

ANÁLISE DE PROBLEMAS ESTÁTICOS USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO DE RECIPROCIDADE DUAL

Brenno CORRÊA (1); Rubens GONÇALVES (2); André SANTANA (3)

(1) Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão, R 01 Cs 24 COHATRAC V, (98) 8805.7318, fax, e-mail:

brennospa@hotmail.com

(2) Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão, e-mail: rsoeirog@hotmail.com

(3) Universidade estadual de Campinas, e-mail: andre@fem.unicamp.br

RESUMO

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento, implementação e aplicações de uma formulação de elementos de contorno (MEC) para análise de problemas térmicos em materiais isotrópicos utilizando soluções fundamentais. A aproximação geométrica usa elementos lineares e quadráticos. A formulação desenvolvida é aplicada no cálculo de fluxo e temperatura de estruturas planas com calor gerado no domínio da estrutura. A presença explícita da integral de domínio devido a efeitos não lineares como forças de corpo é mantida na equação tornando obrigatório a discretização e integração através do método da reciprocidade dual (DRM). No método da reciprocidade dual (DRM) os termos de inércia são aproximados por uma série de funções de aproximações e coeficientes a determinar. Os resultados obtidos são comparados com resultados disponíveis na literatura e mostram uma boa concordância.

Palavras-chave: elementos de contorno, método da reciprocidade dual, materiais isotrópicos.

1. INTRODUÇÃO

As experiências mostram que quando existe um gradiente de temperatura em um corpo, existe uma transferência de energia da região de alta temperatura para a região de baixa temperatura. A energia é transferida por condução e a rapidez da transferência de energia por unidade de área é proporcional ao gradiente normal de temperatura.

$$\frac{q}{A} \approx \frac{dT}{dx} \quad [1]$$

Quando se insere certa constante de proporcionalidade k temos:

$$q = -k.A.\frac{dT}{dx} \quad [2]$$

$$q' = -k.\nabla T \quad [3]$$

onde q é a fluxo de transferência de calor e dT/dx é o gradiente de temperatura na direção do fluxo de calor. A constante positiva k se chama condutividade térmica do material, e o sinal de menos é necessário para que possa satisfazer o segundo princípio da termodinâmica, ou seja, o calor deverá fluir para temperaturas mais baixas figura 1.

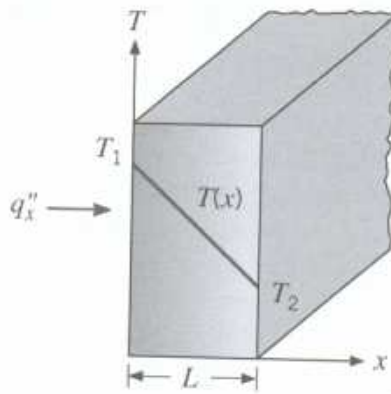


Figura 1: Direção do fluxo de calor

Em muitos problemas práticos o fluxo de calor unidimensional em estado estacionário (sem geração de calor) é dada por (HOLMAN, 1999):

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0 \quad [4]$$

Observe que está equação é a mesma que a equação (2) quando $q = \text{constante}$.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL

A característica central do método dos elementos de contorno é o emprego de determinadas soluções ao problema sob investigação. Em problemas de transferência de calor, a resposta térmica constante ao infinito é medida pela geração de energia interna unitária em um ponto fonte chamado de solução fundamental.

A solução fundamental é uma base da formação dos elementos de contorno. Corresponde à resposta da temperatura em um meio infinito quando a fonte de geração de calor é concentrada em um ponto. Sendo assim, a solução fundamental deve satisfazer:

A formulação de integrais de contorno para fluxo e temperatura a ser apresentada requer o conhecimento de soluções para problemas potenciais. Essas soluções são chamadas de solução fundamental potencial, e consistem para fluxo de calor e temperatura.

As soluções fundamentais para fluxo de calor e temperatura (KANE, 1994) são apresentadas nas equações (5) e (6) e são deduzidas com base nas equações (2) e (4).

$$T_{ik} = \frac{-1}{2\pi k} \ln(r) \quad [5]$$

$$q_{ik} = \frac{1}{2\pi r^2} (x_i n_i + x_k n_k) \quad [6]$$

onde r é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo, k é a condutividade térmica do material, n_i, n_k são vetores normais ao contorno.

Para problema de potencial, a relação recíproca entre o estado fundamental, cujas temperaturas são dadas por T_{ik} e os fluxos de calor dados por q_{ik} , e um estado genérico é dado por (BREBBIA, 1998):

$$c_{ik} u_k + \int_{\Gamma} T_{ik} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} q_{ik} t_k d\Gamma + \int_{\Omega} q_{ik} b_k d\Omega, \quad [7]$$

onde U_{ik} e T_{ik} são as soluções fundamentais de deslocamento e forças de superfície, respectivamente, c_{ik} é igual a $\frac{\delta_{ik}}{2}$ para contornos suaves, sendo δ_{ik} o Delta de Kronecker, b_k força de corpo, u_k e t_k são os vetores de deslocamento e forças de superfície respectivamente.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DA DUPLA RECIPROCIDADE

A solução da equação integral de contorno implica no cálculo da integral de domínio, $\int_{\Omega} q_{ik} b_k d\Omega$, equação (12), na qual b_k representa a força de corpo que age sobre o componente analisado. A forma mais simples de calcular essas integrais de domínio é discretizar a região em um conjunto de células internas e usar um método de integração, como o método de Gauss, para realizar a integração dentro de cada célula. No entanto, a discretização e a integração em células internas fazem com que o método dos elementos de contorno perca seu atrativo principal, que é a solução de problemas da mecânica do contínuo através da discretização e integração apenas no contorno do problema.

Apresentamos assim de forma sucinta, a formulação do Método da Dupla Reciprocidade, baseando-se em (PARTRIDGE, BREBBIA E WROBEL, 1992) e em (DOMINGUEZ, 1993).

3.1. Formulação do Método da Dupla Reciprocidade

O método da dupla reciprocidade pode ser utilizado em problemas de elasticidade estática para transformar integrais de domínio, resultantes da consideração de forças de corpo, em integrais de contorno equivalentes.

Assumindo a presença de forças de corpo, a equação integral de contorno a ser resolvida a partir de uma aproximação. A seguinte aproximação pode ser proposta para a força de corpo b_k ($k = 1, 2$):

$$b_k = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha_k^j \quad [8]$$

Nessa equação, os termos $\alpha_k^{(j)}$ são um conjunto de coeficientes a serem determinados (inicialmente desconhecidos) e os termos f^j são funções de aproximação, que dependem apenas da geometria do problema.

Uma solução particular \hat{u}_{mk}^j pode ser encontrada para satisfazer a equação de Navier como em (KANE,

1992):

$$G \cdot \hat{u}_{mk, ll}^j + \frac{G}{1-2\nu} \cdot \hat{u}_{lk, lm}^j = \delta_{mk} f^j \quad [9]$$

O número de soluções \hat{u}_{mk}^j utilizado deve ser igual ao número total de nós do problema. Se existirem N nós do contorno e L nós do domínio (nós internos), como pode ser visto na figura 2, existirão (N+L) valores de \hat{u}_j .

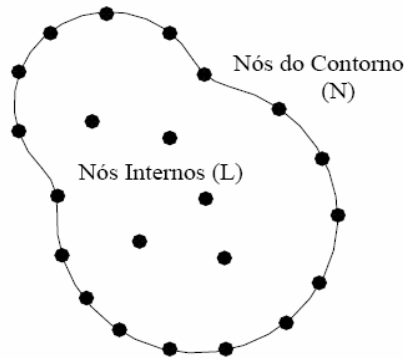


Figura 2: Nós do contorno e internos

Substituindo as equações [8] e [9] na equação [10] e aplicando o princípio da reciprocidade dual para a integral de domínio resultante, obtém-se:

$$c_{ik} u_k = \int_{\Gamma} U_{ik} t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ik} u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \left(c_{ik} \hat{u}_{mk}^{ij} + \int_{\Gamma} T_{ik} \hat{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ik} \hat{t}_{mk}^j d\Gamma \right) \quad [10]$$

sendo \hat{t}_{mk}^j as forças de superfície correspondentes às soluções particulares de deslocamento \hat{u}_{mk}^j .

Após a aplicação desse procedimento, a equação [10] não apresenta mais nenhuma integral de domínio. Esse é o procedimento que dá nome ao Método da Dupla Reciprocidade, pois o princípio de reciprocidade foi aplicado em ambos os lados da equação [19], a fim de se levar todas as integrais para o contorno.

Deve-se notar que uma vez que \hat{u} e \hat{t} são funções conhecidas, que dependem apenas da geometria dos elementos e dos nós internos, não há necessidade de aproximar suas variações dentro de cada elemento usando funções de interpolação local e valores nodais, como é feito para U e T .

3.1.1. Função de Aproximação f

A função de aproximação f e as soluções particulares \hat{u} e \hat{t} usadas no método da dupla reciprocidade (MDR) não são limitadas pela formulação. A única restrição é que a matriz que será formada pela função f não seja singular.

No intuito de definir essas funções, é de costume propor uma expressão para f e então calcular \hat{u} e \hat{t} usando a equação [9].

Existem várias propostas para o tipo de função f , tais como as séries trigonométricas, os elementos do triângulo de Pascal e a distância r utilizada na definição da solução fundamental.

Nesse trabalho, será utilizada a função do tipo r , que foi primeiramente adotada por (NARDINI E BREBBIA, 1982) e depois pela maioria dos pesquisadores desse método por ser a alternativa mais simples e mais precisa. Essa função é baseada na série:

$$f = 1 \pm r^2 \pm r^3 \pm \dots \pm r^m \quad [11]$$

Em princípio qualquer combinação dos termos da série pode ser escolhida. Na aplicação do DRM nesse trabalho, a função $f(r)$ adotada será:

$$f(r) = 1 + r \quad [12]$$

$$f(r) = 1 + r + r^2 \quad [13]$$

$$f(r) = 1 + r + r^2 + r^3 \quad [14]$$

E serão consideradas as funções \hat{u} e \hat{q} (PARTRIDGE, 1992) dadas por:

$$\hat{u}_{mk} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad [15]$$

$$\hat{q}_{mk} = \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} \right) \quad [16]$$

3.1.2. Nós Internos

Os nós internos não fazem parte de nenhum elemento, e apenas suas coordenadas são necessárias como dado de entrada.

A definição de nós internos geralmente não é uma condição necessária para obter a solução no contorno. No entanto, a solução será mais precisa se uma determinada quantidade de nós internos for utilizada.

4. FUNÇÕES DE FORMA

Como enfatizado por (KANE, 1994), o passo fundamental para o desenvolvimento do método dos elementos de contorno é o abandono da aspiração por uma solução exata do problema. Este requisito é substituído por outra estratégia: encontrar uma solução aproximada de alta qualidade em um número finito de pontos no contorno do problema, os nós.

As funções de interpolação no espaço utilizada neste trabalho (funções de forma) são as funções de forma quadráticas e constantes lineares.

4.1. Elementos Quadráticos

Funções de forma quadrática permitem o modelamento de elementos curvos. As temperaturas e fluxos são representadas em um elemento quadrático padrão como:

$$t(\xi) = \phi_1 t_1 + \phi_2 t_2 + \phi_3 t_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad [17]$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad [17]$$

onde as funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1); \quad [18]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2); \quad [19]$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1). \quad [20]$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento figura 3.

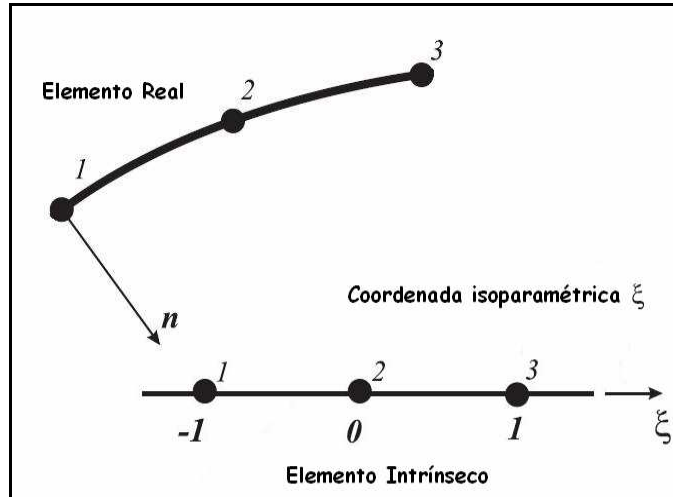


Figura 3: Elemento Quadrático Contínuo

4.2. Elementos Lineares

Os valores de u e q podem ser definidos a qualquer ponto no elemento em termos dos valores nodais deles e duas funções lineares interpoladas ϕ_1 e ϕ_2 , que são determinados em termos da coordenada homogênea ξ :

$$t(\xi) = \phi_1 t_1 + \phi_2 t_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad [21]$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad [22]$$

onde as duas funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad [23]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad [24]$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento figura 4.

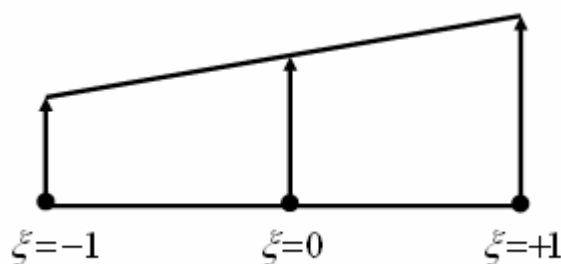


Figura 4: Elemento Linear

5. RESULTADOS

Considere o modelo figura 6 de uma chapa de aço inox quadrada, isolado na sua base inferior e superior $\Phi_1 = \Phi_2$, e submetida a uma diferença de temperatura $\Delta T = 300K$ e uma condutividade térmica $k = 18W/m.K$. A solução do problema será considerada para uma malha refinada de 40 elementos no contorno e 81 pontos internos.

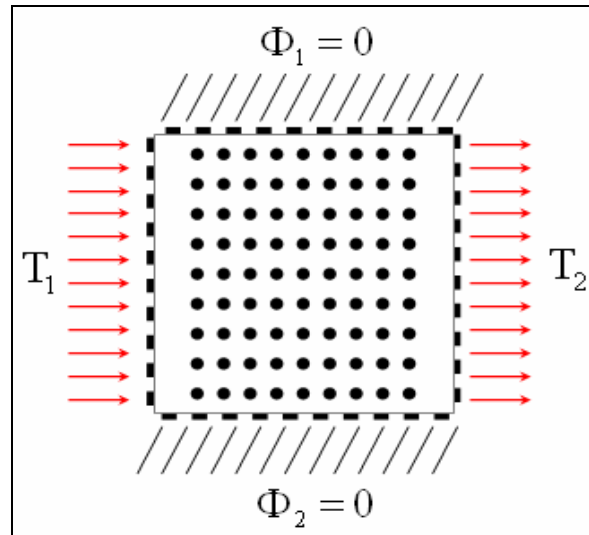


Figura 5: Modelo de chapa de aço inox quadrada discretizada.

A distribuição de temperatura dessa chapa de aço inox pode ser vista através do mapa de cores de temperatura na figura 6.

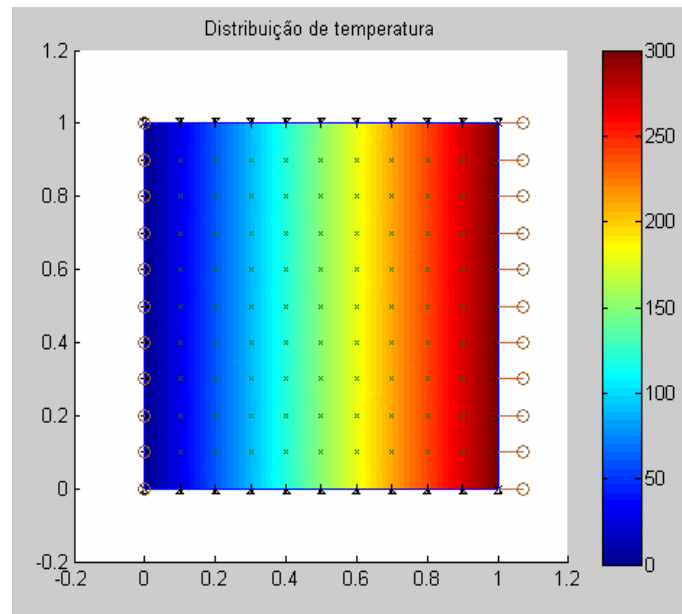


Figura 6: Mapa de cor da distribuição de temperatura.

5.1.1. RESULTADOS NUMÉRICOS 1

Os valores para temperatura em alguns pontos internos foram analisados e comparados usando-se elementos lineares e elementos quadráticos, obtemos os seguintes resultados tabela 1.

Tabela 1.1: Temperatura em pontos do contorno utilizando-se elementos lineares e quadráticos.

Variável	Nó	X	Y	Linear	Quadrático	Diferença
Temp. (K)	10	0.1	0.2	29,9999	30,4362	0,4363
	11	0.2	0.2	59,9999	60,0493	0,0494
	12	0.3	0.2	89,9998	90,3920	0,3992
	13	0.4	0.2	119,9997	120,3025	0,3028
	14	0.5	0.2	149,9996	150,4356	0,4360

5.1.2. CONCLUSÃO 1

Verifica-se que a diferença de temperatura usando os elementos lineares ou quadráticos é quase desprezível.

5.2.1. RESULTADOS NUMÉRICOS 2

Considerando uma carga de calor $q = 20W / m^2$ é aplicada no domínio da chapa de aço inox podemos comparar os resultados de temperatura e fluxo no contorno e ponto interno com carga no domínio e sem carga no domínio usando elementos lineares tabela 2. Foi considerada uma função $f(r) = 1 + r$.

Tabela 2: Temperatura e Fluxo em pontos do contorno e pontos internos usando elementos lineares.

Variável	Nó	X	Y	Sem Carga	Com Carga	Diferença
Temp. (K)	6	0.5	0	150,0000	150,1391	0,1391
	16	1	0.5	300	300	0
	26	0.5	1	150,0000	150,1391	0,1391
	36	0	0.5	0	0	0
	41	0.5	0.5	149,9996	150,1387	0,1391
Fluxo (W/m.K)	6	0.5	0	0	0	0
	16	1	0.5	0	0	0
	26	0.5	1	-5400	-5390	-10
	36	0	0.5	-5400	-5390	-10
	41	0.5	0.5	0	0	0

5.2.2. CONCLUSÃO 2

As cargas no domínio influem bem pouco nos valores de temperatura e fluxo e podem ser desprezadas como a maioria dos autores Kane (1994).

Os valores da temperatura em pontos internos para a função $f(r)$, sendo que qualquer combinação da série pode ser escolhida tabela 3.

Tabela 3: Temperatura pontos internos para diferentes funções $f(r)$.

Variável	Nó	X	Y	$f = 1 + r$	$f = 1 + r^2$	$f = 1 + r^2 + r^3$
Temp. (K)	38	0.2	0.5	60.0889	60.0546	59.9766
	40	0.4	0.5	120.1332	120.0821	119.9648

	42	0.6	0.5	180.1330	180.0820	179.9646
	44	0.7	0.5	240.0885	240.0542	239.9761

Verifica-se que a variação temperatura interna é pequena para diferentes funções $f(r)$.

5.3.1. RESULTADOS NUMÉRICOS 3

Usando a função $f(r) = 1 + r + r^2 + r^3$ e comparando os resultados para temperaturas em pontos internos com diferentes cargas tabela 4.

Tabela 4: Temperatura em pontos internos considerando diferentes cargas aplicadas no domínio.

Variável	Nó	Y	Y	$q = 0W / m.K$	$q = 20W / m.K$	$q = 50W / m.K$	$q = 80W / m.K$
$T_{Interna}$	38	0.2	0.5	59.9999	59.9766	59.9416	59.9066
	40	0.4	0.5	119.9997	119.9648	119.9124	119.8599
	42	0.6	0.5	179.9996	179.9646	179.9122	179.8598
	44	0.7	0.5	239.9994	239.9761	239.9412	239.9062

5.3.2. CONCLUSÃO 3

Pode-se concluir que a variação da temperatura interna é quase desprezível para diferentes fontes de carga aplicadas no domínio e por esse motivo é possível desprezar seus efeitos. Da mesma verificamos q a função $f(r)$ adotada por (Domingues, 1993) apresenta resultados precisos e não apresentou variações consideráveis expandindo a série como se podia imaginar.

REFERÊNCIAS

- Azevedo, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- Boley, B. A. and Weiner, J. H. **Theory of Thermal Stresses**. Krieger Publ., Malabar Florida, Reprint, 1985
- Brebbia e Dominguez. **Boundary Element Method: an Introductory Course**. CMP Publications, 1994.
- Brebbia, C.A. **The Boundary Element Methods for Engineers**. London, Pentech Press, 1978.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C, e Wrobel, L.C. **Boundary Element Echniques - Theory dan applications in Engineering**. Springer-Verlag, 1984.
- Holman, J.P. **Transferência de Calor**. CECSA, 1999.
- Kane, James H. **Boundary element analysis in engineering mechanic**. 1994.
- Kane, J. **Boundary Element Analisys in Engineering Contiuum Mechanics**. Prentice Hall, 1993.
- Krieth, F. **Principles of Heat Transfer Edition**. 3 Ed. New York; Intext Educational Publ., 1973.
- Larry Wall. **Programming Perl**, O'Reilly & Associates, 1996.

Partridge, P. W., Brebbia, C. A., e Wrobel, L. C. **The dual reciprocity boundary element method.** **Computacional Mechanics Publications.** Southampton, Boston, 1992.

Segadães Tavares, A. **Análise Matricial de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.** Lisboa; Curso 129, 1973

Tymoshenko, S. P.e Goodier, J. N. **Theory of elasticity.** 3.ed. Tokio; McGraw-Hill, 1970.