

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON PARA LINHAS DE MICROFITAS ACOPLADAS

Rayann Pablo de Alencar AZEVEDO; Ícaro Bezerra de Queiroz ARAÚJO; Eliel Poggi dos SANTOS; Paulo Henrique da FONSECA SILVA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Av. 1º de Maio, 720 - Jaguaribe CEP: 58.015-430 - João Pessoa / PB, e-mails: rayannpablo@ieee.org, icarobqa@ieee.org, elielpoggi@ieee.org, henrique@ifpb.edu.br

RESUMO

Este trabalho aborda aplicações de métodos numéricos para a engenharia elétrica, especificamente na área de telecomunicações, onde muitas vezes as soluções dos problemas são impossíveis ou muito complexas de serem obtidas analiticamente. Em particular, este trabalho tem por objetivo expor, didaticamente, a importância do estudo de técnicas numéricas para solucionar problemas que envolvem equações diferenciais parciais a partir de condições de contorno pré-estabelecidas. Este trabalho consistiu em realizar uma pesquisa bibliográfica, inicialmente, e logo em seguida foram feitas aplicações e simulações do comportamento eletromagnético com recursos computacionais disponíveis.

São apresentadas nesse, duas situações – permissividade elétrica do substrato igual a do meio e outra diferente – em que podem ser encontradas ao se trabalhar com linhas de transmissão de microfitas. É analisado neste artigo a distribuição de potencial elétrico e de campo elétrico e o nível de acoplamento dos campos elétricos.

Palavras-chave: Análise Numérica, Equação de Laplace, Equação de Poisson, Métodos das diferenças Finitas.

INTRODUÇÃO

A Análise Numérica é o campo da Matemática que se dedica ao estudo de algoritmos usados para a solução de diferentes tipos de problemas de matemática contínua (GERALD; GREEN; WHEATLEY, 2003). O objetivo específico da Análise Numérica é o projeto e a análise de técnicas que fornecem soluções aproximadas, porém precisas, para problemas cujas soluções analíticas são difíceis ou impossíveis de se determinar (CHAPRA, 2004; HOFFMAN, 1992).

A técnica numérica utilizada neste artigo é o método das Diferenças Finitas. Essa escolha deve-se a dois motivos. Primeiramente, esta técnica possibilita resolver situações que abrangem equações diferenciais parciais (EDPs), que são equações envolvendo uma função de variáveis independentes e suas derivadas. Assim, essa viabilidade permite resolver equações como as de Poisson e as de Laplace. Em segundo lugar, por estas duas últimas equações terem uma ampla utilidade para eletrostática, engenharia mecânica e física teórica.

O método das Diferenças Finitas é utilizado numa situação onde a função é caracterizada por uma EDP, tais como as equações de Laplace e Poisson, pela delimitação de um domínio e por condições de contorno e/ou condições iniciais. De forma que através desta técnica numérica e com auxílio de recursos computacionais disponíveis foi possível simular o comportamento do campo elétrico \vec{E} e do potencial elétrico V numa determinada região.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para se determinar o campo elétrico ou potencial elétrico, em muitos casos, são utilizados a Lei de Coulomb ou a Lei de Gauss quando a distribuição de cargas é conhecida, ou utilizar a Eq. 01 quando se é conhecido o potencial V em uma região. No entanto, na maioria das situações práticas, tais parâmetros não são conhecidos.

$$\vec{E} = -\nabla V \quad [\text{Eq. 01}]$$

Então para essas situações, onde são apenas conhecidas as condições eletrostáticas em algumas fronteiras numa determinada região e que se deseja obter o campo elétrico \vec{E} e o potencial elétrico V ao longo de toda a região em questão, são utilizados usualmente a Equação de Poisson (Eq. 02) ou a de Laplace (Eq. 03) ou, ainda, o método das imagens, o qual não será discutido neste trabalho.

$$\nabla^2 V = -\rho_v / \varepsilon \quad [\text{Eq. 02}]$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad [\text{Eq. 03}]$$

Onde ρ_v é a densidade volumétrica de carga e ε é a permissividade elétrica.

A Equação de Poisson é obtida a partir de da Equação de Gauss (Eq. 04), que corresponde a uma das quatro equações de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho_v \quad [\text{Eq. 04}]$$

Fazendo a substituição da Eq. 01 na Eq. 04, obtém-se a seguinte equação:

$$\nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = \rho_v \quad [\text{Eq. 05}]$$

Onde, para um meio homogêneo, a Eq. 05 equivale a Equação de Poisson (Eq. 02).

Nos casos onde a densidade volumétrica de carga for nula, a Eq. 02 será igual à equação Eq. 03 que passará a ser chamada de Equação de Laplace, que é um caso particular da Equação de Poisson (Eq. 02).

O método das diferenças Finitas trata-se de um método de resolução de problemas que englobam equações diferenciais parciais. Tais problemas são definidos univocamente por três características: seja por uma equação diferencial parcial, como é o caso das equações de Laplace ou de Poisson; seja pela delimitação de um domínio; ou até mesmo por condições de contorno e/ou por condições iniciais.

Uma equação de Laplace ou de Poisson pode ser resolvida pelo método das diferenças finitas em três etapas. O primeiro passo consta em dividir o domínio em uma grade de nós como pode ser visto na Figura 1. Os nós da grade da extremidade da região são prefixados pela condição de contorno e são chamados de nós fixos, enquanto os nós internos são denominados de pontos livres.

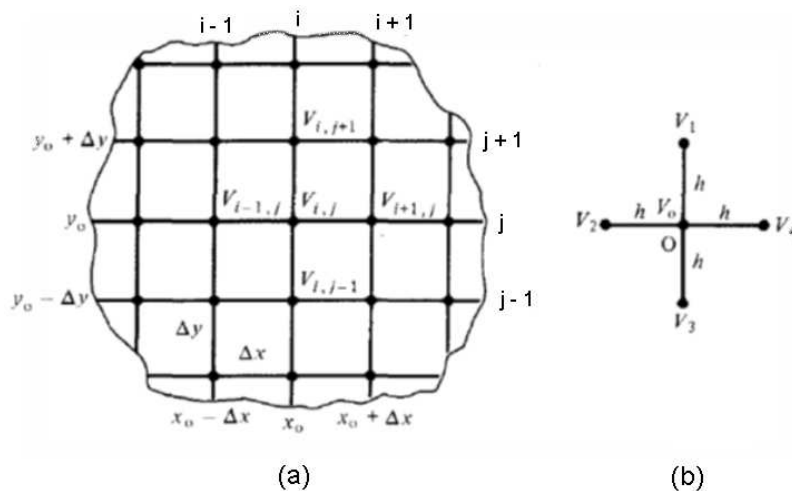


Figura 1 – Diagrama de solução do método das diferenças finitas: (a) discretização do domínio; (b) nós empregados nas aproximações em diferenças finitas a cinco nós.

O segundo passo consiste em obter aproximações por diferenças finitas para equação diferencial de Poisson. E a partir daí, determinar o potencial em todos os pontos livres. Logo, lembremos que a Equação de Poisson está representada na Eq. 02. E para um domínio bidimensional, conforme a Figura 1(a), ρ_v é substituído por

ρ_s (densidade superficial de carga), e $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. Então:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad [\text{Eq. 06}]$$

Da definição da derivada de $V(x,y)$ em um ponto (x_0, y_0) ,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad [\text{Eq. 07}]$$

De forma que, Δx seja um incremento suficientemente pequeno ao longo de x . Para a derivada segunda basta aplicar o procedimento anterior a V' , obtendo assim a expressão na Eq. 02.

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \approx \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad [\text{Eq. 08}]$$

Vale à pena salientar que as derivadas, primeira e segunda, em relação a y serão semelhantes às derivadas em relação a x . Logo,

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{y=y_0} \approx \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad [\text{Eq. 09}]$$

Então, fazendo $\Delta x = \Delta y = h$ e substituindo as equações, Eq. 08 e Eq.09, na equação Eq. 06, temos:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} \left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{h^2 \rho_s}{\epsilon} \right) \quad [\text{Eq. 10}]$$

Onde h é o passo ou o incremento da malha. E a equação Eq. 10 é a aproximação por diferenças finitas da Equação de Poisson. Assim, caso o domínio seja livre de cargas, $\rho_s = 0 \text{ C/m}^2$, tem-se a aproximação por diferenças finitas da Equação de Laplace, como é mostrado na equação Eq. 11.

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \quad [\text{Eq. 11}]$$

2. DESCRIÇÃO DA PROPOSTA

Este trabalho tem por proposta divulgar o estudo realizado da análise numérica aplicada ao estudo do eletromagnetismo. Por questão didática, são discutidos problemas, onde suas soluções são os mapeamentos dos potenciais para as dadas regiões.

Primeiramente, nele será exposta uma análise do campo elétrico e a distribuição do potencial para uma linha de transmissão de microfita, para onde o meio a qual será analisado apresenta uma permissividade elétrica relativa igual a 1.

Em seguida também será feito algo semelhante que o primeiro, mas a resolução da Equação de Laplace deverá levar em conta agora, a existência de dois meios com permissividades elétricas diferentes, uma igual a 1 e a outra igual a 130 – valores relativos.

Vale salientar que as linhas de transmissão de microfita estão estruturadas segundo a Figura 2 e são informados, a seguir, os valores numéricos para as dimensões: altura do substrato: 10; comprimento da linha de alimentação; posição das microfita: $h = 10$; $20 \leq x \leq 40$; e $60 \leq x \leq 80$.

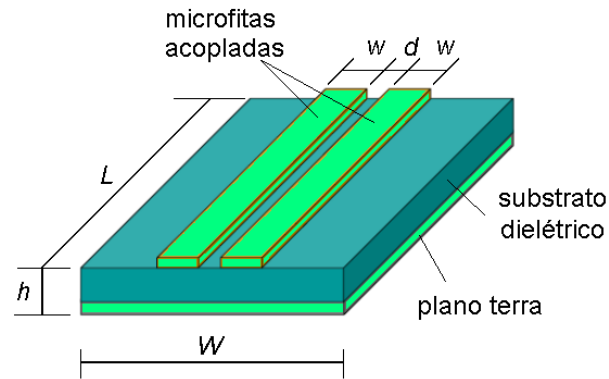


Figura 2 – Leiaute da linha de alimentação com duas microfita acopladas

3. METODOLOGIA

A metodologia aplicada para o desenvolvimento deste artigo consistiu nas etapas ilustradas na Figura 3: definição do problema, modelagem matemática, resolução numérica e análise de erros.

A definição do problema consistiu em determinar as informações primordiais para o desenvolvimento do estudo. Ou seja, nesta etapa é onde se define como é o meio onde será realizado o estudo, quais os valores de contorno a qual se deve seguir e o que se deseja obter.

Já durante a modelagem matemática, foi feito a interpretação dos dados fornecidos na definição do problema, isto é, nesta fase foi definida qual equação utilizar e qual o tipo da condição contorno.

Após isso, foi realizada a resolução numérica, que consistiu na aplicação de métodos numéricos. E para isso, foi feita a implementação computacional com o programa MATLAB®, que é baseado numa linguagem de alto nível, possibilitando assim, o desenvolvimento do algoritmo numérico e a visualização de resultados com desempenho e rapidez.

Enfim, a análise de erros consistiu na comparação de respostas teóricas obtidas em bibliografias, com o resultado obtido através dos métodos numéricos utilizados.

O método escolhido para o desenvolvimento deste trabalho foi o Método das Diferenças Finitas.

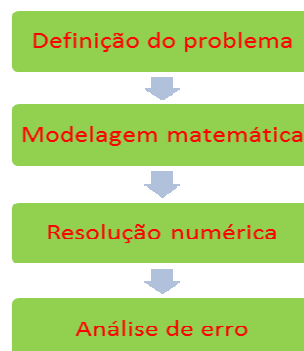


Figura 3 – Diagrama em blocos ilustrando a metodologia utilizada neste trabalho.

4. RESULTADOS

A Figura 4 mostra como se dá a distribuição tridimensional do potencial elétrico de duas linhas de transmissão de microfita acopladas e suspensas no ar, onde a permissividade relativa é igual a 1. Na Figura 5 são mostrados os resultados para as linhas equipotenciais e para a distribuição do campo elétrico na região estudada. A distribuição do campo elétrico é representada através de setas.

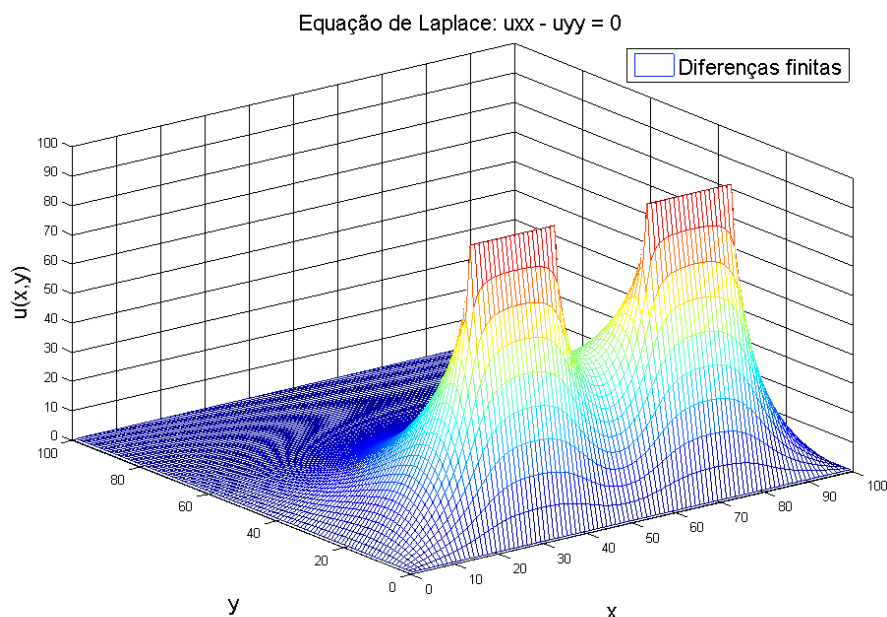


Figura 4 – Distribuição tridimensional do potencial elétrico para uma permissividade elétrica do substrato igual ao do meio.

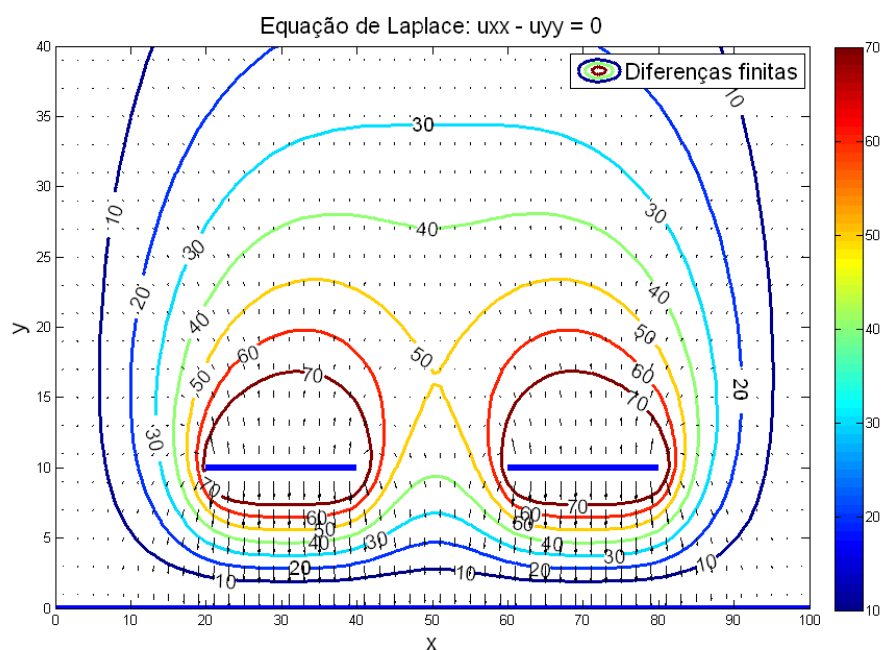


Figura 5 – Linhas equipotenciais e distribuição do campo elétrico para uma permissividade elétrica do substrato igual ao do meio.

N Figura 6 é apresentada a distribuição do campo elétrico e a distribuição do potencial na região por um sistema de cores, em um gráfico bidimensional.

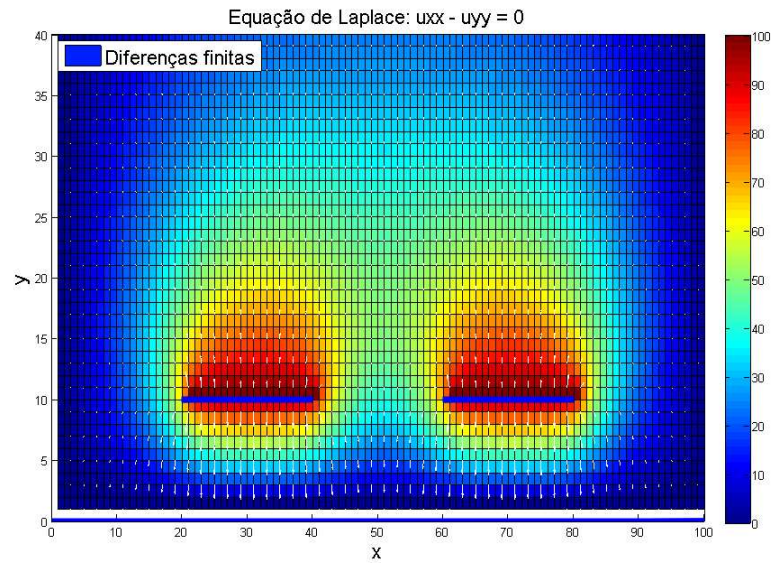


Figura 6 – Distribuição do campo elétrico e do potencial elétrico para uma permissividade elétrica do substrato igual ao do meio.

Já os resultados da solução para o segundo problema proposto são apresentados nas Figuras 7, 8, 9. Na Figura 7, é mostrado a distribuição tridimensional do potencial elétrico da linha de transmissão de microfita, onde o material do substrato é cerâmica, apresentando assim uma permissividade elétrica relativa de 130. Já na Figura 8, são apresentadas as linhas equipotenciais a cada década e a distribuição do campo elétrico \vec{E} . E por fim, a Figura 9 exhibe a distribuição do campo elétrico e a distribuição do potencial na região por um sistema de cores, em um gráfico bidimensional.

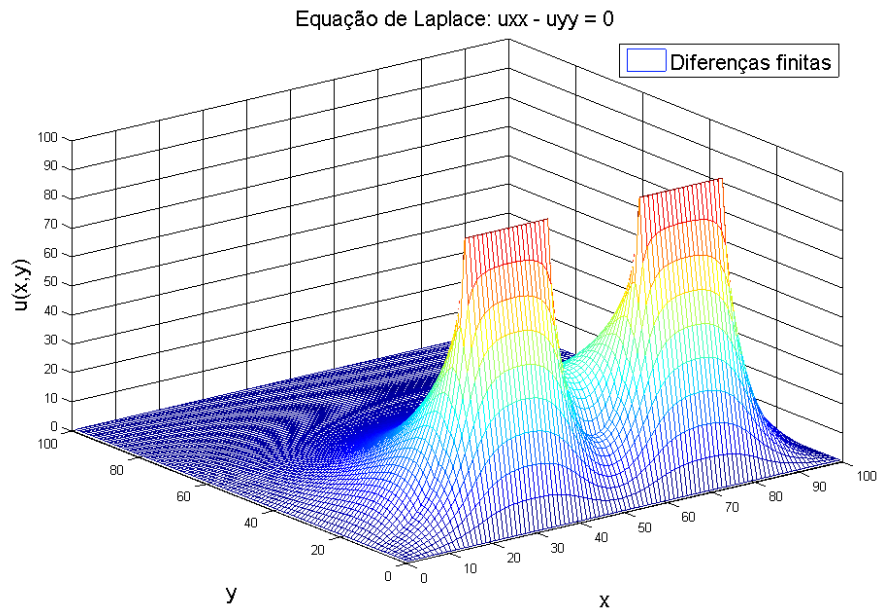


Figura 7 – Distribuição tridimensional do potencial elétrico para uma permissividade elétrica do substrato 130 vezes maior que a do meio ($\epsilon_{r1}=1$ e $\epsilon_{r2}=130$).

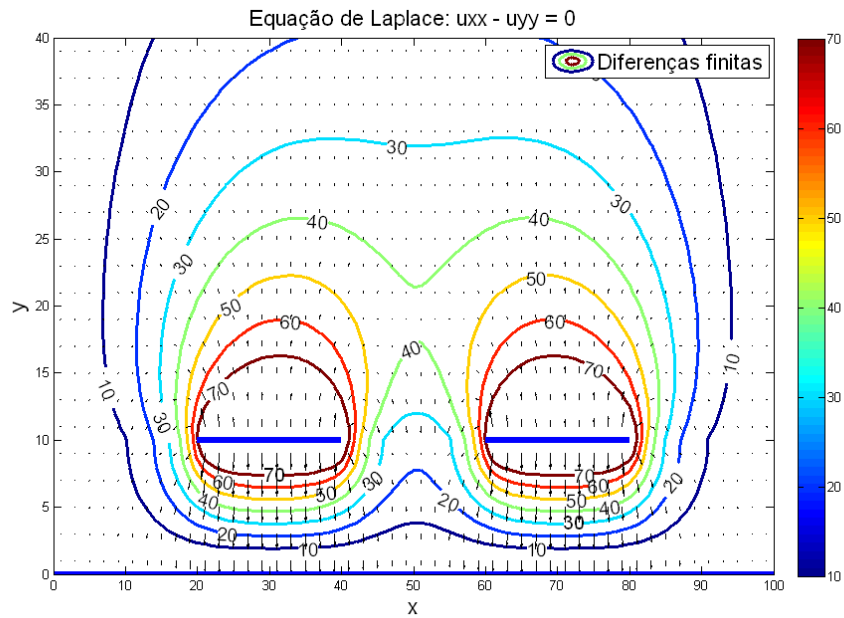


Figura 8 – Linhas equipotenciais e distribuição do campo elétrico para uma permissividade elétrica do substrato 130 vezes maior que a do meio ($\epsilon_{r1}=1$ e $\epsilon_{r2}=130$).

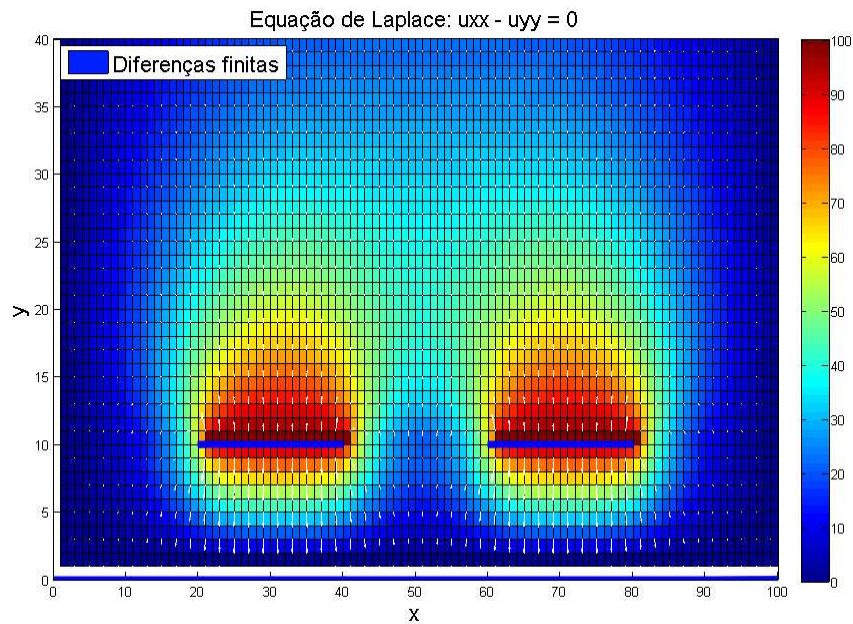


Figura 9 – Distribuição do campo elétrico e do potencial elétrico para uma permissividade elétrica do substrato 130 vezes maior que a do meio ($\epsilon_{r1}=1$ e $\epsilon_{r2}=130$).

Com base nos resultados obtidos por meio de simulação, utilizando Matlab, e com base nos estudos bibliográficos, pode-se dizer que as linhas de campo não estão totalmente contidas na região do substrato e que elas se acoplam de uma linha de transmissão para outra.

No entanto, observa-se que quando se estuda com um meio uniforme, ou seja, com uma mesma constante dielétrica, há um maior acoplamento de campos elétricos numa determinada região, semelhante a um caso ideal com $\epsilon_r = 1$. Para o caso de um meio heterogêneo, ou seja, apresentam constantes de permissividade elétrica diferentes, pode-se observar uma diminuição de acoplamentos de campos elétricos. Concluindo assim, que quanto maior for a diferenças dos valores das constantes dielétricas menor será o acoplamento dos campos elétricos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Método das Diferenças Finitas implementado em MATLAB[®] permitiu visualizar o comportamento do potencial elétrico e do campo elétrico em linhas de transmissão de microfita. Verificou-se que as linhas de campo não estão totalmente contidas na região do substrato e elas se acoplam de uma linha de transmissão para outra. Pode-se perceber que quanto maior forem as diferenças dos valores das constantes dielétricas menor será o acoplamento dos campos elétricos. É coerente a aplicação desse método em diversos outros tipos de aplicações que envolvam EDPs, como a equação de Poisson.

6. AGRADECIMENTOS

Agradecemos pelo apoio e financiamento do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do IFPB – PIBICT/IFPB e pelo MEC/SESu/PET Engenharia Elétrica IFPB.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GERALD, C. F., GREEN, C. J., WHEATLEY, P. O. *Applied numerical analysis*. 7.ed. Massachusetts: Addison Wesley, 2003. 624 p.

CHAPRA, S. C. *Applied numerical methods with matlab for engineering and scientists*. 2ed. New York: McGraw-Hill, 2004. 550 p.

SODRÉ, U. **Equações diferenciais parciais**. Disponível em:

<<http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pdfs/edp.pdf>> Acesso em: 13 de Julho

Equação de Poisson. Disponível em:

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_de_Poisson> Acesso em: 13 de Julho

Equação de derivadas parciais. Disponível em:

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_de_derivadas_parciais#Equa.C3.A7.C3.A3o_de_Poisson> Acesso em: 13 de Julho

BOOTON Jr., R. C. Finite-Difference Method. In: BOOTON Jr., R. C.. *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*. New York: Wiley-Interscience, 1926. p. 19-39.

SADIKU, M. N.O. Métodos Numéricos: O Método das Diferenças Finitas. In: SADIKU, M.N.O. *Elementos de eletromagnetismo*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.