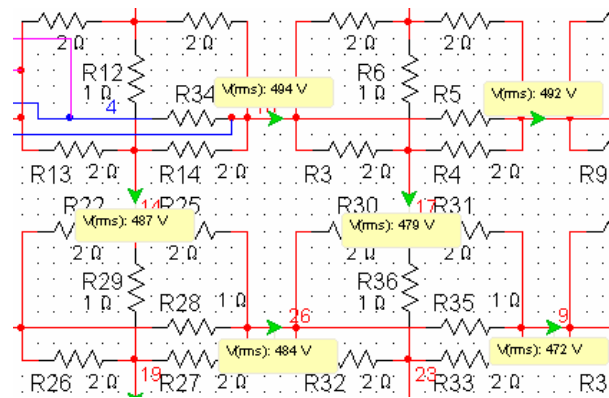


Figura 7 - Análise da distribuição da temperatura na região nodal 1.

Tabela 2 - análise de temperatura entre faces simuladas no MultiSim.

TEMPERATURA							
		FACES (MULTISIM)					
PONTO	VALORES CALCULADOS	SUPERIOR	INFERIOR	ESQUERDA	DIREITA	MÉDIA	ERRO (%)
1	488,30	494	484	487	479	486	0,67
2	485,15	492	472	479	482	481,25	0,80
3	472,07	484	449	462	458	463,25	1,87
4	462,01	472	431	458	458	454,75	1,57
5	436,95	449	420	422	422	428,25	1,99
6	418,74	431	379	422	420	413	1,37

5. CONCLUSÃO

A análise dos resultados obtidos pelo novo método mostrou-se satisfatório na região onde só havia influência condutiva, observando no ponto nodal 1 um desvio de apenas 0,67%, desvio este que vem aumentando conforme aproximação da região em que sofre também a influência da convecção, estando este desvio em torno de 1,99%. Este fato nos leva a creditar que seja necessária à busca de um melhor estudo do comportamento das faces submetidas à convecção, sendo este o principal foco daqui em diante.

A continuação da pesquisa ainda traz a premissa do uso reatâncias que possam representar a transferência de calor entre faces melhorando os resultados já atingidos apenas com uso de resistências, os quais já demonstram a validação deste método para algumas aplicações onde exista apenas condução servindo como aproximação de fácil e rápida coleta para seu analista, além do dinamismo, que vem se revelando como o maior benefício de sua utilização.

REFERÊNCIAS

INCROPERA, Frank P; WITT, David P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 4ed. Rio de Janeiro: LTC, 1992.