

ESTUDOS ELASTOGRÁFICOS DE MATERIAIS VISCOELÁSTICO EM APLICAÇÕES BIOMÉDICA: MODELAGEM MATEMÁTICA

Sílvia Leão VIEIRA (1)

(1) Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás – UFG, Campus Samambaia, Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil, E-mail: vieira@if.ufg.br

RESUMO

Esse estudo teve como motivação o fato de as propriedades elásticas de tecidos biológicos lesados serem muitas ordens de grandeza superior aos de tecido normais, de mesma natureza. Essa propriedade pode ser empregada com um possível parâmetro na diferenciação de diferentes tipos de tecidos. As diversas modalidades de métodos elastográficos têm como objetivo extrair parâmetros físicos de estruturas materiais, tais como o módulo de Young e a rigidez transversal. Isso pode ser feito perturbando o meio de forma estática, quase-estática e dinâmica. Empregando modelos matemáticos torna-se possível simular o comportamento de sólidos viscoelásticos empregando os modelos de Voigt e de Maxwell. Nesse trabalho, buscou-se simular computacionalmente as propriedades viscoelásticas de tecidos submetidos a uma excitação mecânica dinâmica. Com esse objetivo, foi desenvolvido um algoritmo em ambiente Matlab, onde foi avaliada a resposta do meio para frequências de excitação de até 600 Hz. Os resultados mostraram que o modelo de Voigt foi mais condizente com a realidade física, tanto para altas quanto para baixas frequências, podendo assim ser empregado para representar materiais simuladores de tecidos tal como aqueles a base de gelatina. Assim, as simulações possibilitaram melhor compreender como um determinado meio viscoelástico responde a estímulos externos, prevendo seu comportamento antes da realização de ensaios elastográficos sofisticados.

Palavras-chave: velocidade, absorção, onda mecânica, viscoelasticidade, simulação computacional.

1. INTRODUÇÃO

Em tecidos biológicos lesados, a viscoelasticidade é a propriedade física que mais se modifica em relação ao tecido normal. Palpação manual é geralmente usada para identificar estas lesões, tais como nódulos e cistos. Recentemente, vários estudos envolvendo técnicas ultrassônicas e de ressonância magnética, denominadas elastografia, têm sido empregadas para avaliar as propriedades viscoelásticas dessas lesões [1-4]. A elastografia refere-se a qualquer medida ou técnica de imagem que forneça informações diretamente relacionadas às propriedades mecânicas do material.

Um material é classificado como Newtoniano quando sua viscosidade não muda independentemente da taxa de cisalhamento a qual é medida numa dada temperatura. Este material apresenta uma resposta linear entre a tensão e a deformação. Um sólido viscoelástico é composto por uma componente elástica e outra de origem viscosa (proveniente do sólido Newtoniano), sendo capaz de retomar parcialmente a sua forma original ao se retirar a tensão de cisalhamento a ele aplicada.

Para estudar o comportamento desse tipo de sólido, modelos matemáticos foram desenvolvidos, possibilitando, assim estimar a elasticidade e a viscosidade do meio, assumindo que o comportamento mecânico do material corresponde a um simples modelo mecânico. Esta modelagem do sistema baseia-se no sistema mola e amortecedor [5]. O modelo de Maxwell e modelo de Voigt são os mais simplificados para descrever esses sistemas. O modelo de Maxwell é geralmente utilizado para fluidos, enquanto o de Voigt fornece melhores resultados quando utilizado para modelar um sólido [6]. Ondas transversais podem somente se propagar em sólidos [7], O modelo de Voigt é particularmente útil para descrever o comportamento de materiais gelatinosos que imitam tecido biológico mole [6, 8].

O objetivo desse trabalho é explorar o formalismo matemático da mecânica do contínuo e ferramentas computacionais para estudar como as propriedades viscoelásticas de matérias e tecidos biológicos respondem quando submetido a uma força externa harmônica. Assim, modelos matemáticos são aplicados ao estudo do comportamento de um material viscoelástico.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

É importante ser destacado que, as tensões de deformação usadas nos problemas estudados neste manuscrito são de baixa amplitude, com deformações menores que 1%. Ao longo do trabalho, a estrutura atômica do

material não será considerada. Será admitido que a matéria de um corpo viscoelástico é homogênea e distribuída continuamente no seu volume, de tal forma que, o menor elemento retirado do corpo possui as mesmas propriedades físicas específicas (homogeneidade). Para simplificar a discussão, será também admitido que em geral o corpo seja isotrópico.

Dois sistemas físicos de interesse biomédico para modelar tecidos viscoelástico são os modelos de Maxwell e de Voigt, os quais são os mais simplificados para descrever esse tipo de material. Estes sistemas poderão ser modelados de forma análoga a um circuito elétrico. No equivalente elétrico, o tensor de tensão é representado pela tensão elétrica e o tensor de deformação pela corrente elétrica. O módulo elástico da mola é análogo à capacitância do circuito, pois armazena energia, e a viscosidade do pistão ou amortecedor, equivale à resistência do circuito, porque dissipa energia [9]. A componente elástica pode ser modelada por uma mola de constante elástica μ_e , em que o tensor de tensão em uma direção é dado por

$$\sigma = \mu_e \cdot S, \quad (1)$$

e equivale à lei de Hooke em uma dimensão. Enquanto que a componente viscosa pode ser modelada por um pistão, o qual se relaciona com o tensor de tensão e de deformação,

$$\sigma = \eta \cdot \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (2)$$

em que σ é o tensor de tensão, η é o elemento viscoso do meio Newtoniano, independente da taxa de cisalhamento. O termo $\partial S / \partial t$ é uma derivada parcial da deformação em relação ao tempo, a qual poderá ser escrita da forma dS/dt para o caso unidimensional.

A. Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell considera que os elementos elásticos, μ_e , e viscosos, η , apresentam-se associados em série, como ilustrado na Figura 2. Dessa forma, as tensões atuantes nos dois elementos são idênticas, enquanto as deformações se somam para compor a deformação total.

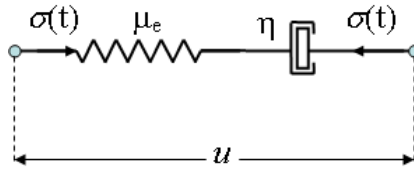


Figura 2: Representação mecânica do modelo viscoelástico de Maxwell representado por uma mola (μ_e) em série com um amortecedor (η).

Assumindo que a área seja constante, a equação de equilíbrio das tensões é dada por:

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_\eta, \quad (3)$$

em que σ_e e σ_η são as tensões atuando sobre o elemento elástico e viscoso, respectivamente. A equação para as deformações será:

$$S = S_e + S_\eta. \quad (4)$$

Sendo que S_e e S_η são as deformações atuando sobre o elemento elástico e viscoso, respectivamente. Derivando-se temporalmente a Equação (4) e substituindo as Equações (1) a (3) na forma derivada da Equação (4), obtém-se:

$$\left(\mu_e + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \sigma = \mu_e \cdot \eta \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \quad (5)$$

B. Modelo de Voigt

No modelo de Voigt, o elemento elástico e viscoso apresenta o mesmo deslocamento, sendo constituídos por uma mola, μ_e , correspondendo a uma parte elástica, em paralelo com um amortecedor, η , referente à parte viscosa Newtoniana, como ilustrado na abaixo.

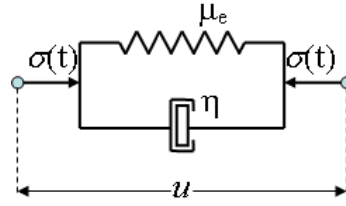


Figura 3: Representação do modelo viscoelástico de Voigt representado por uma mola (μ_e) em paralelo com um amortecedor (η).

Como descrito, o modelo de Voigt é composto por uma mola que representa a parte elástica, μ_e , em paralelo com um amortecedor correspondendo à componente viscosa, η [5]. Tanto o modelo de Maxwell quanto o de Voigt são modelos dinâmicos viscoelásticos, uma vez que a elasticidade média do material é dada por uma grandeza complexa, $\mu = \mu_e + j \cdot \eta \cdot \omega$, dependente da frequência, ω . Esta componente é proveniente da tensão dinâmica à qual estes elementos estão sujeitos.

Assumindo que a área seja constante, a equação de equilíbrio das tensões é dada por:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_\eta. \quad (6)$$

A equação para as deformações será dada por:

$$S = S_e = S_\eta. \quad (7)$$

Fazendo-se a derivada temporal da Equação (6) e substituindo as Equações (1), (2) e (7) na Equação (6), obtém-se:

$$\sigma = \mu \cdot S + \eta \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right), \quad (8)$$

em que σ é a tensão unidimensional e S é a deformação resultante.

A velocidade de fase de uma onda plana mecânica monocromática com uma frequência angular ω e número de onda k estão relacionados matematicamente por [10]

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}. \quad (9)$$

A velocidade de grupo representa a velocidade de propagação de um pacote de onda, centrada em torno da frequência ω do pulso, e definido matematicamente por:

$$v_g = v_\phi + k \cdot \left(\frac{dv_\phi}{dk} \right). \quad (10)$$

Essas duas últimas equações serão mais a frente utilizada como elementos da discussão apresentada.

A. Modelo de Voigt submetido a uma onda plana

Pode ser demonstrado que a partir da equação de onda e do número de onda complexo a velocidade de fase e a atenuação de uma onda mecânica propagando-se em um meio viscoelástico de Voigt,

$$v_\phi(\omega) = \sqrt{\frac{2 \cdot (\mu_e^2 + \eta^2)}{\rho \cdot (\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 + \omega^2 \eta^2})}} \quad \text{e} \quad \alpha(\omega) = \sqrt{\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot (\sqrt{\mu_e^2 + \omega^2 \eta^2} - \mu_e)}{2 \cdot (\mu_e^2 + \omega^2 \eta^2)}}. \quad (11)$$

Invertendo-se as Equações (11) obtém-se um par de duas novas equações, uma para o módulo elástico, μ_e , e outra para o módulo viscoso, μ_η , respectivamente, em função da frequência temporal,

$$\mu_e = \rho v_\phi^2 \left(1 + \left(v_\phi \alpha_T / \omega \right)^2 \right)^{-1} \quad \text{e} \quad \mu_\eta = \rho v_\phi^2 \left(\left(1 - \left(v_\phi \alpha_T / \omega \right)^2 \right)^{-2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

B. Modelo de Maxwell submetido a uma onda plana

Seguindo a metodologia descrita para o modelo de Voigt, verificamos que velocidade de fase (v_ϕ) e o coeficiente de absorção (α_T) para o modelo de Maxwell tem-se,

$$v_\phi(\omega) = \sqrt{\frac{2\mu_e}{\rho} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\mu_e^2}{\omega^2 \cdot \eta^2}} \right)^{-1}} \quad \text{e} \quad \alpha_T(\omega) = \sqrt{\frac{\rho \cdot \omega^2}{2\mu_e} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\mu_e^2}{\omega^2 \cdot \eta^2}} - 1 \right)}. \quad (13)$$

Invertendo-se as Equações (13) obtém-se duas novas equações, uma para o módulo elástico, μ_e , e outra para o módulo viscoso, μ_η , respectivamente, em função da frequência temporal.

$$\mu_e = \frac{\rho \omega^2 v^2}{\omega^2 - \alpha^2 v^2} \quad \text{e} \quad \mu_\eta = \frac{\rho \omega v}{2\alpha}. \quad (14)$$

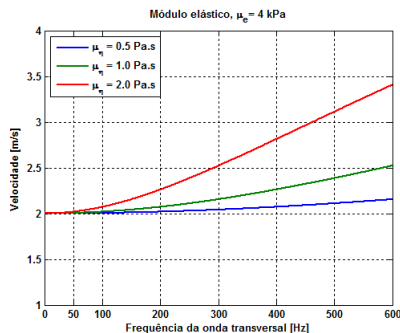
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No caso específico de uma onda plana ao se propagar por um meio, deverá ser observada certa resistência à sua passagem. Se a onda se propaga por um meio, e sua amplitude sofre um decréscimo durante o percurso, pode-se dizer que este meio é dissipativo. Caso alguns comprimentos de onda sofram mais com a ação imposta pelo meio, em detrimento de outros as velocidades das ondas serão diferentes. Este distúrbio na propagação das ondas caracteriza um meio dispersor. Por outro lado, se o meio oferecer igual resistência para todas as ondas que passam por ele, a forma inicial da onda se conservará ao longo do tempo; não havendo dispersão da onda o meio é denominado não-dispersor.

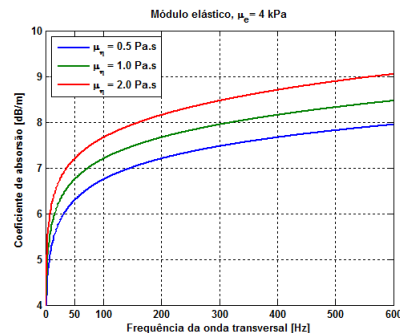
A dispersão pode ser definida como sendo a medida pela qual a velocidade de fase da onda varia com a frequência. Por esse motivo, observa-se uma mudança na forma da onda inicial ao atravessar um meio cujas velocidades das ondas dependem de suas respectivas frequências. Meios tais como os descrito pelo modelo de Maxwell e Voigt são meios cuja resposta depende da frequência, caracterizando um meio dispersivo.

Quando a velocidade de fase é constante, em geral, o meio é não-dispersivo e a velocidade de grupo é igual à velocidade de fase, independentemente da frequência considerada. No caso em que a velocidade de fase não é constante pode-se dizer que houve uma deformação temporal da onda, decorrente de sua propagação por um meio dispersivo. Nesta situação a velocidade de grupo é diferente da velocidade de fase da onda, Equação (9) e (10).

Nas Figura (4) e (5) estão representados o comportamento da velocidade e do coeficiente de absorção da onda transversal propagando-se em um meio viscoelástico, para duas frequências de excitação e diferentes parâmetros viscoelásticos.



(a)



(b)

Figura 4: Simulação de uma onda transversal propagando-se em um meio viscoelástico. (a) comportamento da velocidade de fase e do coeficiente de absorção (b) em função da frequência. Assumindo um valor constante para módulo elástico de $\mu_e = 4$ kPa e três valores diferentes para o módulo viscoso $\mu_\eta = 0,5$ Pa.s, $\mu_\eta = 1,0$ Pa.s e $\mu_\eta = 2,0$ Pa.s.

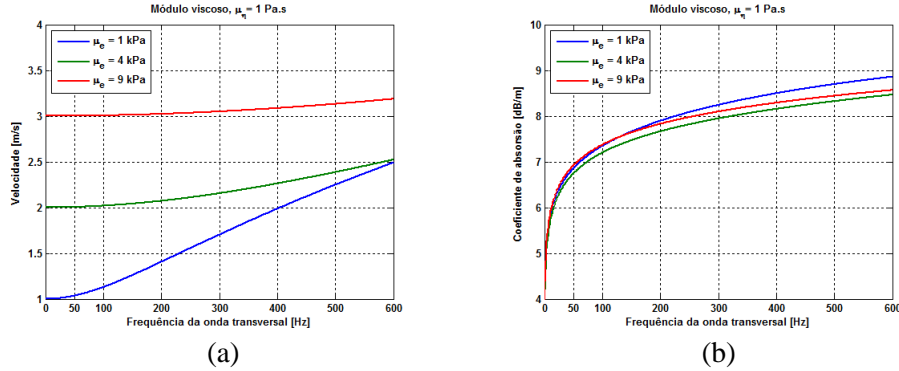


Figura 5: Simulação de uma onda transversal propagando-se em um meio viscoelástico. (a) comportamento da velocidade de fase e do coeficiente de absorção (b) em função da frequência. Assumindo um valor constante para módulo viscoso de $\mu_\eta = 1,0$ Pa.s e três valores diferentes para o módulo elástico $\mu_e = 1,0$ Pa.s, $\mu_e = 4,0$ Pa.s e $\mu_e = 9,0$ Pa.s.

Em ensaios elastográficos empregando materiais que imitam tecidos (fantomas), a frequência de vibração utilizada varia entre 1 Hz a 600 Hz. Estimativas da velocidade de fase e do coeficiente de absorção das ondas transversais para um meio infinito (comparado com o comprimento da onda) são dadas pelas Equações (11), derivada do modelo de Voigt. Estas equações descrevem que a velocidade e o coeficiente de absorção das ondas transversais são dependentes da frequência de vibração e estão diretamente relacionadas com as propriedades viscoelásticas do meio. A onda transversal também é chamada de onda de incompressibilidade porque, durante sua propagação dentro do meio, nenhuma mudança de volume é observada. Em geral há dois tipos de vibração no meio, um movimento longitudinal e outro transversal, ocorrendo simultaneamente. No caso de movimento harmônico, o módulo elástico transversal, μ , pode ser considerado uma grandeza complexa, $\mu = \mu_e + j\mu_\eta$, com a parte imaginária representando a atenuação do meio viscoelástico. Quando o módulo viscoso transversal é $\mu_\eta \cong 0$, a equação anterior reduz a, $\mu = \mu_e \cong \rho \cdot v_T^2$, em que v_T é a velocidade de propagação da onda, similarmente à deduzida na Equação (12), como se a onda se propagasse em um meio elástico, ou quando $\mu_\eta \ll \omega_0 \cdot \mu_e$, se a velocidade da onda transversal é conhecida. O módulo elástico transversal poderá ser estimado com uma simples relação, $\mu_e \cong \rho \cdot v_T^2$. Em um meio viscoelástico, no entanto, o termo é diferente de zero, $\mu_\eta \neq 0$, e a atenuação está presente e é uma função dependente da frequência. Quando a frequência da onda transversal aumenta, a dependência dos efeitos viscosos com a frequência também aumenta, podendo se tornar um efeito dominante e consequentemente um aumento da velocidade de propagação de onda poderá ser observado. Neste caso, a velocidade é função da frequência, ou seja, dispersiva. Uma relação viscoelástica linear entre a velocidade e a frequência é uma boa hipótese, porque os deslocamentos empregados nos métodos de excitação mecânica utilizados neste trabalho são normalmente da ordem de 10–100 μm , os quais se encontram dentro dos limites de validade da lei de Hooke [11].

As Figura (6) e (7) mostram imagens da velocidade (esquerda) e do coeficiente de absorção (direita) de uma onda transversal simulada para valores variados do módulo elástico, μ_e , e viscoso, μ_η , para três diferentes frequências de excitação: $f = 100$ Hz e $f = 600$ Hz. Estes mapas viscoelásticos foram gerados usando-se as Equações (12) como modelos para a simulação, os quais possuem característica de um sólido de Voigt.

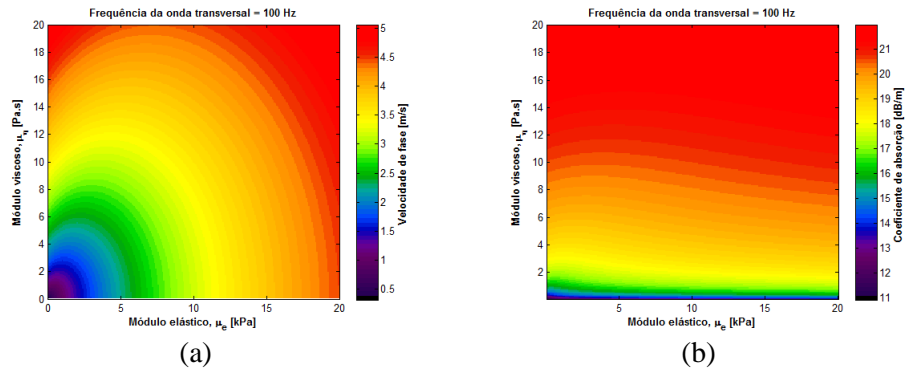


Figura 6: Modelo de Voigt. Simulação do mapa viscoelástico para a velocidade de fase (a) e do coeficiente de absorção (b) da onda transversal, para um mesmo valor de frequência, $f = 100$ Hz.

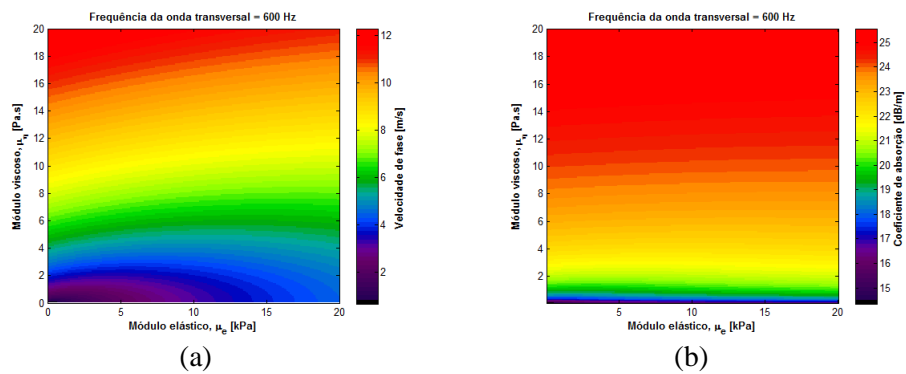


Figura 7: Modelo de Voigt. Simulação do mapa viscoelástico para a velocidade de fase (a) e do coeficiente de absorção (b) da onda transversal, para um mesmo valor de frequência, $f = 600$ Hz.

Os mapas viscoelásticos representados nas últimas figuras foram simulados usando-se o modelo de Voigt como base para o cálculo dos parâmetros elástico e viscoso. Ambos os parâmetros obedecem a uma relação linear entre a tensão aplicada e a deformação resultante. Para todos os gráficos mostrados na Figura (4) e (5) pode-se observar uma crescente variação nos valores da velocidade de fase e do coeficiente de absorção com a frequência de excitação. Foi observado também um provável “endurecimento” do meio simulado, devido ao aumento de frequência, como pode ser observado na Figura (6) e (7). Desta forma o material passou a se comportar de forma mais elástica, quando comparados com frequências inferiores.

Nas Figura (8) e (9) pode-se observar o comportamento da velocidade e da atenuação da onda transversal propagando-se em um meio viscoelástico, empregando o modelo de Voigt, para várias frequências de excitação, gerados a partir das Equações (13).

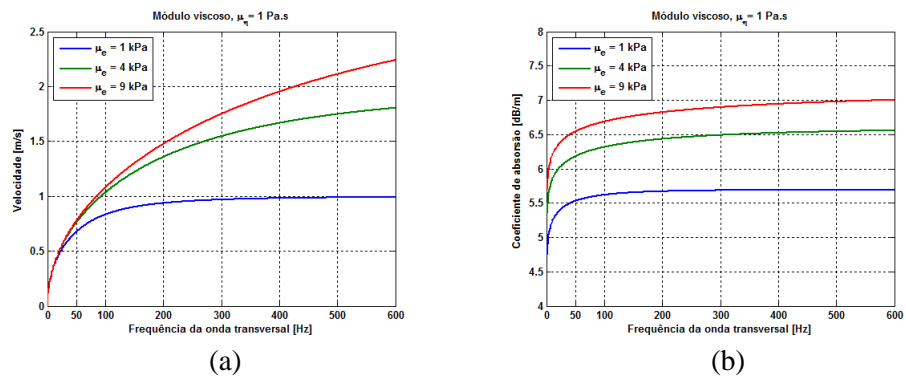


Figura 8: Simulação de uma onda transversal propagando-se em um meio viscoelástico. (a) comportamento da velocidade de fase e (b) do coeficiente absorção em função da frequência. Assumindo um valor constante para módulo viscoso de $\mu_v = 1$ Pa.s e três valores diferentes para o módulo elástico $\mu_e = 1,0$ Pa.s, $\mu_e = 4,0$ Pa.s e $\mu_e = 9,0$ Pa.s.

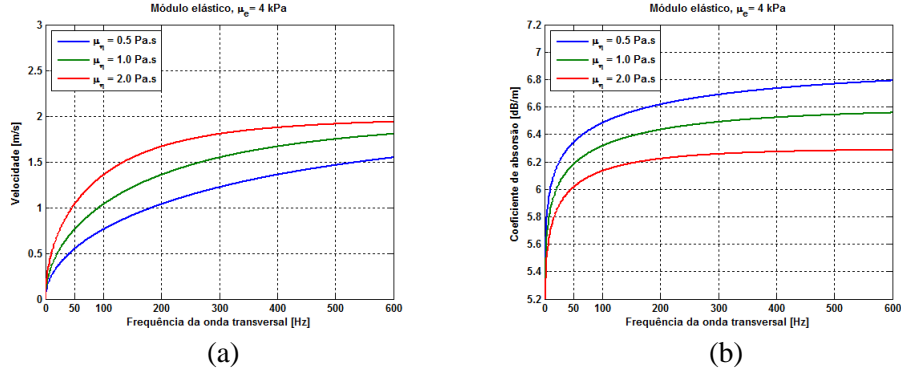


Figura 9: Simulação de uma onda transversal propagando-se em um meio viscoelástico. (a) comportamento da velocidade de fase e (b) do coeficiente absorção em função da frequência. Assumindo um valor constante para módulo elástico de $\mu_e = 4$ kPa e três valores diferentes para o módulo viscoso $\mu_\eta = 0,5$ Pa.s, $\mu_\eta = 1,0$ Pa.s e $\mu_\eta = 2,0$ Pa.s.

As Figura (10) e (11) mostram imagens da velocidade (esquerda) e do coeficiente de absorção (direita) de uma onda transversal para valores variados do módulo elástico, μ_e , e viscoso, μ_η , para três diferentes frequências de excitação: $f = 100$ Hz e $f = 600$ Hz. Estes mapas viscoelásticos foram gerados usando-se as Equações (13) como modelos para a simulação, as quais são equações provenientes do modelo de Maxwell.

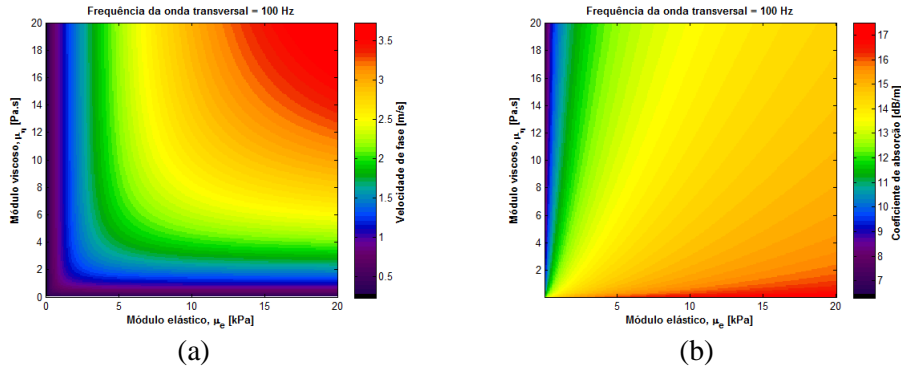


Figura 10: Modelo de Maxwell. Simulação do mapa viscoelástico para a velocidade de fase (a) e do coeficiente de absorção (b) da onda transversal, para um mesmo valor de frequência, $f = 100$ Hz.

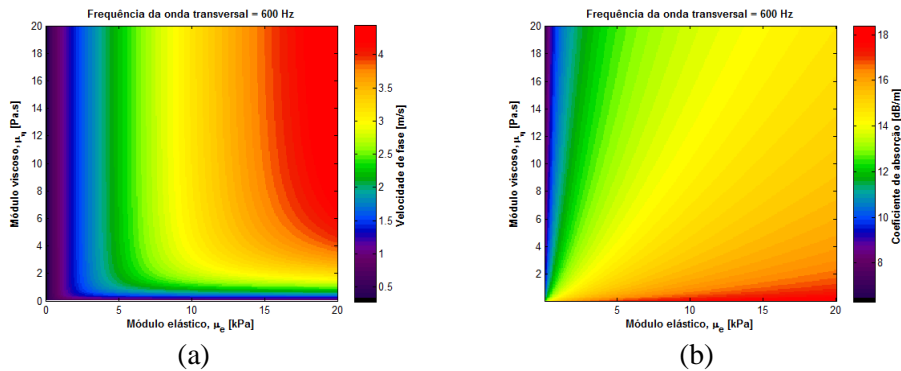


Figura 11: Modelo de Maxwell. Simulação do mapa viscoelástico para a velocidade de fase (a) e do coeficiente de absorção (b) da onda transversal, para um mesmo valor de frequência, $f = 600$ Hz.

Como foi mostrado nas simulações ilustradas nas Figura (8) e (9) e pelas Figura e Figura a velocidade de fase não é constante, caracterizando meio dispersivo. Enquanto que, para um meio não-dispersivo a velocidade de fase da onda é igual à velocidade de grupo. Esta situação pode ser observada para frequências menores que 50 Hz, no caso do modelo de Voigt, em que a velocidade de fase varia muito pouco com a frequência (Figura (10) e (11)). Diferentemente do comportamento observado nas simulações para o modelo de Maxwell, em que a velocidade de fase varia pouco para frequências altas (500-600 Hz) do espectro estudado.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O coeficiente de absorção variou de forma muito parecida para ambos os modelos, quando simulado para frequências inferiores que 200 Hz. No entanto, para frequências maiores que esta, o modelo de Maxwell mostrou-se menos susceptível com relação à variação do coeficiente de absorção em função da frequência.

Os mapas viscoelásticos foram simulados empregando-se o modelo de Maxwell como base para o cálculo dos parâmetros elástico e viscoso. Ambos os parâmetros, obedecem a uma relação linear entre a tensão aplicada e a deformação resultante. Todos os resultados encontrados exibem crescente variação nos valores da velocidade de fase e do coeficiente de absorção em função da frequência de excitação. Foi observado também, um provável “endurecimento” do meio simulado, devido ao aumento de frequência e com tendência de se compor como um sólido elástico.

Os resultados encontrados pelo modelo de Voigt e Maxwell apresentaram valores diferentes para a velocidade de fase ($\mu_e^V = \rho v_\phi^2$, $\mu_e^M \equiv 0$), respectivamente, quando em baixas frequências. No entanto, para altas frequências observou-se uma maior proximidade entre seus valores. Esta tendência se deve principalmente porque para altas frequências de vibração um sólido viscoelástico tende a se comportar de forma mais elástica, em detrimento de sua parte viscosa. O modelo de Voigt mostra-se mais condizente com a realidade física tanto para altas quanto para baixas frequências. O coeficiente de absorção mostrou-se mais sensível a variações de frequência para o modelo de Voigt, enquanto que para o modelo de Maxwell este parâmetro praticamente manteve-se constante. Ambos os modelos convergiram para um mesmo valor do coeficiente de absorção ($\alpha_r^V = \alpha_r^M = 0$), quando a frequência empregada era baixa. Estes resultados indicam que o modelo de Voigt é mais indicado para descrever efeitos viscosos em fantasmas de gelatina, além de ser o mais simples dos modelos reológicos para um sólido viscoelástico. Embora existam outros modelos mais realísticos para descrever um meio viscoelástico, seu grau de complexidade matemática também aumenta de forma significativa, além de aparentarem pouca diferença com os resultados fornecidos pelo o de Voigt.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] VIEIRA, S., URBAN, M., BAGGIO, A., CARNEIRO, A., and FATEMI, M. Shear wave dispersion ultrasound vibrometry of gel dosimetry phantoms. *The journal of the Acoustical Society of America*, v. 125, n. 4, p. 2553, 2009.
- [2] URBAN, M. W., CHEN, S., and GREENLEAF, J. F. Error in estimates of tissue material properties from shear wave dispersion ultrasound vibrometry. *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, v. 56, n. 4, p. 748-758, Apr 2009.
- [3] MARIAPPAN, Y. K., GLASER, K. J., and EHMAN, R. L. Magnetic resonance elastography: A review. *Clin Anat*, v. 23, n. 5, p. 497-511, Jul 2010.
- [4] CHEN, S., URBAN, M. W., PISLARU, C., KINNICK, R., ZHENG, Y., YAO, A., and GREENLEAF, J. F. Shearwave dispersion ultrasound vibrometry (sdv) for measuring tissue elasticity and viscosity. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control*, v. 56, n. 1, p. 55-62, Jan 2009.
- [5] FUNG, Y. C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [6] CATHELIN, S., GENNISSON, J. L., DELON, G., FINK, M., SINKUS, R., ABOUELKARAM, S., and CULIOLI, J. Measurement of viscoelastic properties of homogeneous soft solid using transient elastography: An inverse problem approach. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 116, n. 6, p. 3734-3741, Dec 2004.
- [7] KOLSKY, H. *Stress waves in solids*. New York: Dover Publications, Inc., 1963.
- [8] GENNISSON, J. L. and CLOUTIER, G. Sol-gel transition in agar-gelatin mixtures studied with transient elastography. *Ieee Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, v. 53, n. 4, p. 716-723, Apr 2006.
- [9] KINSLER, L. E. E., FREY, A. R., COPPENS, A. B., and SANDERS, J. V. *Fundamentals of acoustics*. 4. ed. New York: Wiley, John & Sons, Incorporated, 2000.
- [10] ACHENBACH, J. D. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1984. (Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 16).
- [11] YAMAKOSHI, Y., SATO, J., and SATO, T. Ultrasonic-imaging of internal vibration of soft-tissue under forced vibration. *Ieee Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, v. 37, n. 2, p. 45-53, Mar 1990.