

ESTUDO DA TEORIA DA ANÁLISE LIMITE

Fátima KANITAR (1); José Luís SILVEIRA (2); Lavínia BORGES (2); Nestor ZOUAIN (2)

(1) CEFET/RJ, Av. Maracanã, 229, Coordenação Curso Téc. Mecânica, (55 21) 2566-3162, fax, e-mail:

fkanitar@yahoo.com.br

(2) UFRJ - COPPE e POLI, Deptº Eng. Mecânica, e-mail: jluis@mecanica.ufrj.br

RESUMO

A teoria da plasticidade pode ser aplicada em estudos de conformação mecânica e de análise limite. Diversos autores como Lubliner (1999), Maugin (1992), Sneddon e Hill (1964), Wagoner e Chenot (1997), Ulm e Coussy (2003) realizaram estudos sobre a teoria da análise limite. Pesquisas para a determinação da carga que leva uma estrutura ao colapso plástico – carga limite – têm sido realizadas na Engenharia, tanto no cálculo de estruturas, de componentes mecânicos, como em operações de conformação mecânica (Silveira, 1991). Usualmente as formulações utilizadas tomam como base as equações cinemática, de equilíbrio e constitutivas, considerando sólidos de comportamento elástico idealmente plástico. O fator de colapso é obtido utilizando as formulações estática, cinemática e mista. O campo de tensões plasticamente admissíveis, que satisfazem o equilíbrio, é obtido pela formulação estática, a qual é calculada a partir da forma global do postulado de Drucker combinado com o equilíbrio. Um campo de velocidades considerando a potência externa de referência com valor unitário é dado pela formulação cinemática, que é alcançada a partir da forma global da condição do sub-diferencial da função dissipação combinada com o equilíbrio. A formulação mista é o resultado da substituição da função dissipação plástica na formulação cinemática.

Palavras-chave: plasticidade, colapso plástico, análise limite.

1. INTRODUÇÃO

O cálculo de uma estrutura levando em conta as formulações da análise limite, que são obtidas tomando por base a teoria da plasticidade, têm como objetivo a otimização do projeto visando estruturas mais leves, resistentes e econômicas, além da melhoria de outros fatores inerentes ao projeto, e também a não ocorrência do colapso plástico.

Os sólidos quando submetidos a esforços externos podem apresentar deformações elásticas e plásticas. Após a remoção desses esforços o corpo recupera ou não sua geometria inicial. Se o limite de escoamento não for alcançado a deformação é puramente elástica (SNEDDON e HILL, 1964).

As formulações obtidas neste estudo consideram um corpo de material elástico-idealmente plástico sujeito a pequenas deformações.

Como exemplo de aplicação, uma viga de material elasto-plástico, submetida a um esforço de momento fletor é considerada para a obtenção do fator de colapso, ou seja, do momento que causará o colapso plástico.

2. EQUAÇÕES BÁSICAS

Relações da cinemática, de equilíbrio e constitutivas em suas formas variacionais são utilizadas na modelagem do problema.

2.1. Cinemática

As formulações apresentadas são características da resposta do material limitadas a pequenas deformações em sólidos elastoplásticos.

Considera-se um sólido de contorno Γ , que ocupa um domínio limitado por β do R^n na configuração atual, sendo seu contorno dividido em duas partes complementares Γ_v e Γ_τ . Prescrevendo-se velocidades nulas na parte do contorno Γ_v e forças de superfície τ em Γ_τ . Se $v \in V$ tal que $v = 0$ em Γ_v diz-se que o campo de velocidades virtuais V é cinematicamente compatível. Uma distribuição das taxas de deformação cinematicamente compatíveis é dada por (SNEDDON e HILL, 1964).

$$\dot{\epsilon} = Dv \quad | \quad v \in V, \dot{\epsilon} \in W \quad [\text{Eq. 01}]$$

onde D é o operador tangente de deformação e W é o espaço dos campos de taxas de deformação $\dot{\epsilon}$.

A taxa de deformação total é representada pelas taxas das deformações elástica e plástica respectivamente:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad [\text{Eq. 02}]$$

2.2. Equilíbrio

Considere V' , dual de V , o espaço das cargas externas ou o conjunto de todos os funcionais $\langle F, v \rangle$ e seja W' o espaço de tensões dual de W , o funcional $\langle F, v \rangle$ define a potência externa de referência, dada por:

$$\langle F, v \rangle = \int_{\beta} b.v \, d\beta + \int_{\Gamma_\tau} \tau.v \, d\Gamma_\tau \quad [\text{Eq. 03}]$$

Por conveniência, se considera a potência externa virtual que equilibra a carga de referência igual a um, ou seja, um campo de velocidades $v \in V$ será escolhido para que a potência externa virtual de referência tenha valor unitário:

$$\langle F, v \rangle = 1 \quad [\text{Eq. 04}]$$

Um carregamento externo $\alpha \langle F, v \rangle$ está em equilíbrio com um campo de tensões $T \in W'$ se o Princípio das Potências Virtuais é verificado. A potência interna será igual a potência externa dada pela carga proporcional:

$$\langle T, Dv \rangle = \alpha \langle F, v \rangle \quad \forall \quad v \in V \quad [\text{Eq. 05}]$$

O conjunto das tensões que satisfazem o equilíbrio é dado por:

$$S_\alpha = \{T \in W' \mid \langle T, Dv \rangle = \alpha \langle F, v \rangle \quad \forall \quad v \in V\} \quad [\text{Eq. 06}]$$

onde $\langle T, Dv \rangle$ é definido por:

$$\langle T, Dv \rangle = \int_\beta T.Dv \, d\beta \quad [\text{Eq. 07}]$$

2.3. Equações Constitutivas para Materiais Elásticos Idealmente Plásticos

O conjunto das tensões plasticamente admissíveis é definido por:

$$P = \{T \in W' \mid f(T) \leq 0\} \quad [\text{Eq. 08}]$$

A função de escoamento:

$$f(T) \leq 0 \quad [\text{Eq. 09}]$$

forma no espaço de tensões uma região convexa limitada por $f = 0$, chamada de região elástica e onde $f < 0$.

O parâmetro de escoamento $\dot{\lambda}$ unido ao respectivo f define a equação de complementaridade:

$$f.\dot{\lambda} = 0 \quad [\text{Eq. 10}]$$

com $f \leq 0$ e $\dot{\lambda} \geq 0$.

Considerando a Lei de Fluxo Associativa, a evolução da variável interna $\dot{\epsilon}^p$ é dada pela representação matemática da lei da normalidade (LUBLINER, 1990):

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \nabla f(T) \quad [\text{Eq. 11}]$$

onde $\dot{\lambda} \geq 0$ se $f = 0$ e $\dot{\lambda} = 0$ se $f < 0$.

Com base nas formulações da cinemática, equilíbrio e constitutiva, um modelo local para o comportamento de materiais elásticos idealmente plásticos pode ser formulado:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad [\text{Eq. 12}]$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \nabla f(T) \quad [\text{Eq. 13}]$$

$$f.\dot{\lambda} = 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad [\text{Eq. 14}]$$

$$D'T = \alpha F \quad [\text{Eq. 15}]$$

$$f(T) \leq 0 \quad [\text{Eq. 16}]$$

Considerando Λ o espaço dos parâmetros de escoamento e Λ^+ definido por:

$$\Lambda^+ = \{\dot{\lambda} \in \Lambda \mid \dot{\lambda} \geq 0\} \quad [\text{Eq. 17}]$$

Analisando a relação da complementaridade, obtém-se sua forma variacional local:

$$f.(\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) \leq 0 \quad \forall \quad \dot{\lambda}^* \in \Lambda^+ \quad [\text{Eq. 18}]$$

dando origem ao funcional conjugado:

$$\aleph_c(T) = f.\dot{\lambda} = \sup_{\dot{\lambda}^* \in \Lambda^+} f.\dot{\lambda}^* \quad [\text{Eq. 19}]$$

Lembrando que sendo respeitada a relação da complementaridade, [Eq. 14], o funcional $\aleph_c(T)$ é nulo quando $T \in P$, ou seja:

$$\aleph_c(T) = f.\dot{\lambda} = \sup_{\dot{\lambda}^* \in \Lambda^+} f.\dot{\lambda}^* = 0 \quad | \quad T \in P \quad [\text{Eq. 20}]$$

Se $T \notin P$, então a função de escoamento $f(T) > 0$ é positiva e o funcional $\aleph_c(T)$ é infinito:

$$\aleph_c(T) = f.\dot{\lambda} = \sup_{\dot{\lambda}^* \in \Lambda^+} f.\dot{\lambda}^* = +\infty \quad | \quad T \notin P \quad [\text{Eq. 21}]$$

Conclui-se que o domínio de $\aleph_c(T)$ coincide com o conjunto P e se escreve:

$$\text{dom} \aleph_c(T) \equiv P \quad [\text{Eq. 22}]$$

O sub-diferencial de $\aleph_c(T)$ em T é o conjunto de todos os sub-gradientes de $\aleph_c(T)$ em $T \in P$, denotado por $\partial \aleph_c(T)$, conforme mostrado a seguir:

$$\partial \aleph_c(T) \equiv \{\dot{\varepsilon}^p \in W \quad | \quad \aleph_c(T^*) - \aleph_c(T) \geq (T^* - T).\dot{\varepsilon}^p \quad \forall \quad T^* \in W'\} \quad [\text{Eq. 23}]$$

As variações de T^* poderão ser restritas ao conjunto P , pois como o domínio de $\aleph_c(T)$ é o próprio conjunto P a desigualdade se satisfaz trivialmente para $T^* \notin P$.

Como $\aleph_c(T^*) = 0 \quad \forall T^* \in P$ e $\aleph_c(T) = 0$ para $T \in P$, isto é, o funcional sendo nulo em todo o seu domínio, o sub-diferencial de $\aleph_c(T)$, [Eq. 23], pode ser reescrito:

$$\partial \aleph_c(T) \equiv \{\dot{\varepsilon}^p \in W \quad | \quad (T^* - T).\dot{\varepsilon}^p \leq 0 \quad \forall \quad T^* \in P\} \quad [\text{Eq. 24}]$$

A condição do sub-diferencial de $\aleph_c(T)$ coincide com o Postulado de Drucker (LUBLINER, 1990):

$$(T - T^*).\dot{\varepsilon}^p \geq 0 \quad \forall \quad T^* \in P \quad [\text{Eq. 25}]$$

Definindo a função dissipação por:

$$\aleph(\dot{\varepsilon}^p) = T.\dot{\varepsilon}^p \quad [\text{Eq. 26}]$$

A partir da [Eq. 25], e considerando a função dissipação (LUBLINER, 1990):

$$\aleph(\dot{\varepsilon}^p) \geq T^*.\dot{\varepsilon}^p \quad \forall \quad T^* \in P \quad [\text{Eq. 27}]$$

A desigualdade [Eq. 27] pode ser reescrita:

$$\aleph(\dot{\varepsilon}^p) = T.\dot{\varepsilon}^p = \sup_{T^* \in P} T^*.\dot{\varepsilon}^p \quad [\text{Eq. 28}]$$

O funcional acima coincide com o proposto pelo princípio da dissipação máxima de Hill (SILVEIRA, 1991).

O sub-diferencial de $\aleph(\dot{\epsilon}^p)$ é definido por:

$$\partial\aleph(\dot{\epsilon}^p) = \{T \in P \mid \aleph(\dot{\epsilon}^{p*}) - \aleph(\dot{\epsilon}^p) \geq (\dot{\epsilon}^{p*} - \dot{\epsilon}^p).T \quad \forall \quad \dot{\epsilon}^{p*} \in W\} \quad [\text{Eq. 29}]$$

Substituindo a função dissipação, [Eq. 26], o sub-diferencial de $\aleph(\dot{\epsilon}^p)$ assume o seguinte formato:

$$\partial\aleph(\dot{\epsilon}^p) = \{T \in P \mid \aleph(\dot{\epsilon}^{p*}) \geq \dot{\epsilon}^{p*}.T \quad \forall \quad \dot{\epsilon}^{p*} \in W\} \quad [\text{Eq. 30}]$$

Deste modo, devido as propriedades dos sub-diferenciais as equações constitutivas tomam a seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}^p \in \partial\aleph_c(T) \Leftrightarrow T \in \partial\aleph(\dot{\epsilon}^p) \quad [\text{Eq. 31}]$$

Cabe ressaltar que tudo que foi dito até o momento em relação ao funcional na sua forma local é igualmente válido para a forma global.

Em particular o funcional $\aleph_c(T)$, [Eq. 20], pode ser integrado em todo o volume do corpo para se obter:

$$\chi_c(T) = \langle f, \dot{\lambda} \rangle = \sup_{\dot{\lambda}^* \in \Lambda^+} \langle f, \dot{\lambda}^* \rangle \quad [\text{Eq. 32}]$$

onde $\langle f, \dot{\lambda} \rangle$ é o produto de dualidade definido por:

$$\langle f, \dot{\lambda} \rangle = \int_B f \cdot \dot{\lambda} \, d\beta \quad [\text{Eq. 33}]$$

e Λ^+ é agora um conjunto num espaço funcional.

A equação constitutiva se escreve então:

$$\dot{\epsilon}^p \in \partial\chi_c(T) \Leftrightarrow T \in \partial\chi(\dot{\epsilon}^p) \quad [\text{Eq. 34}]$$

3. FORMULAÇÃO VARIACIONAL CONTÍNUA

Nesta seção será considerada a modelagem mecânica do problema, até o momento foram obtidas as equações básicas necessárias para formular o problema da análise limite em sua forma variacional.

Um carregamento externo atuando em um corpo de material com comportamento elástico-idealmente plástico não pode ser aumentado de forma ilimitada, isto é, as tensões internas provenientes do carregamento externo não excedem o valor do limite de escoamento. O ilimitado aumento de deformação do corpo sob tensão constante torna-o incapaz de suportar qualquer acréscimo da carga externa, desta forma o carregamento externo atingiu uma magnitude crítica chamada de colapso plástico (SNEDDON e HILL, 1964).

O colapso plástico é determinado por uma carga crítica que causará um fluxo de escoamento, isto é, o desenvolvimento de taxa de deformação plástica sob tensão constante. Um corpo submetido a uma carga de colapso tem sua taxa de deformação total dada exclusivamente pela taxa de deformação plástica.

A distribuição da taxa de deformação no colapso é chamada de mecanismo de colapso (SNEDDON e HILL, 1964), e é dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = Dv \quad | \quad v \in V \quad [\text{Eq. 35}]$$

O problema da análise limite estabelece a potência interna de colapso em uma dada estrutura submetida a um carregamento proporcional a uma carga de referência.

Considerando o equilíbrio, a potência interna de colapso será igual a potência externa dada pela carga proporcional:

$$\langle T, Dv \rangle = \alpha \langle F, v \rangle \quad \forall \quad v \in V \quad [\text{Eq. 36}]$$

Com base nas relações obtidas até o momento, chega-se ao seguinte modelo matemático para o colapso plástico:

$$\dot{\epsilon}^P = Dv \quad \forall v \in V \quad [\text{Eq. 37}]$$

$$\langle T, Dv \rangle = \alpha \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V \quad [\text{Eq. 38}]$$

$$\dot{\epsilon}^P \in \partial \chi_c(T) \Leftrightarrow T \in \partial \chi(\dot{\epsilon}^P) \quad [\text{Eq. 39}]$$

A descrição da análise limite em sua forma variacional será apresentada levando em conta o modelo matemático para o colapso plástico representado pelas [Eq. 37], [Eq. 38] e [Eq. 39].

3.1. Formulação Estática

Considerando o Postulado de Drucker, [Eq. 25], na sua forma global, e o mecanismo de colapso, [Eq. 37], tem-se:

$$\langle T, Dv \rangle \geq \langle T^*, Dv \rangle \quad \forall \quad T^* \in P \quad [\text{Eq. 40}]$$

Atribuindo que as variações das tensões aplicadas, T^* , obedecem a condição do equilíbrio, isto é:

$$S_{\alpha^*} = \{T^* \in W' \mid \langle T^*, Dv \rangle = \alpha^* \langle F, v \rangle \quad \forall \quad v \in V\} \quad [\text{Eq. 41}]$$

De acordo com a [Eq. 06] e [Eq. 41], tem-se o seguinte formato para a condição na [Eq. 40]:

$$\alpha \langle F, v \rangle \geq \alpha^* \langle F, v \rangle \quad \forall \quad T^* \in P \cap S_{\alpha^*} \quad [\text{Eq. 42}]$$

O problema de ótimo para a formulação estática pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\alpha = \sup_{\alpha^*, T^*} \alpha^* \mid T^* \in P \cap S_{\alpha^*} \quad [\text{Eq. 43}]$$

O problema de análise limite quando resolvido a partir deste tipo de formulação fornece o campo de tensões que atuam no corpo além do fator de colapso plástico α .

3.2. Formulação Cinemática

Tomando por base a condição do sub-diferencial de $\chi(\dot{\epsilon}^P)$, [Eq. 30], na sua forma global, obtém-se:

$$\chi(\dot{\epsilon}^{P*}) \geq \langle T, \dot{\epsilon}^{P*} \rangle \quad \forall \quad \dot{\epsilon}^{P*} \in W \quad [\text{Eq. 44}]$$

Usando a condição cinemática e restringindo as variações de $\dot{\epsilon}^{P*}$ às taxas de deformações plásticas cinematicamente compatíveis, isto é:

$$\dot{\epsilon}^{P*} = Dv^* \quad \forall \quad v^* \in V \quad [\text{Eq. 45}]$$

Substituindo a condição cinemática, [Eq. 45], na do sub-diferencial, [Eq. 44], tem-se:

$$\chi(Dv^*) \geq \langle T, Dv^* \rangle \quad \forall \quad v^* \in V \quad [\text{Eq. 46}]$$

Substituindo a condição do equilíbrio, se obtém:

$$\chi(Dv^*) \geq \alpha \langle F, v^* \rangle \quad \forall \quad v^* \in V \quad [\text{Eq. 47}]$$

Levando em conta que a potência externa virtual de referência tem valor unitário, [Eq. 04] $\langle F, v^* \rangle = 1$, na desigualdade em [Eq. 47], tem-se a seguinte representação:

$$\chi(Dv^*) \geq \alpha \quad | \quad \langle F, v^* \rangle = 1, \quad v^* \in V \quad [\text{Eq. 48}]$$

Portanto pode-se escrever o problema de ótimo para o caso cinemático como:

$$\alpha = \inf_{v^*} \chi(Dv^*) \quad | \quad \langle F, v^* \rangle = 1 \quad [\text{Eq. 49}]$$

A formulação cinemática fornece como resultado o mecanismo de colapso além do fator de colapso plástico α . A formulação cinemática coincide com o segundo teorema de colapso plástico. A desigualdade da [Eq. 48] engloba todos os mecanismos de colapso admissíveis e a igualdade, sendo considerado o valor ínfimo de $\chi(Dv^*)$, representa a capacidade limite do corpo de resistir ao carregamento externo (SNEDDON e HILL, 1964).

3.3. Formulação Mista

A formulação mista é uma combinação da função dissipação na formulação cinemática. Considerando a forma global da função dissipação, [Eq. 28]:

$$\chi(\dot{\epsilon}^p) = \sup_{T^* \in P} \langle T^*, \dot{\epsilon}^p \rangle \quad [\text{Eq. 50}]$$

Substituindo a função dissipação representada em [Eq. 50] na formulação cinemática [Eq. 49], e levando em conta a condição cinemática [Eq. 45], se obtém a formulação mista:

$$\alpha = \inf_{v^*} \sup_{T^* \in P} \langle T^*, \dot{\epsilon}^{p*} \rangle \quad | \quad \langle F, v^* \rangle = 1 \quad [\text{Eq. 51}]$$

4. EXEMPLO

Será apresentado a seguir o estudo do colapso de uma viga de material elasto-plástico, de seção transversal retangular, sujeita a um esforço de flexão.

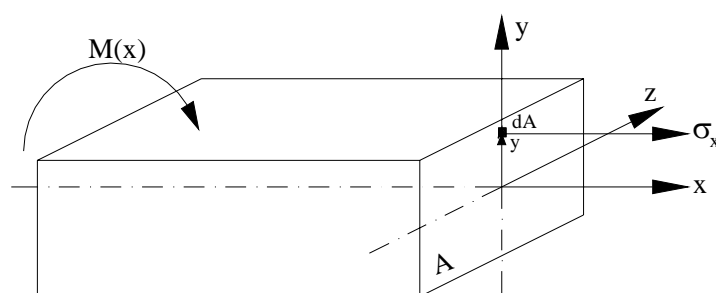


Figura 1 – Estrutura submetida a um esforço de flexão

Pela condição do equilíbrio na direção x , tem-se:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad [\text{Eq. 52}]$$

O momento fletor em relação ao eixo z é dado por:

$$\int_A \sigma_x y dA = -M_z(x) \quad [\text{Eq. 53}]$$

A relação constitutiva quando a tensão é menor que a tensão de escoamento σ_Y é representada por:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad [\text{Eq. 54}]$$

sendo que:

$$\varepsilon_x = -K y \quad [\text{Eq. 55}]$$

onde K é a curvatura da linha neutra, sendo o inverso do raio, representado por:

$$K = 1/R \quad [\text{Eq. 56}]$$

4.1. Fase Elasto-Plástica - $M_Y \leq M(x) \leq M_P$

O colapso plástico ocorre quando toda a seção está plastificada, o momento fletor no colapso é representado, neste estudo, por M_P . O momento fletor quando o escoamento é iminente é denotado por M_Y . A fase elasto-plástica é representada na figura 2.

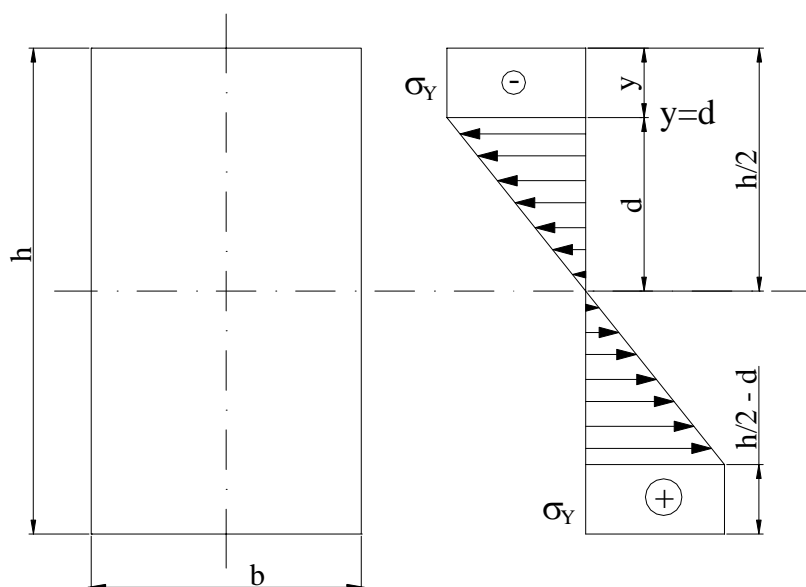


Figura 2 – Fase Elasto-Plástica

Quando $d = 0$, toda a seção transversal estará plastificada, quando $d = h/2$ toda a seção estará no regime elástico, então d varia num intervalo de $0 \leq d \leq h/2$ e $-d$ varia num intervalo de $0 \leq -d \leq -h/2$. Quando a seção transversal estiver parcialmente plastificada, a tensão atuante na seção transversal será dada por $\sigma_x = -\sigma_Y$ no intervalo $d \leq y \leq h/2$ e $\sigma_x = \sigma_Y$ no intervalo $-d \leq y \leq -h/2$ e por $\sigma_x = -\sigma_Y \frac{y}{d}$ no intervalo $-d \leq y \leq d$. Da equação do equilíbrio, Eq.[53], tem-se:

$$\int_0^d -\sigma_Y \frac{y}{d} y dy + \int_d^{h/2} -\sigma_Y y dy = \frac{-M}{2b} \quad [\text{Eq. 57}]$$

$$M(d) = \frac{b \sigma_Y h^2}{4} \left[1 - \frac{4 d^2}{3 h^2} \right] \quad [\text{Eq. 58}]$$

Aplicando na viga um momento de referência $\overline{M} = M_Y$, dado pela Eq.59:

$$\overline{M} = \frac{b \sigma_Y h^2}{6} \quad [\text{Eq. 59}]$$

O momento de colapso, que é o momento necessário para plastificar toda a seção, é visto quando $d = 0$, que pela Eq. 58, obtém-se:

$$M = M_P = \frac{b \sigma_Y h^2}{4} = \frac{3}{2} \overline{M} \quad [\text{Eq. 61}]$$

Deste modo, o fator de colapso que multiplica o momento de referência \overline{M} , isto é, o máximo fator de amplificação, é dado por:

$$\alpha = \frac{M_P}{\overline{M}} = 1,5 \quad [\text{Eq. 62}]$$

5. CONCLUSÃO

O desenvolvimento do projeto, na área de engenharia, levando em conta as formulações da análise limite, pode melhorar alguns fatores inerentes ao projeto, tais como, obter produtos mais leves, resistentes e econômicos, assim como evitar o colapso plástico.

As equações de equilíbrio, constitutivas e de compatibilidade cinemática foram tomadas como base para o desenvolvimento das formulações variacionais para a análise limite. O postulado de Drucker, na forma global, foi usado no desenvolvimento da formulação estática, que fornece o campo de tensões que satisfaz a admissibilidade plástica e a condição do equilíbrio. A formulação cinemática foi obtida levando em conta a condição do sub-diferencial da função dissipação, a compatibilidade cinemática e a potência externa de referência, e fornece como resultado os possíveis mecanismos de colapso e a capacidade do corpo em resistir ao carregamento externo. Pela combinação da função dissipação na formulação cinemática, foi obtida a formulação mista, que fornece o campo de tensões e velocidades.

O exemplo apresentado ilustra a utilização da formulação estática. O valor do fator de colapso α foi calculado sendo igual a 1,5 o momento limite elástico, $M_Y = \overline{M}$, utilizado como referência.

REFERÊNCIAS

LUBLINER, J. **Plasticity Theory**, New York, Macmillan Publishing Company, 1990.

MAUGIN, G.A. **The Thermomechanics of Plasticity and Fracture**, New York, Cambridge University Press, 1992.

SILVEIRA, J.L.L. **Elementos Finitos Triangulares Mistos para Análise Limite em Estado Plano**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.

SNEDDON, I.N.; HILL, R. **Progress in Solid Mechanics**, Holanda-Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1964.

ULM, F. J.; COUSSY, O. **Mechanics and Durability of Solids, vol 1, Solid Mechanics**, New Jersey, Pearson Education Inc., 2003.

WAGONER, R. H.; CHENOT, J. L. **Fundamentals of Metal Forming**; John Wiley & Sons, Inc., United States of América, 1997.