

UM ESTUDO COMPARATIVO DO DESEMPENHO DOS FILTROS FIR E IIR EM PROJETOS DE FILTROS DIGITAIS

Elder E. C. de OLIVEIRA (1); Suzete É. N. CORREIA (2); Paulo H. da F. SILVA (3);
Laércio M. MENDONÇA (4); Marcelo da S. VIEIRA

(1) CEFET-PB/GTEMA, e-mail: planckk@yahoo.com.br

(2) CEFET-PB, e-mail: suzete.correia@cefetpb.edu.br

(3) CEFET-PB, e-mail: henrique@cefetpb.edu.br

(4) UFRN, e-mail: laercio@ct.ufrn.br

(5) UFPB, e-mail: marcelo.mib00@hotmail.com

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre os filtros de resposta finita (do inglês *finite impulse response* - FIR) não recursivo e os filtros de resposta infinita ao impulso (do inglês *infinite impulse response* - IIR) recursivo. Para o projeto dos filtros FIR foi utilizado o método das janelas, enquanto que para o projeto dos filtros IIR foi empregada o método da transformação bilinear. O objetivo principal desta análise foi verificar o desempenho desses filtros em termos de eficiência e custo computacional. Para os projetos dos filtros com características passa-baixas, foram desenvolvidos programas para as simulações computacionais usando-se a plataforma computacional Scilab®. Com os procedimentos de análise desenvolvidos foi possível observar o comportamento das métricas, espectros de amplitude, frequência e fase. Uma das principais conclusões que pode ser observada neste trabalho é que os filtros IIR são mais eficientes que os filtros FIR para as mesmas especificações de implementação de projeto.

Palavras-chave: filtro FIR, método das janelas, filtro IIR, método da transformação bilinear

1. INTRODUÇÃO

O processamento digital de sinais (PDS) teve seu marco inicial no século XVIII e ainda hoje se apresenta como uma ferramenta moderna e muito útil nos mais diversos campos da ciência e tecnologia (OLIVEIRA, 2007). Os sinais são analógicos por natureza, isto é, a cada instante do tempo é possível obter uma informação do sinal, uma vez que ele está definido para todos os instantes de tempo possíveis. Os sinais podem ser tratados pelos mecanismos de comunicação de várias maneiras diferentes. Na década de 60, os sinais eram convertidos em formas de onda de corrente ou tensão, e tratados como elementos de circuito. Hoje em dia com o avanço das tecnologias digitais, os sinais são convertidos para uma representação discreta (digital) que pode ser facilmente compreendida e manipulada por um processador digital (DINIZ, 2004). Na Figura 1 abaixo está ilustrado um diagrama de bloco do processamento digital de um sinal analógico genérico.

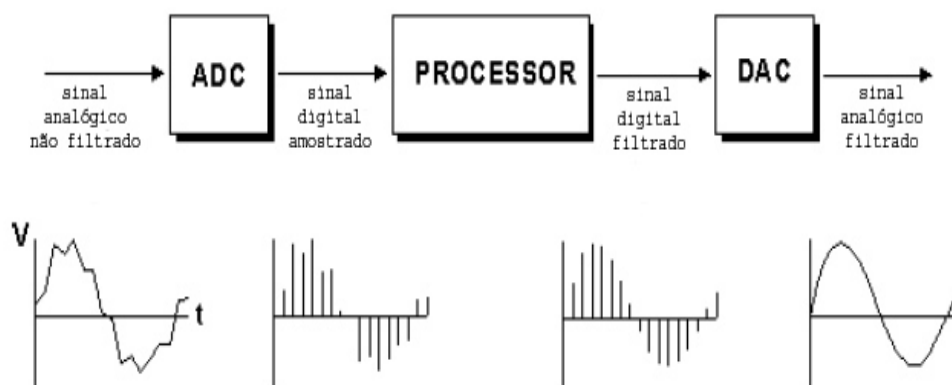


Figura 1 – Processamento digital de um sinal analógico.

O processamento comumente feito em sinais discretos é a operação conhecida como filtragem. Filtrar um sinal significa selecionar desse sinal quais frequências são desejadas e quais são indesejadas. É possível obter um conjunto bastante significativo de resultados utilizando técnicas simples. Portanto, existem inúmeras vantagens no uso de processamento digital de sinais, como reconfigurar um sistema apenas mudando a programação dos dispositivos e podendo reaproveitar o projeto do *hardware* e *software*. Exemplos de sinais que podem ser manipulados através da filtragem digital de um processador incluem: sinais de voz, música e áudio, imagens, seqüências de imagens e multimídia em geral. O objetivo principal desse trabalho é realizar um estudo comparativo entre os filtros FIR e IIR, em termos de viabilidade de projeto, eficiência e custo computacional, sendo proposta uma ferramenta didática para simulação de filtros digitais, através do uso do método das janelas para o projeto e simulações dos filtros digitais FIR e a técnica da transformação bilinear para o projeto e simulação dos filtros digitais IIR fazendo uso das funções de aproximação de *Butterworth* e *Chebyshev*, respectivamente. O projeto de um filtro digital FIR através do método das janelas é mostrado na seção 2. A seção 3 apresenta os procedimentos de projeto de um filtro IIR. A seção 4 mostra os resultados das simulações dos filtros digitais FIR e IIR usando a técnica de janelas e a técnica de transformação bilinear, respectivamente. Na seção 5 apresentam-se as conclusões.

2. PROJETO DE FILTROS FIR COM FASE LINEAR USANDO JANELAS

O filtro FIR (do inglês *Finite Impulse Response*) deve ser implementado de uma equação de diferenças que não contenha termos recursivos, conforme ilustra a Figura 2, sendo que a resposta ao impulso deve ser finita.

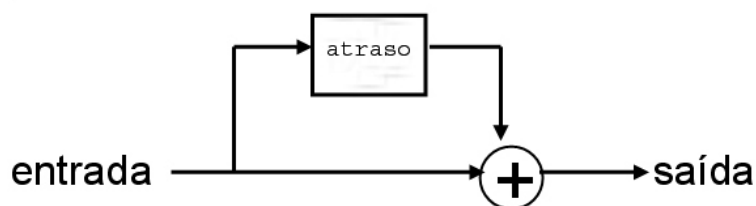


Figura 2 – Esquemático de um filtro FIR.

Filtros com resposta ao impulso limitada possuem algumas vantagens em sua implementação. Pelo fato de serem finitos, os filtros FIR sempre serão estáveis. A resposta em frequência de um filtro causal de N-ésima ordem, $H(\exp(j\omega))$, é expressa como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n]e^{-jn\omega} \quad [\text{Eq. 01}]$$

Em que ω é a frequência e $h[n]$ os coeficientes a serem encontrados. A determinação adequada desses coeficientes produz uma resposta em frequência capaz de atender a um conjunto de especificações.

2.1. Janelamento

Uma das maneiras de obter um filtro de duração finita é truncando a resposta ao impulso infinita de um filtro ideal. Seja $h_d[n]$ a resposta à amostra unitária de um filtro seletivo de frequência ideal de fase linear, então tem-se que:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \quad [\text{Eq. 02}]$$

Como em geral o comprimento de $h_d[n]$ é infinito, é necessário encontrar uma aproximação FIR para $H_d(e^{j\omega})$. Usando o método das janelas, o filtro é projetado multiplicando-se a resposta à amostra unitária por uma janela,

$$h[n] = h_d[n]\omega[n] \quad [\text{Eq. 03}]$$

onde $\omega[n]$ é uma janela de comprimento finito, isto é, nula fora do intervalo $0 \leq n \leq N$ e simétrica em relação ao seu ponto médio, dado como

$$\omega[n] = \omega[N - n] \quad [\text{Eq. 04}]$$

O efeito resultante da janela sobre a resposta em frequência pode ser visto com o teorema da convolução complexa, dado por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad [\text{Eq. 05}]$$

Assim, a resposta em frequência ideal é suavizada pela transformada de Fourier de tempo discreto da janela, $W(e^{j\omega})$. Como exemplos têm-se as janelas Retangular e de Blackman, expressas pelas equações [Eq. 06] e [Eq. 07], respectivamente.

$$\omega[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases} \quad [\text{Eq. 06}]$$

$$\omega[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right), & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases} \quad [\text{Eq. 07}]$$

No projeto de filtros digitais dois fatores são cruciais: a largura do lóbulo principal e a amplitude do lóbulo lateral de pico. Esses fatores mostram o quanto a resposta em frequência de um filtro projetado com o método das janelas se aproxima da resposta desejada, $H(e^{j\omega})$. Idealmente, a largura do lóbulo principal deve ser estreita e a amplitude do maior lóbulo lateral de pico deve ser pequena. Entretanto, no caso de uma janela de comprimento fixo, elas não podem ser minimizadas independentemente. A Tabela 1 lista as amplitudes dos lóbulos laterais de dois tipos de janelas juntamente com os valores aproximados da largura

de transição e da atenuação da faixa de rejeição, que resultam quando a janela indicada é usada para projetar um filtro passa-baixas de N-ésima ordem.

Tabela 1 – Amplitude do lóbulo lateral de pico e os valores aproximados da largura de transição e da atenuação da faixa de rejeição de um filtro passa-baixas de N-ésima ordem para as janelas Retangular e de Blackman

Janela	Amplitude do lóbulo lateral (dB)	Largura de transição (Δf)	Atenuação da faixa de rejeição (dB)
Retangular	-13	$0,9/N$	-21
Blackman	-57	$5,5/N$	-74

A aplicação da função janela tem como efeito tornar a transição da banda de passagem para a banda de rejeição mais suave, além de adicionar uma ondulação na banda passante (HAYKIN, 2001). O decréscimo de ω_c será tão mais abrupta quanto mais alta for a ordem N do filtro. Além disso, a largura da banda de transição, Δf , está diretamente ligada à ordem do filtro.

3. PROJETO DE FILTROS IIR A PARTIR DE FILTROS ANALÓGICOS PASSA-BAIXAS

O filtro IIR (do inglês *Infinite Impulse Response*) ilustrado na Figura 2 apresenta como característica principal a realimentação, ou seja, a saída do filtro depende em maior ou menor grau dos valores de suas amostras passadas.

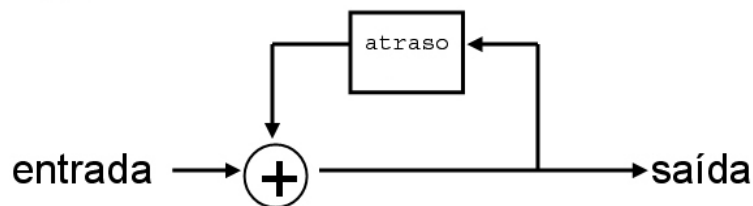


Figura 3 – Esquemático de um filtro IIR.

A abordagem utilizada nesse trabalho para projeto de filtros IIR consiste em projetar um filtro IIR analógico e em seguida transformá-lo em um filtro digital equivalente (OPPENHEIM, 1999). Nas seções posteriores, será apresentada uma abordagem que transforma filtros analógicos em digitais, isto é, o projeto de filtros passa-baixas digital a partir de adaptações de filtros passa-baixas analógico, tais como: filtros com característica de *Butterworth* e *Chebyshev*, respectivamente. A técnica utilizada é a transformação bilinear que elimina de forma considerável o *aliasing* (ondulações) na banda passante.

Primeiramente, deve-se projetar um filtro passa-baixas analógico, para em seguida projetar a partir deste um filtro IIR passa-baixas digital. A grande maioria dos métodos de aproximação para filtros analógicos foi desenvolvida para projeto de sistemas passivos, cujo ganho não ultrapassa a unidade. Portanto, um conjunto típico de especificações para esses filtros é ilustrado na Figura 4.

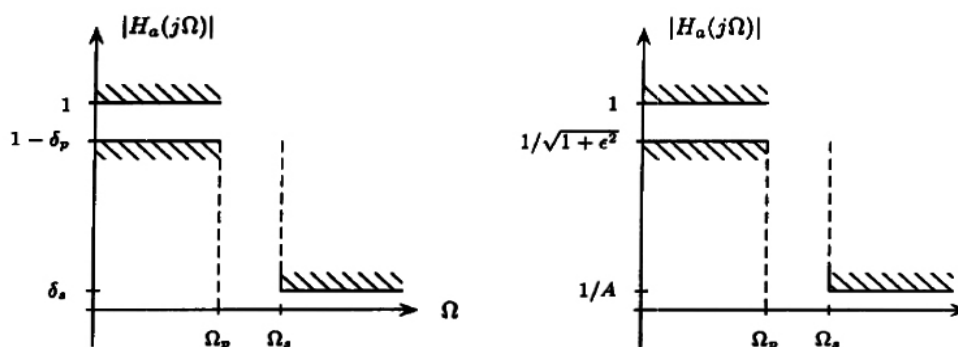


Figura 4 – Protótipo de um filtro passa-baixas analógico.

O projeto de um filtro digital a partir de um protótipo analógico requer que transformemos $h(t)$ em $h(n)$ ou $H(s)$ em $H(z)$. Um mapeamento do plano s (domínio da transformada de Laplace) para o plano z (domínio da transformada Z) pode ser expresso como

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=m(z)} \quad [\text{Eq. 08}]$$

onde $s=m(z)$ é a função de mapeamento.

3.1. A transformação bilinear

Nesse método realiza-se um mapeamento algébrico entre o plano s e o plano z , tal que todo o eixo imaginário do plano s seja mapeado no círculo de raio unitário (frequências de tempo discreto). Esse mapeamento não pode ser linear, pois o eixo imaginário tem comprimento infinito, enquanto o círculo de raio unitário tem comprimento finito. A principal vantagem do método da transformação bilinear é que o *aliasing* é evitado (HAYKIN, 2001).

A transformação bilinear é dada como

$$s = \frac{1}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad [\text{Eq. 09}]$$

A transformação bilinear é uma função racional que mapeia o semiplano s esquerdo no interior do círculo de raio unitário e mapeia o eixo $j\Omega$ (eixo imaginário) de forma biunívoca sobre a circunferência do círculo de raio unitário. Entretanto, a relação entre o eixo $j\Omega$ e o círculo de raio unitário é não linear e é dada pela função de deformação de frequência seguinte

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad [\text{Eq. 10}]$$

O resultado dessa deformação é que a transformação bilinear preservará apenas a resposta de magnitude dos filtros analógicos que tenham resposta ideal constante. Portanto, é aconselhável usar a transformação bilinear apenas em projetos de filtros seletivos em frequências. Estas propriedades da transformação bilinear com um mapeamento do plano s para o plano z são mostradas nas Figuras 5 e 6, respectivamente.

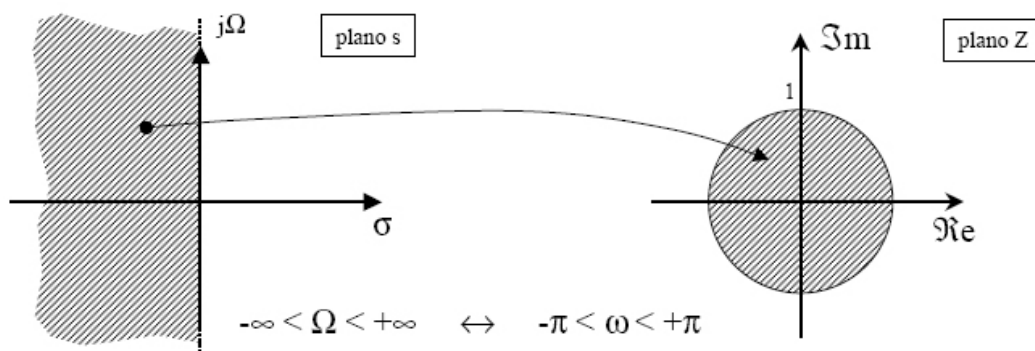


Figura 5 – Mapeamento do plano s no plano z .

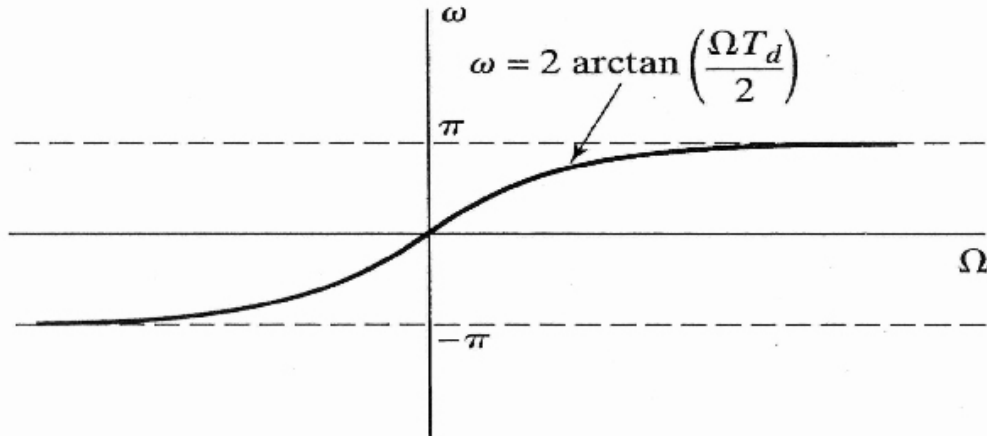


Figura 6 – Mapeamento do eixo da frequência de tempo contínuo no eixo da frequência de tempo discreto.

3.2. Etapas do projeto de um filtro digital passa-baixas

A seguir apresentam-se os passos necessários para um projeto de filtro digital passa-baixas com uma frequência de corte ω_p na faixa de passagem, uma frequência de corte ω_s na faixa de rejeição, um *ripple* δ_p na faixa de passagem e um *ripple* δ_s na faixa de rejeição.

Passo 1. Usando a função inversa da equação [Eq. 10], obtém-se a pré-deformação das frequências de corte das faixas de passagem e de rejeição do filtro digital, ω_p e ω_s , respectivamente, para determinar as frequências de corte das faixas de passagem e de rejeição do filtro analógico passa-baixas. Para $T_d = 2$, a função de pré-deformação é dada como

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad [\text{Eq. 11}]$$

Passo 2. Projetar um filtro analógico passa-baixas com as frequências de corte encontradas no passo 1 e com os *ripples* das faixas de passagem e de rejeição, δ_p e δ_s , respectivamente.

Passo 3. Aplicar a transformação bilinear ao filtro projetado no passo 2.

4. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DOS FILTROS DIGITAIS FIR E IIR

Para uma melhor compreensão de filtros seletivos em frequência, introduz-se a noção de filtro ideal. O conceito de filtro ideal é extremamente importante em processamento de sinais, pela comodidade e facilidade com que se realiza em certo tipo de análise, embora não exista fisicamente. Um filtro passa-baixas ideal é um filtro que seleciona perfeitamente as componentes de baixas frequências do sinal de entrada e rejeita perfeitamente as componentes de altas frequências (HAYKIN, 2001). O gráfico da Figura 7 ilustra os resultados da simulação de um projeto de filtro digital FIR empregando a janela de *Blackman*. Para esse projeto foram consideradas as seguintes especificações: comprimento da janela, $M=50$; frequência de corte da faixa de passagem, $\omega_p = 0,2\pi$; frequência de corte da faixa de rejeição, $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 0,25$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=74$ dB. Pode-se observar nos resultados obtidos na Figura 7 um perfeito funcionamento do filtro projetado para uma atenuação de 74 dB, além de uma atenuação no nível dos lóbulos laterais, resultante do formato suave da curva que caracteriza a janela utilizada.

O gráfico da Figura 8 por sua vez, ilustra os resultados do comportamento de uma janela retangular para o projeto de um filtro digital FIR para as seguintes especificações: comprimento da janela, $M=40$, frequência de corte da faixa de passagem, $\omega_p = 0,2\pi$; frequência de corte da faixa de rejeição, $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 0,25$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=25$ dB. Novamente constatamos o perfeito funcionamento do filtro projetado utilizando a janela retangular para uma atenuação em torno de 25 dB. Devido à queda acentuada no formato da curva que caracteriza essa janela, ou seja, essa janela trunca de forma acentuada a resposta ao impulso ideal, obtendo assim a resposta ao impulso atual sem atenuar o nível

dos lóbulos laterais. Podemos constatar ainda da simulação realizada (Figura 8) que o filtro projetado utilizando a janela retangular poderia muito bem ser projetado utilizando a janela de Blackman (Figura 7), sendo este mais recomendável para uma atenuação maior na faixa de rejeição em torno de 74 dB. O uso da janela de Blackman para uma atenuação na faixa de 25 dB atenderia as necessidades de projeto de um filtro digital FIR, porém acarretaria um custo computacional maior.

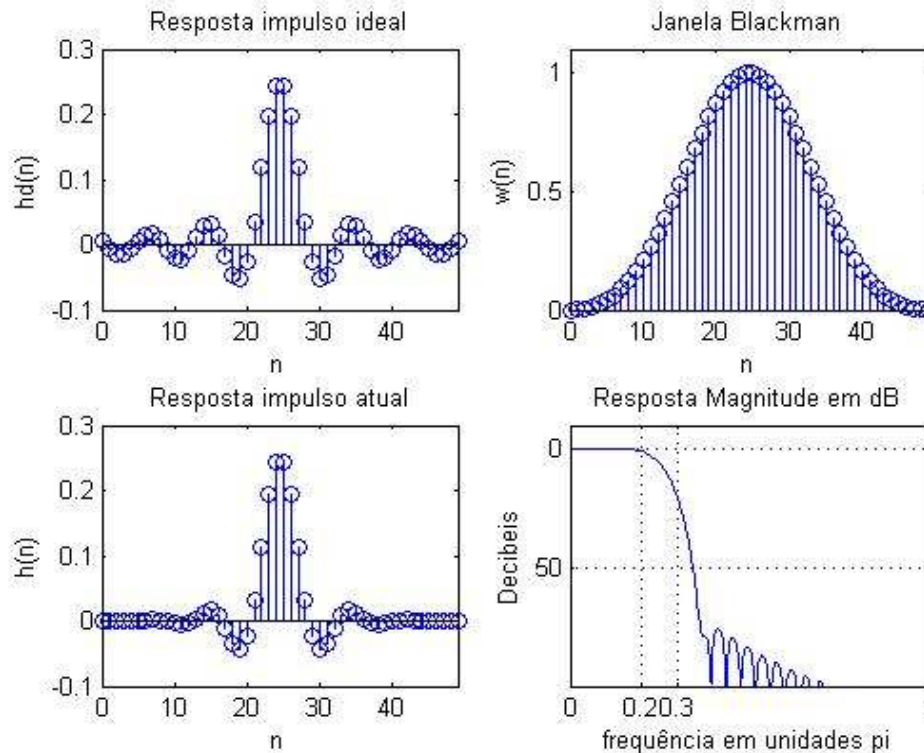


Figura 7 – Resultado da simulação de um filtro FIR passa-baixas utilizando a janela de *Blackman*.

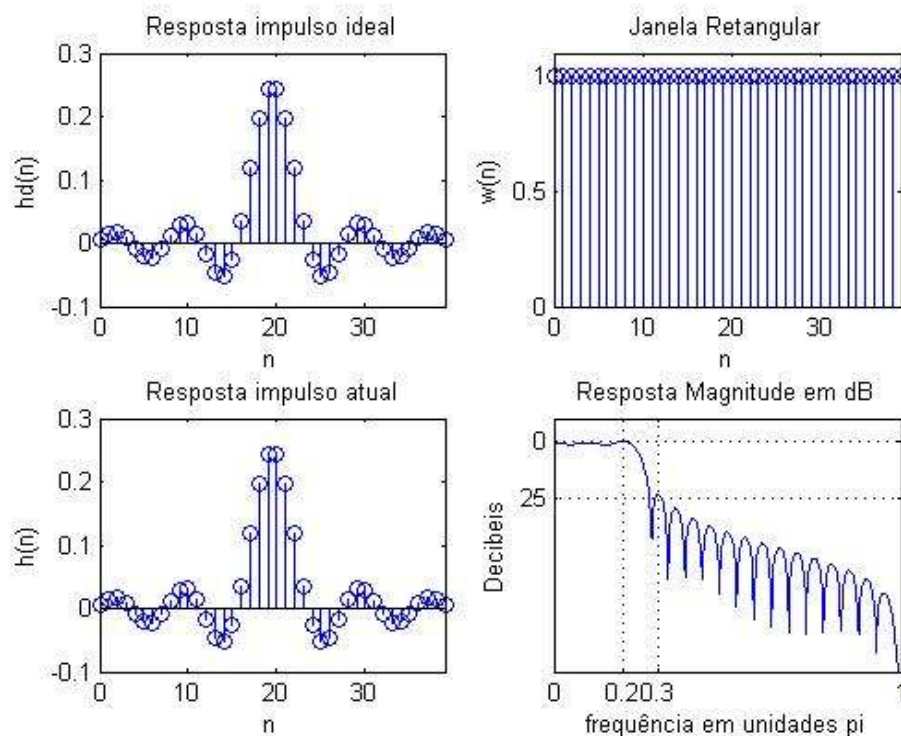


Figura 8 – Resultado da simulação de um filtro FIR passa-baixas utilizando a janela retangular.

O gráfico da Figura 9 ilustra os resultados da simulação de um projeto de filtro digital *Butterworth* de 6ª. ordem utilizando as seguintes especificações: frequência de corte da faixa de passagem, $\omega_p = 0,2\pi$; frequência de corte da faixa de rejeição, $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 1$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=15$ dB.

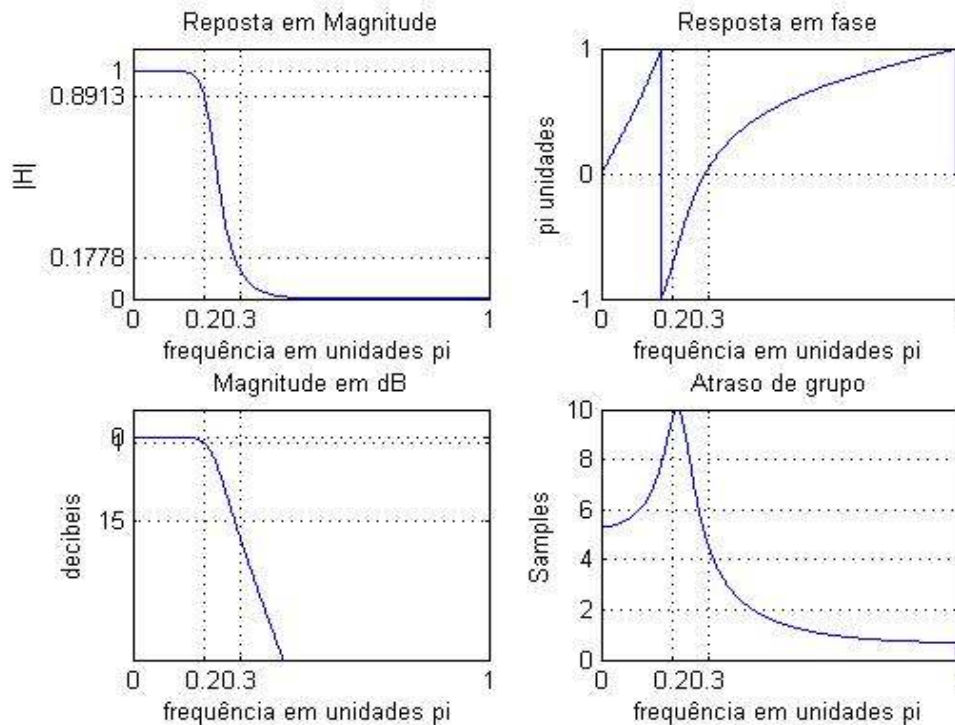


Figura 9 – Simulação de um filtro digital IIR *Butterworth* de 6ª. ordem usando a transformação bilinear.

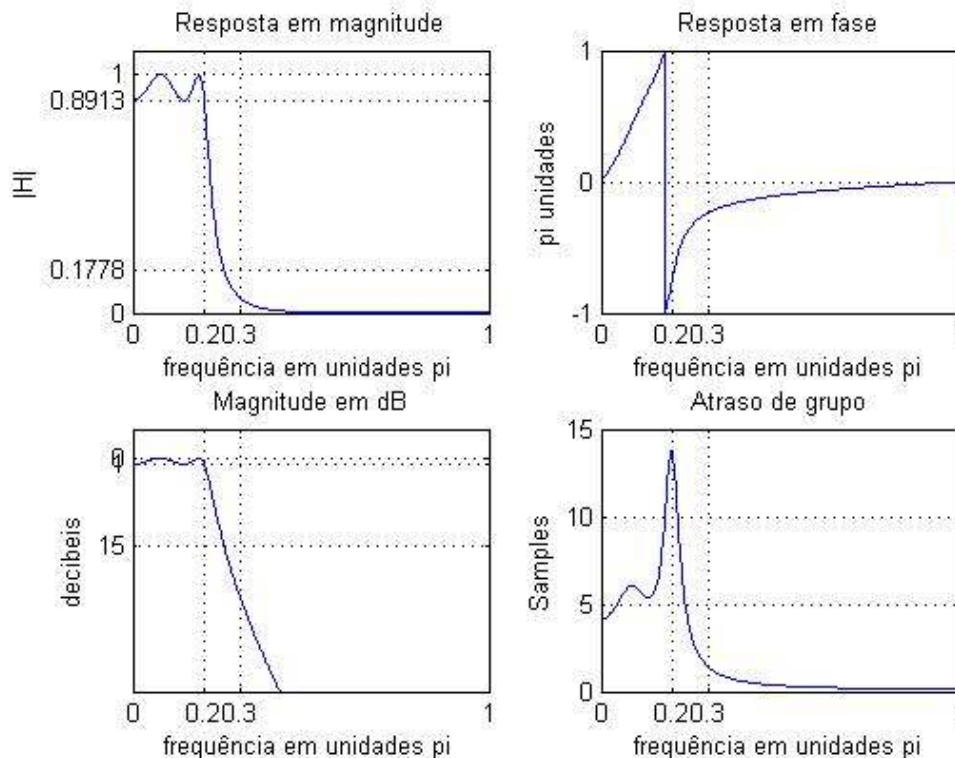


Figura 10 – Simulação de um filtro digital IIR *Chebyshev* de 4ª. ordem utilizando a transformação bilinear.

A Figura 10 ilustra os resultados da simulação do projeto de um filtro digital *Chebyshev* de 4ª. ordem, utilizando as seguintes especificações: frequência de corte da faixa de passagem, $\omega_p = 0,2\pi$; frequência de corte da faixa de rejeição, $\omega_s = 0,3\pi$; *ripple* da faixa de passagem $\delta_p = 1$ dB e uma atenuação na faixa de rejeição de $A=15$ dB.

Com base nos resultados obtidos nas Figuras 9 e 10, respectivamente, constatou-se a eficiência de ambos os filtros projetados utilizando as especificações requeridas de projeto. Tomemos como exemplo o filtro projetado usando a função de aproximação *Chebyshev*. Conforme visto na Figura 10, tal filtro projetado utilizando uma banda de transição entre $0,2\pi$ e $0,3\pi$ e uma magnitude não ultrapassando a unidade, observa-se ainda que esse filtro necessita de uma ordem menor em relação a um filtro projetado com características de *Butterworth* para as mesmas especificações de projeto, acarretando com isso um tempo de processamento menor. Quanto maior a ordem do filtro projetado, menor a banda de transição e mais esse filtro tende a um filtro ideal. A consequência de um aumento na ordem do filtro é que mais oscilações a banda passante do filtro projetado apresentará, uma vez que oscilações são comportamentos indesejáveis em qualquer projeto de filtro digital.

5. CONCLUSÃO

Neste artigo, foram apresentados os projetos e implementações dos filtros digitais recursivos IIR e não recursivos FIR usando o software livre Scilab®. O emprego da transformação bilinear na implementação de filtros digitais recursivos, pode tornar oscilações na banda passante (*aliasing*) bastante pequena em relação a outros métodos, sem necessariamente ter que aumentar a ordem do filtro e diminuir a tolerância na banda de rejeição. Por sua vez, a técnica de janelamento é relativamente simples de implementar e também muito utilizada em projeto de filtros digitais não recursivos, fornecendo resultados satisfatórios dentro de um alcance de frequência a ser observado, uma vez que para uma dada especificação de projeto existe uma janela apropriada.

Os resultados das simulações obtidas neste trabalho forneceram uma boa compreensão do comportamento dos filtros digitais em termos de espectro de amplitude, frequência, fase e de quanto os filtros projetados tendem a se aproximar de um filtro ideal. Podem-se ainda constatar algumas diferenças entre os filtros FIR e IIR, tais como: Os filtros IIR são mais eficientes que os filtros FIR, uma vez que para as mesmas especificações de projeto, os filtros IIR necessitam de uma ordem menor. A principal consequência disso é com relação ao custo computacional, pois uma vez que os filtros FIR apresentarem uma ordem maior em relação aos filtros IIR eles consumirão mais memória para armazenar os coeficientes, as entradas passadas, os resultados das operações e apresentarão também maiores atrasos na resposta a uma dada entrada. Os filtros IIR também apresentam fase não-linear e pólos fora da origem do plano z , enquanto que os filtros FIR podem apresentar fase linear e também apresenta pólos na origem do plano z . Outra característica importante diz respeito à estabilidade do filtro projetado. Os filtros não-recursivos são estáveis, e o fato de terem uma resposta impulsional limitada garante que $h[n]$ é absolutamente somável, isto implica que no máximo tenham um pólo na origem. Quanto à facilidade de projeto, os filtros IIR apresentam facilidade de projeto de filtros convencionais e os filtros FIR apresentam facilidade de projeto de filtros simples.

REFERÊNCIAS

DINIZ, P.S.R. Eduardo, A.B.S. SERGIO, L.N. **Processamento Digital de Sinais: Projeto e Análise de Sistemas**. 2. ed. São Paulo; Bookman, 2004.

HAYKIN, S. BARRY, V.V. **Sinais e Sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HAMMING, R.W. **Digital Filters**. 3. ed. New York, Dover publications inc, 1998.

MONSON, H.H. **Processamento Digital de Sinais**. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2006.

OLIVEIRA, E.E.C. **Estudo e implementação de Filtros Digitais FIR e IIR**. 2007. TCC (Trabalho de conclusão de curso) – GTEMA, Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba, João Pessoa, 2007.

OLIVEIRA, E. E. C.; CORREIA, S. E. N.; MENDONÇA, L. M. Implementação do filtro de resposta impulso infinita (IIR) empregando a técnica de transformação bilinear. *In: II CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA*, 1., 2007, João Pessoa. **Anais ...** João Pessoa: CEFET-PB. 1 CD-ROM.

OPPENHEIM, A. SCHAFFER, V. BUCK, J.R. **Discrete-Time Signal Processing**. 2. ed. New Jersey; Prentice Hall, 1999.

RABINER, L.R. GOLD, B. **The Theory and Application of Digital Signal Processing**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs New Jersey, pp. 206 – 288, 1975.

SMITH, J.M. **Introduction to digital filters**. Disponível em: < <http://ccrma.stanford.edu/~jos/filters/>>
Acesso em: 31 mai 2008.