

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE FILTROS DIGITAIS NÃO RECURSIVOS (FIR) UTILIZANDO A JANELA DE KAISER

Elder Eldervitch C. DE OLIVEIRA (1); Adaildo Gomes D' ASSUNÇÃO (2); Ronaldo A. MARTINS (3); João Bosco L. de OLIVEIRA (4);

(1) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: elder2@ymail.com

(2) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: adaildo@ct.ufrn.br

(3) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: ronaldo@ufrnet.br

(4) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av Sen. Salgado Filho, s/n. CEP: 59072-970, Natal-RN, e-mail: bosco@sedis.ufrn.br

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo em análise e projetos de filtros digitais de resposta finita (FIR) não recursivo através da técnica de janelamento, em que a janela de Kaiser é empregada. A janela de Kaiser é interessante no sentido de que para uma dada especificação de projeto, o parâmetro (β) controla a forma da janela empregada, garantido um lóbulo principal amplo em relação a outros tipos de janelas. O objetivo principal foi desenvolver uma ferramenta didática computacional para simulação desses filtros tipo passa-baixas através do método citado. No desenvolvimento dessa pesquisa foram desenvolvidos programas computacionais para simulações dos filtros FIR, empregando a plataforma computacional matlabTM. Desta forma se pode empregar a janela de Kaiser no projeto de filtros FIR com fase linear, que consiste em determinar os coeficientes da resposta ao impulso que produz um resultado em frequência capaz de atender a um conjunto dado de especificações para o filtro. O estudo mostra também um estudo de caso através da simulação computacional. Com a implementação desse método podemos ter a visualização gráfica dos espectros de amplitude, frequência e fase. Os programas desenvolvidos para aplicação da janela de Kaiser em projeto de filtros digitais FIR certamente irá contribuir para o tratamento do sinal em tempo real, por exemplo, em aplicações envolvendo vídeo sob demanda (*video on demand*), além de auxiliar no ensino de disciplinas do curso de engenharia de telecomunicações, tais como processamento digital de sinais.

Palavras-chave: filtro digital, método das janelas, filtro não-linear, janela de Kaiser

1 INTRODUÇÃO

O processamento digital de sinais (PDS) teve seu marco inicial no século XVIII (DINIZ, 2004) e ainda hoje se apresenta com uma ferramenta moderna e muito útil nos mais diversos campos da ciência e tecnologia. Esse processamento normalmente preocupa-se com a representação dos sinais por sequências de números ou símbolos e estes por sua vez, serão processados em seguida. O propósito de tal processamento é estimar parâmetros característicos de um sinal ou transformar um sinal em alguma outra forma desejável. A natureza analógica dos sinais torna o PDS uma ferramenta atrativa e muito interessante ao manusear sinais, a princípio com características desconhecidas. Para que um sinal possa ser tratado de forma adequada ele precisa ser discretizado para que isso seja possível. Em outras palavras, obtém-se do sinal analógico uma sequência de amostras, que representarão o sinal. Um sinal discreto existe apenas para instantes específicos do tempo, diferentemente dos sinais contínuos (analógicos) e por isso podem ser armazenados e processados digitalmente (HAYKIN, 2001). Esse processo é chamado amostragem, e um sistema de processamento digital de sinais consistem em amostrar o sinal, realizar o processamento digital e reconstruir o sinal processado para obter analogicamente o resultado, como mostra a Figura 1.

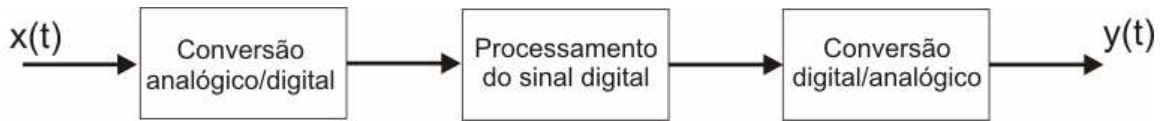


Figura 1 – Processamento digital de sinais analógicos

Em que, sejam $x(t)$ e $y(t)$ são funções analógicas de natureza desconhecida. O processamento comumente feito em sinais discretos é a operação conhecida como filtragem. Filtrar um sinal significa selecionar desse sinal quais frequências são desejadas, e descartar as demais (OPPENHEIM, 1999). O processo de filtragem é simples, facilmente implementável, e flexível. É possível obter um conjunto bastante significativo de resultados utilizando técnicas simples. Como exemplo tem-se a convolução que é uma operação muito utilizada em filtragem. Inúmeras são as aplicações do PDS nos campos da ciência e engenharia, tais como: biomédico, acústica, sonar, radar, sismologia, ciência nuclear, telecomunicações, entre muitas outras. Em aplicações práticas envolvendo a amostragem de sinais pode-se obter somente uma gravação finita do sinal. Isso resulta em uma forma de onda truncada que possui características espectrais diferentes do sinal original. Tal descontinuidade produz a perda da informação espectral original. Uma maneira simples de aumentar as características espectrais de um sinal amostrado é pela aplicação da técnica de janelas sobre o mesmo. Ao analisar uma sequência de dados finita através da transformada de Fourier ou outro método de análise espectral, o janelamento minimiza as margens de transição em formas de onda truncadas, reduzindo dessa forma a perda espectral. Existem várias razões para a utilização da técnica de janelas em projeto de filtros digitais para o tratamento de sinais. Algumas delas são:

- Definição da duração do período de observação do sinal;
- Redução da perda espectral;
- Separação de um sinal de pequena amplitude de um sinal de grande amplitude com frequências muito próximas umas das outras;

Neste artigo uma ferramenta didática para simulação de filtros digitais FIR utilizando a janela de Kaiser é proposta visando aplicações em cursos de graduação e pós-graduação como auxílio no estudo de disciplinas envolvendo tratamento de sinais. A seção 2 apresenta um estudo de um filtro digital com características não recursivas (FIR). O projeto de um filtro digital FIR através do método das janelas é mostrado na seção 3. As seções 4 e 5 mostram respectivamente os resultados das simulações dos filtros digitais FIR usando a janela de Kaiser, e as conclusões referentes a este trabalho.

2 TÉCNICA DE JANELAMENTO NO PROJETO DE FILTRO FIR DE FASE LINEAR

Com relação à resposta ao impulso, se um sistema for implementado através de uma equação de diferenças que não contenha termos recursivos, a resposta ao impulso deve ser finita para ser implementável. O termo recursivo ocorre quando a saída não realimenta a entrada (ver Figura 2) e este tipo de filtro é denominado FIR (do inglês *Finite Impulse Response* ou Resposta Finita ao Impulso).

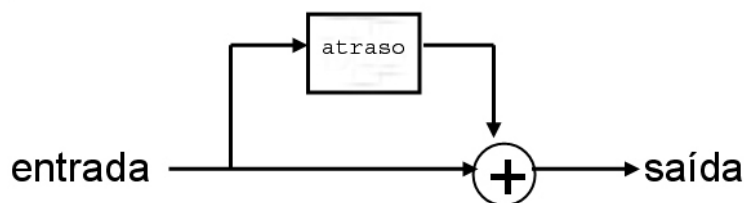


Figura 2 – Esquemático de um filtro FIR

Os Filtros com resposta ao impulso limitada possuem algumas vantagens em sua implementação. Pelo fato de serem finitos, filtros FIR sempre serão estáveis (HAYKIN, 2001). A resposta em frequência de um filtro causal de N -ésima ordem é:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-jn\omega} \quad [\text{Eq. 01}]$$

Em que $h[n]$ é a resposta ao impulso (delta de Dirac). O projeto de um filtro FIR consiste em determinar os coeficientes de $h[n]$ que produzam uma resposta em frequência capaz de atender a um conjunto dado de especificações para um filtro.

2.1 Janelamento

Aplicar uma janela a um sinal no domínio do tempo é equivalente a multiplicar o sinal pela função que representa a janela (HAMMING, 1998). Devido à multiplicação no domínio do tempo ser equivalente a convolução no domínio da frequência, o espectro de um sinal janelado é a convolução do espectro do sinal original com o espectro da janela. Dessa maneira, o janelamento modifica a forma do sinal tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. Uma forma bastante direta de obter um filtro de duração finita é truncando a resposta ao impulso infinita de um filtro ideal. Seja $h_d[n]$ a resposta ao impulso de uma mostra unitária de um filtro seletivo de frequência ideal de fase linear, então tem-se sua resposta em frequência:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega-\beta)} \quad [\text{Eq. 02}]$$

Como em geral o comprimento de $h_d[n]$ é infinito, é necessário encontrar uma aproximação FIR para $H_d(e^{j\omega})$. Usando o método das janelas, o filtro é projetado multiplicando-se a resposta à amostra unitária por uma janela,

$$h[n] = h_d[n]\omega[n] \quad [\text{Eq. 03}]$$

Em que $\omega[n]$ é uma janela de comprimento finito que é zero fora do intervalo $0 \leq n \leq N$ e é simétrica a seu ponto médio

$$\omega[n] = \omega[N - n] \quad [\text{Eq. 04}]$$

E o efeito resultante da janela sobre a resposta em frequência como relatado anteriormente pode ser visto com o teorema da convolução complexa (MONSON, 2006), dado por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad [\text{Eq. 05}]$$

Assim, a resposta em frequência ideal é suavizada pela transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) da janela, $W(e^{j\omega})$. Em Oliveira et al. (2007) pode-se encontrar alguns tipos de janelas comumente utilizados em projetos de filtros digitais não recursivos. O quanto a resposta em frequência de um filtro projetado com o método das janelas se aproxima da resposta desejada, $H(e^{j\omega})$, é determinado por dois fatores (OPPENHEIM, 1999), conforme exemplificado na Figura 3.

1º fator: Pela largura do lóbulo principal.

2º fator: Pela amplitude do lóbulo lateral de pico.

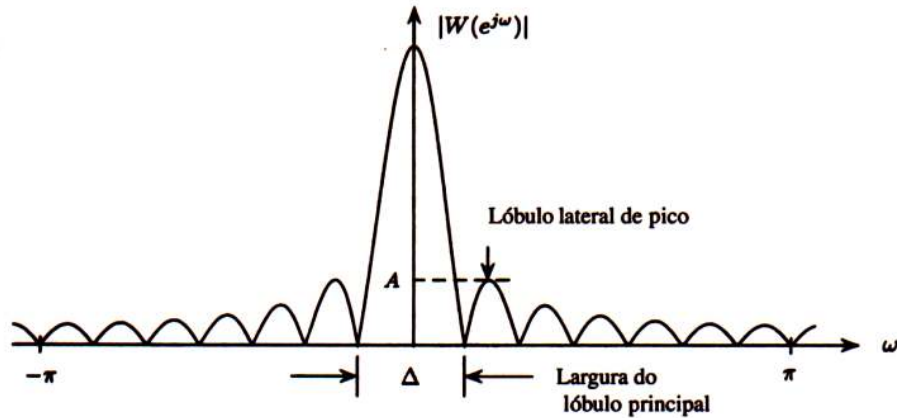


Figura 3 – A TFTD de uma janela típica, caracterizada pela largura do lóbulo principal e pela amplitude (A) de seus lóbulos laterais

3 JANELA DE KAISER

A janela desenvolvida pelo pesquisador Kaiser é uma janela flexível na qual sua forma pode ser modificada pelo ajuste de um parâmetro β . Dessa forma, dependendo da aplicação, pode-se modificar a forma da janela para controlar a perda espectral (MONSON, 2006). A [Eq. 06] define uma janela de Kaiser com N amostras.

$$w[n] = \frac{I_0 \left[\beta \left(1 - \left[1 - \frac{2n}{N-1} \right]^2 \right) \right]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad [\text{Eq. 06}]$$

Em que $\alpha = N/2$ e I_0 é uma função de Bessel de ordem zero modificada de primeira espécie que pode ser gerada facilmente usando uma expansão em série de potência, dado por

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^N \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad [\text{Eq. 07}]$$

O parâmetro β determina a forma da janela e dessa forma controla a relação entre a largura do lóbulo principal (Δ) e a amplitude do lóbulo lateral (A). Uma janela de Kaiser é ótima no sentido de possuir a maior parte da energia no lóbulo principal para uma dada amplitude de lóbulo lateral. A Tabela 1 ilustra o efeito de se alterar o parâmetro β .

Tabela 1 – Característica da janela de Kaiser em função do parâmetro β

Parâmetro β	Lóbulo lateral (dB)	Largura de transição ($N\Delta f$)	Atenuação da faixa de rejeição (dB)
2	-19	1,5	29
3	-24	2,0	37
4	-30	2,6	45
5	-37	3,2	54
6	-44	3,8	63
7	-51	4,5	72
8	-59	5,1	81
9	-67	5,7	90
10	-74	6,4	99

Há duas relações desenvolvidas empiricamente para a janela de Kaiser que facilitam o uso dessa janela no projeto de filtros digitais FIR (MITRA, 1998). A primeira estabelece uma relação entre o *ripple* da faixa de rejeição de um filtro passa-baixas, onde o parâmetro δ_s (dB) e o parâmetro β são dados respectivamente pelas equações [Eq. 08] e [Eq. 09].

$$\delta_s(\text{dB}) = -20\log(\delta_s) \quad [\text{Eq. 08}]$$

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(\delta_s - 8,7) & \text{se } \delta_s(\text{dB}) > 50 \\ 0,5842(\delta_s - 21)^{0,4} + 0,07886(\delta_s - 21) & \text{se } 21 \leq \delta_s(\text{dB}) \leq 50 \\ 0 & \text{se } \delta_s(\text{dB}) \leq 50 \end{cases} \quad [\text{Eq. 09}]$$

A segunda relaciona N com a largura de transição (Δf) e com a atenuação da faixa de rejeição δ_s dado por

$$N = \frac{\delta_s - 7,95}{14,36}, \quad \text{se } \delta_s > 21 \text{ dB} \quad [\text{Eq. 10}]$$

Pode-se observar que, se $\delta_s \leq 21$ dB, uma janela retangular, como abordado em Oliveira et al. (2007), poderá ser utilizada eficientemente, pois tem-se que $\beta = 0$ e $N = 0,9/\Delta f$.

4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DOS FILTROS PROJETADOS

Um filtro ideal embora não exista fisicamente, seu conceito é de fundamental importância em filtros seletivos em frequência, pois para certos tipos de análise ele nos mostra uma idéia do quanto um filtro projetado tende a se aproximar de um caso ideal. Um filtro passa-baixas ideal é um filtro que seleciona perfeitamente as componentes de baixas frequências do sinal de entrada e rejeita perfeitamente as componentes de altas frequências (OPPENHEIM, 1999).

O gráfico da Figuras 4 mostra o comportamento da janela de Kaiser para o projeto de um filtro digital FIR para as mesmas especificações de projeto utilizadas em Oliveira et al. (2007). As especificações são as seguintes: Comprimento da janela $M=50$, $\omega_p = 0,2\pi$; $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 0,25$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=50$ dB.

O gráfico da Figura 5 mostra o comportamento de uma janela de Kaiser para o projeto de um filtro digital FIR para as seguintes especificações: Comprimento da janela $M=50$, $\omega_p = 0,2\pi$; $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 0,25$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A = 81$ dB.

O resultado ilustrado na Figura 6 mostra o comportamento de uma janela de Kaiser para o projeto de um filtro digital FIR para as seguintes especificações: Comprimento da janela $M=50$, $\omega_p = 0,2\pi$; $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 0,25$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A = 25$ dB.

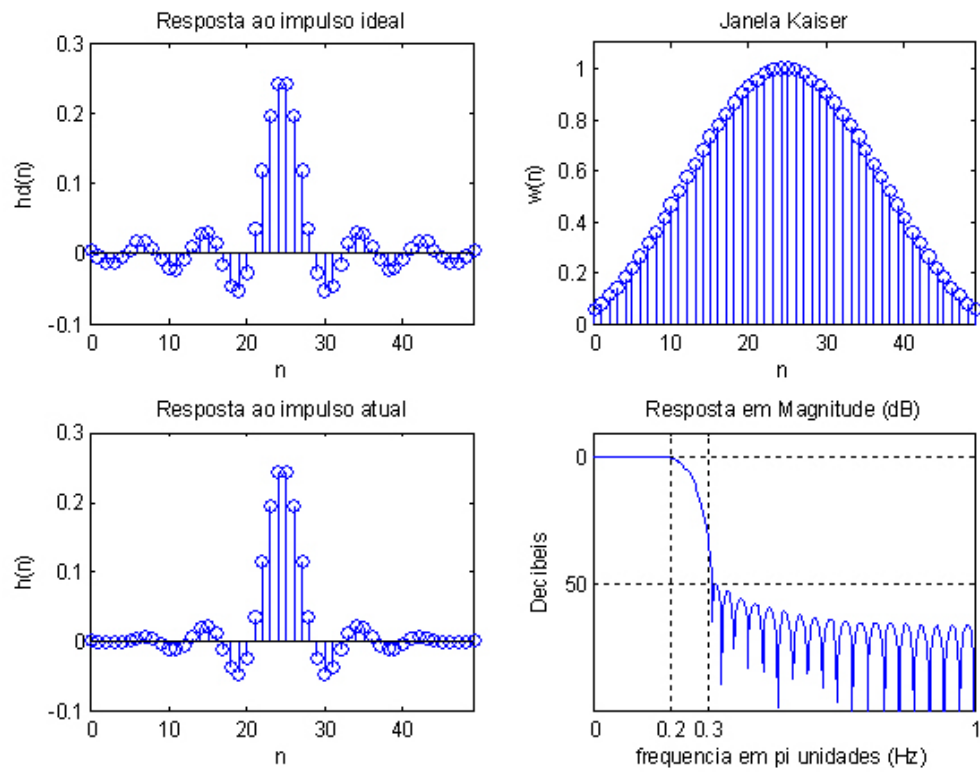


Figura 4 – Filtro FIR passa-baixas utilizando a janela de Kaiser com $M=50$, $\beta=4.534$

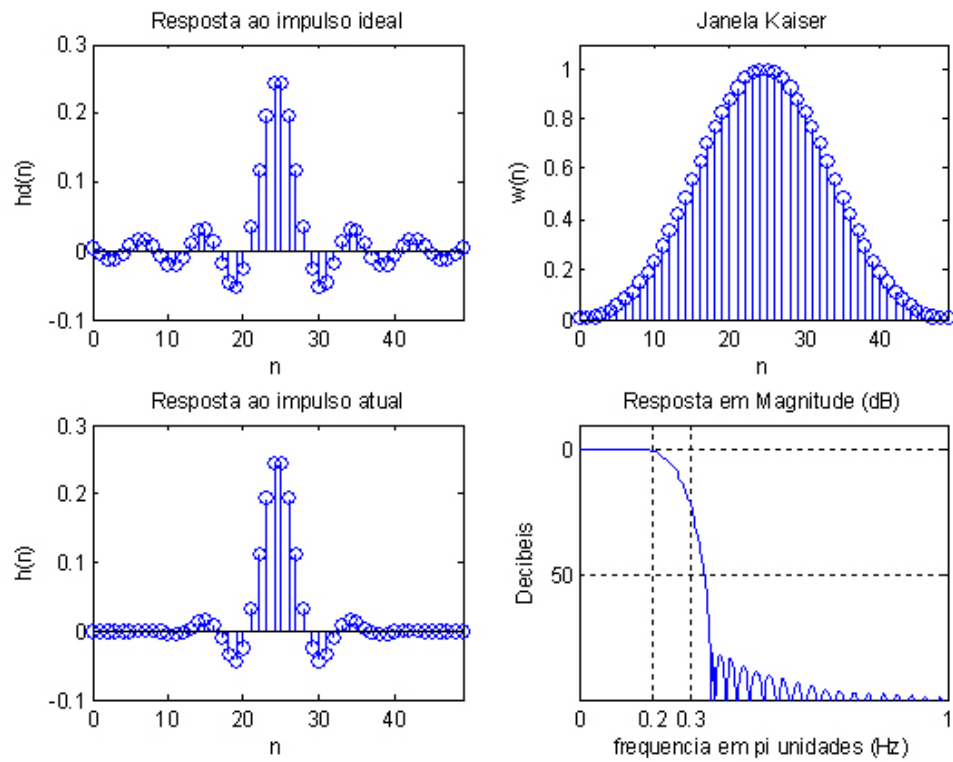


Figura 5 – Filtro FIR passa-baixas utilizando a janela de Kaiser com $M=50$, $\beta=8$

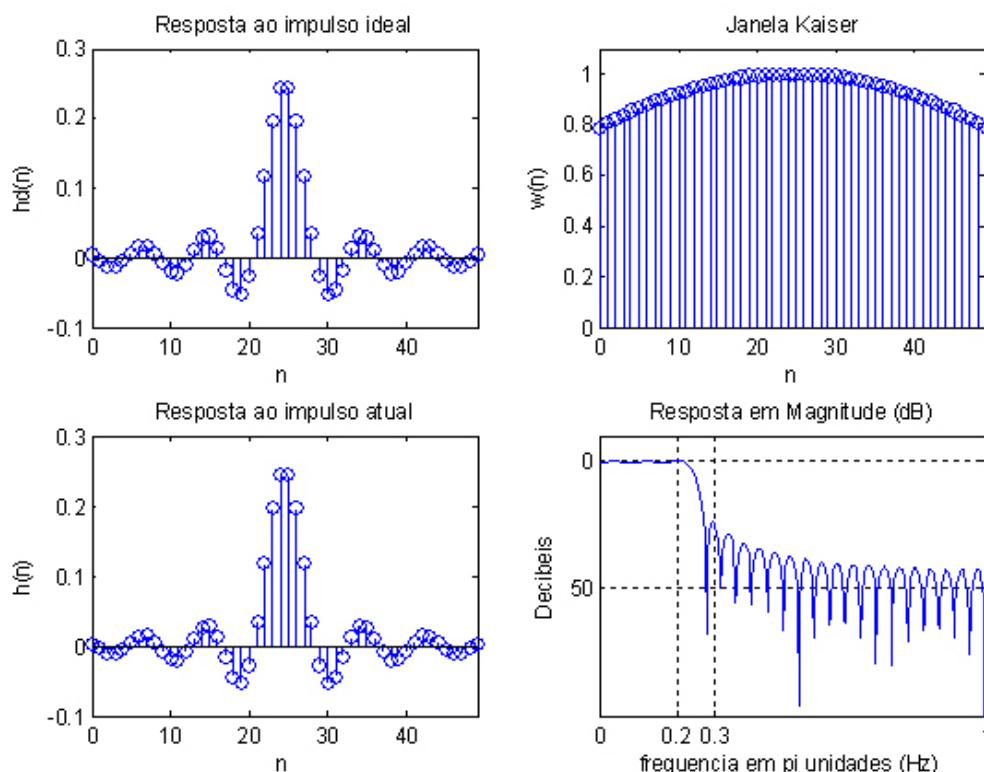


Figura 6 –Filtro FIR passa-baixas utilizando a janela de Kaiser com $M=50$, $\beta=1$

5 CONCLUSÃO

Neste artigo, foi apresentados o projeto e implementação no *software* MATLABTM, do filtro digital passa-baixas FIR fazendo uso do método das janelas em seu projeto, mais precisamente foi utilizado a janela de Kaiser. Esta janela é interessante, bastante utilizada e de fácil implementação em projetos de filtros digitais não recursivo, pois para uma dada especificação de projeto o parâmetro β controla a forma da janela empregada, garantido um lóbulo principal amplo em relação a outros tipos de janelas.

Tomemos como exemplo, os filtros projetados usando as janelas de Hammig e Blackman conforme mostrado em Oliveira et al. (2007). Para o projeto desses filtros uma janela de Kaiser com as mesmas especificações de projeto foi utilizada com muita eficácia e apresentou um perfeito funcionamento para uma atenuação da faixa de rejeição em torno de 50 dB (ver Figura 4), mostrando assim que uma janela de Kaiser pode muito bem substituir outras formas de janela apenas mudando o parâmetro β de forma adequada em função da atenuação requerida no projeto. A Figura 5 mostra o perfeito funcionamento de filtro FIR projetado com a janela de Kaiser para uma atenuação em torno de 81dB. O parâmetro β utilizado nesse caso foi 8 e com isso se pode observar um formato mais suave da janela com relação ao filtro projetado com β igual a 4,534 (ver Figura 4) e com β igual a 1 (ver Figura 6). A consequência disso são lóbulos laterais com menor energia concentrada, uma vez que a largura do lóbulo lateral de pico é determinada pela forma da janela e basicamente independente de seu comprimento.

A Figura 6 mostra o perfeito funcionamento de filtro FIR projetado com a janela de Kaiser para uma atenuação em torno de 25 dB. Neste caso observou-se que para pequenos valores de β a forma de janela aproxima-se daquela de uma janela retangular. Esta janela é boa para detecção de dois sinais com a mesma frequência, porém com amplitudes significativamente diferentes. Os gráficos obtidos como resultados desse trabalho, usando o *software* de simulação MATLABTM para a implementação de projeto de filtro digital FIR forneceram uma boa compreensão do seu comportamento em termos de espectro de amplitude, frequência, fase e de quanto esses filtros podem se aproximar de um suposto filtro ideal. Com a implementação dessa técnica podemos ter a visualização gráfica dos espectros de amplitude, frequência e fase. A aplicação da janela de Kaiser em projeto de filtros digitais FIR certamente contribuirá para o ensino de disciplinas do curso de engenharia de telecomunicações e em disciplinas que envolvam tratamento de sinais e imagens, tais

como, processamento digital de imagens e processamento digital de sinais, bem como aplicações que envolvam processamento de sinais em tempo real.

REFERÊNCIAS

DINIZ, P.S.R. Eduardo, A.B.S. SERGIO, L.N. **Processamento Digital de Sinais: Projeto e Análise de Sistemas**. 2. ed. São Paulo; Bookman, 2004.

HAYKIN, S. BARRY, V.V. **Sinais e Sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HAMMING, R.W. **Digital Filters**. 3. ed. New York, Dover publications inc, 1998.

MONSON, H.H. **Processamento Digital de Sinais**. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2006.

OLIVEIRA, E.E.C. **Estudo e implementação de Filtros Digitais FIR e IIR**. 2007. TCC (Trabalho de conclusão de curso) – GTEMA, Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba, João Pessoa, 2007.

OPPENHEIM, A. SCHAFFER, V. BUCK, J.R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2. ed. New Jersey; Prentice Hall, 1999.

OLIVEIRA, E. E. C.; CORREIA, S. E. N.; MENDONÇA, L. M. Implementação do filtro de resposta finita (FIR) não recursivo através do método das janelas. *In*: II CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, 1., 2007, João Pessoa. **Anais ...** João Pessoa: CEFET-PB. 1 CD-ROM.

MITRA, S.K. **Digital Signal Processing A computer-Based Approach**. McGraw-Hill, 1998.