

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE FILTROS E ANTENAS DE MICROONDAS USANDO OS FRACTAIS DE SIERPINSKI

Tarcílio CAVALCANTI (1); Marcelo RIBEIRO (2); Paulo H. da F. SILVA (3)

Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba
Grupo de Telecomunicações e Eletromagnetismo Aplicado
Av. 1º de Maio, 720 Jaguaribe, CEP: 58015-430 – João Pessoa, PB, Brasil

(1) e-mail: tarcilio.@gmail.com

(2) e-mail: marcelo_cefetpb@hotmail.com

(3) e-mail: henrique@cefetpb.edu.br

RESUMO

As propriedades únicas da geometria fractal têm-se mostrado bastante úteis para a construção de filtros, superfícies seletivas em frequência, circuitos sintonizados e antenas, possibilitando soluções otimizadas para uma variedade de usos comerciais na faixa de microondas. Atualmente as aplicações dos fractais incluem: identificação por rádio frequência (RFID), telefonia celular, aplicações militares, etc. A geometria fractal está incluída na tecnologia dos sistemas de comunicação por microondas devido a algumas propriedades interessantes para a fabricação de dispositivos compactos, com desempenho superior em termos de largura de banda, bem como, comportamento multi-banda. Neste artigo, descrevem-se os procedimentos para o projeto, construção e medição de dispositivos para a faixa de microondas usando os fractais de Sierpinski: antenas monopolo e filtros em linha de microfita. O método IFS (*Iterated Function System*) para a geração de fractais com auto-similaridade exata em diferentes níveis de escala foi descrito. O efeito eletromagnético da variação do nível dos fractais foi avaliado para os dispositivos construídos. A resposta em frequência de cada dispositivo foi obtida através da medição de seus parâmetros de espalhamento (coeficientes de transmissão e reflexão) com um analisador de redes vetorial.

Palavras-chave: Fractais, dispositivos de microondas, medição.

1. INTRODUÇÃO

A geometria Euclidiana, com a qual estamos habituados, trata de objetos geométricos com formas regulares, como o ponto, as curvas e as superfícies, que são caracterizadas em termos de suas dimensões topológicas (número inteiro que caracteriza a geometria de um objeto Euclidiano). Neste contexto, diz-se que o ponto tem dimensão 0, a reta tem dimensão 1, o plano tem dimensão 2 e o espaço usual tem dimensão 3.

Contudo, existem muitas formas encontradas na natureza que estão fora da abrangência da geometria Euclidiana, tais como: as superfícies de nuvens e montanhas, as linhas costeiras, as raízes e ramos de árvores, os nervos e vasos sanguíneos do corpo humano, etc. Estas formas são estudadas e analisadas por matemáticos e geômetras desde o século XIX. As raízes conceituais dos fractais remontam a tentativas de medir o tamanho de objetos para os quais as definições da geometria Euclidiana falham.

A idéia dos fractais teve sua origem nos trabalhos de cientistas como Karl Weierstrass, que em 1872 encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo o seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. Em 1905, o matemático francês Pierre Fatou descobriu que certas equações formadas por números complexos podem ser representadas por figuras que possuem auto-similaridade, em várias escalas. Atualmente, os gráficos destas funções matemáticas são denominados fractais.

A geometria fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Pode-se afirmar que um fractal é um objeto geométrico, que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto-similares e independentes de escala.

O termo fractal foi usado pela primeira vez em 1975 pelo matemático Benoit Mandelbrot, referindo-se a objetos construídos recursivamente, onde um aspecto do objeto limite é infinito e outro é finito, e onde em qualquer iteração, algum pedaço do objeto é uma versão em escala reduzida do objeto na iteração anterior. A palavra fractal advém do adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar [1].

Os fractais possuem as propriedades de auto-semelhança, construção iterativa e dimensão fractal. Eles podem ser agrupados em três categorias principais, de acordo com método pelo qual são gerados: sistema iterativo de funções, relação de recorrência, processo estocástico.

Os fractais também podem ser classificados de acordo com sua auto-similaridade. Há três tipos de auto-similaridade encontradas em fractais: auto-similaridade exata, quase-auto-similaridade e auto-similaridade estatística. Geralmente, os fractais gerados por sistemas de funções iteradas apresentam uma auto-similaridade exata (o fractal é idêntico em diferentes escalas), enquanto que, as relações de recorrência geram fractais que são quase-auto-similares, mas não exatamente auto-similares, como os conjuntos de Júlia e Mandelbrot [2].

A popularização dos fractais se deu a partir de 1980, com o avanço da informática, que viabilizou a geração de objetos fractais. Desde então, eles são aplicados em ciência, tecnologia e arte gerada por computador. A beleza plástica dos fractais também chama muita atenção. Dentre os fractais mais conhecidos estão incluídos: conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski, curva de Peano, floco de neve de Koch, esponja de Menger, conjunto de Mandelbrot, conjuntos de Júlia, fractal de Lyapunov, vôo de Lévy. A Figura 1 ilustra alguns destes fractais.

Na área de Telecomunicações, tem-se tornado cada vez mais comum a presença da geometria fractal, dadas as suas vantagens sobre a geometria Euclidiana no que concerne à fabricação de dispositivos leves e compactos – uma tendência no desenvolvimento dos aparelhos de comunicação modernos. Neste setor há uma necessidade crescente por antenas integradas e compactas, que ocupem de forma integrada a quantidade de espaço limitada no interior de aparelhos com tecnologia sem fio (*wireless*). Por exemplo, uma variedade de aparelhos pessoais, tais como: o telefone celular, o receptor GPS (Global Positioning System), o *laptop*, PDAs (*Personal Digital Assistants*), utilizam esta tecnologia em suas antenas compactas.

Em particular, neste estudo foram abordadas duas aplicações da geometria fractal para a fabricação de dispositivos de microondas: (i) filtros em linha de microfita com estruturas periódicas no plano terra, cujas células são formadas através do tapete de Sierpinski; (ii) antenas monopolo usando o triângulo de Sierpinski. Estes dispositivos foram projetados e construídos utilizando-se os fractais com níveis diferentes. As respostas em frequência destes dispositivos, até a frequência máxima de 13,5 GHz, foram medidas através de um analisador de redes vetorial do Laboratório de Medidas em Telecomunicações do CEFET-PB/GTEMA (Grupo de Telecomunicações e Eletromagnetismo Aplicado). Os resultados obtidos através

destas medições de parâmetros de espalhamento – o coeficiente de transmissão (s_{21}) para os filtros em linhas de microfita, e o coeficiente de reflexão (s_{11}) para as antenas monopolo – são discutidos em termos do efeito eletromagnético decorrente da variação do nível dos fractais de Sierpinski utilizados na construção destes dispositivos.

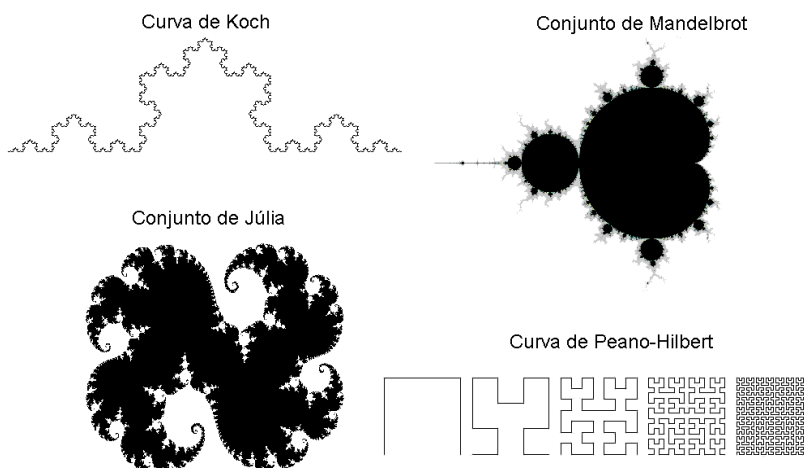


Figura 1 – Exemplos de figuras fractais.

2. MÉTODO IFS PARA A GERAÇÃO DE FRACTAIS

Um dos métodos usados para a geração de fractais é o sistema iterativo de funções (IFS – *Iterated Function System*) [3]. O método IFS é baseado em transformações matemáticas, tais como: contração, reflexão, rotação e translação. Desta forma, os fractais planos, por exemplo, são definidos como o limite do processo iterativo de um conjunto finito de transformações afins $w(\mathbf{u})$, que são aplicadas em uma figura plana inicial.

Define-se a transformação afim $w(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no plano através da expressão (1),

$$w(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + \mathbf{v} \quad (1)$$

em que, T é uma transformação linear não-singular, $\mathbf{u}^T = (x \ y)$ e \mathbf{v} são vetores do \mathbb{R}^2 [3]. A transformação afim $w(\mathbf{u})$ pode ser escrita, na forma matricial, como

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (2)$$

em que, os coeficientes a, b, c, d, e, f , são escalares. São exemplos de fractais gerados através do método IFS, a curva de Koch e o triângulo de Sierpinski (ver Figura 2).

A curva de Koch, ilustrada na Figura 2(a), é obtida a partir de uma reta através de quatro transformações $w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, da forma:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad (3)$$

em que, as variáveis θ_i , e_i e f_i assumem os valores dados na Tabela 1. Estas quatro transformações fazem a contração de $1/3$; w_2 faz uma rotação de 60° e uma translação de uma unidade para a direita; w_3 faz uma rotação de 300° , uma translação de $3/2$ unidades para a direita e $\sqrt{3}/2$ unidades para cima; w_4 faz uma translação de $3/2$ unidades para a direita.

O triângulo de Sierpinski é obtido a partir de um triângulo equilátero através de três transformações $w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, da forma:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

em que θ_i , e_i e f_i assumem os valores dados na Tabela 1. Estas três transformações fazem a contração de $1/2$; w_2 faz uma translação de $1/2$ unidade para a direita; w_3 faz uma translação de $1/4$ unidades para a direita e $1/2$ unidades para cima. A cada conjunto de transformações o nível de escala do fractal é aumentado em uma unidade.

Tabela 1 – Escalares constantes das transformações

Triângulo de Sierpinski			Curva de Koch		
i	e_i	f_i	θ_i	e_i	f_i
1	0	0	0	0	0
2	1/2	0	$\pi/3$	1	0
3	1/4	1/2	$-\pi/3$	3/2	$\sqrt{3}/2$
4	—	—	0	2	0

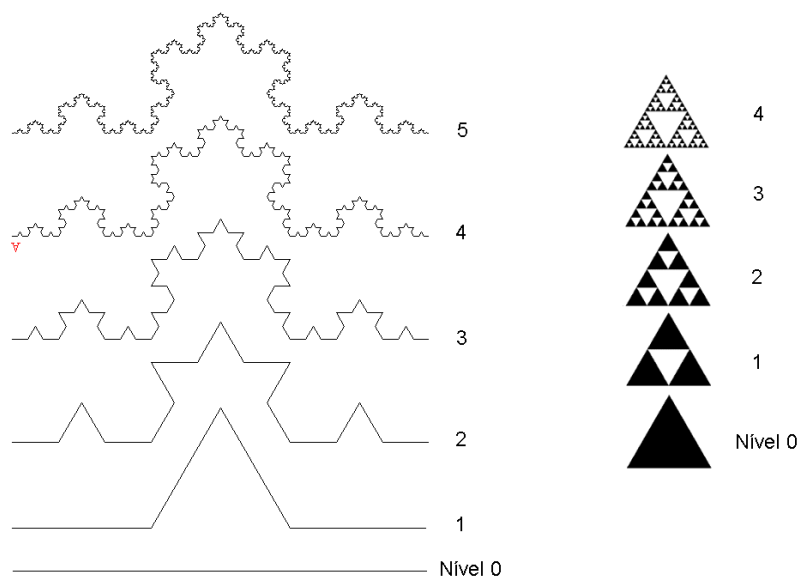


Figura 2 – Fractais gerados através do método IFS.

3. FABRICAÇÃO DOS DISPOSITIVOS

Para a fabricação dos dispositivos de microondas foi utilizada uma placa de circuito impresso de fenolite revestida por duas finas camadas de cobre em face dupla. As características da camada dielétrica de fenolite são: permissividade elétrica relativa $\epsilon_r = 3,9$ e espessura $h = 1,5$ mm.

3.1 Filtros em Linha de Microfita

Em linhas gerais, o projeto dos filtros em linha de microfita foi baseado nos procedimentos descritos em [4]. No cálculo da largura da linha de microfita, w , com uma impedância de entrada $Z_0 \cong 50 \Omega$, foram utilizados os modelos de análise e síntese de linhas de microfita [5]. A partir da implementação computacional destes modelos analíticos aproximados obteve-se o valor $w = 2,82$ mm. Na parte superior do filtro foi desenhada a linha de microfita de largura w . Na parte inferior, o plano terra foi substituído por uma estrutura periódica,

cujas células possuem a geometria fractal. Especificamente, utilizou-se o fractal tapete de Sierpinski, onde foram considerados três níveis diferentes: 1, 2 e 3. A Figura 3 ilustra as dimensões utilizadas no projeto dos filtros.

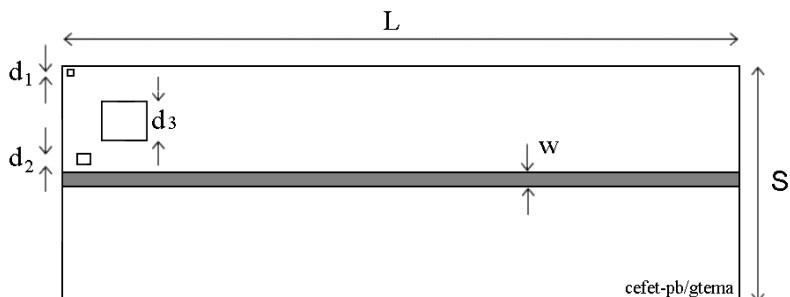


Figura 3 – Dimensões do filtro em linha de microfita com plano terra fractal: $L = 120,00$ mm, $S = 80,00$ mm, $w = 2,82$ mm, $d1 = 1,11$ mm, $d2 = 3,33$ mm, $d3 = 10,00$ mm.

O processo de fabricação do filtro envolve quatro etapas (ver Figura 4): elaboração do *layout* com auxílio de um *software* CAD (neste caso usou-se o CorelDraw 9), impressão do desenho negativo da estrutura periódica na placa de fenolite através de serigrafia, corrosão em solução de perclorato de ferro das faces descobertas de cobre na placa de fenolite, instalação e soldagem dos conectores.

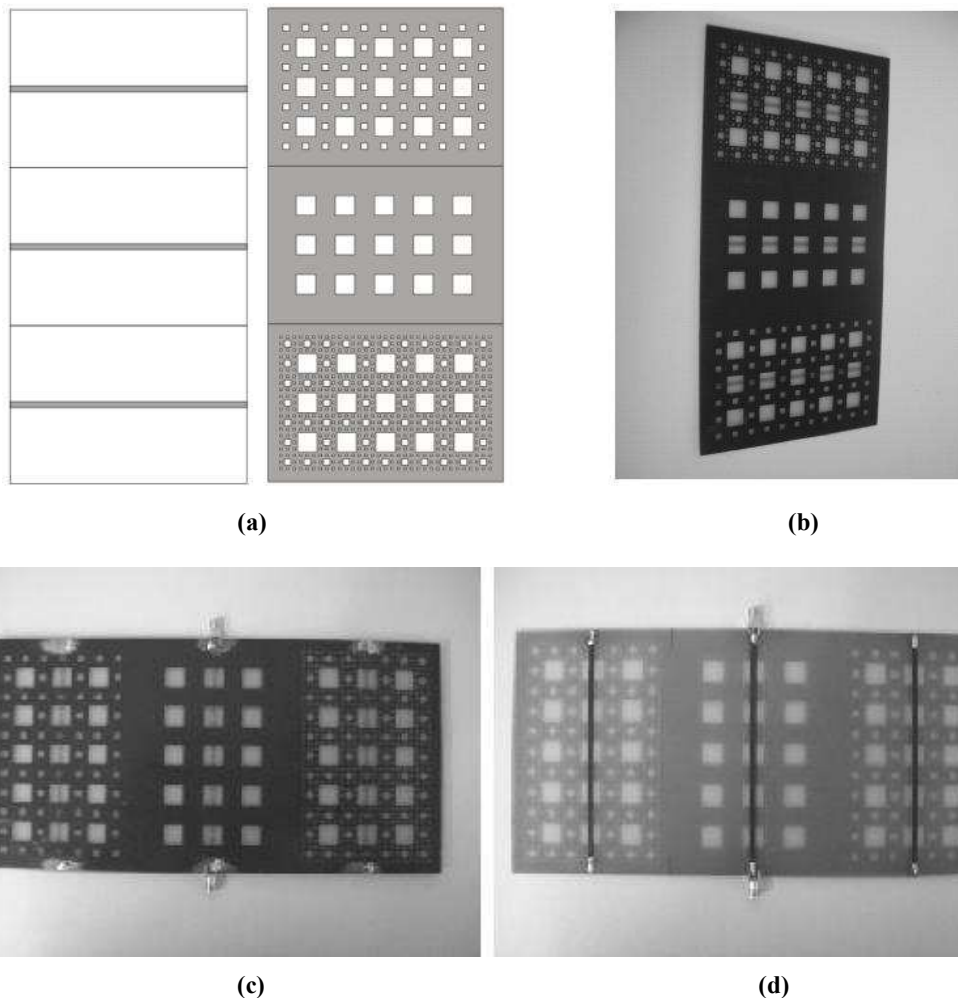
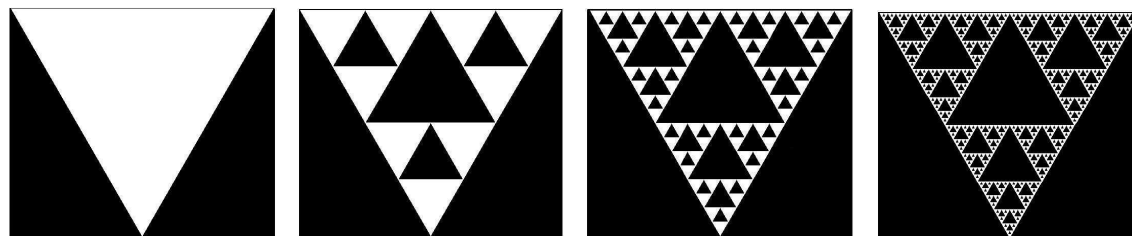


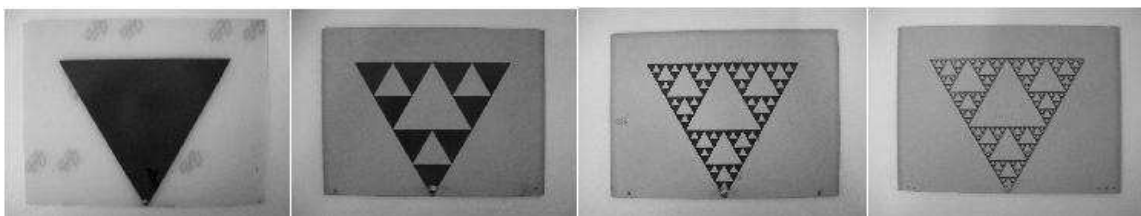
Figura 4 – (a) *Layout* de impressão da linha de microfita e do plano terra com tapete de Sierpinski. (b) Imagem da placa após a serigrafia e corrosão. Filtros construídos após a instalação e soldagem dos conectores: (c) vista inferior, (d) vista superior.

3.2 Antenas Monopolo de Sierpinski

Em linhas gerais, o projeto dos monopolos de Sierpinski foi baseado nos procedimentos descritos em [7]. As mesmas etapas de fabricação descritas na seção 3.1 foram utilizadas para construção destas antenas, contudo os desenhos negativos dos fractais de Sierpinski foram elaborados com auxílio do *software* AutoCAD, Figura 5(a). Além da antena *bow-tie* foram construídos os monopolos de Sierpinski de níveis 2, 4 e 6, Figura 5(b). As antenas foram instaladas sobre um plano terra feito com uma chapa de latão medindo 30×30 cm. A Figura 7 mostra a imagem do monopolo com fractal de nível 4 construído, após a instalação do plano terra, conector e transição.



(a)



(b)

Figura 5 – (a) *Layout* de impressão dos monopolos de Sierpinski.
(b) Imagens das antenas após a serigrafia e corrosão.

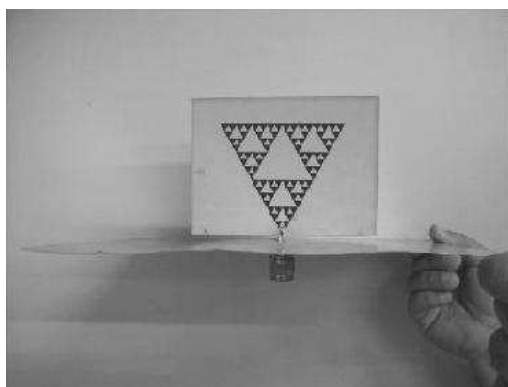
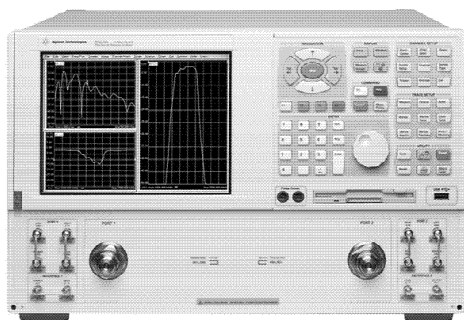


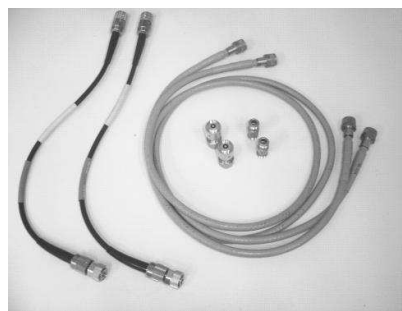
Figura 6 – Imagem do monopolo de Sierpinski de nível 4 após instalação do plano terra e conector.

4. MEDIÇÃO DOS FILTROS E ANTENAS

O analisador de redes vetorial modelo N5230A PNA-L mostrado na Figura 7(a), do fabricante Agilent Technologies, foi usado para a medição dos parâmetros de espalhamento dos dispositivos na faixa de 300 KHz a 13.5 GHz. A Figura 7(b) apresenta os acessórios usados para conectar os dispositivos ao analisador de redes: dois cabos Agilent 85132D, dois conectores tipo pcb, modelo 82_SMA-50-0-1/111_N, quatro transições, duas PC7-N e duas N-N. Os arranjos das medições estão ilustrados na Figura 8(a), para os filtros, e na Figura 8(b), para as antenas.

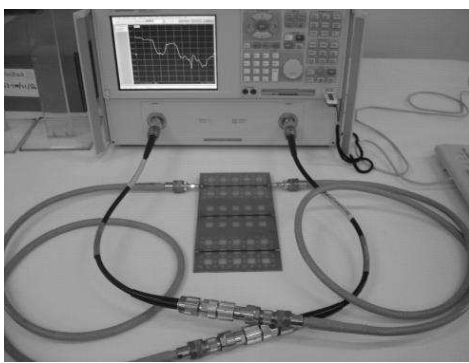


(a)

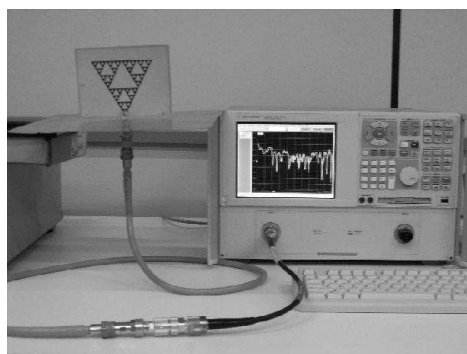


(b)

Figura 7 – (a) Analisador de redes vetorial modelo N5230A PNA-L, Agilent Technologies. (b) Cabos, conectores e transições.



(a)



(b)

Figura 8 – Arranjos para a medição de parâmetros de espalhamento com o analisador de redes vetorial. (a) Medição do coeficiente de transmissão s_{21} de um filtro em linha de microfita. (b) Medição do coeficiente de reflexão s_{11} de uma antena monopolo.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os arquivos de dados com os valores dos parâmetros de espalhamento (s_{21} para os filtros e s_{11} para as antenas), gerados pelo analisador de redes vetorial, foram usados para traçar os gráficos das respostas em frequência dos dispositivos de microondas, através de programas escritos em Matlab[®] 7 [6].

Para os filtros em linha de microfita usando o tapete de Sierpinski no plano terra, os resultados obtidos são apresentados na Figura 9. Neste gráfico, a sobreposição das curvas possibilita a análise comparativa do efeito da variação do nível dos fractais sobre o comportamento destes filtros.

Verificou-se, a partir das respostas em frequência medidas (parâmetro de transmissão s_{21}), que os filtros com estruturas periódicas fractais impressas no plano terra de uma linha de microfita convencional, apresentam respostas em frequência com dupla banda passante: a primeira entre 300 KHz e 3,0 GHz e a segunda na faixa de 5,0 a 7,5 GHz. Por outro lado, a partir da Figura 9, também se observam duas bandas de rejeição, a primeira entre 3,0 e 5,0 GHz e a segunda a partir de 7,5 GHz aproximadamente.

Os filtros construídos com fractais de níveis 2 e 3 apresentaram comportamentos eletromagnéticos similares. Por sua vez, o filtro construído com o fractal de nível 1 apresentou a primeira banda de rejeição mais larga e com uma atenuação mais acentuada. Neste caso, devido ao aumento da banda de rejeição, houve um deslocamento de aproximadamente 500 MHz na segunda banda passante, com relação aos demais filtros com fractais de níveis 2 e 3. Neste caso comprovou-se uma das limitações reportadas quanto ao uso dos fractais – com o aumento do nível de escala fractal são menores as mudanças geométricas dos dispositivos e possivelmente menores as variações nas suas respostas eletromagnéticas com a frequência.

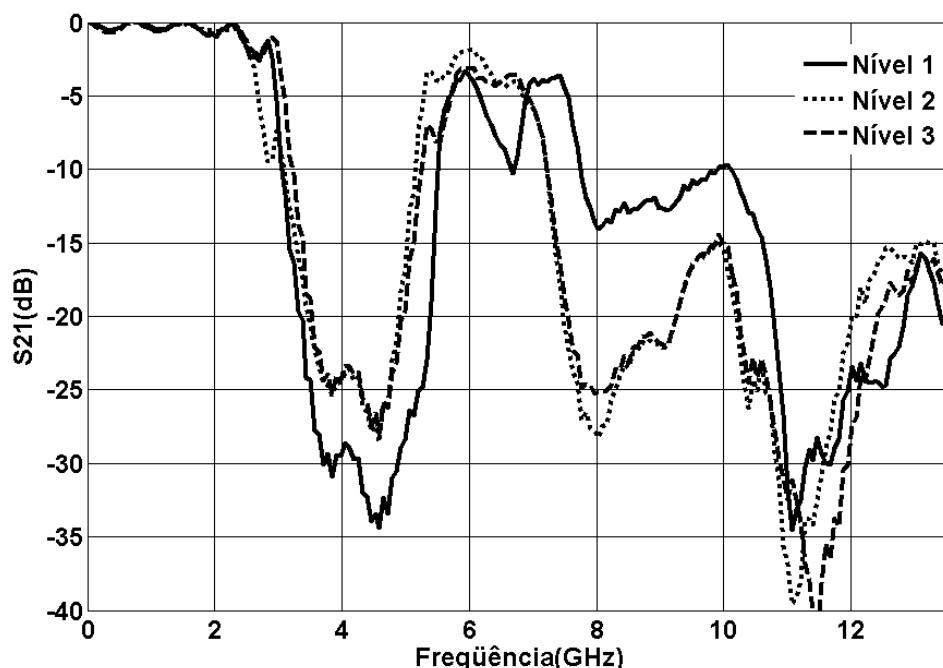


Figura 9 – Coeficientes de transmissão medidos para os filtros construídos com fractais do tipo tapete de Sierpinski com níveis 1, 2 e 3.

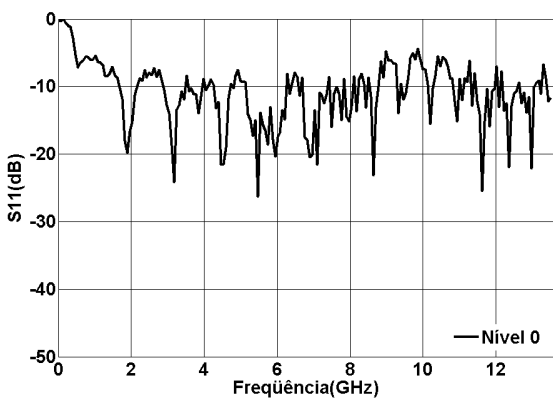
Para os monopolos usando os triângulos de Sierpinski de níveis 0 (antena *bow-tie*), 2, 4, 6, os resultados obtidos são apresentados na Figura 10(a)-(d), respectivamente. Nesta análise, a influência do aumento do nível dos fractais nos comportamentos eletromagnéticos das antenas é verificada em relação aos valores do coeficiente de reflexão (S_{11}) da antena *bow-tie*.

Como esperado, os monopolos de Sierpinski apresentaram um comportamento multifrequência. A partir dos resultados apresentados na Figura 10, observa-se que a primeira frequência de ressonância, na qual as antenas podem funcionar, ocorre um pouco abaixo de 2,0 GHz. Contudo, a segunda frequência de ressonância mostrou-se bem mais acentuada que a primeira. Por exemplo, a antena construída com fractal de nível 4 apresentou uma ressonância acentuada em 3,2 GHz e com uma faixa bastante estreita. Por outro lado, as antenas com fractais de níveis 2 e 6 apresentaram um comportamento banda larga em torno da segunda frequência de ressonância na faixa de 3,0 a 4,0 GHz. Dentre as demais ressonâncias de ordem superior observadas, a mais acentuada ocorre entre 7,0 e 8,0 GHz para as três antenas com fractais de níveis 2, 4 e 6.

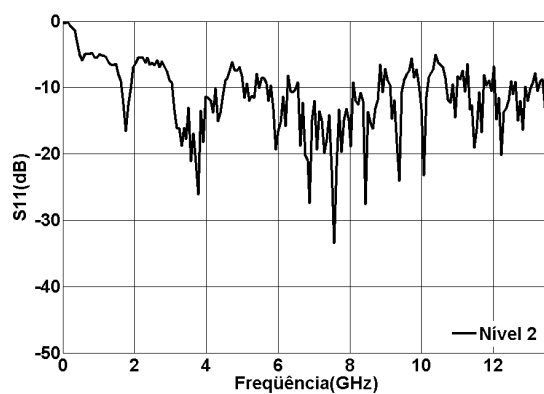
5. CONCLUSÕES

Neste artigo abordou-se o emprego da geometria fractal para a construção de filtros e antenas em operação na faixa de microondas. Foram construídos filtros em linha de microfita com estruturas periódicas cujas células são os fractais do tipo tapete de Sierpinski, de níveis 1, 2 e 3, bem como, antenas monopolo usando os triângulos de Sierpinski de níveis 2, 4 e 6. Uma linha de microfita convencional e a antena *bow-tie*, que correspondem ao nível 0 destes fractais, também foram construídas para a obtenção dos valores de referência, com os quais os dispositivos que usam a geometria fractal foram comparados.

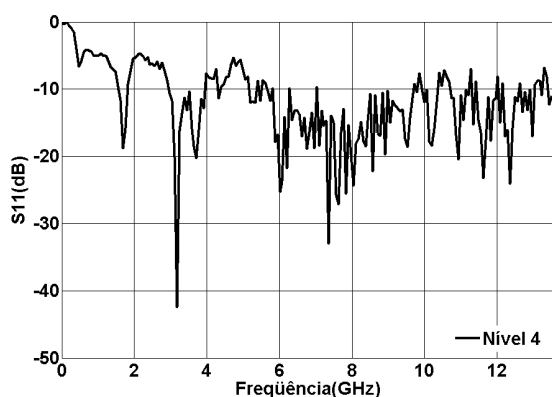
A partir deste estudo experimental pôde-se verificar a influência do nível de escala dos fractais no comportamento eletromagnético dos dispositivos de microondas abordados. Em particular, destaca-se o controle da largura de banda dos filtros e antenas estudados com os fractais de Sierpinski. A versatilidade no controle de certas propriedades eletromagnéticas como a largura de banda e frequência de ressonância, que conduz por exemplo à miniaturização de antenas, é um dos fatores que torna cada vez maior a utilização de dispositivos fractais como componentes dos aparelhos dos sistemas de comunicação modernos.



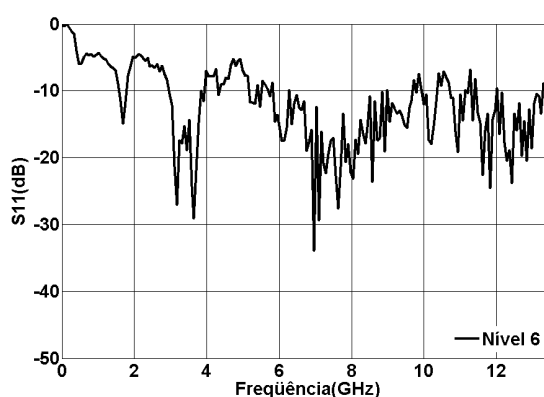
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10 – Coeficientes de reflexão medidos para as antenas monopolo construídas com fractais do tipo triângulo de Sierpinski com níveis: (a) nível 0 (*bow-tie*); (b) nível 2; (c) nível 4; (d) nível 6.

5. REFERÊNCIAS

- [1] MANDELBROT, B. B., **Fractals: Form, Chance and Dimension**, NewYork, W H Freeman and Co, 1977.
- [2] MANDELBROT, B. B., **The Fractal Geometry of Nature**, NewYork, W.H.Freeman and Co, 1982.
- [3] SERRA, C. P., KARAS, E. W., BILOTI, R., **Fractais: Propriedades e Construção**, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- [4] PASSOS, M. G., MEDEIROS, R. B., CARVALHO, R. B., SILVA, P. H. DA, Projeto, fabricação e medição de filtros rejeita-faixa utilizando estruturas periódicas PBG-GP e superfícies seletivas em frequência. In: CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, 1., 2006, Natal. **Anais ...** Natal: CEFET-RN. 1 CD-ROM.
- [5] FOOKS, E. H. and ZAKAREVICIUS, R. A., **Microwave Engineering Using Microstrip Circuits**. Prentice Hall, 1990.
- [6] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 7, 2004, The MathWorks, Inc.
- [7] PUENTE-BALIARDA, C., ROMEU, J., POUS, R., CARDAMA, A, On the behavior of the Sierpinski multiband fractal antenna. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 46, no. 4, p. 517-524, 1998.